

**Gheorghe ATANASIU**

**Doina TOFAN**

# **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

REPROGRAFIA UNIVERSITĂȚII "TRANSILVANIA" DIN BRAȘOV

**2008**

Materialul de față apare prin bunăvoința Dlui. Prof.univ.dr. Nicolae Tița și a Dnei Conf.univ.dr. Doina Tofan care cu o deosebită amabilitate colegială mi-au pus la dispoziție notele lor de curs, predate de-a lungul multor generații studenților facultăților cu profil tehnic și profil universitar.

Împreună cu Dna Conf. univ.dr. Doina Tofan am selectat cele mai utile capitole de Analiză Matematică pentru pregătirea studenților de la Facultatea de Inginerie Mecanică, specializarea Autovehicule Rutiere - Învățământ cu frecvență redusă.

Sincere mulțumiri,  
Prof.univ.dr. Gheorghe ATANASIU

# CUPRINS

<b>PARTEA I. CALCUL DIFERENȚIAL.....</b>	<b>1</b>
<b>I. ȘIRURI ȘI SERII NUMERICE.....</b>	<b>1</b>
1. Șiruri de numere reale.....	1
2. Șiruri în $\mathbf{R}^n$ .....	4
3. Convergența unei serii numerice.....	5
4. Serii cu termeni pozitivi.....	7
5. Serii cu termeni oarecare.....	10
Exerciții.....	12
<b>II. FUNCȚII CONTINUE.....</b>	<b>15</b>
1. Limita unei funcții într-un punct.....	15
2. Continuitate.....	17
3. Continuitate uniformă.....	19
Exerciții.....	21
<b>III. DERIVATA UNEI FUNCȚII DE O SINGURĂ VARIABILĂ.....</b>	<b>23</b>
1. Derivata.....	23
2. Diferențiala.....	24
3. Formula lui Taylor.....	26
4. Aplicații ale formulei lui Taylor.....	29
Exerciții.....	32
<b>IV. DERIVATA UNEI FUNCȚII REALE DE MAI MULTE VARIABLE.....</b>	<b>34</b>
1. Continuitate și derivabilitate parțială.....	34
2. Diferențiabilitate.....	38
3. Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile.....	43
4. Extremele funcțiilor de mai multe variabile.....	45
5. Metoda celor mai mici pătrate.....	48
Exerciții.....	49
<b>V. DERIVATA UNEI FUNCȚII VECTORIALE.....</b>	<b>51</b>
1. Diferențiabilitate.....	51
2. Funcții implicite.....	54
3. Dependență funcțională.....	58
4. Transformări punctuale în $\mathbf{R}^n$ .....	61
5. Schimbări de variabile.....	64
6. Extreme condiționate.....	67
Exerciții.....	69
<b>PARTEA A-II-A. CALCULUL INTEGRAL.....</b>	<b>72</b>
<b>I. INTEGRALA NEDEFINITĂ.....</b>	<b>72</b>
1. Primitiva unei funcții.....	72
2. Integrarea funcțiilor raționale.....	74
3. Integrale reductibile la integrale din funcții raționale.....	75

Exerciții.....	79
<b>II. INTEGRALA DUBLĂ.....</b>	<b>81</b>
1. Definiția integralei duble.....	81
2. Criterii de integrabilitate.....	82
3. Proprietățile integralei duble.....	83
4. Calculul integralei duble.....	84
5. Aplicații ale integralei duble.....	87
Exerciții.....	90
<b>III. INTEGRALA TRIPLĂ.....</b>	<b>92</b>
1. Definiția integralei triple.....	92
2. Calculul integralei triple.....	92
3. Aplicații ale integralei triple.....	94
Exerciții.....	95
<b>IV. INTEGRALE CURBILINII.....</b>	<b>97</b>
1. Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului (de speța I-a ).....	97
2. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele.....	100
3. Formula lui Green.....	102
4. Integrale curbilinii care nu depind de drum.....	104
Exerciții.....	109
<b><i>BIBLIOGRAFIE.....</i></b>	<b>112</b>

# PARTEA I CALCUL DIFERENȚIAL

## I. ȘIRURI ȘI SERII NUMERICE

### 1. Șiruri de numere reale

Fie  $(x_n)$  un șir de numere reale.  $\mathbb{R}$  având o structură de spațiu linear normat în raport cu norma  $\|x\| = |x|$ , și prin urmare de spațiu metric în raport cu distanța  $d(x,y) = |x-y|$ , definițiile ce urmează sunt naturale, iar proprietățile evidente.

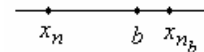
**Definiție.** Șirul  $(x_n)$  este **mărginit** dacă  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a \leq x_n \leq b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

#### Exemple

1.) Șirul  $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$  este mărginit deoarece  $2 \leq x_n \leq 3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

2.) Șirul  $x_n = n$  este nemărginit (superior) deoarece  $\forall b > 0 \exists n_b$  astfel încât

$$x_{n_b} > b.$$



**Definiție.** Șirul  $(x_n)$  **converge către**  $x_0$  ( $x_n \rightarrow x_0$ ) dacă  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n > n_0, |x_n - x_0| < \varepsilon$ .

Un șir care nu este convergent se numește divergent.

**Proprietăți 1.)** Limita unui șir convergent este unică.

**2.)** Orice șir convergent este mărginit.

Operațiile cu șiruri convergente ca și trecerea la limită în inegalități le presupunem cunoscute.

**Definiție.** Fie  $(x_n)$  un șir de numere reale și  $(k_n)_n$  un șir strict crescător de numere naturale; atunci șirul  $(x_{k_n})_n$  se numește **subșir** al șirului  $(x_n)$  și notăm  $(x_{k_n})_n \subset (x_n)$ .

#### Observații:

1.  $k_n \geq n$ ,  $\forall n$ .

2. Orice subșir al unui șir convergent este convergent.

**Teoremă** (Cesaró, 1859-1906). Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

**Demonstrație.** Dacă șirul  $(x_n)$  are un număr finit de valori, de exemplu

$$3, 1, 4, 4, 3, 1, 1, 3, 4, 1, \dots,$$

atunci există un subșir constant al acestuia, care evident este convergent.

Să presupunem că  $(x_n)$  este un șir mărginit având o infinitate de valori. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a \leq x_n \leq b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Împărțim intervalul  $[a, b]$  prin punctul  $c = \frac{a+b}{2}$  și notăm cu  $[a_1, b_1]$  acel subinterval  $[a, c]$  sau  $[c, b]$  care conține o infinitate de termeni ai șirului.

Repetând, obținem un șir  $([a_n, b_n])_n$  de intervale având proprietățile:

$$(1) \quad a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(2) \quad [a_n, b_n] \text{ conține o infinitate de termeni ai lui } (x_n).$$

$$(3) \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conform lemei intervalelor închise incluse,  $\bigcap_1^\infty [a_n, b_n] \neq \emptyset$ .

Proprietatea (3) face ca această intersecție să conțină un singur punct  $x_0$ .

Într-adevăr, dacă am avea  $a_n < x_0 < x'_0 < b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  atunci din

$$0 < x'_0 - x_0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$$

ar rezulta  $x'_0 = x_0$ . Deci  $\bigcap_1^\infty [a_n, b_n] = \{x_0\}$ .

Vom arăta că există un subșir  $(x_{k_n}) \subset (x_n)$  cu  $x_{k_n} \rightarrow x_0$ .

Fie vecinătatea  $V_1 = (x_0 - 1, x_0 + 1)$ . Cu proprietatea (3) există un interval din familia construită mai sus,  $[a_{k_1}, b_{k_1}] \subset V_1$ .

Proprietatea (2) ne permite să alegem un termen  $x_{k_1}$  al șirului  $(x_n)$  astfel încât

$$x_{k_1} \in [a_{k_1}, b_{k_1}] \subset V_1.$$

Procedând analog, pentru fiecare vecinătate de forma  $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$  vom putea alege  $x_{k_n} \in V_n$ .

Astfel am extras subșirul  $(x_{k_n}) \subset (x_n)$  cu proprietatea  $|x_{k_n} - x_0| < \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ceea ce înseamnă că  $x_{k_n} \rightarrow x_0$ .

**Teoremă.** (Criteriul general al lui Cauchy). *Un șir  $(x_n)$  este convergent dacă și numai dacă el este fundamental.*

**Demonstrație.** Este suficient să arătăm dacă  $(x_n)$  este șir fundamental, atunci el este convergent.

Vom arăta în prima etapă că un șir Cauchy este mărginit. Într-adevăr, fie  $\varepsilon > 0$  oarecare și  $n_1(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n, m > n_1$  să avem  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

Dând lui  $m$  o valoare fixă și anume  $N = n_1 + 1$ , din  $|x_n - x_N| < \varepsilon$ , rezultă că exceptând termenii  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ , toți ceilalți se află în intervalul  $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ , deci șirul  $(x_n)$  este mărginit.

În a doua etapă vom apela la teorema lui Cesaró. Fie  $(x_{k_n}) \subset (x_n)$  cu  $x_{k_n} \rightarrow x_0$ .

Deoarece  $k_n \geq n$  avem  $|x_{k_n} - x_n| < \varepsilon$  dacă  $n > n_1$ . Pe de altă parte, pentru același  $\varepsilon > 0$  de la început,  $\exists n_2(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n > n_2$  să avem  $|x_{k_n} - x_0| < \varepsilon$ .

Luând  $n_0(\varepsilon) = \max(n_1, n_2)$ , rezultă că pentru  $n > n_0$  are loc

$$|x_n - x_0| < |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x_0| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

deci  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Exemple.**

1.) Șirul  $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  este convergent deoarece este fundamental. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

îndată ce  $n > n_0(\varepsilon)$  și  $\forall p \in \mathbb{N}$ .

2.)  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  este divergent, deoarece nu este șir Cauchy. Pentru aceasta vom arăta că

$\exists \varepsilon_1$ , astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists n_1 > n$  și  $p_1 > 0$  cu  $|x_{n_1+p_1} - x_{n_1}| \geq \varepsilon_1$ .

Într-adevăr, luând  $n_1 = p_1 = n$ , avem  $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_1$ .

**Consecință.** Spațiul  $\mathbb{R}$  cu metrica  $d(x, y) = |x - y|$  este un spațiu metric complet.

**Definiție.** Șirul  $(x_n)$  este **monoton** dacă este crescător  $(x_n \uparrow)$ :  $x_n \leq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  sau descrescător  $(x_n \downarrow)$ :  $x_n \geq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teoremă.** Orice șir monoton crescător și mărginit este convergent.

**Demonstrație.** Fie  $x_n \uparrow$  și mărginit. Există atunci  $a$  și  $b \in \mathbb{R}$  cu  $a \leq x_n < b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Fie  $L = \sup_n x_n$ ; atunci  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon$  astfel încât  $L - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$ . Dar pentru  $\forall n > n_\varepsilon$ ,

avem  $x_{n_\varepsilon} \leq x_n$  și prin urmare  $L - \varepsilon < x_n \leq L < L + \varepsilon$ , deci  $x_n \rightarrow L$ .

Analog se arată că dacă  $x_n \downarrow$  și mărginit, atunci  $x_n \rightarrow \ell = \inf_n x_n$ .

**Definiție.** Șirul  $(x_n)$  tinde către  $\infty$  ( $x_n \rightarrow \infty$ ), dacă  $\forall b > 0 \exists n_b$  astfel încât  $\forall n > n_b$  să avem  $x_n > b$ .

**Teoremă.** Orice șir monoton crescător și nemărginit tinde către  $\infty$ .

**Demonstrație.** Șirul  $(x_n)$  fiind nemărginit (superior),  $\forall b > 0 \exists n_b$  astfel încât  $b < x_{n_b}$ . Dar cum  $x_n \uparrow$ , pentru  $\forall n > n_b$  avem  $b < x_{n_b} < x_n$  deci  $x_n \rightarrow \infty$ .

**Lema lui Stolz.** Fie  $(x_n)$  un șir oarecare,  $(y_n)$  un șir strict crescător și divergent de numere pozitive. Dacă  $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell$ , atunci  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \ell$ .

**Exemple.**

1.)  $u_n \rightarrow u \Rightarrow \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \rightarrow u$ . Aceasta rezultă cu lema lui Stolz considerând șirurile  $x_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  și  $y_n = n$ , deoarece

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{n+1 - n} = u$$

2.)  $0 \leq u_n$  și  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow u \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow u$ . Apelând la rezultatul precedent, avem

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n} \ln u_n} = e^{\frac{1}{n} \ln \left( \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{1 \cdot u_1 \cdot u_{n-1}} \right)} = e^{\frac{\ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n}{n}} \rightarrow e^{\ln u} = u.$$

## 2. Șiruri în $\mathbb{R}^n$

Fie  $(P_n)$  un șir de elemente din spațiul euclidian  $\mathbb{R}^k$ , unde  $P_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$  și  $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ .

**Propoziție.**  $P_n \rightarrow P_0 \Leftrightarrow x_i^n \rightarrow x_i^0 \quad \forall i = \overline{1, k}$ .

**Demonstrație.** Prin definiție  $P_n \rightarrow P_0 \Leftrightarrow d(P_n, P_0) \rightarrow 0$ .

Dar din dubla inegalitate

$$\left| x_i^n - x_i^0 \right| \leq d(P_n, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i^n - x_i^0)^2} \leq \sum_{i=1}^k |x_i^n - x_i^0|$$

valabilă pentru  $\forall i = \overline{1, k}$ , reiese că  $d(P_n, P_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_i^n - x_i^0| \rightarrow 0, \quad i = \overline{1, k}$ .

Prin urmare convergența unui șir din  $\mathbb{R}^n$  este echivalentă cu convergența pe componente.

**Exemple.**

1.)  $\lim \left( 5 + \frac{1}{n}, \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, \frac{n+1}{n^2+2} \right) = (5, e, 0)$  în  $\mathbb{R}^3$ .



2.) Șirul  $(P_n)$  unde  $P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n^2}\right)$  este un șir de puncte de pe parabola de ecuație  $y=ax^2$ , șir

convergent către originea  $O(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

**Propoziție.**  $(P_n)$  șir fundamental  $\Rightarrow (P_n)$  șir convergent.

**Demonstrație**  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n, m > n_0$  să avem  $d(P_n, P_m) < \varepsilon$ .

Din inegalitățile  $|x_i^n - x_i^m| \leq d(P_n, P_m) < \varepsilon, i = \overline{1, k}$ , rezultă că pentru fiecare  $i = \overline{1, k}$  șirul  $(x_i^n)_n$  este fundamental, deci convergent. Fie  $x_i^0 = \lim_n x_i^n, i = \overline{1, k}$  și  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ .

Cu propoziția precedentă avem

$$\lim_n P_n = \begin{pmatrix} \lim_n x_1^n \\ \lim_n x_2^n \\ \vdots \\ \lim_n x_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_k^0 \end{pmatrix} = P_0.$$

**Consecință.** Spațiul euclidian  $\mathbb{R}^n$  este un spațiu metric complet, mai precis un spațiu Hilbert.

### 3. Convergența unei serii numerice

Fie  $(u_n)_n$  un șir de numere reale. Expresia  $\sum_1^\infty u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  se numește **serie**.

Deocamdată ea nu are un sens, căci nu știm să adunăm o infinitate de numere. Putem însă calcula sumele finite:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obținem astfel șirul  $(s_n)$  al sumelor parțiale. Dacă acest șir este convergent și  $s_n \rightarrow s$ ,

atunci spunem că seria  $\sum_1^\infty u_n$  este **convergentă** (conv.) și are suma  $s$ .

În caz contrar, seria  $\sum_1^\infty u_n$  este divergentă (div.) și calculul sumei nu are sens.

**Exemple.**

1.)  $\sum_1^\infty q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad q \in \mathbb{R}$  (seria geometrică de rație  $q$ )

$$\text{Pentru } q \neq 1, s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & \text{dacă } |q| < 1 \\ \infty & \text{dacă } |q| > 1 \end{cases}$$

Pentru  $q \leq -1$ , șirul  $(s_n)$  nu are limită. Pentru  $q = 1$ ,  $s_n \rightarrow \infty$ .

În concluzie seria geometrică  $\sum_0^{\infty} q^n$  este conv.  $\Leftrightarrow |q| < 1$ .

$$2.) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (\text{seria armonică}). \text{ Avem}$$

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{n} > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{n} > 1 + k(n) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

unde  $k(n)$  este un anumit număr natural.

Deducem de aici că  $s_n \rightarrow \infty$  și prin urmare seria armonică este div.

$$3.) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \text{ cu } \alpha > 0 \text{ (seria lui Riemann)*}$$

Dacă  $\alpha > 1$ , atunci

$$\begin{aligned} 0 < s_n &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots + \frac{1}{n^\alpha} < \\ &< 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + \dots + \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = M \end{aligned}$$

Șirul  $(s_n)$  este crescător și mărginit, deci convergent.

Dacă  $\alpha < 1$ , atunci  $s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$

În concluzie, seria Riemann (seria armonică generalizată)  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  este  $\begin{cases} \text{conv. dacă } \alpha > 1 \\ \text{div. } \alpha \leq 1 \end{cases}$ .

$$4.) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \text{ (seria numărului "e")}$$

Fie  $s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ . Trecând la limită după  $n$  în integralitatea

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

\* G.F.B. Riemann (1826–1866), distins matematician german.

valabilă pentru  $k < n$ , obținem  $e \geq s_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Pe de altă parte  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n$ . Trecând la limită în cele două inegalități, obținem  $e = \lim s_n$ , deci

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

**Observație.** Natura unei serii (faptul că este conv. sau div.) rămâne aceeași chiar dacă se modifică un număr finit de termeni ai ei.

De exemplu, seria  $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - 10 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \dots$  provenită din seria geometrică cu rația  $q = \frac{1}{2}$ , tot conv. este. Evident că suma ei este alta.

De asemenea amplificarea termenilor unei serii cu o constantă nenulă nu afectează natura seriei.

O **condiție necesară de convergență** a seriei  $\sum u_n$  este  $u_n \rightarrow 0$ .

Într-adevăr, dacă  $s_n \rightarrow s$  atunci  $u_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$ .

Dacă  $u_n \not\rightarrow 0$ , putem afirma cu certitudine că seria  $\sum u_n$  este div. Astfel seria

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$  este div. deoarece  $u_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \neq 0$ .

Dacă însă  $u_n \rightarrow 0$ , nu rezultă că seria  $\sum u_n$  este conv. Seria armonică  $\sum \frac{1}{n}$  este div. deși  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

**Teoremă.** (Criteriul general al lui Cauchy pentru serii)

Seria  $\sum u_n$  este convergentă  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n > n_0$  și  $p \geq 1$ , să avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstrația rezultă din aceea că șirul  $(s_n)$  este conv.  $\Leftrightarrow (s_n)$  este șir Cauchy  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$  așa că  $\forall n > n_0$  și  $p \geq 1, |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$

#### 4. Serii cu termeni pozitivi

O serie  $\sum u_n$  cu toți termenii strict pozitivi începând cu un anumit rang se spune că este o serie cu termeni pozitivi.

Pentru o astfel de serie șirul  $(s_n)$  al sumelor parțiale este crescător, deci tinde către  $\infty$ .

Prin urmare, o serie cu termenii pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul  $(s_n)$  este mărginit (**criteriul monotoniei**).

**Criteriu de comparație.** Dacă  $0 < u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (eventual începând cu un anumit rang), atunci  $1^\circ. \sum v_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum u_n \text{ conv.}$

$$2^\circ. \sum u_n \text{ div.} \Rightarrow \sum v_n \text{ div.}$$

**Demonstrație**

1°. Fie  $v = \sum_1^\infty v_n$ . Din  $s_n = \sum_1^n u_k \leq \sum_1^n v_k \leq v \quad \forall n \in \mathbb{N}$  rezultă că șirul  $(s_n)$  este mărginit, deci  $\sum u_n$  conv.

2° rezultă prin reducere la absurd.

**Consecință.** (Criteriu practic de convergență). Fie seriile  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  cu termeni pozitivi și  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lambda \quad (\lambda \neq 0, \infty)$ . Atunci seriile  $\sum u_n$  și  $\sum v_n$  au aceeași natură.

**Demonstrație.** Având loc dubla inegalitate  $\lambda - 1 < \frac{u_n}{v_n} < \lambda + 1$  începând cu un anumit rang, cum  $v_n > 0$ , rezultă  $(\lambda - 1)v_n < u_n < (\lambda + 1)v_n$ . Afirmția rezultă acum cu criteriul precedent.

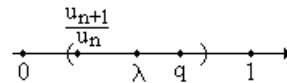
**Exemplu.** Seria  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  este divergentă având aceeași natură cu seria armonică  $\sum \frac{1}{n}$ , deoarece  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$

**Criteriul lui d'Alembert\* (al raportului).** Fie  $u_n \geq 0$  și  $\lambda = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

Atunci seria  $\sum u_n$  este  $\begin{cases} \text{conv. dacă } \lambda < 1 \\ \text{div. dacă } \lambda > 1 \end{cases}$ .

**Demonstrație.** Fie  $\lambda < 1$ . Există  $q < 1$  și un rang  $N$  de la care

începând  $(n \geq N) \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ .



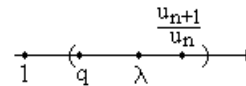
Pentru simplificare vom presupune că inegalitatea are loc  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Din

$$u_{n+1} \leq q u_n \leq q^2 u_{n-1} \leq \dots \leq q^n u_1,$$

și deoarece seria  $\sum q^n$  este conv., aplicând criteriul de comparație rezultă că  $\sum u_n$  este conv.

Fie  $\lambda > 1$ . Există  $q > 1$  și  $N$  astfel încât dacă  $n \geq N$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q > 1.$$



\* D'Alembert, Jean le Rond (1717–1783), filozof și matematician francez.

Presupunând ca și înainte că  $N=1$ , avem  $u_{n+1} \geq q u_n \geq \dots \geq q^n u_1$ , dar seria  $\sum q^n$  este div., deci și  $\sum u_n$  este div.

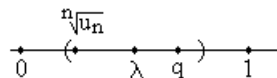
**Exemplu.** Seria  $\sum \frac{3^n}{n!}$  este conv. deoarece

$$\lambda = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

**Criteriul lui Cauchy (al rădăcinii).** Fie  $u_n \geq 0$  și  $\lambda = \lim \sqrt[n]{u_n}$ . Atunci seria

$$\sum u_n \text{ este } \begin{cases} \text{conv.} & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{div.} & \text{dacă } \lambda > 1 \end{cases}$$

**Demonstrație.** Fie  $\lambda < 1$  și  $q < 1$  astfel ca începând cu un anumit rang  $\sqrt[n]{u_n} \leq q$  adică  $u_n \leq q^n$ .



Convergența seriei  $\sum u_n$  rezultă cu criteriul de comparație

Cazul  $\lambda < 1$  se tratează analog.

**Exemplu.** Seria  $\sum \frac{2^n}{n}$  este div. deoarece  $\lambda = \lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 > 1$ .

### Observații

1.) Valoarea  $\lambda$  ce apare în enunțurile ultimelor două criterii este aceeași având în vedere că  $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$  alegerea criteriului fiind sugerată de forma lui  $u_n$

2.) În cazul în care  $\lambda=1$ , cele două criterii nu decid natura seriei. De aceea vom utiliza un alt criteriu, și anume:

**Criteriul lui Raabe și Duhamel (1801–1859).** Fie  $u_n \geq 0$  și  $\lambda = \lim n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$ . Atunci

$$\sum u_n \text{ este } \begin{cases} \text{conv.} & \text{dacă } \lambda > 1 \\ \text{div.} & \text{dacă } \lambda < 1 \end{cases}$$

**Demonstrație.** Fie  $\lambda > 1$ . Există  $q=1+\alpha, \alpha > 0$  și  $N$  (care poate fi luat = 1) așa ca pentru  $n \geq N$  să avem  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1 + \alpha$

Din inegalitățile  $n u_n - (n+1) u_{n+1} > u_{n+1} \alpha > 0$ , rezultă că șirul  $(n u_n) \downarrow$  și cum  $0 \leq n u_n \leq u_1$ , există  $\ell = \lim n u_n$ . Pe de altă parte,

$$\sum_1^\infty [n u_n - (n+1) u_{n+1}] = 1 u_1 - 2 u_2 + 2 u_2 - 3 u_3 + \dots + n u_n - (n+1) u_{n+1} + \dots = u_1 - \ell$$

Conform criteriului de comparație rezultă că  $\sum u_n$  este conv.

Fie  $\lambda < 1$  și  $N (=1)$  astfel încât pentru  $n \geq N$ ,  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1$ .

Din  $n u_n < (n+1)u_{n+1}$  rezultă că șirul  $(n u_n) \uparrow$ , deci  $u_1 < n u_n$  adică  $\frac{u_1}{n} < u_n$ .

Dar seria  $\sum \frac{1}{n}$  este div. deci  $\sum u_n$  este div.

**Exemplu.** Fie seria  $\sum \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}$  cu  $\alpha > 0$ .

Avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{\alpha+n+1} \rightarrow 1$  și criteriul raportului nu ne poate lămuri. Dar

$$\lambda = \lim n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim n \left( \frac{\alpha+n+1}{n+1} - 1 \right) = \alpha.$$

Deci seria dată,  $\sum u_n$  este  $\begin{cases} \text{conv. dacă } \lambda > 1 \\ \text{div. } \lambda < 1 \end{cases}$ . Pentru  $\alpha = 1$  se obține  $\sum \frac{1}{n+1}$  care este div.

Dăm fără demonstrație

**Criteriul logaritm.** Dacă  $u_n > 0$  și  $\lambda = \lim \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$ , atunci seria

$$\sum u_n \text{ este } \begin{cases} \text{conv. dacă } \lambda > 1 \\ \text{div. dacă } \lambda < 1 \end{cases}.$$

**Exemplu.** Pentru seria  $\sum e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}$  avem

$$\lambda = \lim \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim \frac{-\ln u_n}{\ln n} = -\lim \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} = -\lim \frac{a + \frac{b}{\ln n}}{c \ln n + d}.$$

Se deduce de aici că seria dată este conv. dacă  $c = 0$  și  $\frac{a}{d} > 1$ .

## 5. Serii cu termeni oarecare

**Definiție.** Se numește **serie alternată** o serie de forma

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \quad \text{unde } u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Criteriul lui Leibniz\***. Dacă  $u_n \downarrow 0$  ( $u_n \downarrow$  și  $u_n \rightarrow 0$ ), atunci seria  $\sum (-1)^{n-1} u_n$  este conv.

**Demonstrație.** Să observăm că șirul  $s_{2n-1} \downarrow$  deoarece

---

\* G.W. Leibniz (1646–1716), matematician și filozof german

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n+1}) \leq s_{2n-1}.$$

Pe de altă parte el este mărginit:

$$u_1 \geq s_{2n+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + u_{2n+1} \geq 0$$

Fie  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$ . Din  $s_{2n} = s_{2n+1} - u_{2n} \rightarrow s$ , rezultă că seria  $\sum (-1)^{n-1} u_n$  este conv.

**Exemplu.** Seria armonică alternată:  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$  este conv.

**Observație.** Criteriul lui Leibniz este un caz particular al **criteriului lui Abel**: dacă  $0 \leq u_n \downarrow 0$  iar șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum \alpha_n$  este mărginit, atunci seria  $\sum \alpha_n u_n$  este convergentă. Într-adevăr, în cazul nostru  $\alpha_n = (-1)^{n-1}$  și  $s_n \in \{0, 1\}$ .

**Definiție.** O serie  $\sum u_n$  este **absolut convergentă** dacă seria  $\sum |u_n|$  este convergentă.

**Exemplu.** Seria  $1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \dots$  este absolut convergentă deoarece seria modulelor ei este convergentă  $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e - 1$ .

**Teoremă.** O serie absolut convergentă este convergentă.

**Demonstrație.** Seria  $\sum |u_n|$  fiind convergentă, conform criteriului general al lui Cauchy  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n > n_0$  și  $p \geq 1$  să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar  $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon$ , deci  $\sum u_n$  este conv.

**Exemplu.** Seria  $\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$  cu  $\alpha \in \mathbb{R}$  este o serie cu termeni oarecare.

Seria modulelor ei  $\sum \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$  este o serie cu termeni pozitivi care, comparată cu seria lui Riemann

$\sum \frac{1}{n^2}$  rezultă conv. Seria dată fiind absolut conv. este conv.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Fie  $\sum u_n, \sum v_n$  două serii.

Prin definiție **seria sumă** este  $\sum (u_n + v_n)$  și **seria produs**, seria

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \dots$$

**Propoziție.** Dacă seriile  $\sum u_n$  și  $\sum v_n$  sunt convergente având sumele  $u$  respectiv  $v$ , atunci  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  seria  $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$  este convergentă și are suma  $\alpha u + \beta v$ .

Aceasta rezultă imediat din proprietățile șirurilor de sume parțiale

**Exemplu.** Seria  $\sum \frac{2^n}{[7-(-1)^n]^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{3^6} + \dots$  este suma a două serii geometrice

conv.:  $\sum u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \dots = \frac{1/4}{1 - \frac{1}{4^2}} = \frac{4}{15}$  și  $\sum v_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{1/9}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{4}{8}$ ,

deci ea este convergentă și are suma  $\frac{11}{40}$ .

Dăm fără demonstrație următoarea

**Teoremă.** Dacă seriile  $\sum u_n$  și  $\sum v_n$  sunt absolut convergente având sumele  $u$  respectiv  $v$ , atunci seria produs este absolut convergentă și are suma  $uv$ .

### Exerciții

1.) Pornind de la definiție să se arate că  $\lim \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$

2.) Să se determine rangurile  $n_0(\varepsilon)$  de la care începând toți termenii șirului  $x_n = \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 1}$  diferă de  $\frac{1}{3}$  cu mai puțin de  $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ .

3.) Să se arate că pentru  $|a| < 1$  și  $k \in \mathbb{N}$  avem  $\lim n^k a^n = 0$ .

4.) Să se arate că dacă  $x_n \rightarrow 0$  și  $(y_n)$  este un șir mărginit, atunci  $x_n y_n \rightarrow 0$ .

5.) Să se calculeze limitele șirurilor:

a.)  $x_n = (0,39)^n \cdot n^2 \sin n! + (-1)^n \frac{n}{5^n} + \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$  b.)  $x_n = \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2}$

c.)  $x_n = \frac{4 \cdot 5^n + n + 2^n}{2 \cdot 5^n + n^2 + 4 \cdot 3^n}$  d.)  $x_n = \sqrt[3]{(n+1)^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1}$

e.)  $x_n = \left( \sin \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right)^n$  f.)  $x_n = \left[ \frac{\lambda n + \sqrt{4n^2 + 3n + 1}}{\sqrt{n^2 + 3n + 4}} \right]^{\frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}}$

g.)  $x_n = \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$  h.)  $x_n = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n}$

6.) Să se determine  $\lambda$  și  $\mu$  cu condiția ca  $\lim \left( \sqrt[3]{1 - n^3} - \lambda n - \mu \right) = 0$ .

R:  $\lambda = -1, \mu = 0$

7.) Să se arate că următoarele șiruri sunt convergente și să li se determine limita;

a.)  $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$  R: 0

b.)  $x_n = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}$  R: 0



$$c.) \quad x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\dots}}} \quad a > 0$$

$$R: \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

8.) Să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

$$a.) \quad x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$c.) \quad x_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}}$$

$$b.) \quad x_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$$

$$d.) \quad x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots}$$

9.) Folosind lema lui Stolz să se calculeze

$$a.) \quad \lim_n \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + \dots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$R: \frac{1}{6}$$

$$b.) \quad \lim_n \left[ \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^p} - \frac{2^p n}{p+1} \right], \quad p \in \mathbb{N}$$

$$R: 0$$

10.) Să se studieze natura următoarelor șiruri folosind criteriul general al lui Cauchy

$$a.) \quad x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

R: div

$$b.) \quad x_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{7}{10} + \dots + \frac{1+3n}{2+4n}$$

R: div

$$c.) \quad x_n = 1 + \frac{1}{5^2+2} + \frac{1}{5^3+2} + \dots + \frac{1}{5^n+2}$$

R: conv

$$d.) \quad x_n = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

R: conv

11.) Să se calculeze în  $\mathbb{R}^3$   $\lim_n (\sqrt[n]{n}, (1 - \frac{1}{n})^{2n}, \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n})$ .

12.) Să se calculeze:

$$a.) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$$

$$R: \frac{25}{48}$$

$$g.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

$$b.) \quad \sum_3^{\infty} \frac{4n-3}{n(n-2)(n+3)}$$

$$h.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n}$$

$$c.) \quad \sum_1^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \quad R: 1 - \sqrt{2}$$

$$i.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{7 \cdot 2^n - 6^{n-1} + 2 \cdot 3^{n+1}}{12^n}$$

$$d.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} \quad R: \sqrt{2} - 1$$

$$j.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{n^2 + n - 3}{n!}$$

$$e.) \quad \sum_2^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad R: -\ln 2$$

$$k.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{n^3 + n + 1}{n!}$$

$$f.) \sum_1^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{2}{n(n+3)} \right] \quad R: \ln 3 \quad l.) \sum_1^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

13.) Știind că  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  să se calculeze  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ .

14.) Care din următoarele serii îndeplinesc condiția necesară de convergență?

a.)  $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ ; b.)  $\sum n^2 \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$ ; c.)  $\sum (-1)^n \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})}$ ; d.)  $\sum \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$ .

15.) Folosind criteriul de comparație să se studieze natura seriilor:

a.)  $\sum_1^{\infty} \left( \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b} \right)$  d.)  $\sum \frac{1}{n(1+a+a^2+\dots+a^n)}$   $a > 0$

b.)  $\sum \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p}$  e.)  $\sum \left( ch \frac{n+1}{n^2+1} - 1 \right)$

c.)  $\sum \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$  f.)  $\sum \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$

16.) Aplicând criteriul rădăcinii să se stabilească natura seriilor:

a.)  $\sum \left( \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right)^n$  c.)  $\sum \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}$

b.)  $\sum \frac{(3n)^n}{\sqrt{(16n^2+5n+1)^{n+1}}}$  d.)  $\sum \left( \frac{1}{e} + \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{n+1}} (2n+1) o_n} \right)^n$  unde  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$

17.) Aplicând criteriul raportului să se arate că următoarele serii sunt convergente:

a.)  $\sum n! \left( \frac{a}{n} \right)^n$  cu  $a < e$  b.)  $\sum \frac{n^p \ln n}{n!}$  c.)  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)! 8^n}$

d.)  $\sum \frac{a^n}{n!}$ ,  $a > 0$  (se deduce de aici că  $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$  pentru  $a > 0$ )

18.) Cu criteriul Raabe-Duhamel să se studieze natura seriilor:

a.)  $\sum \frac{a(a+d)\dots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\dots(b+(n-1)d)}$   $a, b, d > 0$  b.)  $\sum \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \dots [2+5(n-1)]}{3 \cdot 8 \cdot 13 \dots [3+5(n-1)]}$

c.)  $\sum \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$  d.)  $\sum (2n+1) \left[ \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n+1)} \right]^2$

## II. FUNCȚII CONTINUE

### 1. Limita unei funcții într-un punct

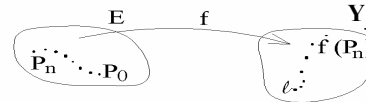
Fie spațiile euclidiene  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  și funcția  $f: E \subset X \rightarrow Y$ .

Noțiunea de limită a funcției  $f$  într-un punct  $P_0$  este legată de fapt de comportarea lui  $f$  într-o vecinătate a lui  $P_0$ , punctul  $P_0$  putând să nu aparțină lui  $E$ . Totuși este necesar să existe puncte din  $E$  oricât de apropiate de  $P_0$ .

După cum am văzut, dacă  $P_0$  este punct de acumulare pentru  $E$ , atunci există cel puțin un șir  $(P_n)$  de puncte din  $E$  cu  $P_n \neq P_0$ , convergent către  $P_0$ . (propoziția 2.8.3 cap.II)

**Definiția 1** („cu șiruri”) Fie  $P_0 \in E'$ .

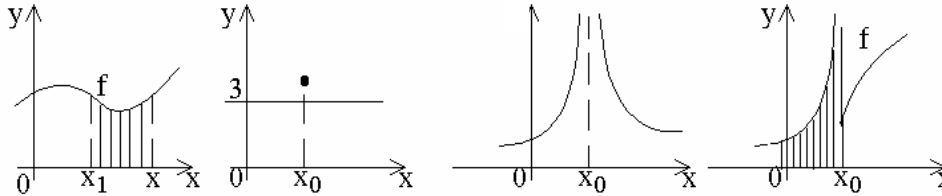
Spunem că  $\ell$  este **limita funcției  $f$  în punctul  $P_0$**  (și scriem  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ ), dacă oricare ar fi șirul



$(P_n)$  de puncte din  $E$  cu  $P_n \neq P_0$  și  $P_n \rightarrow P_0$ , șirul valorilor funcției  $f(P_n) \rightarrow \ell$ .

**Exemple**

1.)  $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$



2.) Funcția  $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  nu are limită în origine, deoarece dacă

$(P_n)$  este un șir de puncte de pe dreapta de ecuație  $y = kx$ , care converge către origine, de exemplu

$$P_n \left( \frac{1}{n}, \frac{k}{n} \right), \text{ atunci șirul de valori } f(P_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{k}{1+k^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tinde către un număr dependent}$$

de panta dreptei.

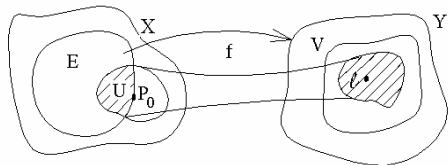
În schimb funcția  $f$  are limită în orice punct  $P_0(x_0, y_0)$  diferit de origine. Într-adevăr, dacă  $(P_n)$  este un șir oarecare convergent către  $P_0$ , atunci cum  $P_n(x_n, y_n) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  este echivalent cu  $x_n \rightarrow x_0$

și  $y_n \rightarrow y_0$ , avem  $f(P_n) = f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(P_0)$ , deci  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$  pentru

$P_0 \neq 0$ .

**Teoremă** .  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \Leftrightarrow$  oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $\ell$  , există o vecinătate  $U$  a

lui  $P_0$  astfel încât  $f(U \cap E \setminus \{P_0\}) \subset V$



**Demonstrație**  $\Rightarrow$  . Fie  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ . Să

presupunem prin absurd că  $\exists$  o vecinătate  $V_1$  a lui  $\ell$  astfel încât oricare ar fi vecinătatea  $U$  a lui  $P_0$  , există cel puțin un punct din  $U \cap E - \{P_0\}$  a cărui imagine prin  $f$  nu este în  $V_1$ .

În particular, pentru orice sferă  $S_{\frac{1}{n}}(P_0)$  există  $P_n \in S_{\frac{1}{n}}(P_0) \cap E - \{P_0\}$  așa ca

$f(P_n) \notin V_1$ .

Am obținut astfel un șir  $(P_n)$  de elemente din  $E$  cu  $P_n \neq P_0, P_n \rightarrow P_0$  (căci  $d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ), pentru care  $f(P_n) \not\rightarrow \ell$ , ceea ce contrazice faptul că  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ .

$\Leftarrow$  Fie  $V$  o vecinătate oarecare a lui  $\ell$  și  $U$ , vecinătate a lui  $P_0$  astfel încât

$f(U \cap E) - \{P_0\} \subset V$ . Dacă  $P_n \rightarrow P_0, P_n \in E, P_n \neq P_0$ , atunci  $\exists n_0(U)$  astfel încât  $P_n \in U$  îndată ce  $n > n_0$ . Din  $f(P_n) \in f(U \cap E - \{P_0\}) \subset V$  pentru  $n > n_0$ , rezultă că  $f(P_n) \rightarrow \ell$  în  $\mathcal{Y}$ , deci  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ .

Conform acestei teoreme, limita unei funcții într-un punct poate fi dată de

**Definiția 2** („cu vecinătăți”).  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ , dacă oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $\ell$  ,

există o vecinătate  $U$  a lui  $P_0$  astfel încât oricare ar fi  $P \in U \cap E$  cu  $P \neq P_0$  , să avem  $f(P) \in V$ .

Având în vedere că în spațiile metrice  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$  vecinătățile pot fi considerate sfere, putem lua  $V = S_\varepsilon(\ell)$  resp.  $V = S_\eta(P_0)$ . Obținem astfel o definiție echivalentă cu celelalte două.

**Definiția 3** („cu  $\varepsilon$  și  $\eta$ ”). Spunem că  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ , dacă oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  ,  $\exists \eta(\varepsilon)$

astfel încât  $\forall P \in E, P \neq P_0$  cu  $d(P, P_0) < \eta$ , să avem  $d(f(P), \ell) < \varepsilon$ .

În particular, dacă:

1.)  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$  , atunci prin definiție  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0$  ,  $\exists \eta(\varepsilon)$  astfel

încât  $d(P, P_0) < \eta, P \neq P_0 \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ .

2.)  $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}$ , atunci  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel

încât  $|x - x_0| < \eta, |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$ .

3.)  $X = Y = \mathbb{R}$ , atunci  $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât

$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

Dacă  $f_i (i = \overline{1, m})$  sunt componentele scalare ale funcției vectoriale  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ , atunci are loc

**Propoziția.**  $\ell = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \Leftrightarrow \ell_i = \lim_{P \rightarrow P_0} f_i(P), i = \overline{1, m}$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă din aceea că dacă  $P_n \rightarrow P_0$ , atunci

$$f(P_n) = \begin{pmatrix} f_1(P_n) \\ \vdots \\ f_m(P_n) \end{pmatrix} \rightarrow \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_i(P_n) \rightarrow \ell_i, i = \overline{1, m}.$$

**Observație.** Pentru o funcție reală  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  noțiunea de limită se poate extinde, ca și la funcțiile de o singură variabilă, la cazul când una din variabile sau chiar toate tind la infinit ( $\pm \infty$ ), sau când limita este infinită.

De exemplu,  $l = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \infty$ , dacă  $\forall b > 0 \exists \eta(b)$  așa ca  $P \in E, P \neq P_0$  cu

$$d(P, P_0) < \eta \Rightarrow f(P) > b.$$

## 2. Continuitate

Fie  $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, f : E \subset X \rightarrow Y$  și  $P_0 \in E$ .

**Definiția 1** („cu șiruri”). Spunem că funcția  $f$  este **continuă în**  $P_0$ , dacă oricare ar fi șirul  $(P_n)$  de puncte din  $E$  cu  $P_n \rightarrow P_0$ , șirul valorilor  $f(P_n) \rightarrow f(P_0)$ .

**Exemplu**

$$X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}$$

$f$  este continuă în  $P_0$

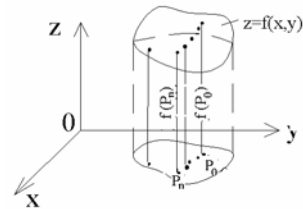
**Observația 1.** Dacă  $P_0 \in E \cap E'$ , atunci  $f$  cont.

$$P_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

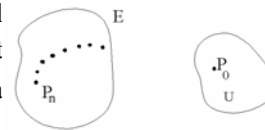
În acest caz, definiția 1 este echivalentă cu:

**Definiția 2.** („cu vecinătăți”). Funcția  $f$  este continuă în  $P_0$ , dacă oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $f(P_0)$  există o vecinătate  $U$  a lui  $P_0$  astfel încât  $f(U \cap E) \subset V$ .

**Definiția 3.** („cu  $\varepsilon$  și  $\eta$ ”). Funcția  $f$  este continuă în  $P_0$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât dacă  $P \in E$  și  $d(P, P_0) < \eta$ , atunci  $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$ .

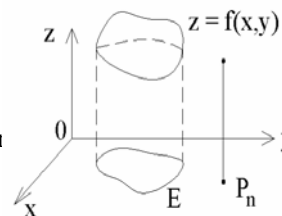


**Observația 2.** O funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiție. Într-adevăr, dacă  $P_0$  este punct izolat ( $P_0 \in E, P_0 \notin E'$ ), atunci există o vecinătate  $U$  a lui  $P_0$  așa ca  $U \cap E = \{P_0\}$ .



Fie acum  $(P_n)$  un șir oarecare de puncte din  $E$  cu  $P_n \rightarrow P_0$ . Există atunci un rang  $n_0(U)$  astfel încât  $P_n \in U$  pentru  $n > n_0$ , adică  $P_n = P_0$ .

Rezultă de aici că  $f(P_n) = f(P_0)$  îndată ce  $n > n_0$ , prin urmare  $f(P_n) \rightarrow f(P_0)$  (ca șir constant) și  $f$  cont  $P_0$ .



După cum se vede, graficul funcției  $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  este “întrerupt” în dreptul punctului  $P_0$  deși funcția este continuă în acest punct izolat.

**Propoziția 1.** Funcția  $f$  este continuă în  $P_0 \Leftrightarrow$  componentele ei scalare  $f_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) sunt continue în  $P_0$ .

Într-adevăr, dacă  $P_n \rightarrow P_0$ , deoarece  $f(P_n) = \begin{pmatrix} f_1(P_n) \\ \vdots \\ f_m(P_n) \end{pmatrix}$  și  $f(P_0) = \begin{pmatrix} f_1(P_0) \\ \vdots \\ f_m(P_0) \end{pmatrix}$ , rezultă că

$$f(P_n) \rightarrow f(P_0) \Leftrightarrow f_i(P_n) \rightarrow f_i(P_0) \quad i = \overline{1, m}.$$

**Propoziția 2.** Fie  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z = \mathbb{R}^P$ . Dacă  $f$  este continuă în  $P_0$  și  $g$  este continuă în  $f(P_0)$ , atunci funcția  $g \circ f$  este continuă în  $P_0$ .

Aceasta rezultă din aceea că

$$P_n \rightarrow P_0 \xRightarrow{f \text{ cont } P_0} f(P_n) \rightarrow f(P_0) \xRightarrow{g \text{ cont } f(P_0)} g(f(P_n)) \xrightarrow{\Downarrow} g(f(P_0)) \\ (g \circ f)(P_n) \rightarrow (g \circ f)(P_0).$$

Pentru funcțiile reale de mai multe variabile vom menționa următoarele două proprietăți cunoscute de la funcțiile de o singură variabilă.

**Propoziția 3.** Fie funcția  $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuă în  $P_0 \in \overset{\circ}{E}$ . Dacă  $f(P_0) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $U$  a lui  $P_0$  în care  $f(P)$  are același semn cu  $f(P_0)$ .

**Demonstrație.** Din continuitatea lui  $f$  în  $P_0$  rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât dacă  $P \in E$  și  $d(P, P_0) < \eta$ , atunci  $f(P_0) - \varepsilon < f(P) < f(P_0) + \varepsilon$ .

Dacă  $f(P_0) > 0$ , atunci putem alege  $\varepsilon$  așa ca  $0 < \varepsilon < f(P_0)$ .

Astfel pentru  $P \in S_\eta(P_0) \cap E = U$  avem  $0 < f(P)$ .

Dacă  $f(P_0) < 0$ , atunci vom lua  $\varepsilon < -f(P_0)$  și pentru  $P \in U$  vom avea

$$f(P) < f(P_0) + \varepsilon < 0.$$

**Propoziția 4.** Dacă funcțiile  $f, g: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue în  $P_0$ , atunci funcțiile  $f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  ( $g(P_0) \neq 0$ ) sunt continue în  $P_0$ .

**Definiție.** Funcția  $f: E \subset X \rightarrow Y$  se spune că este **continuă pe E** dacă este continuă în orice punct  $P \in E$ .

**Observație.** Pentru astfel de funcții are loc proprietatea că dacă o submulțime  $A \subset E$  este conexă, atunci  $f(A)$  este conexă.

### 3. Continuitate uniformă

Continuitatea uniformă este o proprietate a funcțiilor pe o mulțime.

Fie  $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$  și  $f: E \subset X \rightarrow Y$ .

**Definiție.** Spunem că funcția  $f$  este **uniform continuă pe E**, dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall P', P'' \in E$  cu  $d(P', P'') < \eta$  să avem  $d(f(P'), f(P'')) < \varepsilon$ .

#### Observații

1.) Dacă  $f$  este uniform continuă pe  $E$ , atunci  $f$  este continuă pe  $E$ .

Într-adevăr, n-avem decât să punem în definiția de sus  $P' = P, P'' = P_0$  unde  $P_0$  este un punct oarecare din  $E$ , și obținem continuitatea lui  $f$  în  $P_0$ .

Reciproca nu este adevărată după cum se va vedea din exemplul 2.

2.) Se spune că funcția  $f$  este **lipschitziană\*** pe  $E$ , dacă  $\exists k > 0$  astfel încât

$$d(f(P'), f(P'')) \leq k d(P', P'') \quad \forall P', P'' \in E.$$

O funcție lipschitziană pe  $E$  este uniform continuă pe  $E$  deoarece putem avea

$$d(f(P'), f(P'')) < \varepsilon \text{ îndata } ce \ d(P', P'') < \frac{\varepsilon}{k} = \eta.$$

3.) O funcție nu este uniform continuă pe  $E$  dacă  $\exists \varepsilon_1$  astfel încât  $\forall \eta > 0$  să existe  $P'_\eta, P''_\eta \in E$  cu  $d(P'_\eta, P''_\eta) < \eta$  dar pentru care  $d(f(P'_\eta), f(P''_\eta)) \geq \varepsilon_1$ .

În aplicații, luând  $\eta = \frac{1}{n}$ , pentru a arăta că  $f$  nu este uniform continuă pe  $E$ , este suficient a

arăta că  $\exists \varepsilon_1 > 0$  astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P'_n, P''_n \in E$  cu  $d(P'_n, P''_n) < \frac{1}{n}$  și așa ca

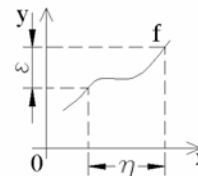
$$d(f(P'_n), f(P''_n)) \geq \varepsilon_1.$$

4.) În cazul în care  $X = Y = \mathbb{R}$ , definiția continuității uniforme ia forma: funcția  $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este uniform continuă pe  $E$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall x', x'' \in E$  cu  $|x' - x''| < \eta$  să avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

---

\* R.O.S. Lipschitz (1832-1903), matematician german.

Geometric, imaginea oricărui subinterval de lungime mai mică decât  $\eta$  este inclusă într-un interval de lungime mai mică decât  $\varepsilon$ .



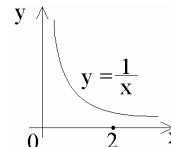
### Exemple

1.) Funcția  $f(x) = x^2$  este uniform continuă pe  $(0, 2)$  deoarece pentru  $x', x'' \in (0, 2)$ ,

$$|f(x') - f(x'')| = |(x')^2 - (x'')^2| \leq (|x'| + |x''|)|x' - x''| \leq 4|x' - x''| < \varepsilon \text{ \textit{îndată ce } } |x' - x''| < \frac{\varepsilon}{4} \eta.$$

2.) Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  nu este uniform continuă pe  $(0, 2)$  deoarece  $\exists \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$  astfel încât pentru  $\forall n \in \mathbb{N}$  există  $x', x'' \in (0, 2)$ , și anume  $x'_n = \frac{1}{n}$ ,  $x''_n = \frac{2}{n}$  așa ca  $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ . Dar

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| n - \frac{n}{2} \right| = \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}$$



3.) Funcția  $f(x, y) = \left( -\frac{y}{x}, \frac{x}{y} \right)$  este uniform continuă pe  $(1, 2) \times (2, 3) \subset \mathbb{R}^2$ , deoarece este lipschitziană cu  $k = \frac{5}{4}\sqrt{97}$ . Într-adevăr, dacă  $P(x', y'), P(x'', y'') \in (1, 2) \times (2, 3)$ , atunci cum

$$f(P') = \left( -\frac{y'}{x'}, \frac{x'}{y'} \right) \text{ și } f(P'') = \left( -\frac{y''}{x''}, \frac{x''}{y''} \right), \text{ avem}$$

$$\begin{aligned} d(f(P'), f(P'')) &= \sqrt{\left( \frac{y''}{x''} - \frac{y'}{x'} \right)^2 + \left( \frac{x''}{y''} - \frac{x'}{y'} \right)^2} = \frac{|y''x' - x''y'|}{|x'x''y'y''|} \sqrt{(y'y'')^2 + (x'x'')^2} < \\ &< \frac{\sqrt{97}}{4} |y''x' - y'x'' + y'x'' - y'x'| \leq \frac{\sqrt{97}}{4} (|y''||x' - x''| + |x''||y'' - y'|) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{97}}{4} (2|x' - x''| + 3|y' - y''|) \leq \frac{5}{4}\sqrt{97} d(P', P''). \end{aligned}$$

**Observație.** O funcție reală  $f$  de două variabile este lipschitziană pe  $E$  dacă  $\exists k_1, k_2 > 0$  astfel încât  $\forall (x', y')$  și  $(x'', y'') \in E$  să avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq k_1 |x' - x''| + k_2 |y' - y''|.$$

În general o funcție reală de  $n$  variabile este lipschitziană pe  $E$ , dacă  $\exists k_i > 0 \quad i = \overline{1, n}$  astfel încât  $|f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - f(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)| \leq \sum_{i=1}^n k_i |x'_i - x''_i|$ .

Funcții lipschitziene în raport cu o parte din variabile apar în teoremele de existență și unicitate (Cauchy-Lipschitz) din teoria ecuațiilor diferențiale.



## Exerciții

1.) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Să se calculeze apoi  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$ . R: 0

2.) Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \pm \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  R:  $\frac{1}{2}; -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + x \sin x}}{x^4}$  R:  $\frac{1}{4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx}$  R:  $\frac{2a}{b}$

3.) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$ . Folosind acest rezultat să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}\right)}{\ln\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)}$$
R:  $n$

4.) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha$ . Folosind aceasta să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ . R:  $\frac{3}{2}$

5.) Pentru ce valori  $\alpha \in [0, 2\pi]$  funcția  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{x}{e^{1-x}} \sin \alpha + \frac{x^2}{4}}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{3}{2} \frac{\ln x}{x - 1}, & x \in (1, 2] \end{cases}$  este continuă în  $x = 1$ ?

6.) Să se deseneze graficul funcției  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[3]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ ,  $x \geq 0$ .

7.) Pe baza definiției să se arate că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2}{y} = \frac{1}{2}$ .

R: Se arată că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât  $|x - 1| < \eta$  și  $|y - 2| < \eta$  să implice  $\left| \frac{x^2}{y} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ .

Avem  $|x - 1| < \eta \Rightarrow |x| < 1 + \eta$  și îndată ce  $\eta < \frac{-5 + \sqrt{25 + 16\varepsilon}}{4}$   
 $|y - 2| < \eta < 1 \Rightarrow 1 < y < 3$

$$\left| \frac{x^2}{y} - 1 \right| = \left| \frac{2x^2 - 2 - y + 2}{2y} \right| \leq \frac{2|x-1|(|x|+1) + |2-y|}{2|y|} < \frac{2\eta(1+\eta) + \eta}{2} < \varepsilon$$

8.) Să se calculeze:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}$ . R:  $\infty$

9.) Să se arate că dacă  $x \rightarrow \infty$  și  $y \rightarrow \infty$ , funcția  $f(x, y) = \frac{1}{1 + (x^2 - y)}$  nu are limită.

R: Se poate alege un șir  $(P_n)$  de puncte de pe prima bisectoare și un altul  $(P'_n)$  de pe parabola de ecuație  $y = x^2$

10.) Să se arate că funcția  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$  nu are limită în origine deși limitele ei iterate sunt

egale  $\left( \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ .

11.) Să se găsească punctele de discontinuitate ale funcțiilor:

a.)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$     R:  $\{0\} \cup \left\{ \frac{2}{(2k+1)\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$     b.)  $f(x, y) = \frac{xy+1}{xy-1}$

R: Punctele hiperbolei echilatre  $xy = 1$

12.) Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a.)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2} & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$  R: continuă pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$

b.)  $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} & \text{dacă } x, y > 0 \\ 1 & x = y = 0 \end{cases}$  R: continuă pe domeniul de definiție

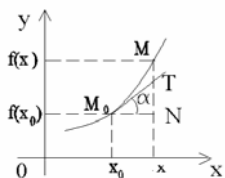
c.)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$  R: nu e continuă în  $(0, 0)$

### III. DERIVATA UNEI FUNCȚII DE O SINGURĂ VARIABILĂ

#### 1. Derivata

Fie funcția  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  fiind un interval deschis (domeniu) din  $\mathbb{R}$ . Spunem că  $f$  este **derivabilă în**  $x_0 \in I$ , dacă există și este finită limita  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Limita de sus se numește **derivata funcției  $f$  în**  $x_0$  și este un număr.



Din punct de vedere geometric  $f'(x_0)$  reprezintă panta tangentei  $M_0 T$  la curba de ecuație  $y = f(x)$  în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$ , deci  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ .  
Spunem că funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$ , dacă  $f$  este derivabilă în orice punct  $x \in I$ . În acest caz aplicația  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  dată de

$x \xrightarrow{f'} f'(x) \quad \forall x \in I$  se numește **derivata funcției  $f$** .

Se definește **derivata de ordinul  $n$  a funcției  $f$**  prin formula  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$   $n = 1, 2, \dots$  unde  $f^{(0)} = f$ , dacă funcția  $f^{(n-1)}$  este la rândul ei derivabilă pe  $I$ .

Dacă  $f$  admite derivate până la ordinul  $n$  continue pe  $I$ , atunci spunem că  $f$  este **de clasă**  $C^n(I)$  și scriem  $f \in C^n(I)$ .

Dacă  $f$  și  $g$  sunt de  $n$  ori derivabile pe  $I$ , atunci funcțiile  $f + g$ ,  $f \cdot g$  sunt de  $n$  ori derivabile pe  $I$  și

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \forall n \geq 1$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_0^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \quad (\text{formula lui Leibniz}).$$

**Exemplu.** Să se calculeze  $h^{(100)}$  dacă  $h(x) = (x^3 + x + 1)chx$ .

**Soluție.** Notând  $f(x) = chx$ ,  $g(x) = x^3 + x + 1$ , avem

$$f'(x) = shx$$

$$g'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = chx$$

$$g''(x) = 6x$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} shx & \text{pentru } n \text{ impar} \\ chx & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases} \quad g^{(n)}(x) = \begin{cases} 6 & n=1, 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

Aplicând formula lui Leibniz, avem

$$h^{(100)} = (f \cdot g)^{(100)} = C_{100}^0 f^{(100)} g + C_{100}^1 f^{(99)} g' + C_{100}^2 f^{(98)} g'' + C_{100}^3 f^{(97)} g''',$$

deci

$$h^{(100)}(x) = (x^3 + x + 1)chx + 100(3x^2 + 1)shx + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} \cdot 6xchx + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6shx =$$

$$= (x^3 + 29701x + 1)chx + (300x^2 + 970300)shx.$$

## 2. Diferențiala

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se numește **diferență de ordinul I** a funcției  $f$  variația

$$\Delta f = f(x+h) - f(x),$$

$h$  numindu-se pas. Notăția completă este  $\Delta f(x, h)$ .

**Diferența de ordinul doi** a lui  $f$  este diferența de ordinul întâi a funcției  $g(x) = \Delta f(x, h)$ ,

$$\text{deci } \Delta^2 f = \Delta(\Delta f) = g(x+h) - g(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Prin inducție se definește diferența de ordinul  $n$   $\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f)$

$$\text{și are loc formula } \Delta^n f = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f[x + (n-k)h].$$

Fie funcția  $f$  derivabilă în  $x_0 \in I$  și  $\Delta x = x - x_0 = h$ . Din  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

rezultă că există o funcție  $\alpha(x, h)$  astfel încât  $\frac{\Delta f}{h} = f'(x_0) + \alpha(x_0, h)$

cu  $\alpha(x_0, h) \rightarrow 0$  când  $h \rightarrow 0$ , sau o funcție  $\omega(x_0, h)$  așa ca  $\Delta f = f'(x_0)h + \omega(x_0, h)$

și  $\frac{\omega(x_0, h)}{h} \rightarrow 0$  când  $h \rightarrow 0$ .

$$\text{Deoarece } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{f'(x_0)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)h + \omega(x_0, h)}{f'(x_0)h} = 1 + \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(x_0, h)}{h} = 1,$$

pentru  $h$  suficient de mic are loc aproximarea

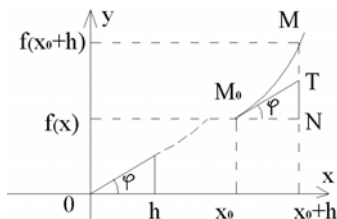
$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$$

care este foarte utilă în calculul creșterii funcției  $f$ . În loc să calculăm valorile lui  $f$  în  $x_0$  și  $x_0 + h$ , este mai simplu de efectuat produsul  $f'(x_0)h$  care este o funcție liniară de  $h$ .

**Definiție.** **Diferențiala funcției  $f$  în  $x_0$**  este funcția liniară (de  $h$ ) definită pe  $\mathbb{R}$

$$h \rightarrow f'(x_0)h$$

notată cu  $df(x_0) : df(x_0)(h) = f'(x_0)h$ .



Graficul funcției liniare  $df(x_0)$  este o dreaptă ce trece prin origine de pantă

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$$

Din punct de vedere geometric

$$MN = \Delta f$$

$$NT = NM_0 \operatorname{tg} \varphi = h f'(x_0) = df(x_0)(h)$$

## Relația de aproximație

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx d f(x_0)(h)$$

exprimă faptul că segmentul  $TM$  poate fi făcut oricât de mic dacă se ia creșterea  $h$  suficient de mică.

**Exemplu.** Cu cât crește aria unui cerc de rază 98,5 m dacă mărim raza cu 0,1 m?

**Soluție.** Aria cercului este  $A = \pi r^2$ . Avem  $A' = 2\pi r$ ,  $r_0 = 98,5$ ,  $h = r - r_0 = 0,1$ , deci

$$\Delta A \approx d A = A'(r_0)h = 2\pi r_0 h = 2\pi \cdot 98,5 \cdot 0,1 \approx 61,858 m^2.$$

Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$ , atunci  $d f(x)(h) = f'(x)h \quad \forall x \in I$ .

În cazul aplicației identice  $g(x) \equiv x$ , avem  $g'(x) = 1$  și

$$d g(x)(h) = d x(h) = h \quad \forall x \in I \quad \text{și} \quad \forall h \in R.$$

Astfel formula de sus se obișnuiește a fi scrisă sub forma  $d f(x) = f'(x) d x$  sau omițând a scrie variabilele în primul membru  $d f = f'(x) d x$ .

De aici rezultă notația lui Leibniz pentru derivata lui  $f$ ,  $f'(x) = \frac{d f}{d x}$ .

**Regulile de diferențiere** decurg din cele de derivare și sunt:

$$1.) d(f + g) = d f + d g$$

$$2.) d(fg) = g d f + f d g$$

$$3.) d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g d f - f d g}{g^2}$$

$$4.) d(g \circ f) = g'(f) d f$$

Ultima rezultă din aceea că

$$d(g \circ f)(x) = (g \circ f)'(x) d x = g'(f(x)) f'(x) d x = g'(f) d f(x) \quad \forall x \in I.$$

Ea pune în evidență proprietatea diferențialei de invarianță a formei diferențiale și anume faptul că regula de diferențiere a funcției compuse e aceeași ca și când  $f$  ar fi variabilă independentă.

### Diferențiale de ordin superior

Diferențiala de ordinul doi a funcției  $f$  în  $x_0 \in I$  se definește prin formula

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0) h^2 \quad \text{dacă } f \text{ este de două ori derivabilă în } x_0.$$

În mod analog, dacă  $f$  este de  $n$  ori derivabilă în  $x_0$ , atunci diferențiala de ordinul  $n$  a lui  $f$  în  $x_0$  este  $d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0) h^n$  și după cum se poate observa este un polinom de gradul  $n$  în  $h$ .

Dacă  $f$  este de  $n$  ori derivabilă pe  $I$ , atunci putem scrie  $d^n f = f^{(n)}(x) d x^n$

unde  $d x^n = (d x)^n = h^n$ . Reiese de aici notația diferențială pentru derivata  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{d x^n}$ .

### Observații

1.) La formulele ce definesc diferențialele de ordin superior se poate ajunge diferențind succesiv diferențiala de ordinul întâi ca funcție de  $x$ .

Într-adevăr, deoarece  $h$  fiind independent de  $x$ , în procesul de diferențiere se comportă ca o constantă, avem

$$d(df) = d(f'(x)h) = d(f'(x))h = f''(x)h^2 = d^2 f \quad \text{etc.}$$

2.) În diverse probleme practice, diferențiala de ordinul  $n$  și diferența de ordinul  $n$  se aproximează una pe alta.

În cazul unei funcții date tabelar se face aproximarea  $f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f}{\Delta x^n}$  (vezi exemplul de la Derivarea numerică.)

### 3. Formula lui Taylor

Fiind dat polinomul de gradul  $n$ ,  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , ne propunem să-l dezvoltăm după puterile lui  $x - x_0$  unde  $x_0$  este o valoare particulară a lui  $x$ .

Aceasta înseamnă să determinăm coeficienții  $A_i$   $i = \overline{0, n}$  astfel ca

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n.$$

Derivând succesiv avem:

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) - 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + 4 \cdot 3A_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

⋮

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1A_n.$$

Făcând  $x = x_0$ , obținem  $P(x_0) = A_0$ ,  $P'(x_0) = A_1$ ,  $P''(x_0) = 2! A_2$ , ...,  $P^{(n)}(x_0) = n! A_n$

de unde  $A_0 = P(x_0)$ ,  $A_1 = \frac{1}{1!} P'(x_0)$ ,  $A_2 = \frac{1}{2!} P''(x_0)$ , ...,  $A_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0)$

$$\text{și } P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} P''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} P^{(n)}(x_0)$$

numită formula lui Taylor\* pentru polinoame.

Pentru o funcție oarecare  $f$  de  $n$  ori derivabilă pe un interval  $I$  se poate scrie polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

numit **polinomul lui Taylor de grad  $n$**  corespunzător funcției  $f$  în  $x_0 \in I$ .

Este evident că în general  $f(x) \neq T_n(x)$ . Funcția  $R_n(x)$  cu proprietatea

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

se numește **restul de ordinul  $n$**  al polinomului lui Taylor

Se obține astfel formula

---

\* B. Taylor (1685 – 1731), matematician englez.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

numită **formula lui Taylor**.

**Observație.** Funcțiile  $f$  și  $T_n$  au în  $x_0$  un **contact de ordinul  $n$** , adică atât cele două funcții, cât și derivatele lor până la ordinul  $n$  sunt egale în  $x_0$ .  $T_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(x_0) \quad k = \overline{0, n}$

Teorema ce urmează dă restul  $R_n$  sub forma lui Lagrange\*

**Teorema** (Taylor.) *Dacă  $f$  este de  $n+1$  ori derivabilă pe intervalul  $I$ , atunci oricare ar fi punctele  $x, x_0 \in I$ , există  $c \in (x_0, x)$  astfel încât*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c):$$

**Demonstrație.** Vom determina numărul  $M$  astfel încât restul să aibă forma

$$R_n(x) = (x-x_0)^{n+1} M.$$

Formula lui Taylor va deveni atunci

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^{n+1} M.$$

Să considerăm pe  $I$  următoarea funcție derivabilă

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + (x-t)^{n+1} M$$

și să observăm că  $\varphi(x) = f(x)$ ,  $\varphi(x_0) = f(x_0)$ . Conform teoremei lui Rolle\*\*

există  $c \in (x_0, x)$  astfel încât  $\varphi'(c) = 0$ . Dar  $\varphi'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - (n+1)(x-t)^n M$ ,

prin urmare  $\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) = (n+1)(x-c)^n M$  de unde  $M = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

și  $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ .

**Observații**

1.)  $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow x_0$  deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)^{n+1} M}{(x-x_0)^n} = 0$ .

De aceea făcând aproximarea  $f(x) \approx T_n(x)$  pe intervalul considerat, eroarea comisă în acest caz este mai mică decât  $\sup_{x \in I} |R_n(x)|$ .

2.) În cazul particular  $x_0 = 0$ , se obține **formula lui MacLaurin**\*

\*J.L. Lagrange (1736 – 1813), faimos matematician francez

\*\* M. Rolle (1652 – 1719) matematician francez, a fost primul care și-a demonstrat teorema dar numai pentru polinoame.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad \text{cu } c \in (0, x).$$

3.) Făcând notația  $h = x - x_0$ , formula lui Taylor poate fi scrisă și sub forma

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

unde  $0 < \theta < 1$ ,

sau simbolic, cu ajutorul diferențialelor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} d f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c) \quad \text{unde } c \in (x_0, x).$$

În particular, formula lui Mac Laurin ia forma

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} d f(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c) \quad \text{cu } c \in (0, x).$$

#### Example

1.) Fie  $f(x) = \ln(1+x)$ . Atunci

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

⋮

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(c) = (-1)^n \frac{n!}{(1+c)^{n+1}}$$

Cu formula lui Mac Laurin avem

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!}{3!} x^3 - \frac{3!}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n + (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

adică

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \quad \text{cu } c \in (0, x)$$

$$2.) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad \text{cu } c \in (0, x)$$

---

\*\*\* K. Mac Laurin (1698 – 1746), matematician scoțian.



$$3.) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} M \quad \text{cu } |M| \leq 1.$$

$$4.) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} M \quad \text{cu } |M| \leq 1.$$

## 4. Aplicații ale formulei lui Taylor

### Calculul aproximativ

#### Exemple

1.) Să se calculeze cu aproximație  $\sqrt[3]{30}$ .

**Soluție.** Fie  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  și  $x_0 = 27 = 3^3$ . Folosind formula lui Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + R_2(x) \quad \text{în care}$$

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x_0) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 3^{-2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3^2} x^{-5/3}$$

$$f''(x_0) = -\frac{2}{3^2} \cdot 3^{-5}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{3^3} x^{-8/3}$$

$$f'''(c) = \frac{10}{3^3} c^{-8/3} \quad 27 < c < x,$$

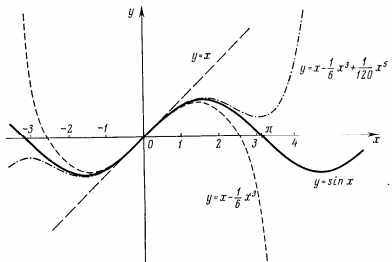
găsim pentru  $x = 30$ ,  $\sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{3}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{3^2}{2!} \left( -\frac{2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{3^5} = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3^5} \approx 3,1071$

cu eroarea  $|R_2(x)| = \left| \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(c) \right| = \left| \frac{3^3}{3!} \cdot \frac{10}{3^3} \cdot \frac{1}{c^{8/3}} \right| < \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3^8} = \frac{5}{3^9} = 0,00025.$

2.) Cu ce eroare aproximează polinomul lui Taylor de gradul 3 funcția

$$f(x) = \sin x \quad \text{pe } |x| < \frac{1}{2}?$$

**Soluție.** Avem



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{cu eroarea}$$

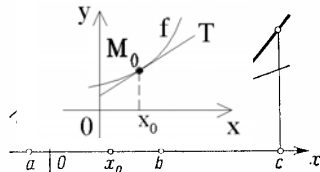
$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \sin c \right| < \frac{1}{2^4 \cdot 4!} = 0,0026$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad T_3'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

A se observa cât sunt de apropiate graficele celor două funcții pe intervalul  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . În particular  $\sin \frac{\pi}{7} \approx 0,446455$  cu eroarea mai mică decât 0,0026.

## Convexitatea și concavitata unei funcții

O funcție  $f$  derivabilă pe  $I$  este **convexă** sau **concavă** pe  $I$  după cum tangenta în orice punct al graficului ei se află sub sau deasupra graficului.



Un punct în care funcția își schimbă concavitata se numește **punct de inflexiune**.

Deoarece ecuația tangentei  $M_0T$  este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

poziția tangentei față de grafic este dată de semnul expresiei

$$E = f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

într-o vecinătate a lui  $x_0$  și anume  $f$  este convexă dacă  $E > 0$  și  $f$  este concavă dacă  $E < 0$ . Dacă  $f$  este de  $n+1$  ori derivabilă pe  $I$  și

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

atunci cu formula lui Taylor avem  $E = \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left[ f^{(n)}(x_0) + \frac{x-x_0}{n+1} f^{(n+1)}(c) \right]$ ,

de unde rezultă că atunci când

$$\begin{cases} n = \text{par}, & f \text{ este } \begin{cases} \text{convexă} & \text{dacă } f^{(n)}(x_0) > 0 \\ \text{concavă} & \text{dacă } f^{(n)}(x_0) < 0 \end{cases} \\ n = \text{impar}, & x_0 \text{ este punct de inflexiune.} \end{cases}$$

### Condiții suficiente de extrem

Punctul  $x_0$  este punct de maxim sau de minim pentru  $f$  după cum expresia  $E = f(x) - f(x_0)$  este  $< 0$  sau  $> 0$  într-o vecinătate a lui  $x_0$ .

Se știe din teorema lui Fermat\* că

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\infty$
$T_3'$	-	0	+	-
$T_3$	$\infty$	$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\infty$

\*P. Fermat (1601 – 1665) matematician francez.

punctele de extrem ale lui  $f$  se găsesc printre rădăcinile derivatei.

Să presupunem că  $f$  este de  $n + 1$  ori derivabilă pe  $I$  și că

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Cu formula lui Taylor  $E$  are expresia de sus, expresie care menține semn constant numai pentru  $n$  par.

În acest caz

$$x_0 \text{ este punct de } \begin{cases} \text{maxim} & \text{daca } f^{(n)}(x_0) < 0 \\ \text{minim} & \text{daca } f^{(n)}(x_0) > 0. \end{cases}$$

**Exemplu.** Fie  $f(x) = x^3 e^x$ . Avem

$$f'(x) = x^2(x+3)e^x, \quad f''(x) = x(x^2 + 6x + 6)e^x, \quad f'''(x) = (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x.$$

Rădăcinile ecuației  $f'(0) \neq 0$ , sunt  $x = 0$ ,  $x = -3$ . Deoarece  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) \neq 0$ , rezultă că  $x = 0$  este punct de inflexiune. Din  $f'(3) = 0$ ,  $f''(3) > 0$ , rezultă că  $x = -3$  este punct de minim. Ecuația  $f''(x) = 0$  are și rădăcinile  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3}$  pentru care  $f'''(x_{1,2}) \neq 0$ , deci și acestea sunt puncte de inflexiune.

### Ridicarea nedeterminărilor

**Exemplu.** Să se calculeze  $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}$

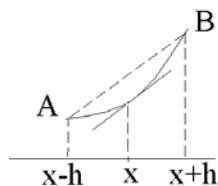
**Soluție.** Deoarece  $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + x^4 M_1$ ,  $\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + x^4 M_2$ ,

avem  $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + x^4(M_1 - M_2)}{x^3} = 4$ .

### Derivarea numerică

Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^3$  (dacă  $f$  este dată tabelar, atunci ea poate fi aproximată pe  $[a, b]$  cu un polinom de interpolare).

Aplicând formula lui Taylor avem



$f'(x) \approx$  panta lui AB

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$$

$$f(x-h) - f(x) = \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(\eta)$$

cu  $\xi \in [x, x+h]$ ,  $\eta \in [x-h, x]$ , de unde

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12} [f'''(\xi) + f'''(\eta)]$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h}{6} [f'''(\xi) + f'''(\eta)].$$

În ipoteza că  $|f''(x)| \leq M$  pentru  $x \in [a, b]$ , erorile absolute  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$  care se fac în

aproximările

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\Delta f}{h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h} = \frac{\Delta^2 f}{h^2}$$

admit evaluările:  $\varepsilon_1 \leq \frac{h^2}{12} \cdot 2M = \frac{Mh^2}{6}$ ,  $\varepsilon_2 \leq \frac{Mh}{3}$ .

În acest fel se pot calcula derivatele unei funcții date tabular în puncte echidistante.

**Exemplu.** Dacă mișcarea unui mobil este dată în primele două coloane ale tabelului alăturat, atunci

având în vedere că pasul  $h = \Delta t = 0,01$ , viteza  $v = \frac{ds}{dt}$  și accelerația  $a = \frac{d^2s}{dt^2}$  pot fi și ele determinate

tabelar după cum se observă în ultimele două coloane.

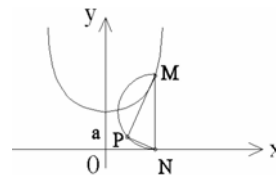
$T$	$s$	$\Delta^2 s$	$\Delta^2 s$	$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$a \approx \frac{\Delta^2 s}{\Delta t^2}$
0,00	0	2			
0,01	2	4	2	200	20.000
0,02	6	7	3	400	30.000
0,03	13	10	3	400	30.000
0,04	23	12	2	1000	20.000
0,05	35	15	3	1200	30.000
0,06	50	16	1	1500	10.000
0,07	66	17	1	1600	10.000
0,08	83			1700	

## Exerciții

1.) Pentru a construi tangenta într-un punct  $M$  al lănișorului

$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  se folosește următoarea metodă: Pe semicercul

de diametru  $MN$  unde  $N$  este proiecția lui  $M$  pe axa  $Ox$  se duce coarda  $PN = a$ . Să se demonstreze justetea ei.



2.) Să se calculeze  $f'(x)$  dacă

a.)  $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ , pentru  $a > 0$

b.)  $f(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$  după ce în prealabil a fost logaritmat

3.) Să se arate că

a.) dacă  $(a+bx)e^{\frac{y}{x}} = x$ , atunci  $x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2$ ;

b.)  $(\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$   $n \in \mathbb{N}$

c.)  $\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[ x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

4.) Să se calculeze

a.)  $df(0)(h)$  dacă  $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$  R : 1000! h

b.)  $d^3 y$  dacă  $y = x^3 e^{-x}$

c.)  $d^{100} y$  dacă  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

d.)  $d^n f(x)$  dacă  $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

5.) Folosind diferențiala să se calculeze cu aproximație

a.) variația funcției  $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$  când  $x$  variază de la  $\frac{\pi}{3}$  la  $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{100}$  R : -0,0693

b.)  $\frac{\sqrt{(2,037)^2 - 3}}{\sqrt{(2,037)^2 + 5}}$  R : 0,355

6.) Folosind formula lui Taylor să se scrie funcția  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$  după puterile lui  $x$ .

7.) Să se scrie primii trei termeni ai dezvoltării funcției  $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$  după puterile lui  $x-1$  și să se calculeze cu aproximație  $f(1,005)$ .

8.) Să se calculeze eroarea în aproximațiile

a.)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$  pentru  $x = 0,2$  R : inferioară lui  $\frac{1}{2 \cdot 10^3}$

b.)  $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$  R :  $< \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$

9.) Folosind formula lui Taylor

a.) să se determine  $a$  și  $b$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + (a+b \cos x) \sin x}{x^5}$  să fie finită.

b.) să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$

10.) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f(x) = x^n e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

R :  $n$  par  $\Rightarrow x = 0$  punct de minim

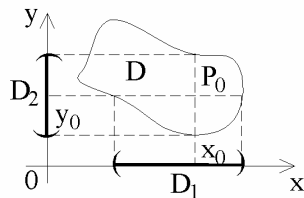
$x = -n$  punct de maxim

$n$  impar  $\Rightarrow x = -n$  punct de minim

# IV. DERIVATELE PARȚIALE ALE UNEI FUNCȚII REALE DE MAI MULTE VARIABLE

## 1. Continuitate și derivabilitate parțială

Fie  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $D$  fiind o mulțime deschisă și  $P_0(x_0, y_0) \in D$



Fie

$$D_1 = \{x \mid (x, y_0) \in D\}$$

și

$$D_2 = \{y \mid (x_0, y) \in D\}$$

Funcțiile

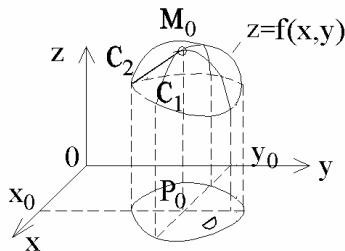
$$\varphi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = f(x, y_0)$$

$$\psi : D_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(y) = f(x_0, y)$$

sunt funcții de o singură variabilă.

**Definiție.** Spunem că funcția  $f$  este **parțial continuă în raport cu variabila  $x$**  în  $P_0$  dacă funcția  $\varphi$  este continuă în  $x_0$ .

Funcția  $f$  este **parțial continuă în raport cu  $y$**  în  $P_0$ , dacă funcția  $\psi$  este continuă în  $y_0$ .



Din punct de vedere geometric,  $y = y_0$  reprezintă un plan paralel cu planul  $xOz$ . Acesta taie suprafața de ecuație  $z = f(x, y)$  după curba  $C_1$ . În planul

$$y = y_0 \text{ ecuația curbei } C_1 \text{ este } z = f(x, y_0) = \varphi(x).$$

Deci continuitatea parțială a lui  $f$  în raport cu variabila  $x$  în  $P_0$  înseamnă continuitatea curbei  $C_1$  în

$$M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

**Propoziție.** Dacă  $f$  este continuă în  $P_0$ , atunci  $f$  este continuă în raport cu toate variabilele sale în  $P_0$ .

**Demonstrație.** Continuitatea lui  $f$  în  $P_0$  înseamnă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \eta \\ |y - y_0| < \eta \end{aligned} \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

$$\text{Făcând } y = y_0, \text{ observăm că } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

deci continuitatea lui  $\varphi$  în  $x_0$ .

Analog, făcând  $x=x_0$ , obținem continuitatea lui  $\psi$  în  $y_0$ .

Reciproca nu este în general adevărată, după cum se va putea vedea din următorul

**Exemplu.** Funcția  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } x = y = 0 \end{cases}$

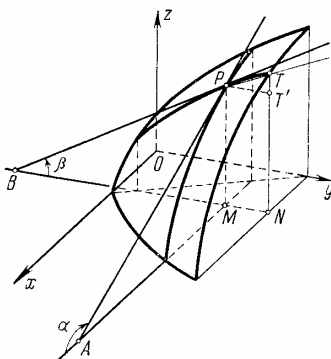
nu este continuă în origine, neavând limită în acest punct. Dar

$$\varphi(x) = f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 = f(0, 0) = \varphi(0)$$

$$\psi(y) = f(0, y) = \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0 = f(0, 0) = \psi(0).$$

**Definiție.** Spunem că funcția  $f$  este **parțial derivabilă în raport cu variabila  $x$  în  $P_0$** , dacă funcția  $\varphi$  este derivabilă în  $x_0$ .

Derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $x$  în  $P_0$  este  $\varphi'(x_0)$  și se notează  $f'_x(P_0)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ . Avem deci  $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$ .



În mod analog se definește derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $y$  în  $P_0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ .

Geometric,  $f'_x(P_0) = \varphi'(x_0)$  reprezintă panta tangentei  $M_0 T_1$  în  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  la curba  $C_1$  din planul  $y = y_0$ . Deci  $f'_x(P_0) = \text{tg } \alpha$ . Analog  $f'_y(P_0) = \text{tg } \beta$ .

**Definiție.** Funcția  $f$  este **derivabilă parțial în raport cu variabila  $x$  pe domeniul  $D$** , dacă  $f$  este derivabilă în raport cu  $x$  în orice punct  $P \in D$ .

În acest caz aplicația  $f'_x : D \rightarrow \mathbb{R}$  dată de

$$P \xrightarrow{f'_x} f'_x(P) \quad \forall P \in D$$

se numește **derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $x$** .

Analog se definește derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $y$ .

Funcțiile  $f'_x, f'_y$  sunt la rândul lor funcții de două variabile

**Exemplu.** Funcția  $f(x, y) = x \sin xy$  are derivatele parțiale  $f'_x = \sin xy + xy \cos xy$ ,  $f'_y = x^2 \cos xy$ .

**Observație.** Este evident că derivabilitatea parțială implică continuitatea parțială. Următoarea teoremă dă condiții suficiente de continuitate globală.

**Teoremă.** Dacă funcția  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  are derivate parțiale mărginite într-o vecinătate  $V$  a punctului  $P_0$ , atunci  $f$  este continuă în  $P_0$ .

**Demonstrație.** Fie  $M$  real astfel încât

$$|f'_x(P)|, |f'_y(P)| \leq M \quad \forall P \in D.$$

Aplicând de două ori formula lui Lagrange, rezultă existența a două puncte  $\xi \in (x_0, x), \eta \in (y_0, y)$  astfel încât

$$\begin{aligned} |f(P) - f(P_0)| &= |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| = \\ &= |f'_x(\xi, y)(x - x_0)| + |f'_y(x_0, \eta)(y - y_0)| \leq M(|x - x_0| + |y - y_0|) \end{aligned} \quad \text{Este}$$

evident că atunci când  $P \rightarrow P_0$  ( $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ ),  $f(P) \rightarrow f(P_0)$  și deci  $f$  este continuă în  $P_0$ .

**Consecință.** Dacă funcțiile  $f'_x$  și  $f'_y$  sunt mărginite pe  $D$ , atunci funcția  $f$  este continuă pe  $D$ .

**Observație.** Definițiile ca și rezultatele din acest paragraf se extind cu ușurință pentru funcții cu mai mult de două variabile.

**Derivate parțiale de ordin superior**

Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției  $f$  se definesc astfel:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x, f''_{xy} = (f'_x)'_y, f''_{yx} = (f'_y)'_x, f''_{y^2} = (f'_y)'_y$$

dacă ele există.

Se pot considera și derivate parțiale de ordin mai mare decât doi. De exemplu

$$f'''_{x^2y} = (f''_{x^2})'_y \text{ care se mai poate nota și } \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

În general derivatele mixte  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  nu sunt egale.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente ca ele să fie egale.

**Teoremă.** (H.A.Schwarz). Dacă funcția  $f$  admite într-o vecinătate a punctului  $P_0$  derivate mixte de ordinul doi continue în  $P_0$ , atunci  $f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$ .

**Demonstrație.** Fie expresia

$$E = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$$

și funcția auxiliară

$$\varphi(x) = f(x, y) - f(x, y_0).$$

Avem

$$\begin{aligned} E &= \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi_1)(x - x_0) = [f'_x(\xi_1, y) - f'_x(\xi_1, y_0)](x - x_0) = \\ &= f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

unde  $\xi_1 \in (x_0, x), \eta_1 \in (y_0, y)$ .

Analog, considerăm funcția auxiliară  $\psi(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$ .

Avem

$$\begin{aligned} E &= \psi(y) - \psi(y_0) = \psi'(\eta_2)(y - y_0) = [f'_y(x, \eta_2) - f'_y(x_0, \eta_2)](y - y_0) = \\ &= f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

unde  $\xi_2 \in (x_0, x), \eta_2 \in (y_0, y)$ .



Rezultă  $f''_{xy}(\xi_1, \eta_1) = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)$ , de unde prin trecere la limită când  $P \rightarrow P_0$  și ținând seama de continuitatea derivatelor mixte în  $P_0$  obținem  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

**Consecință.** Dacă  $f$  admite derivate mixte continue pe  $D$ , atunci ele sunt egale.

### Derivarea funcțiilor compuse

**Teoremă.** Fie  $f(u, v): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cu derivate parțiale continue și funcțiile  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  definite pe  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile.

Atunci funcția compusă  $F(x) = f(u(x), v(x))$  este derivabilă și

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} v'(x).$$

**Demonstrație.** Fie  $x_0 \in [a, b]$  oarecare,  $u(x_0) = u_0$ ,  $v(x_0) = v_0$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(u, v) - f(u_0, v)}{x - x_0} + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(u, v) - f(u_0, v)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{v - v_0} \cdot \frac{v - v_0}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Trecând la limită, când  $x \rightarrow x_0$  avem  $u \rightarrow u_0$ ,  $v \rightarrow v_0$ .

Ținând seama și de continuitatea derivatelor parțiale rezultă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot u'(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot v'(x_0).$$

**Exemplu** (Identitatea lui Euler\*). O funcție  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se spune că este **omogenă de grad  $m$**  ( $m \in \mathbb{R}$ ) dacă

$$(1) f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall 0 \neq t \in \mathbb{R}.$$

În ipoteza că  $f$  admite derivate parțiale de ordinul întâi continue, este valabilă identitatea

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_n f'_{x_n} = m f.$$

Într-adevăr, notând cu  $u_i = t x_i$   $i = 1, n$  și derivând în raport cu  $t$  relația (1) avem

$$f'_{u_1} \cdot x_1 + f'_{u_2} \cdot x_2 + \dots + f'_{u_n} \cdot x_n = m t^{m-1} f$$

Identitatea lui Euler rezultă acum făcând  $t = 1$ ; în acest caz  $u_i = x_i$ .

**Consecință.** Dacă  $f = f(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , atunci derivatele parțiale ale funcției compuse  $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  sunt date de formulele

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

### Observații

\* Leonhard Euler (1707 – 1783), elvețian de origine, mare matematician fizician și mecanician. Membrul al Academiei de Științe din Petersburg.

1) Pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul doi ale lui  $F$  va trebui să avem în vedere că  $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))$ . Așa de exemplu.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

2.) Formulele (2) se pot generaliza pentru funcții cu mai mult de două variabile.

## 2. Diferențiabilitate

Fie  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  mulțime deschisă.

**Definiție.** Funcția  $f$  este **diferențiabilă în punctul**  $P_0 \in D$ , dacă există o aplicație liniară

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ astfel încât } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(P_0 + h) - f(P_0) - L(h)|}{\|h\|} = 0 \text{ unde } h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \text{ este}$$

asa ca  $P_0 + h = (x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) \in D$ .

$L(h)$  se numește **diferențiala** lui  $f$  în  $P_0$  și se notează  $df(P_0)$ .

$L$  fiind o aplicație liniară de  $h$  are forma

$$L(h) = D_1 h_1 + D_2 h_2 + \dots + D_n h_n = (D_1, D_2, \dots, D_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Definind derivata funcției  $f$  în  $P_0$  prin  $f'(P_0) = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ , diferențiala funcției  $f$  în  $P_0$  se scrie  $df(P_0) = f'(P_0)h$ .

**Teorema 1.** Dacă  $f$  este diferențiabilă în  $h$ , atunci  $f$  este parțial derivabilă în  $P_0$  în raport cu toate variabilele sale și  $D_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \quad i = \overline{1, n}$ .

**Demonstrație.** Fie  $f$  diferențiabilă în  $P_0$ . În cazul particular când  $h = (0, 0, \dots, h_i, 0, \dots, 0)$  avem  $\|h\| = |h_i|$  și  $L(h) = D_i h_i$ .

$$\text{Din } \lim_{h_i \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0) - D_i h_i}{h_i} \right| = 0 \text{ rezultă}$$

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h_i} = D_i \quad i = \overline{1, n}, \text{ adică } \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = D_i.$$

**Observația 1.** În cazul funcțiilor de o singură variabilă diferențiabilitatea și derivabilitatea sunt noțiuni echivalente.

Într-adevăr, dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , atunci

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \rightarrow 0$$

când  $h \rightarrow 0$  (vezi §2 cap.V), deci  $f$  este diferențiabilă în  $x_0$  și  $df(x_0) = f'(x_0)h$ .

Teorema 1 arată că diferențiabilitatea în  $x_0$  implică derivabilitatea în  $x_0$  și că  $D_1 = f'(x_0)$ , de unde  $df(x_0) = f'(x_0)h$ .

**Observația 2.** Reciproca teoremei 1 nu este adevărată, adică nu orice funcție care admite derivate parțiale este diferențiabilă.

**Exemplu.** Fie  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } x = y = 0 \end{cases}$ . Avem

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Pe de altă parte funcția  $\frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0)}{\|h\|} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$  nu are limită când  $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ ,

după cum am văzut în §1, deci  $f$  nu este diferențiabilă în origine.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente ca o funcție să fie diferențiabilă.

**Teorema 2.** Dacă funcția  $f$  admite derivate parțiale în raport cu toate variabilele într-o vecinătate a punctului  $P_0$ , continue în  $P_0$ , atunci  $f$  este diferențiabilă în  $P_0$ .

**Demonstrație.** Aplicând de  $n$  ori formula lui Lagrange și ținând cont de continuitatea derivatelor parțiale  $f'_{x_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) în  $P_0$ , rezultă existența funcțiilor  $\alpha_i(P_0, h)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) cu proprietatea că  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \alpha_i(P_0, h) = 0$  și astfel ca

$$\begin{aligned} f(P_0 + h) - f(P_0) &= f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \\ &= f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) + \\ &+ f(x_1^0, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 + h_n) + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \\ &= f'_{x_1}(\xi_1, x_2^0 + h_2, \dots, x_n^0 + h_n) \cdot h_1 + f'_{x_2}(x_1^0, \xi_2, x_3^0 + h_3, \dots, x_n^0 + h_n) \cdot h_2 + \dots \\ &+ f'_{x_n}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, \xi_n) \cdot h_n = \\ &= [f'_{x_1}(P_0) + \alpha_1(P_0, h)]h_1 + [f'_{x_2}(P_0) + \alpha_2(P_0, h)]h_2 + \dots + [f'_{x_n}(P_0) + \alpha_n(P_0, h)]h_n = \\ &= L(h) + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n, \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h) - f(P_0) - L(h)}{\|h\|} &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n|}{\|h\|} \leq \\ &\leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) = 0 \end{aligned}$$

deci  $f$  este diferențiabilă în  $P_0$ .

**Consecință.** Dacă  $f$  admite derivate parțiale continue pe  $D$ , atunci  $f$  este diferențiabilă pe  $D$ , adică diferențiabilă în  $\forall P \in D$ .

În acest caz

$$d f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) h_n \quad \forall P \in D.$$

În particular, dacă  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i \quad i = \overline{1, n}$ , atunci cum  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$  pentru  $j \neq i$

și  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$ , rezultă  $d x_i = h_i$ .

$$\text{Astfel} \quad d f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) d x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) d x_n.$$

Aplicația  $d f$  dată de  $P \xrightarrow{d f} d f(P) \quad \forall P \in D$

este **diferențiala funcției  $f$**   $d f = \frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d x_n$

iar **derivata funcției diferențiale  $f$**  este  $f' = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ .

Diferențiala lui  $f$  se mai poate pune sub forma

$$d f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f \text{ în care operatorul}$$

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} d x_n$$

care duce  $f$  în  $d f$  se numește operator diferențial.

**Exemplu.** Fie  $f(x, y, z) = x^3 y^2 e^z$  și  $P_0(-1, 2, 0)$ . Atunci

$$d f(P) = 3x^3 y^2 e^z dx + 2x^3 y e^z dy + x^3 y^2 e^z dz$$

iar  $d f(P_0) = 12 dx - 4 dy - 4 dz$  sau  $d f(P_0)(h_1, h_2, h_3) = 12 h_1 - 4 h_2 - 4 h_3$ .

**Proprietăți ale funcțiilor diferențiabile:**

1.) Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $D$  atunci funcțiile

$f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) sunt diferențiabile pe  $D$  și

$$d(f + g) = d f + d g$$

$$d(f \cdot g) = g d f + f d g$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g d f - f d g}{g^2}$$

Diferențiabilitatea rezultă cu teorema precedentă iar formulele reies din calcul direct. De

$$\text{exemplu } d(f \cdot g) = \sum_1^n (fg)'_{x_i} = \sum_1^n (gf'_{x_i} + fg'_{x_i}) dx_i = g \sum_1^n f'_{x_i} dx_i + f \sum_1^n g'_{x_i} dx_i = gdf + fdg.$$

2.) Dacă  $f$  este diferențiabilă, atunci  $f = \text{const} \Rightarrow df = 0$  pe  $D$ . Este clar că  $f = \text{const} \Rightarrow df = 0$ . Reciproc, dacă

$$df(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)h_n = 0 \quad \forall P \in D,$$

atunci pentru  $h = (0, 0, \dots, h_i, 0, \dots, 0)$  cu  $h_i \neq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) rezultă  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)h_i = 0$

$\forall P \in D$ , de unde  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  pe  $D$ . Acesta înseamnă că  $f$  nu depinde de  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) și

deci  $f = \text{const}$ .

3.) Dacă  $f$  este diferențiabilă, atunci  $f$  este continuă.

Într-adevăr, fie  $P_0 \in D$ . Din

$$f(P) - f(P_0) = L(h) + \omega(P_0, h) \text{ cu } \frac{\omega(P_0, h)}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \text{ rezultă că atunci când}$$

$P \rightarrow P_0, h \rightarrow 0$  și cum  $L$  este funcție liniară de  $h$ ,  $L(h) = \sum D_i h_i \rightarrow 0$  și deci  $f(P) \rightarrow f(P_0)$

4.) Variația funcției  $\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx df(P_0)$  deoarece  $\omega(P_0, h) \rightarrow 0$  când  $h \rightarrow 0$ .

**Aplicație.** Înălțimea unui con este  $h = 30 \text{ cm}$ , raza bazei  $r = 1 \text{ cm}$ . Să se studieze variația volumului conului dacă mărim  $h$  cu  $3 \text{ mm}$  și micșorăm  $r$  cu  $1 \text{ mm}$ .

**Soluție.** Avem  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ,  $dh = 0,3 \text{ cm}$ ,  $dr = -0,1 \text{ cm}$  și

$$\begin{aligned} \Delta V \approx dV &= \frac{\partial V}{\partial h} dh + \frac{\partial V}{\partial r} dr = \pi \frac{r^3}{3} dh + \frac{2\pi}{3} rh dr = \frac{\pi}{3} r (r dh + 2h dr) = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 10 (10 \cdot 0,3 - 2 \cdot 30 \cdot 0,1) = -10 \pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Volumul scade cu  $10 \pi \text{ cm}^3$ , fapt greu de bănuț de la început.

**Diferențiale de ordin superior.**

O funcție  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  care admite derivate parțiale de ordinul  $p$  continue pe  $D$  se spune că este **de clasă**  $C^p(D)$  și se scrie  $f \in C^p(D)$ .

Fie  $f \in C^2(D)$  și  $P_0 \in D$ . Am văzut că diferențiala de ordinul întâi a lui  $f$  în  $P_0$  este

$$\text{aplicația liniară } df(P_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad df(P_0)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) h_i$$

Forma pătratică  $d f(P_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $d^2 f(P_0)(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$

se numește diferențiala a II-a a lui  $f$  în  $P_0$ .

În mod asemănător, dacă  $f \in C^p(D)$ , se **definește diferențiala de ordinul  $p$  a lui  $f$  în  $P_0$**  ca fiind aplicația  $d^p f(P_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dată de formula

$$d^p f(P_0)(h) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^{(p)} f(P_0)$$

ridicarea la putere fiind simbolică.

**Exemplu.** Fie  $f(x, y) = x^2 y^3$  și  $P_0(2, 1)$ . Avem

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 2xy^3 \\ f'_y = 3x^2 y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d f = f'_x d x + f'_y d y = 2xy^3 d x + 3x^2 y^2 d y \\ d f(2, 1) = 4 d x + 12 d y \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''_{x^2} = 2y^2 \\ f''_{xy} = 6xy^2 \\ f''_{y^2} = 6x^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d^2 f = f''_{x^2} d x^2 + 2f''_{xy} d x d y + f''_{y^2} d y^2 = \\ = 2y^2 d x^2 + 12xy^2 d x d y + 6x^2 y d y^2 \\ d^2 f(2, 1) = 2 d x^2 + 24 d x d y + 24 d y^2 \end{array}$$

Evident că putem scrie și  $d f(2, 1)(h_1, h_2) = 4h_1 + 12h_2$

$$d^2 f(2, 1)(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 24h_1 h_2 + 24h_2^2.$$

**Observația 1.** Calculul diferențialelor de ordin superior se poate face și prin diferențieri succesive folosind regulile de diferențiere. Vom dovedi aceasta pentru  $p = 2$ . În acest caz avem

$$\begin{aligned} d(df) &= d \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h_i \right) = \sum_{i=1}^n d \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot h_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_j \right) h_i = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot h_i h_j = d^2 f. \end{aligned}$$

**Observația 2.** Diferențiala funcției compuse  $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  este

$$\begin{aligned} dF &= F'_x dx + F'_y dy = (f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x) dx + (f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y) dy = \\ &= f'_u (u'_x dx + u'_y dy) + f'_v (v'_x dx + v'_y dy) = f'_u du + f'_v dv. \end{aligned}$$

Proprietatea că  $dF = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) F = \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right) f = df$

se numește **proprietatea de invarianță a formei**.

Ea nu se mai păstrează la diferențiala de ordinul doi, adică

$$d^2 F = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} F \neq \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^{(2)} f$$

deoarece

$$d^2 F = d(dF) = d(f'_u du + f'_v dv) = f''_{u^2} du^2 + 2f''_{uv} dudv + f''_{v^2} dv^2 + f'_u d^2 u + f'_v d^2 v = d^2 f + f'_u d^2 u + f'_v d^2 v.$$

iar  $d^2 u$  și  $d^2 v$  fiind diferențialele de ordinul doi ale unor funcții (și nu a unor variabile) nu sunt totdeauna nule. Așadar

$$d^2 F = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} F = \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^{(2)} f + f'_u d^2 u + f'_v d^2 v.$$

### 3. Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Fie  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  mulțime deschisă

**Teoremă.** Dacă  $f \in C^{n+1}(D)$ , atunci oricare ar fi punctele  $P_0, P \in D$ , există un punct

$$P_1 \in (P_0, P) \text{ astfel încât } f(P) = f(P_0) + \frac{1}{1!} d f(P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(P_1)^*$$

**Demonstrația** o vom face în cazul particular când  $k = 2$ . Fie deci  $f = f(x, y)$  și  $P_0(x_0, y_0)$ . Funcția compusă  $F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$  este evident de  $(n+1)$  ori derivabilă pe  $[0, 1]$  și  $F(0) = f(x_0, y_0)$ ,  $F(1) = f(x, y)$ .

Să-i aplicăm formula lui MacLaurin. Avem

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{2} d F(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta) \text{ cu } 0 < \theta < 1.$$

Dar pentru funcția  $F(t) = f(u(t), v(t))$  unde  $u = x_0 + t(x - x_0)$  și  $v = y_0 + t(y - y_0)$  avem

$$dF = df \quad (\text{proprietatea de invarianță a formei})$$

$$d^2 F = d^2 f + f'_u d^2 u + f'_v d^2 v = d^2 f$$

deoarece în cazul de față  $d^2 u = d^2 v = 0$ . Analog găsim  $d^n F = d^n f$ .

Făcând acum  $t = 1$ , se obține

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} d f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_1, y_1)$$

unde  $P_1(x_1, y_1)$  este un punct ce aparține segmentului  $(P_0, P)$  deoarece  $x_1 = x_0 + \theta(x - x_0)$  și  $y_1 = y_0 + \theta(y - y_0)$  cu  $\theta \in (0, 1)$ .

**Observații.**

1) În cazul particular în care  $n = 0$  se obține formula creșterilor finite a lui Lagrange pentru funcții de mai multe variabile și anume:

$$f(P) - f(P_0) = d f(P_1) h = f'(P_1)(P - P_0) \quad P_1 \in (P_0, P) \text{ sau}$$

---

\* Scrierea formulei este simbolică, pentru că aici  $d^n f(P_0) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (x - x_1^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_k - x_k^0) \right]^{(n)} f(P_0)$

$$f(x_1, \dots, x_k) - f(x_1^0, \dots, x_k^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \dots, \xi_k)(x_1 - x_1^0) + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1, \dots, \xi_k)(x_2 - x_2^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)(x_k - x_k^0)$$

unde  $\xi_i \in (x_i^0, x_i)$   $i = \overline{1, K}$ .

2) Formula lui Taylor poate fi folosită în calculul aproximativ având în vedere că variația funcției  $f$

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx \frac{1}{1!} df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0)$$

**Exemple.**

1.) Să se dezvolte funcția  $f(x, y) = x^2 y - 2xy + 2x^2 - 4x + y + 2$  după puterile lui  $x - 1$  și  $y + 2$ .

**Soluție.** Vom aplica formula lui Taylor funcției  $f$  în  $P_0(1, 2)$ . Din

$$\begin{aligned} f'_x &= 2xy - 2y + 4x - 4 & f''_{x^3} &= 0 \\ f'_y &= x^2 - 2x + 1 & f'''_{x^2 y} &= 2 \\ f''_{x^2} &= 2y + 4 & f'''_{xy^2} &= 0 \\ f''_{xy} &= 2x - 2 & f'''_{y^3} &= 0 \\ f''_{y^2} &= 0 \end{aligned}$$

rezultă că  $df(P_0) = d^2 f(P_0) = 0$  și

$$d^3 f(P_0) = f'''_{x^3}(P_0) dx^3 + 3f'''_{x^2 y}(P_0) dx^2 dy + 3f'''_{xy^2}(P_0) dx dy^2 + f'''_{y^3}(P_0) dy^3 = 3 \cdot 2 dx^2 dy,$$

de unde  $f(x, y) = \frac{1}{3!} d^3 f(P_0) = (x-1)^2 (y+2)$ .

2) Să se calculeze cu aproximație  $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$ .

**Soluție.** Vom considera funcția  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$  și vom folosi aproximația

$$f(P) - f(P_0) \approx \frac{1}{1!} df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) \text{ unde } P_0(1, 0).$$

Avem

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 + y^2)^{1/3} & P_0(1, 0) & \\ f'_x &= \frac{1}{3} \cdot 2x(x^2 + y^2)^{-2/3} & 1 & \\ f'_y &= \frac{1}{3} \cdot 2y(x^2 + y^2)^{-2/3} & \frac{2}{3} & \\ & & 0 & \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} f(x, y) \\ f'_x \\ f'_y \end{aligned}} \right\} \Rightarrow df(P_0) = \frac{2}{3} dx$$



$$\left. \begin{aligned} f''_{x^2} &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^{-2/3} - \frac{4}{9} x \cdot 2x \left( \frac{1}{3} \right)^{-5/3} & -\frac{2}{9} \\ f''_{xy} &= -\frac{4}{9} \cdot 2y \left( \frac{1}{3} \right)^{-5/3} & 0 \\ f''_{y^2} &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^{-2/3} - \frac{4}{9} y \cdot 2y \left( \frac{1}{3} \right)^{-5/3} & \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^2 f(P_0) = -\frac{2}{9} dx^2 + \frac{2}{3} dy^2,$$

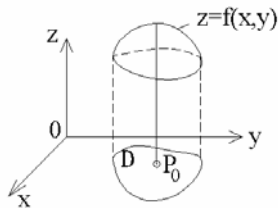
de unde având în vedere că  $dx = x - x_0 = 0,02$  și  $dy = 0,05$  rezultă

$$\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2} \approx 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,02 + \frac{1}{2!} \left[ -\frac{2}{9} \cdot (0,02)^2 + \frac{2}{3} \cdot (0,05)^2 \right] \approx 1,0141222.$$

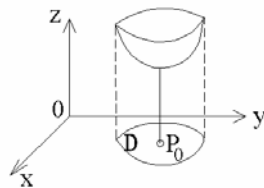
#### 4. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Pentru început vom considera funcția de două variabile. Fie așadar  $D \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime deschisă și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definiție.** *Punctul  $P_0 \in D$  se numește punct de maxim pentru  $f$  dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $P_0$  astfel încât  $f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in V$*



$P_0$  punct de maxim



$P_0$  punct de minim

Analog se definește punctul de minim.

Un punct de maxim sau de minim se numește punct de extrem.

**Teoremă (Fermat).**

*Dacă  $f$  admite derivate parțiale de ordinul întâi într-o vecinătate a punctului de extrem  $P_0$ , atunci aceasta se anulează în  $P_0$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $P_0(x_0, y_0)$  este punct de extrem pentru  $f$ , atunci  $x_0$  este punct de extrem pentru funcția de o singură variabilă  $\varphi(x) = f(x, y_0)$  și deci conform teoremei lui Fermat  $\varphi'(x_0) = 0$  adică  $f'_x(P_0) = 0$ . În mod analog se arată că  $f'_y(P_0) = 0$ .

**Definiție.** *Un punct  $P_0$  în care se anulează toate derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  se numește punct staționar (sau punct critic) pentru  $f$ .*

Punctele staționare sunt deci soluții ale sistemului  $\{ f'_x = 0, f'_y = 0$

După cum am văzut mai sus orice punct de extrem este punct staționar.

Dar nu orice punct staționar este punct de extrem.

Următoarea teoremă depistează punctele de extrem din cele staționare.

**Teoremă.** *Fie  $P_0$  punct staționar pentru funcția  $f \in C^2(D)$  și numărul*

$$\Delta(P_0) = [f''_{xy}(P_0)]^2 - f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0).$$

Atunci 1°. dacă  $\Delta(P_0) < 0$ , atunci  $P_0$  este punct de extrem și anume

$$\text{punct de } \begin{cases} \text{maxim dacă } f''_{x^2}(P_0) < 0 \\ \text{minim dacă } f''_{x^2}(P_0) > 0 \end{cases}$$

2°. dacă  $\Delta(P_0) > 0$ , atunci  $P_0$  nu este punct de extrem.

**Demonstrație.** Folosind formula lui Taylor, avem

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{1}{2} d^2 f(P_1) \quad \text{unde } P_1 \in (P_0, P).$$

Cum  $P_0$  este punct staționar și  $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$ , rezultă  $df(P_0) = 0$ . Urmează că

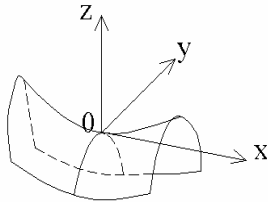
$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} d^2 f(P_1) = \frac{1}{2} [f''_{x^2}(P_1)h_1^2 + 2f''_{xy}(P_1)h_1h_2 + f''_{y^2}(P_1)h_2^2].$$

Având în vedere continuitatea derivatelor parțiale de ordinul doi în  $P_0$ , rezultă

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} [(f''_{x^2}(P_0) + \alpha_1)h_1^2 + 2(f''_{xy}(P_0) + \alpha_2)h_1h_2 + (f''_{y^2}(P_0) + \alpha_3)h_2^2] = \\ = \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \omega(P_0, h) \quad \text{unde } \omega(P_0, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \text{Deci semnul diferenței } f(P) - f(P_0) \text{ este}$$

$$\text{dat de } d^2 f(P_0) = h_2^2 [f''_{x^2}(P_0) \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2f''_{xy}(P_0) \frac{h_1}{h_2} + f''_{y^2}(P_0)] \text{ care are semn constant}$$

$\forall h_1, h_2 \neq 0$  numai dacă  $\Delta(P_0) < 0$  și anume pozitiv dacă  $f''_{x^2}(P_0) > 0$ , ceea ce implică  $f(P) \geq f(P_0)$  și negativ dacă  $f''_{x^2}(P_0) < 0$ , ceea ce implică  $f(P) \leq f(P_0)$ .



Dacă  $\Delta(P_0) > 0$ , atunci  $d^2 f(P_0)$  poate fi atât pozitiv cât și negativ. Se spune în acest caz că  $P_0$  este punct ș.a.

**Exemplu.** Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

**Soluție.** Punctele staționare ale lui  $f$  sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x \equiv 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y \equiv 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Obținem  $x_1 = 1, y_1 = 1$  și  $x_2 = 0, y_2 = 0$ , deci  $P_1(1,1), P_2(0,0)$ . Derivatele de ordinul doi ale lui  $f$  calculate în cele două puncte sunt:

$$f''_{x^2} = 6x \quad \begin{array}{|c|c|} \hline P_1 & P_2 \\ \hline 6 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f''_{xy} = -3 \\ f''_{y^2} = 6y \end{array} \quad \left| \begin{array}{c|c} -3 & -3 \\ \hline 6 & 0 \end{array} \right|$$

Din  $\Delta(P_1) = (-3)^2 - 36 < 0$ ,  $f''_{x^2}(P_1) = 6 > 0$  rezultă că  $P_1$  este punct de minim, din  $\Delta(P_2) = (-3)^2 > 0$ , rezultă că  $P_2$  nu este punct de extrem.

Valoarea minimă a funcției este  $f_{\min} = f(1, 1) = -1$ , se deduce de aici că  $x^3 + y^3 - 3xy + 1 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**Observație.** În cazul funcțiilor cu mai mult de două variabile definițiile și teorema lui Fermat rămân valabile. Așadar, punctele de extrem ale funcției  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  sunt soluții (dar nu soluțiile) ale sistemului:  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ .

Pentru a afla dacă un punct staționar  $P_0$  este sau nu punct de extrem procedăm exact ca și în cazul funcțiilor de două variabile. Semnul diferenței  $f(P) - f(P_0)$  este dat de semnul

$$\text{diferențialei de ordinul doi a lui } f \text{ în } P_0 \quad d^2 f(P_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(P_0) h_i h_j$$

care este o formă pătratică, și care dacă este pozitiv definită, atunci  $f(P) \geq f(P_0)$  și deci  $P_0$  este punct de minim, iar dacă este negativ definită, atunci  $P_0$  este punct de maxim.

$$\text{Notând } a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(P_0) \text{ și } \delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

conform teoremei lui Sylvester, rezultatul este următorul:

1°. dacă  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0 \Rightarrow P_0$  punct de minim

2°. dacă  $-\delta_1, \delta_2, -\delta_3, \dots, (-1)^n \delta_n > 0 \Rightarrow P_0$  punct de maxim.

**Exemplu.** Să se determine extremul funcției

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$$

**Soluție.** Avem

$$\begin{array}{lll} f'_x = 2x - z + 2 & f''_{x^2} = 2 & f''_{y^2} = 2 \\ f'_y = 2y - z + 2 & f''_{xy} = 0 & f''_{yz} = -1 \\ f'_z = 2z - x - y + 2 & f''_{xz} = -1 & f''_{z^2} = 2 \end{array}$$

Sistemul  $f'_x = 0$ ,  $f'_y = 0$ ,  $f'_z = 0$  dă singurul punct staționar  $P_0(-3, -3, -4)$  pentru

$$\text{care } \delta_1 = 2 > 0, \delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

deci  $P_0$  este punct de minim și valoarea minimă a funcției este  $f(-3, -3, -4) = -12$ .

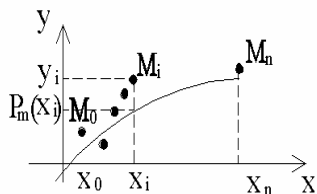
## 5. Metoda celor mai mici pătrate

Fie  $f$  o funcție dată tabelar. Deși expresia analitică a ei este necunoscută, se pune problema aflării chiar și aproximative a valorii ei într-un punct arbitrar  $x$ . Aceasta este

problema interpolării.

Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea unui polinom

$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  în general de grad  $m \leq n$  care să nu treacă neapărat prin punctele  $M_i(x_i, y_i)$  dar care să aproximeze cel mai bine funcția dată, în sensul că suma pătratelor erorilor



$$R = r_0^2 + r_1^2 + \dots + r_{n-1}^2 = \sum_0^n r_i^2 = \sum_0^n (P_m(x_i) - y_i)^2$$

să fie minimă.

În cazul aproximației liniare ( $m = 1$ ),  $P_1(x) = a_0 + a_1x$  iar

expresia  $R = \sum_0^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2$  fiind o funcție în variabilele

$a_0$  și  $a_1$ , este minimă dacă

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial a_0} = 2 \sum_0^n (a_0 + a_1x_i - y_i) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial a_1} = 2 \sum_0^n x_i (a_0 + a_1x_i - y_i) = 0. \end{cases}$$

Se obține evident sistemul liniar

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

în necunoscutele  $a_0$  și  $a_1$ , care dă soluția în mod unic.

În cazul  $m = 2$ , aproximația se numește pătratică, polinomul este  $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,

și expresia

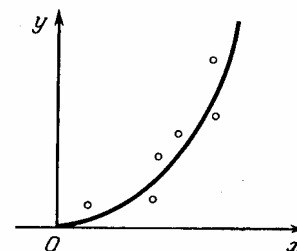
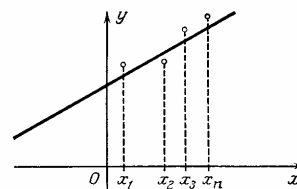
$$R = \sum_0^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2$$

$x_0$	$x_1$			$x_n$
$y_0$	$y_1$			$y_n$

este minimă dacă

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial a_2} = 0. \text{ Efectuând calculele se obține}$$

sistemul



$$\begin{aligned}(n+1)a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 &= \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 &= \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 y_i.\end{aligned}$$

care dă în mod unic necunoscutele  $a_0, a_1, a_2$ .

Pentru cazul general se procedează analog.

**Exemplu.** Pentru a scrie aproximația liniară a funcției date pe coloanele  $x$  și  $y$  formăm coloanele  $x^2, xy$  și suma  $\sum$

	$x$	$y$	$x^2$	$xy$
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
$\sum$	56	40	524	364

Formăm sistemul

$$\begin{cases} 8a_0 + 56a_1 = 40 \\ 56a_0 + 524a_1 = 364 \end{cases}$$

care dă  $a_0 = \frac{6}{11}, a_1 = \frac{7}{11}$ .

Prin urmare funcția tabelară dată poate fi aproximată de dreapta

$$y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$$

Să observăm că centrul de greutate al punctelor  $M_i(x_i, y_i)$   $G\left(\frac{\sum x_i}{8}, \frac{\sum y_i}{8}\right) = G(7,5)$

aparține dreptei  $7x - 11y + 6 = 0$ .

## Exerciții

1.) Să se verifice teorema lui Euler pentru  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \ln \frac{x}{y}$

2.) Să se determine  $z = z(x, y)$  știind că  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$  și că  $z(x, y) = \sin y$  atunci când  $x = 1$ .

$$R: z = \frac{x^2}{2} + y^2 \ln x + \sin y - \frac{1}{2}$$

3.) Care este unghiul dintre curbele plane obținute prin intersecția suprafețelor  $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$  și

$$z = \frac{x^2 + y^2}{3} \text{ cu planul } y = 2?$$

$$R: \arctg \frac{4}{7}$$

4.) Pornind de la definiție să se calculeze  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2, 2)$  dacă  $z = \sqrt[3]{x^2 y}$ .

5.) Să se calculeze  $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$  dacă  $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ ,  $x \neq y$ .

$$R: (-1)^m \cdot 2(m+n-1) \frac{nx+my}{(x+y)^{m+n+1}}$$

6.) Să se arate că dacă

a.)  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , atunci  $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$ ,  $\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$

b.)  $z = e^y \varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ , atunci  $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$

c.)  $u = \frac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ , atunci  $xu'_x + yu'_y + zu'_z = u + \frac{xy}{z}$ .

7.) Să se calculeze cu aproximație

a.) variația funcției  $z = \frac{x+3y}{y-3x}$  când  $x$  variază de la  $x_1 = 2$  la  $x_2 = 2,5$  și  $y$  de la  $y_1 = 4$  la

$y_2 = 3,5$ .

b.)  $(0,95)^{2,01}$

8.) Să se calculeze  $d^2 u$  dacă

a.)  $u = f(t, t^2, t^3)$ , b.)  $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ , c.)  $u = f(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$ .

9.) Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul trei pentru funcția  $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$  în  $(1,1)$ .

10.) Să se scrie  $f(x+h, y+k, z+\ell)$  în puteri ale lui  $h, k, \ell$  dacă

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

11.) Cursurile a două ape sunt reprezentate aproximativ de parabola  $y = x^2$  și de dreapta

$x - y - 2 = 0$ . Se cere să se unească cele două cursuri de apă printr-un canal rectiliniu de lungime minimă. Ce puncte leagă ?

$$R: A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{1}{8}, \frac{17}{8}\right)$$

12.) Să se arate că  $x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \geq 4 \quad \forall x,y,z > 0$ .

13.) Să se determine extremele funcției  $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .

## V. Derivata unei funcții vectoriale

### 1. Diferențiabilitate

Fie  $f$  o funcție definită pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  cu valori în  $\mathbb{R}^m$  și  $f_1, f_2, \dots, f_m$  componentele sale scalare.

**Definiție.** Spunem că  $f$  este **diferențiabilă în punctul**  $P_0 \in D$  dacă există o transformare liniară  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  astfel încât pentru  $P_0 + h \in D$  să avem

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(P_0 + h) - f(P_0) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Transformarea liniară  $L(h)$  se notează  $df(P_0)$  și se numește **diferențiala funcției  $f$  în  $P_0$** .

**Teorema 1.** Funcția  $f$  este diferențiabilă în  $P_0$  dacă și numai dacă componentele ei scalare  $f_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) sunt diferențiabile în  $P_0$ . În acest caz

$$df(P_0) = \begin{pmatrix} df_1(P_0) \\ df_2(P_0) \\ \vdots \\ df_m(P_0) \end{pmatrix}$$

**Demonstrație.** Fie  $A = (a_{ij})$   $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  matricea transformării liniare

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  care apare în definiția diferențiabilității funcției  $f$  în  $P_0$ .

O relație de forma

$$f(P_0 + h) - f(P_0) - A \cdot h = \omega(h) \quad \text{cu} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = 0$$

este echivalentă cu relațiile de pe componente:

$$f_i(P_0 + h) - f_i(P_0) - \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j = \omega_i(h) \quad \text{cu} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega_i(h)\|}{\|h\|} = 0$$

care exprimă diferențiabilitatea funcțiilor  $f_i$  în  $P_0$  și faptul că  $df_i(P_0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Cu teorema 1. & 2 cap VI avem însă  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0)$ . Astfel

$$df(P_0) = A \cdot h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1(P_0) \\ \vdots \\ df_m(P_0) \end{pmatrix}$$

Definind **derivata funcției  $f$  în  $P_0$**  ca fiind matricea

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

numită **matricea Jacobi\*** a funcției  $f$  în punctul  $P_0$  putem scrie  $df(P_0) = f'(P_0)h$

Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă pe  $D$ , adică diferențiabilă în orice punct  $P \in D$ , atunci are loc formula  $df(P) = f'(P) \quad \forall P \in D$ .

În acest caz aplicația  $f'$  dată de  $P \xrightarrow{f'} f'(P) \quad \forall P \in D$  se numește derivata funcției diferențiabile  $f$ .

Ea este dată de matricea funcțională  $f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ .

În cazul în care  $m = n$ , determinantul asociat matricei de sus se numește **determinant funcțional** sau **iacobian** și se notează  $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ .

**Exemple.**

1.) Diferențiala funcției  $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $f(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} xu \\ zy^2 \\ yu \end{pmatrix}$ , fiind

$$df = \begin{pmatrix} x du + u dx \\ y^2 dz + 2yz dy \\ u dy + y du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & x \\ 0 & 2yz & y^2 & 0 \\ 0 & u & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ du \end{pmatrix},$$

rezultă că  $f'(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & x \\ 0 & 2yz & y^2 & 0 \\ 0 & u & 0 & y \end{pmatrix}$

2.) Diferențiala lui  $\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$  este  $d\bar{r} = dx \bar{i} + dy \bar{j} + dz \bar{k}$ .

**Teorema 2.** Fie  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferențiabilă în  $P_0$  și  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferențiabilă în  $f(P_0)$ . Atunci funcția compusă  $g \circ f$  este diferențiabilă în  $P_0$  și

$$(1) \quad (g \circ f)'(P_0) = g'(f(P_0)) \cdot f'(P_0).$$

\* C.G. Iacobi (1804 – 1851) matematician german.



**Demonstrația** o vom face în cazul în care atât componentele scalare  $f_k$  ( $k=\overline{1,m}$ ) ale lui  $f$  cât și componentele scalare  $g_i$  ( $i=\overline{1,p}$ ) ale lui  $g$  admit derivate parțiale continue în  $P_0$  respectiv în  $f(P_0)$ .

$$\text{În acest caz deoarece } (g \circ f)(P) = \begin{pmatrix} g_1(f(P)) \\ \vdots \\ g_p(f(P)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f_1(P), \dots, f_m(P)) \\ \vdots \\ g_p(f_1(P), \dots, f_m(P)) \end{pmatrix}$$

și ca urmare

$$(2) \quad \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial f_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \quad i=\overline{1,p}, \quad j=\overline{1,n},$$

rezultă că funcțiile  $(g \circ f)_i$  ( $i=\overline{1,p}$ ) au derivate parțiale de ordinul întâi continue în  $P_0$  și deci sunt diferențiabile în  $P_0$ . Din (2) rezultă

$$(3) \quad \left. \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} \right|_{P_0} = \sum_{k=1}^m \left. \frac{\partial g_i}{\partial f_k} \right|_{f(P_0)} \cdot \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right|_{P_0}.$$

$$\text{Având în vedere că } (g \circ f)'(P_0) = \left( \left. \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} \right|_{P_0} \right), \quad g'(f(P_0)) = \left( \left. \frac{\partial g_i}{\partial f_k} \right|_{f(P_0)} \right)$$

$$\text{și } f'(P_0) = \left( \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right|_{P_0} \right) \text{ este evident că } (3) \Rightarrow (1).$$

**Observație.** Funcțiile vectoriale de una sau două variabile au aplicații în teoria curbelor și suprafețelor.

Fie  $C$  o curbă având reprezentarea vectorială

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

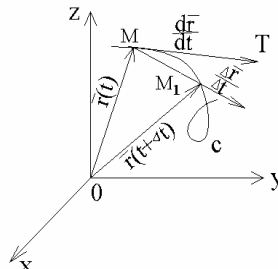
Se spune că ea este **netedă**, dacă funcțiile  $x(t)$ ,  $y(t)$  și  $z(t)$  admit derivate continue care nu se anulează simultan pe  $[a, b]$ .

Fie  $M(t)$  și  $M(t+\Delta t) \in C$ . Se numește tangenta în  $M$  la curba  $C'$ , poziția limită a coardei  $MM_1$  când  $M_1 \rightarrow M$ . Vectorul

$$\overline{MM_1} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t) = \Delta \bar{r}$$

$$\text{este însă coliniar cu } \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \bar{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \bar{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \bar{k}.$$

Trecând la limită, când  $\Delta t \rightarrow 0$ , se obține vectorul  $\dot{\bar{r}}(t) = \dot{x}(t)\bar{i} + \dot{y}(t)\bar{j} + \dot{z}(t)\bar{k}$  numit derivata vectorului  $\bar{r}(t)$  în raport cu  $t$ . El dă orientarea tangentei  $MT$ .



Fie acum  $F(x, y, z) = 0$  ecuația unei suprafețe  $S$ . Vom presupune că ea este **netedă**, adică  $F$  admite derivate parțiale de ordinul întâi continue care nu se anulează simultan.

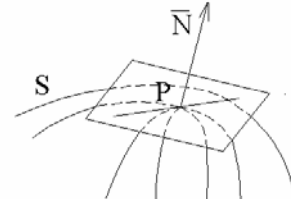
Se spune că o dreaptă este tangentă la  $S$  într-un punct  $P$  al ei, dacă ea este tangentă oricărei curbe ce trece prin  $P$  aparținând suprafeței  $S$ .

Dacă  $(C) : \vec{r} = \vec{r}(t)$  este o astfel de curbă, atunci are loc relația  $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ , care derivată în raport cu  $t$  dă

$$F'_x \cdot \dot{x} + F'_y \cdot \dot{y} + F'_z \cdot \dot{z} = 0, \text{ egalitate care arată că}$$

vectorul  $\vec{N} (F'_x, F'_y, F'_z)$  este perpendicular pe orice dreaptă tangentă la  $S$  în  $P$ . Acestea aparțin deci aceluiași

plan, numit planul tangent în  $P$  la  $S$ . Vectorul  $\vec{N}$  dă direcția normalei la suprafața  $S$  în  $P$ .



## 2. Funcții implicite

Fie ecuația (1)  $F(x, y) = 0$ .

Se numește soluție a ecuației (1) o funcției  $y = y(x)$  care o verifică identic, deci pentru care  $F(x, y(x)) \equiv 0$ . Ecuația (1) poate avea

1.) o singură soluție, de exemplu ecuația  $x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$

2.) mai multe soluții, de exemplu  $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2} : [\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$

3.) nici o soluție, cum este  $e^{x^2 + y^2} = 0$ .

Funcțiile  $y = y(x)$  definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc funcții implicite.

Astfel de ecuații nu se pot întotdeauna explicita, adică exprima ca funcții elementare. Așa de exemplu este funcția  $y = y(x)$  definită de ecuația

$$\sin y + x e^y = 0.$$

O funcție  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  definită de o ecuație de forma  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  este o funcție implicită de  $n$  variabile.

Problema care se pune este în ce condiții o ecuație definește o funcție implicită.

Vom da fără demonstrație următoarele teoreme de existență.

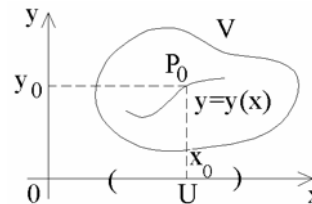
**Teorema 1.** Fie  $F(x, y)$  o funcție reală definită într-o vecinătate  $V$  a punctului  $P_0(x_0, y_0)$  pentru care  $F(P_0) = 0$ .

Dacă  $F \in C^1(V)$  și  $F'_y(P_0) \neq 0$ , atunci există în mod unic o funcție  $y = y(x)$  într-o anumită vecinătate  $U$  a punctului  $x_0$  și derivabilă astfel încât

$$F(x, y(x)) \equiv 0 \text{ pe } U$$

și

$$y(x_0) = y_0.$$



**Teorema 2.** Fie  $F(x_1, \dots, x_n, y)$  o funcție definită într-o vecinătate  $V$  a punctului  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$  cu  $F(P_0) = 0$ .

Dacă  $F \in C^1(V)$  și  $F'_y(P_0) \neq 0$ , atunci există în mod unic o funcție  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  într-o vecinătate  $U$  a punctului  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  cu derivate parțiale de ordinul întâi continue astfel încât  $F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$  pe  $U$   
și  $y(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_0$

**Derivarea funcțiilor implicite.**

1.) Dacă ecuația  $F(x, y) = 0$  definește funcția  $y = y(x)$ , atunci derivând egalitatea

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \text{obținem } F'_x + F'_y \cdot y' = 0 \text{ de unde } y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

2.) Dacă ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește funcția implicită  $z = z(x, y)$ , atunci derivând în raport cu  $x$  respectiv cu  $y$  egalitatea  $F(x, y, z(x, y)) = 0$  avem  $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$ ,

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0, \text{ de unde } z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

3.) În mod analog se obțin derivatele parțiale ale funcției implicite  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  definite de ecuația  $F(x_1, \dots, x_n, y)$ . Ele sunt  $y'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y} \quad i = \overline{1, n}$ .

**Exemple.**

1.) Să se calculeze  $y''$  dacă funcția  $y$  este definită implicit de ecuația  $\sin y + xe^y = 0$ .

**Soluție.** Punând  $F(x, y, z) = \sin y + xe^y$ , avem

$$F'_x = e^y$$

$$F'_y = \cos y + xe^y$$

$$\text{de unde } y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}.$$

Pentru determinarea lui  $y''$ , derivăm  $y'$  ținând seama că  $y = y(x)$ . Astfel

$$y'' = \frac{e^y y' (\cos y + xe^y) - e^y (-\sin y \cdot y' + e^y + xe^y \cdot y')}{(\cos y + xe^y)^2} =$$

$$= \frac{e^{2y} - e^y (\cos y + \sin y) y'}{(\cos y + xe^y)^2} = \frac{e^{2y} + e^{2y} \frac{\cos y + \sin y}{\cos y + xe^y}}{(\cos y + xe^y)^2} = e^{2y} \frac{2 \cos y + \sin y + xe^y}{(\cos y + xe^y)^3}.$$

2.) Să se calculeze  $dz, d^2z$  pentru  $x=0, y=1, z=0$  dacă funcția implicită  $z = z(x, y)$  este definită de ecuația  $x^2 + y^2 + z^2 = e^z$ .

**Metoda I.** Avem  $F(x, z, y) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - e^z$ .

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 2x \\ F'_y = 2y \\ F'_z = 2z - e^z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{2z - e^z}, \quad z'_x(0, 1) = 0 \\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2y}{2z - e^z}, \quad z'_y(0, 1) = 2 \end{array}$$

de unde  $dz(0, 1) = 2dy$ .

Pentru aflarea derivatelor parțiale de ordinul doi, se derivează cele de ordinul întâi având în vedere ca  $z = z(x, y)$

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x = -2 \frac{(2z - e^z) - x(2z'_x - e^z \cdot z'_x)}{(2z - e^z)^2}, \quad z''_{x^2}(0, 1) = 2$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 2 \frac{x(2z'_y - e^z \cdot z'_y)}{(2z - e^z)^2}, \quad z''_{xy}(0, 1) = 0$$

$$z''_{y^2} = (z'_y)'_y = -2 \frac{2z - e^z - y(2z'_y - e^z \cdot z'_y)}{(2z - e^z)^2}, \quad z''_{y^2}(0, 1) = 6$$

și  $d^2z(0, 1) = 2dx^2 + 6dy^2$ .

**Metoda a II-a.** Diferențiind de două ori ecuația dată, aplicând regulile de diferențiere și având în vedere că  $x$  și  $y$  fiind variabile independente,  $d^2x = d^2y = 0$  avem

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = e^z dz$$

$$2dx^2 + 2dy^2 + 2(dz)^2 + 2z d^2z = e^z (dz)^2 + e^z dz.$$

În particular pentru  $x=0, y=1, z=0$ , obținem  $dz = 2dy$  și ca urmare

$$2dx^2 + 2y^2 + 8dy^2 = 4dy^2 + d^2z \quad \text{de unde} \quad d^2z = 2dx^2 + 6dy^2.$$

**Observație.** Metoda a doua (prin diferențiere) poate fi utilizată și pentru calculul derivatelor parțiale, căci o dată aflată diferențiala, acestea (derivatele parțiale) rezultă imediat.

### Sisteme de funcții implicite

În multe probleme, nu numai de geometrie diferențială intervin funcții definite implicit de sisteme de ecuații.

Cazul cel mai simplu este al sistemului 
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Ne interesează în ce condiții acest sistem definește două funcții  $y = y(x), z = z(x)$  care să verifice în mod identic ecuațiile sistemului, și cum se calculează derivatele lor.

**Teorema 3.** Fie  $F(x, y, z)$  și  $G(x, y, z)$  două funcții definite într-o vecinătate  $V$  a punctului  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  astfel încât  $F(P_0) = 0, G(P_0) = 0$ .

Dacă  $F, G \in C^1(V)$  și  $\left. \frac{D(F, G)}{D(y, z)} \right|_{P_0} \neq 0$ , atunci există în mod unic într-o vecinătate  $U$  a

lui  $x_0$  funcțiile  $y = y(x)$  și  $z = z(x)$  derivabile astfel încât

$$(2) \quad \begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases} \text{ pe } U \quad \text{și } y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0.$$

Derivatele acestor funcții se obțin derivând ecuațiile sistemului (2). Astfel avem

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0 \\ G'_x + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' = 0, \end{cases}$$

de unde

$$y' = -\frac{\frac{D(F, G)}{D(x, z)}}{\frac{D(F, G)}{D(y, z)}} \quad \text{și} \quad z' = -\frac{\frac{D(F, G)}{D(y, x)}}{\frac{D(F, G)}{D(y, z)}}.$$

O generalizare a teoremei precedente este

**Teorema 4.** Fie funcțiile  $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$   $i = \overline{1, m}$  definite într-o vecinătate a punctului  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$  cu  $F_i(P_0) = 0$   $i = \overline{1, m}$ .

Dacă  $F_i \in C^1(V)$  și  $\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{P_0} \neq 0$ , atunci există într-o anumită vecinătate  $U$  a

punctului  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  un sistem unic de funcții  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, m}$  cu derivate parțiale continue astfel încât

$$(3) \quad F_i(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \text{ pe } U, i = \overline{1, m}$$

și  $y_i(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_i^0$   $i = \overline{1, m}$ .

Derivatele parțiale ale funcțiilor  $y_i$  se obțin derivând parțial ecuațiile (3). Astfel

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, x_j, \dots, F_m)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

**Exemplu.** Să se calculeze derivatele parțiale ale funcțiilor  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$  în  $(0, -1)$ ,

definite implicit de sistemul  $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ .

**Metoda I.** Derivând în raport cu  $x$  ecuațiile sistemului și ținând seama că  $u$  și  $v$  sunt funcții de  $x$  și  $y$

avem  $\begin{cases} u + xu'_x - yv'_x = 0 \\ yu'_x + v + xv'_x = 0 \end{cases}$  de unde  $u'_x = -\frac{ux + vy}{x^2 + y^2}$ ,  $v'_x = \frac{uy - xv}{x^2 + y^2}$ .

Analog, derivând sistemul în raport cu  $y$  se obțin derivatele parțiale

$$u'_y = \frac{xv - uy}{x^2 + y^2}, \quad v'_y = -\frac{vy + xu}{x^2 + y^2}.$$

Când  $x=0$  și  $y=1$ , din sistemul dat rezultă  $u=-1$ ,  $v=0$ . Astfel

$$u'_x = 1, \quad u'_y = -1, \quad v'_x = 1, \quad v'_y = 0.$$

**Metoda a – II – a.** Diferențiind cele două ecuații ale sistemului, avem

$$\begin{cases} udx + xdu - vdy - ydv = 0 \\ udy + ydu + vdx + xdv = 0. \end{cases}$$

Făcând  $x=0$ ,  $y=-1$ ,  $u=-1$ ,  $v=0$ , obținem  $du = -dy$ ,  $dv = dx$ , de unde se deduce că  $u'_x = 0$ ,  $u'_y = -1$ , și  $v'_x = 1$ ;  $v'_y = 0$  în  $(0, -1)$ .

### 3. Dependență funcțională

Fie  $D$  mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și sistemul de funcții reale

$$(1) \quad \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \quad \text{unde } f_i \in C^1(D) \quad i = \overline{1, m}.$$

O funcție  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  spunem că **depinde** de funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_m$  pe  $D$ , dacă există o funcție diferențiabilă  $\Phi$  astfel încât  $g = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_m)$  adică

$$g(P) = \Phi(f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)) \quad \forall P \in D.$$

**Exemplu.** Dacă  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f_2(x, y) = x^2 - y^2$  și  $g(x, y) = x^4 - y^4$ , atunci funcția  $g$  depinde de funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  pe  $\mathbb{R}^2$  deoarece  $g = f_1 \cdot f_2$ .

**Definiție.** Spunem că sistemul (1) este **dependent** pe  $D$  dacă există cel puțin o funcție a sistemului, dependentă de celelalte pe  $D$ .

În caz contrar, sistemul este **independent** pe  $D$ .

Independența funcțiilor pe  $D$  trebuie înțeleasă în sensul că nici o funcție a sistemului nu depinde de celelalte în nici o vecinătate a oricărui punct din  $D$ .

**Teorema 1.** Dacă sistemul (1) este dependent pe  $D$  și  $m \leq n$ , atunci toți minorii de

$$\text{ordinul } m \text{ ai matricei lui Jacobi.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ sunt identic nuli pe } D.$$

**Demonstrație.** Fie  $f_K = \Phi(f_1, \dots, f_{K-1}, \dots, f_m)$  pe  $D$ . Atunci din

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K-1}} \cdot \frac{\partial f_{K-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K+1}} \cdot \frac{\partial f_{K+1}}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}, \text{ rezult}$$

ă că linia  $L_K$  a matricei este combinație liniară de celelalte linii

$$L_K = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} L_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K-1}} L_{K-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K+1}} L_{K+1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_m} L_m$$

și prin urmare minorii de ordinul  $m$  sunt toți nuli, ceea ce implică faptul că rangul matricei este strict mai mic decât  $m$ .

**Teorema 2.** Dacă rangul matricei iacobiene în  $P_0$  este  $r < m$  și dacă, fără, restrângere generalitatea,  $\left. \frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} \right|_{P_0} \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $V$  a punctului  $P_0$  în care sistemul  $\{f_1, \dots, f_r\}$  este independent, în timp ce funcțiile  $f_{r+1}, \dots, f_m$  depind pe  $V$  de funcțiile  $f_1, \dots, f_r$ .

**Demonstrație.** Determinantul funcțional  $\frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)}$  care este o funcție continuă pe  $D$ , fiind diferit de zero în  $P_0$ , este nenul într-o întreagă vecinătate a lui  $P_0$  și conform teoremei precedente sistemul  $\{f_1, \dots, f_r\}$  este independent în această vecinătate.

Partea a doua a demonstrației adică faptul că celelalte funcții depind de primele  $r$  o vom face într-un caz particular, cazul general tratându-se analog.

Fie  $m = n = 3$  și  $r = 2$ . Funcțiile sistemului sunt în acest caz  $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$ ,  $y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$ , matricea iacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

are  $\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 0$ ,  $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$  într-o vecinătate a punctului  $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ .

Dezvoltând primul determinant după ultima linie putem scrie

$$(2) \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, x_3)} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_3, x_1)} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdot \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} = 0.$$

Fie sistemul de funcții implicite  $\begin{cases} F_1 \equiv f_1(x_1, x_2, x_3) - y_1 = 0 \\ F_2 \equiv f_2(x_1, x_2, x_3) - y_2 = 0 \end{cases}$

în necunoscutele  $x_1, x_2, y_i = f_i(P_0) \quad i \in \{1, 2\}$  și punctul  $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0)$ .

Din faptul că  $\left. \frac{D(F_1, F_2)}{D(x_1, x_2)} \right|_{M_0} = \left. \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} \right|_{P_0} \neq 0$  rezultă conform teoremei de

existență (teorema 3, §2) că există două funcții

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_3, y_1, y_2) \\ x_2 = \varphi_2(x_3, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\text{astfel încât } \begin{cases} f_1(\varphi_1, \varphi_2, x_3) \equiv y_1 \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, x_3) \equiv y_2 \end{cases}$$

$$\text{Derivând parțial în raport cu } x_3, \text{ avem } \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{de unde (4) } \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \frac{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, x_3)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = \frac{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_3, x_1)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}}.$$

Înlocuind funcțiile (3) în egalitatea  $y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$  obținem

$$y_3 = f_3(\varphi_1(x_3, y_1, y_2), \varphi_2(x_3, y_1, y_2), x_3) = \Phi(x_3, y_1, y_2).$$

Faptul că  $y_3$  depinde doar de  $y_1$  și  $y_2$  va reieși din aceea că  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, folosind (2) și (4) avem } \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} &= \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \\ &= \frac{\frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, x_3)} + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_3, x_1)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0. \quad \text{Deci } y_3 = \Phi(y_1, y_2). \end{aligned}$$

**Consecință.** În cazul unui sistem de  $n$  funcții de câte  $n$  variabile, sunt valabile afirmațiile:

- 1.)  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0 \Rightarrow$  sistemul  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  este independent într-o vecinătate a punctului  $P_0$ .
- 2.)  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \equiv 0$  pe  $D \Rightarrow$  sistemul  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  este dependent pe  $D$ .

**Exemplu.** Funcțiile  $f_1 = \frac{x}{y}, f_2 = \frac{z}{y}, f_3 = \frac{x^2 + z^2 + xz}{y^2}$   $y \neq 0$ . Având iacobianul

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{z}{y^2} & \frac{1}{y} \\ \frac{2x-z}{y^2} & \frac{-2}{z^3}(x^2 + z^2 - xz) & \frac{2z-x}{y^3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

sunt în dependență funcțională. Din faptul că  $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = -\frac{z}{y^3}$  este un minor de ordinul doi nenul,

rezultă o funcție diferentiabilă  $\Phi$  astfel încât  $f_3 = \Phi(f_1, f_2)$ . Este evident că  $f_3 = f_1^2 + f_2^2 - f_1 f_2$ .



**Observație.** În teorema 4. &2 de existență a funcțiilor implicite definite de sistemul

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \quad i = \overline{1, m}, \text{ condiția } \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \Big|_{P_0} \neq 0 \text{ a însemnat de fapt}$$

independența funcțională a funcțiilor  $F_1, F_2, \dots, F_m$  ca funcții de  $y_1, \dots, y_m$ .

#### 4. Transformări punctuale în $\mathbb{R}^n$

Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă. Se numește transformare o funcție vectorială  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dacă  $A \subset D$ , atunci  $f(A)$  este transformata mulțimii  $A$  prin  $f$ .

**Definiție.** Transformarea  $f = (f_1, \dots, f_n)$  se spune că este **regulată în punctul**

$P_0 \in D$ , dacă funcțiile  $f_i \quad i = \overline{1, n}$  sunt de clasă  $C^1$  într-o vecinătate a punctului  $P_0$  și

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0.$$

O transformare regulată în orice punct al lui  $D$  se spune că este regulată pe  $D$ .

**Observații.**

1.) Dacă  $f$  este regulată în  $P_0$ , atunci  $f$  este regulată într-o întreagă vecinătate a acestui punct. Aceasta rezultă din continuitatea iacobianului.

2.) Dacă  $f$  este regulată în  $P_0$ , atunci  $f$  este diferențiabilă în  $P_0$  și

$$|f'(P_0)| = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0 \quad \text{Diferențiabilitatea lui } f \text{ rezultă din diferențiabilitatea}$$

componentelor sale scalare  $f_i \quad (i = \overline{1, n})$ .

3.) O transformare regulată în  $P_0$  este evident continuă în  $P_0$

4.) Dacă  $f = (f_1, \dots, f_n)$  este regulată în  $P_0$ , atunci sistemul  $\{f_1, \dots, f_n\}$  este independent într-o vecinătate a lui  $P_0$ .

**Exemple.**

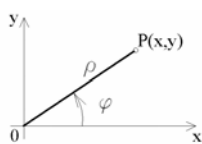
1.) Transformarea identică  $I$  a lui  $\mathbb{R}^n$ , dată de  $I(P) = P \quad P \in \mathbb{R}^n$ , sau

$$I \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ I_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

este regulată pe  $\mathbb{R}^n$ , deoarece componentele sale scalare  $I_i$  au derivate parțiale continue peste tot și

$$|I'(P)| = \frac{D(I_1, \dots, I_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n.$$

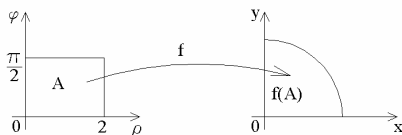
2.) Transformarea polară  $T$  care face trecerea de la coordonatele polare  $(\rho, \varphi)$  la cele carteziene  $(x, y)$  ale unui punct  $P$  din plan.



$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ are iacobianul}$$

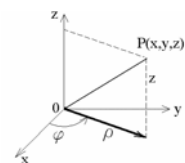
$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \text{ Este deci regulată dacă } \rho \neq 0.$$

Transformata dreptunghiului  $A = [0, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  din planul



$\rho \in [0, 2]$  este sfertul de cerc de rază 2 din primul cadran al planului  $xOy$ .

3.) Transformarea cilindrică leagă coordonatele cilindrice  $(\rho, \varphi, z)$  ale unui punct  $P \in \mathbb{R}^3$  de cele carteziene  $(x, y, z)$ .

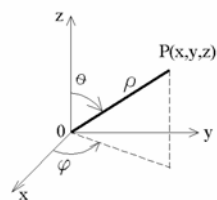


$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ are iacobianul } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho, \text{ este deci}$$

o transformare regulată peste tot cu excepția originii.

4.) Transformarea sferică este dată de

$$T: \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$



$$\text{Din } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin \theta, \text{ rezultă că transformarea sferică este regulată}$$

acolo unde  $\rho \neq 0$  și  $\theta \neq 0, \pi$ .

Vom da în continuare două proprietăți importante ale transformărilor regulate.

**Teorema 1** (compunerea transformărilor). Dacă  $f$  este regulată în  $P_0$  și  $g$  este regulată în  $f(P_0)$ , atunci transformarea  $g \circ f$  este regulată în  $P_0$ .

**Demonstrație.** Dacă  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_n)$ , atunci

$$(g \circ f)(P) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(P)) \\ \vdots \\ g_n(f_n(P)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f_1(P)), \dots, f_n(P) \\ \vdots \\ g_n(f_1(P), \dots, f_n(P)) \end{pmatrix}$$

Este evident că dacă  $f_i$  și  $g_i$  sunt de clasă  $C^1$ , atunci și componentele scalare ale lui  $g \circ f$  sunt de clasă  $C^1$  într-o vecinătate a lui  $P_0$ . Din egalitatea matriceală

$$(g \circ f)'(P_0) = g'(f(P_0)) \cdot f'(P_0) \text{ rezultă } |(g \circ f)'(P_0)| = |g'(f(P_0))| \cdot |f'(P_0)|,$$

și cum transformările  $f$  și  $g$  fiind regulate în  $P_0$  respectiv în  $f(P_0)$  au iacobienii nenuli în aceste puncte, rezultă că  $(g \circ f)'(P_0) \neq 0$  și deci că  $g \circ f$  este o transformare regulată în  $P_0$

**Teorema 2 (transformarea inversă).** *Dacă  $f$  este regulată în  $P_0$ , atunci există o transformare  $g$  definită într-o vecinătate a punctului  $f(P_0)$ , regulată în acest punct și*

$$\frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \Big|_{f(P_0)} = \frac{1}{\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0}} \text{ unde } y_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

**Demonstrație.** Fie  $y_i^0 = f_i(P_0)$  și  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ . Sistemul de funcții

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \equiv f_i(x_1, \dots, x_n) - y_i = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

definește în mod implicit funcțiile  $x_i = g_i(y_1, \dots, y_n)$  care verifică în mod identic sistemul.

Într-adevăr,  $F_i(M_0) = f_i(P_0) - y_i^0 = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$ ; funcțiile  $F_i$  au derivate parțiale

continue într-o vecinătate a lui  $M_0$  și  $\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{M_0} = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0$  din ipoteză.

Prin urmare există în mod unic într-o vecinătate  $V$  a punctului  $f(P_0) = (y_1^0, \dots, y_n^0)$  funcțiile  $x_i = g_i(y_1, \dots, y_n)$  cu derivate parțiale continue.

Fie  $g$  transformarea având componentele scalare  $g_i$ . Din

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f(P)) \\ \vdots \\ g_n(f(P)) \end{pmatrix} = g(f(P)) \quad \forall P \in V,$$

rezultă  $g \circ f = I$ , de unde  $|g'(f(P_0))| \cdot |f'(P_0)| = |I(P_0)| = 1$  și deci relația din enunț

$$|g'(f(P_0))| = \frac{1}{|f'(P_0)|}.$$

**Exemplu.** Transformarea polară  $T: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ , regulată pentru  $\rho > 0$  are inversa

$$T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

iar iacobianul acesteia este  $\frac{D(\rho, \varphi)}{D(x, y)} = \frac{1}{\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  dacă  $x^2 + y^2 \neq 0$ .

## 5. Schimbări de variabile

O expresie în care apare o funcție împreună cu derivatele ei poate uneori primi o formă mult simplificată dacă elementele vechi, funcția și (sau) variabilele ei se înlocuiesc cu altele noi.

Vom presupune că funcțiile ce intervin îndeplinesc condițiile necesare efectuării calculelor.

Vom pune în evidență câteva cazuri și le vom trata practic prin exemple.

1) Intervertirea variabilelor  $y(x) \rightarrow x(y)$

**Exemplu.** Să se transforme ecuația  $y'y''' - 3(y'')^2 = x$  luând pe  $y$  ca nouă variabilă independentă.

**Soluție.** Se vede din ecuația dată că  $y$  este funcția și  $x$  este variabila sa. Forma nouă a ecuației va trebui să antreneze funcția  $x$  de variabilă  $y$  și evident derivatele acesteia

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dy^2}, \dots$$

Folosind formulele de derivare a funcției compuse și a funcției inverse, vom găsi legătura dintre derivatele vechi  $y', y'', y'''$  și cele noi.

$$\text{Astfel avem } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{(x')^3}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x''}{(x')^3}\right) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{x''}{(x')^3}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{3(x'')^2 - x'''x'}{(x')^5}$$

Făcând înlocuirile în ecuația dată obținem sau  $x''' + (x')^5 x = 0$ .

2) Schimbarea variabilei independente  $y(x) \xrightarrow{x=x(t)} y(t)$ .

**Exemplu.** Să se transforme ecuația  $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$  făcând  $x = \cos t$ .

**Soluție.** Avem  $x = x(t) \Rightarrow t = t(x)$  și derivata funcției compuse  $y(t(x))$  este

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{-\sin t}$$

unde cu  $y'_t$  s-a notat derivata lui  $y$  în raport cu noua ei variabilă  $t$ .

Ceea ce s-a obținut este funcție de  $t$ . De aceea în continuare derivarea în raport cu  $x$  se face prin intermediul variabilei  $t$ . Avem

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{-\sin t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \sin t - y'_t \cos t}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{\sin t}$$

Astfel ecuația devine  $y''_t + a^2y = 0$ .

3) Schimbarea funcției și a variabilei  $y(t) \rightarrow u(t)$  prin transformarea  $\begin{cases} x = x(u, t) \\ y = y(u, t) \end{cases}$ .

**Exemplu.** Să se transforme ecuația  $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$  dacă  $\begin{cases} x = u + t \\ y = u - t \end{cases}$  și  $u = u(t)$ .

**Soluție.** Ținând seama că  $u = u(t)$ ,  $x$  și  $y$  devin funcții de  $t$  și avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{u' - 1}{u' + 1}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt} \left( \frac{u' - 1}{u' + 1} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{u''(u' + 1) - u''(u' - 1)}{(u' + 1)^2} \cdot \frac{1}{u' + 1} = \frac{2u''}{(u' + 1)^3}.$$

Făcând înlocuirile, ecuația devine  $u'' + 8uu' = 0$ .

4) Schimbarea variabilelor independente ale unei funcții  $z(x, y) \rightarrow z(u, v)$  prin

transformarea  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ .

**Exemplu.** Dacă  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = \frac{x}{y}$ , să se transforme ecuația

$$xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Soluție.** Avem  $\begin{cases} u'_x = 2x, & u'_y = -2y \\ v'_x = \frac{1}{y}, & v'_y = -\frac{x}{y^2} \end{cases}$  și cum  $z = z(u(x, y), v(x, y))$ ,

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 2x + z'_v \cdot \frac{1}{y}$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot (-2y) + z'_v \cdot \left( -\frac{x}{y^2} \right)$$

În continuare, pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul doi vom ține seama că și  $z'_u$  și  $z'_v$  sunt funcții de  $x$  și  $y$  prin intermediul variabilelor  $u$  și  $v$ . Astfel

$$z''_{x^2} = \left( z''_{u^2} \cdot 2x + z''_{uv} \cdot \frac{1}{y} \right) \cdot 2x + z'_u \cdot 2 + \left( z''_{uv} \cdot 2x + z''_{v^2} \cdot \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$z''_{xy} = \left( z''_{u^2} \cdot (-2y) + z''_{uv} \cdot \frac{-x}{y^2} \right) (-2x) - 2z'_u + \left[ z''_{uv} \cdot (-2y) + z''_{v^2} \cdot \frac{-x}{y^2} \right] \left( -\frac{x}{y^2} \right) + z'_v \cdot \frac{2x}{y^3}$$

Amplificând fiecare derivată cu coeficienții corespunzători din ecuația dată și adunând pe verticală, obținem

$$\begin{array}{l|l}
-y & z'_x = 2x \cdot z'_u + \frac{1}{y} \cdot z'_v \\
-x & z'_y = -2y \cdot z'_u - \frac{x}{y^2} \cdot z'_v \\
xy & z''_{x^2} = 4x^2 z''_{u^2} + \frac{4x}{y} \cdot z''_{uv} + \frac{1}{y^2} \cdot z''_{v^2} + 2z'_u \\
(x^2 + y^2) & z''_{xy} = -4xy \cdot z''_{u^2} - \frac{2(x^2 + y^2)}{y^2} z''_{uv} - \frac{x}{y^3} \cdot z''_{v^2} - \frac{1}{y^2} \cdot z'_v \\
xy & z''_{y^2} = 4y^2 \cdot z''_{u^2} + \frac{4x}{y} z''_{uv} - \frac{x^2}{y^4} z''_{v^2} - 2z'_u + \frac{2x}{y^3} \cdot z'_v \\
\hline
& 0 = -\frac{2(x^2 - y^2)^2}{y^2} z''_{uv} + \frac{2(x^2 - y^2)}{y^2} \cdot z'_v
\end{array}$$

deci  $z''_{uv} \cdot u - z'_v = 0$  este noua formă a ecuației.

5.) Schimbarea funcției și a variabilelor sale  $z(x, y) \rightarrow w(u, v)$  printr-o transformare regulată din  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplu.** Să se transforme ecuația  $(xy + z) \frac{\partial}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y} = x + yz$  dacă  $\begin{cases} u = yz - x \\ v = xz - y \\ w = xy - z \end{cases}$  și

$w = w(u, v)$ .

**Soluție.** Diferențiind relațiile date, avem

$$du = zdy + ydz - dx$$

$$dv = zdx + xdz - dy$$

$$dw = ydx + xdy - dz,$$

care introduse în formula

$$dw = w'_u du + w'_v dv$$

dau următoarea legătură între  $dx, dy$  și  $dz$ :

$$dz = \frac{y + w'_u - zw'_v}{1 + yw'_u - xw'_v} dx + \frac{x + w'_v - zw'_u}{1 + yw'_u + xw'_v} dy.$$

Dar cum  $dz = z'_x dx + z'_y dy$ , se deduc imediat derivatele parțiale ale lui  $z$  care înlocuite apoi în ecuația dată, dau ecuația

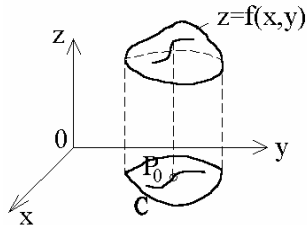
$$(xy + z)(y + w'_u - zw'_v) + (1 - y^2)(x + w'_v - zw'_u) = (xy + z)(1 + yw'_u + xw'_v)$$

adică  $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$ .

## 6. Extreme condiționate

Deseori în probleme de extrem apar condiții suplimentare impuse variabilelor.

Cea mai simplă problemă de acest fel este determinarea extremelor funcției  $f(x, y)$  cu condiția ca între variabilele  $x$  și  $y$  să existe legătura  $\varphi(x, y) = 0$ . Din punct de vedere geometric aceasta



înseamnă determinarea unui punct  $P_0(x_0, y_0)$  aparținând curbei  $C : \varphi(x, y) = 0$  așa ca în  $P_0$  funcția  $f$  să ia valoare maximă sau minimă în raport cu celelalte puncte de pe curbă. Să vedem cum s-ar rezolva această problemă. Dacă ecuația  $\varphi(x, y)$  definește în mod implicit funcția  $y = y(x)$  (ecuația curbei  $C$ ), atunci problema se reduce la determinarea punctelor de extrem ale funcției compuse  $g(x) = f(x, y(x))$  și care, după cum se știe,

se găsesc printre rădăcinile ecuației  $g'(x) = 0$ , deci

$$(1) \quad f'_x + f'_y \cdot y' = 0.$$

Derivând egalitatea  $\varphi(x, y(x)) = 0$ , avem și

$$(2) \quad \varphi'_x + \varphi'_y \cdot y' = 0.$$

Amplificând ecuația (2) cu un  $\lambda$  real oarecare și adunând-o la (1), obținem relația

$$f'_x + \lambda \varphi'_x + (f'_y + \lambda \varphi'_y) \cdot y' = 0,$$

verificată de punctele de extrem legat.

Determinând  $\lambda$  așa ca  $f'_x + \lambda \varphi'_x = 0$ , rezultă și  $f'_y + \lambda \varphi'_y = 0$ .

Obținem astfel trei ecuații în necunoscutele  $x, y$  și  $\lambda$  verificate de punctele de extrem

$$\text{legat} \quad \begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Să observăm că acest sistem este cel care dă punctele staționare ale funcției

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

Fie  $M_0(x, y, \lambda_0)$  un punct staționar pentru  $F$ . Este evident că  $P_0(x_0, y_0) \in C$ . Fie de asemenea  $P(x, y) \in C$ . Să observăm că diferența

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) + \lambda_0 \varphi(x_0, y_0) - \\ &= F(x, y, \lambda_0) - F(x_0, y_0, \lambda_0). \end{aligned}$$

Prin urmare problema stabilirii dacă  $P_0(x_0, y_0)$  este punct de extrem legat se reduce la studiul semnului lui  $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0)$ .

În concluzie, pentru determinarea punctelor de extrem ale funcției  $f(x, y)$  cu legătura  $\varphi(x, y) = 0$ , se formează funcția auxiliară  $F = f + \lambda \varphi$ , și se determină punctele staționare iar dacă  $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$  este unul din acestea, atunci se studiază dacă  $P_0(x_0, y_0)$  este punct de extrem (liber) pentru  $F(x, y, \lambda_0)$ .

**Exemplu.** Să se găsească punctele de extrem ale funcției  $f(x, y) = x + 2y$  știind că  $x^2 + y^2 = 5$ .

**Soluție.** Avem  $\varphi(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 5$ ,

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

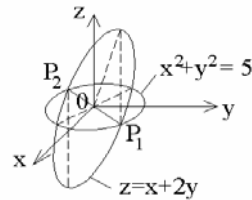
Punctele staționare ale lui  $F$  sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} F'_x \equiv 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y \equiv 2 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda \equiv \varphi = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

și anume  $M_1(1, 2, -\frac{1}{2})$  și  $M_2(-1, -2, \frac{1}{2})$ .

Pentru a stabili dacă punctele  $P_1(1, 2)$  și  $P_2(-1, -2)$  sunt sau nu puncte de extrem legat, calculăm

$$\begin{array}{l} F''_{x^2} = 2\lambda \\ F''_{xy} = 0 \\ F''_{y^2} = 2\lambda \end{array} \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}$$



Avem

$$\Delta(P_1) = -1 < 0, F''_{x^2}(M_1) = -1 < 0 \Rightarrow P_1 \text{ punct de maxim}$$

$$\Delta(P_2) = -1 < 0, F''_{x^2}(M_2) = 1 > 0 \Rightarrow P_2 \text{ punct de minim}$$

$$f_{\max} = f(P_1) = 5 \quad f_{\min} = f(P_2) = -5$$

**Observația 1.** Pentru determinarea extremelor funcției  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  supuse legăturilor  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = \overline{1, m}$ , se construiește funcția auxiliară (funcția lui Lagrange)  $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$ , i se determină punctele staționare și dacă  $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$  este un astfel de punct, se studiază dacă punctul  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  este punct de extrem liber pentru  $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ .

Aceasta este metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

**Exemplu.** Să se găsească punctele de extrem ale funcției  $f(x, y, z) = xyz$  cu condițiile  $x + y + z = 5$ ,  $xy + yz + zx = 8$ .

**Soluție.** Avem

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

$$\varphi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8$$

și funcția auxiliară

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + yz + zx - 8).$$



Sistemul

$$\begin{cases} F'_x \equiv yz + \lambda + \mu(y+z) = 0 \\ F'_y \equiv xz + \lambda + \mu(x+z) = 0 \\ F'_z \equiv xy + \lambda + \mu(x+y) = 0 \\ F'_\lambda \equiv \varphi_1 \equiv x+y+z-5 = 0 \\ F'_\mu \equiv \varphi_2 \equiv xy+yz+zx-8 = 0 \end{cases}$$

ne dă punctele staționare ale lui  $F: M_1(2, 1, 2, 4, -2)$  și  $M_2(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-4}{3})$ .

Vom studia dacă  $P_1(2, 1, 2)$  este punct de extrem liber pentru  $F(x, y, z, 4, -2)$ . Pentru aceasta ne interesează semnul diferențialei  $d^2F(M_1)$ . Avem

$$d^2F(M_1) = -2dx dz.$$

$F''_{x^2} = 0$	$M_1$	Diferențiind însă legăturile, avem relațiile
$F''_{xy} = z + \mu$	0	$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ (x+z)dx + (x+z)dy + (x+z)dz = 0 \end{cases}$
$F''_{xz} = y + \mu$	-1	care pentru $P_1(2, 1, 2)$ devin $\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ 3dx + 4dy + 3dz = 0 \end{cases}^{-4}$ de unde $dz = -dx$ ,
$F''_{y^2} = 0$	0	deci $d^2F(M_1) = 2dx^2 > 0$ . Urmează că $f(P) - f(P_0) > 0$ , deci $P_1$ este
$F''_{yz} = x + \mu$	0	punct de minim (legat). Făcând un studiu asemănător pentru punctul
$F''_{z^2} = 0$	0	$P_2(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$ se găsește că acesta este un punct de maxim (legat).

**Observația 2.** Problema determinării extremelor funcției  $f(x_1, \dots, x_n)$  cu condiții de forma:  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$  este problema generală a programării matematice.

Dacă atât funcția  $f$  cât și funcțiile  $\varphi_i$  sunt liniare, atunci problema este de programare liniară (formulată în 1947 de către matematicianul american G. B. Dantzig).

## Exerciții

1.) Să se arate că suprafețele  $x + 2y - \ln z + 4 = 0$  și  $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$  sunt tangente una alteia în punctul  $(2, -3, 1)$ .

2.) Să se scrie ecuația tangentei într-unul din punctele de abscisă  $x = 1$  ale curbei  $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ . Să se determine  $d^2y$  în punctul ales.

3.) Să se calculeze  $u'_x, u'_y$  pentru  $u = \frac{x+z}{y+z}$  dacă  $ze^z = xe^x + ye^y$

4.) Să se arate că dacă

a.)  $(y+z) \sin z - y(x+z) = 0$ , atunci  $z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

b.)  $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ , atunci  $(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$

c.)  $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ , atunci  $x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

d.)  $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ , atunci  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(f'_u + 2zf'_v)^3}$

e.)  $uv = 3x - 2y + z, v^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , atunci  $xu'_x + yu'_y + zu'_z = 0$

5.) Să se calculeze  $d^2u$  și  $d^2v$  pentru valorile  $x=1, y=1, u=0, v=\frac{\pi}{4}$  dacă

$$e^{\frac{u}{y}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}. \quad R: d^2u = dx^2, d^2v = \frac{1}{2}(dx - dy)^2$$

6.) Să se afle extremele funcțiilor:

a.)  $y$  dacă  $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$

$$R: y_{\max} \text{ pt } x = \frac{1}{2}$$

b.)  $z$  dacă  $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

c.)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  în discul  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$

d.)  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  cu condițiile  $-x + yz = 1, x - z = 0$

e.)  $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$  știind că  $xyzt = a^4, x, y, z, t, a > 0$

7.) Să se determine  $\inf_A f$  și  $\sup_A f$  dacă  $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$  și  $A$  este domeniul limitat de dreptele  $x=0, y=0, x+y=6$

8.) Pe elipsoidul  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$  să se găsească punctul cel mai depărtat și punctul cel mai apropiat de planul  $3x + 4y + 12z = 288$ .

9.) Să se calculeze iacobianul transformării

$$x = (\alpha + \rho \cos \theta) \cos \varphi, y = (\alpha + \rho \cos \theta) \sin \varphi, z = \rho \sin \theta \quad R: \rho (\alpha + \rho \cos \theta)$$

10.) Să se arate cu ajutorul determinanților funcționali că există o relație de dependență între funcțiile  $x = (u + v) \cos \varphi, y = (u - v) \sin \varphi, z = u^2 + v^2 + 2uv \cos 2\varphi$  și se dea o relație de legătură directă.

11.) În ecuațiile următoare să se facă schimbările indicate

a.)  $y'' - xy'^3 + \cos y \cdot y'^3 = 0, x = x(y)$   $R: x'' + x - \cos y = 0$

b.)  $y'' + y' \operatorname{th} x + \frac{m}{\operatorname{ch}^2 x} = 0, x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$   $R: \frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = 0$

c.)  $(x^2 + y^2)(x + yy') = (x^2 + y^2 + x)(xy' - y), \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \rho = \rho(\varphi) \quad R: \rho' = \rho + \cos \varphi$

d.)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \begin{cases} u = \sin x + x - y \\ v = x - \sin x + y \end{cases} \quad R: \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

e.)  $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}, u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y, w = w(u, v)$   $R: \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$

$$f.) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = 0, u = \varphi(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad R : \varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' + \varphi = 0$$

12.) Să se arate că orice ecuație de forma  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$  poate fi redusă la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \text{ prin schimbarea de funcție } z = ue^{\alpha x + \beta y}, u = u(x, y).$$

$$R : \alpha = -b, \beta = -a, c_1 = c - ab$$

13.) Să se transforme expresia  $E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  făcând schimbarea de variabile

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2} \text{ și schimbarea de funcție } z = \frac{u^2 - v^2}{4} - w.$$

# PARTEA II CALCUL INTEGRAL

## I. INTEGRALA NEDEFINITĂ

### 1. Primitiva unei funcții

Fie o funcție  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definiție.** Se numește **primitivă** a lui  $f$  pe  $I$ , o funcție  $F$  definită și derivabilă pe  $I$  astfel încât  $F' = f$

Să observăm că:

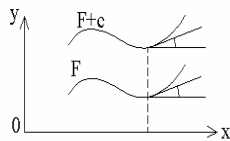
1.) dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , atunci  $F + c$ , unde  $c$  este o constantă oarecare, este primitivă a lui  $f$ ,

2.) dacă  $F$  și  $G$  sunt primitive ale lui  $f$ , atunci ele diferă printr-o constantă aditivă.

Rezultă de aici că dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , atunci oricare alta va fi de forma  $F + c$  unde  $c$  este o constantă.

Mulțimea primitivelor funcției  $f$  se numește, prin abuz de limbaj – **integrala nedefinită** a lui  $f$  și se notează  $\int f(x) dx$  sau mai simplu  $\int f dx$ .

Astfel, prin definiție  $\int f dx = F + c \Leftrightarrow F' = f$ .



Din punct de vedere geometric, integrala nedefinită reprezintă o familie de curbe plane obținute una din alta printr-o translație de-a lungul axei  $Oy$ .

Interpretând semnul  $dx$  care apare în notația integralei nedefinite ca o diferențială, avem  $f dx = F' dx = dF$ . Astfel se obțin următoarele relații utile în calcule.

$$\int dF = F + c \quad \text{și} \quad d \int f dx = f dx.$$

Operația de determinare a primitivelor unei funcții se numește integrare. Nu toate funcțiile admit primitive. Dar orice funcție continuă pe un interval admite primitivă pe acel interval (vezi cap X). În acest capitol ne vom ocupa de metode de determinare a primitivelor unor funcții continue. Mai întâi însă vom da

#### Lista integralelor imediate

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \text{ real}, \neq -1) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + c$$

**Proprietățile integralei nedefinite** rezultă cu ușurință din regulile de derivare și sunt:

1.) dacă  $f, g \in C(I)$ , atunci

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (proprietatea de liniaritate)}$$

2.) dacă  $\varphi: \mathfrak{I} \rightarrow I, x = \varphi(t), \varphi \in C^1(\mathfrak{I}), \varphi'(t) \neq 0$  pentru a admite inversa  $t = \psi(x)$ , iar  $f$  este continuă, atunci

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \text{(formula schimbării de variabilă)}$$

3.) dacă  $f, g \in C^1(I)$ , atunci

$$\int f g' dx = f g - \int g f' dx \quad \text{(formula integrării prin părți).}$$

**Observația 1.** În cazul schimbării de variabilă expresia de sub semnul integrală se comportă ca o diferențială; dacă  $x = \varphi(t)$ , atunci  $f(x) dx = f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ . Această observație simplifică calculele.

Formula schimbării de variabilă poate fi privită din ambele sensuri.

Funcția  $x = \varphi(t)$  trebuie aleasă astfel încât să poată fi calculată integrala din membrul drept.

Uneori este preferabilă schimbarea de variabilă sub forma  $t = \psi(x)$ .

**Exemple.**

$$\begin{aligned} 1.) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} &= \int \frac{t dt}{t+1} = 2 \int \left( 1 - \frac{t}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln|t+1|) + c = \\ &= 2\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)^2 + c. \end{aligned}$$

$$2.) \int x \sin x^2 dx = \int \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + c = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c.$$

**Observația 2.** Formula integrării prin părți pentru funcțiile  $u, v \in C^1(I)$  poate fi scrisă și sub forma  $\int u dv = uv - \int v du$  unde  $du = u' dx, dv = v' dx$ .

Ea se folosește de obicei la calculul integralelor de forma  $\int x^n e^{ax} dx$ ;

$\int x^n \ln x dx$ ;  $\int e^{ax} \sin bx dx$ ;  $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$  și altele.

Cu ajutorul ei se pot obține formule de recurență utile în calculul unor primitive.

**Exemplu.**  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x \cdot x dx}{(x^2 + a^2)^n} = \dots$

$$u = x \quad dv = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{2(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$\dots = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{x}{2(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right].$$

$$\text{Astfel } I_n = \frac{x}{a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \quad n > 1.$$

Pornind de la  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ , obținem succesiv

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad \text{etc.}$$

## 2. Integrarea funcțiilor raționale

Integrarea funcției raționale  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  unde  $P$  și  $Q$  sunt polinoame se face pe etape:

Dacă  $grP \geq grQ$ , atunci facem împărțirea cu rest

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad gr R < gr Q.$$

Dacă  $gr P < gr Q$ , atunci descompunem  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  în fracții simple. Acestea sunt

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (n \in \mathbb{N}, b^2 - 4ac < 0).$$

De exemplu 
$$\frac{3x^2 + 5x - 4}{(x+1)^3(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} + \frac{Fx+G}{(x^2+2)^2},$$

coeficienții urmând a fi determinați prin identificarea numărătorilor după ce fracțiile a fost aduse la același numitor sau prin alte metode.

Descompunerea în fracții simple este unică.

Urmează apoi integrarea fracțiilor simple. Astfel

$$1.) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$$

$$2.) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{du}{u^n} = \frac{A}{(x-a)^{n-1}} + c, \quad n > 1$$

3.)  $\int \frac{Bx + c}{ax^2 + bx + c} dx$  se calculează punând în evidență la numărător diferențiala

trinomialului de la numitor, adică  $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx$  și se obțin două integrale de

forma  $\int \frac{du}{u}$  și  $\int \frac{dy}{y^2 + \alpha^2}$ ,

4.)  $\int \frac{Bx + c}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$  se reduce la calculul a două integrale de forma

$$\int \frac{du}{u^n} \text{ și } I_n = \int \frac{dy}{(y^2 + \alpha^2)^n} \text{ după ce s-a procedat ca la 3.)}$$

**Exemplu.**

$$I = \int \frac{3x + 2}{(4x^2 + 4x + 3)^2} dx = \frac{1}{8} \int \frac{3(8x + 4) + 4}{(4x^2 + 4x + 3)^2} dx = -\frac{3}{8} \frac{1}{4x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{2} I_1$$

$$d(4x^2 + 4x + 3) = (8x + 4) dx$$

unde

$$I_1 = \int \frac{dx}{[(2x+1)^2 + 2]^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{(y^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{y}{2(y^2 + 2)} + \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{2}} \right] + c =$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ dy = 2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \frac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + c.$$

$$\text{Deci } I = \frac{1}{16} \frac{2x - 5}{4x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + c.$$

După cum s-a putut observa, primitivele funcțiilor raționale sunt combinații liniare de funcții raționale, funcții logaritmice și funcții arctg.

### 3. Integrale reductibile la integrale din funcții raționale

**Integralele iraționale** de forma

$$\int R \left( x, \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{q_1}, \dots, \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{q_n} \right) dx \quad q_i \in \mathbb{Q}$$

unde  $R$  este o expresie rațională de variabilele sale, se reduc la integrale din funcții raționale

făcând  $\boxed{\frac{ax + b}{cx + d} = t^N}$

unde  $N$  este numitorul comun al fracțiilor  $q_1, \dots, q_n$ .

**Exemplu.** Pentru  $\int \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1-x + \sqrt[3]{(1-x)^2}} dx$  avem  $N = 6$ ; facem  $1-x = t^6$  de unde  $x = 1-t^6$  și

$$dx = -6t^5 dt, \text{ deci}$$

$$\begin{aligned}
I &= -6 \int \frac{1+t^3}{t^6+t^4} \cdot t^5 dt = -6 \int \frac{t^4+t}{t^2+1} dt = -6 \int \left( t^2 - 1 + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \\
&= -2t^3 + 6t - 3 \ln(t^2+1) - 6 \operatorname{arctg} t + c = \\
&= -2\sqrt{1-x} + 6\sqrt[6]{1-x} - 3 \ln \left[ \sqrt[3]{1-x} + 1 \right] - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{1-6x} + c.
\end{aligned}$$

**Integralele binome** au forma

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Ele se mai numesc și integrale Cebâșev\* după numele celui care a arătat că numai în următoarele trei cazuri ele pot fi reduse la integrale din funcții raționale:

- 1.)  $p \in \mathbb{Z}$  cu schimbarea  $x = t^N$  unde  $N$  este numitorul comun a lui  $m$  și  $n$ .
- 2.)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$  cu  $ax^n + b = t^N$  unde  $N$  este numitorul lui  $p$
- 3.)  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$  cu  $ax^n + b = t^N x^n$  unde  $N$  este numitorul lui  $p$

**Exemplu.** Fie  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+4\sqrt{x^3}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} \left( x^{\frac{3}{4}} + 1 \right)^{-\frac{1}{3}} dx$ . Facem  $x^{\frac{3}{4}} + 1 = t^3 x^{\frac{3}{4}}$  și avem

$$x = (t^3 - 1)^{\frac{4}{3}}, dx = -4t^2 (t^3 - 1)^{\frac{7}{3}} dt, \quad x^{\frac{3}{4}} + 1 = t^3 (t^2 - 1)^{-1}.$$

$$\text{Astfel} \quad I = -4 \int t dt = -2t^2 + c = -2 \sqrt[3]{\left( \frac{1}{4\sqrt{x^3}} + 1 \right)^2} + c.$$

**Integralele algebrice** au forma

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

unde  $R$  este o funcție rațională de două variabile.

Substituțiile indicate mai jos se datorează lui Euler:

$$1.) \text{ dacă } a > 0, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x + t$$

$$2.) a < 0, c > 0, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$$

$$3.) a < 0, c < 0, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) \text{ unde } x_1 \text{ este rădăcină a}$$

ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$ . Această ecuație nu poate avea rădăcini complexe deoarece trinomialul  $ax^2 + bx + c$  ar fi negativ  $\forall x \in \mathbb{R}$  și n-ar avea sens radicalul.

\* R.L. Cebâșev (1829 – 1894), academician rus cu contribuții în matematică și mecanică.



Putem de asemenea remarca faptul că ultima schimbare de variabilă poate fi aplicată nu numai când  $a < 0$  ci și când  $a > 0$  dacă trinomial  $ax^2 + bx + c$  are rădăcini reale.

**Exemplu.** Fie  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{-3x^2 + 5x + 1}}$ . Făcând  $\sqrt{-3x^2 + 5x + 1} = tx + 1$ , avem

$$x = \frac{5-2t}{t^2+3}, \quad dx = \frac{2(t^2-5t-3)}{(t^2+3)^2} dt, \quad \sqrt{-3x^2 + 5x + 1} = t \cdot \frac{5-2t}{t^2+3} + 1 = \frac{-t^2 + 5t + 3}{t^2+3},$$

de unde 
$$I = \int \frac{2 dt}{2t-5} = \ln |2t-5| + c = \ln \left| 2 \frac{\sqrt{-3x^2 + 5x + 1}}{x} - 5 \right| + c.$$

**Integralele din funcții trigonometrice** de forma  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  se transformă în integrale din funcții raționale dacă:

1.) funcția  $R$  este impară în  $\cos x$ , adică

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ cu } \boxed{\sin x = t}$$

2.)  $R$  este impară în  $\sin x$ ,

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ cu } \boxed{\cos x = t}$$

3.)  $R$  este pară în  $\sin x$  și  $\cos x$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \text{ cu } \boxed{\operatorname{tg} x = t}$$

4.) facem  $\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$

În primele două situații se diferențiază substituțiile și se pun în evidență la numărător diferențialele lor.

În ultimele două cazuri se exprimă vechea variabilă în funcție de cea nouă și apoi se diferențiază.

**Exemple.**

1.) Fie  $I = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos 2x} dx$ . Efectuăm schimbarea de variabilă  $\cos x = t$  și avem

$-\sin x = dx = dt$ , după care integrala devine

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2 + \cos x} = \int \frac{(t^2 - 1) dt}{2 + t} = \int \left( t + 2 + \frac{3}{t+2} \right) dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + 2t + 3 \ln |t+2| + c = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + c. \end{aligned}$$

2.) Fie  $I = \int \frac{1 + \sin x}{\sin x + \sin x \cos x} dx$ . Făcând  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , avem  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$  și cum

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ urmează că}$$

$$I = \int \frac{(t+1)^2}{2t} dt = \frac{1}{2} \int \left( t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

## Alte tipuri de integrale

1.) O integrală de forma  $\int R(e^{ax}) dx$

se reduce la o integrală rațională dacă se face  $e^{ax} = t$ . Atunci  $x = \frac{1}{a} \ln t$ ,  $dx = \frac{dt}{at}$  și ea

devine  $\int R(t) \frac{dt}{at} = \int R_1(t) dt$ .

**Exemplu.** 
$$I = \int \frac{dx}{sh x + 1} = \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1} = 2 \int \frac{dx}{e^x - e^{-x} + 2} = 2 \int \frac{1}{t - \frac{1}{t} + 2} \cdot \frac{dt}{t} =$$
$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x + 1 - \sqrt{2}}{e^x + 1 + \sqrt{2}} \right| + c$$

2.) Integrarea unor funcții hiperbolice se poate face utilizând formule asemănătoare celor trigonometrice.

**Exemplu.** 
$$I = \int ch^4 x dx = \int \left[ \frac{1 + ch 2x}{2} \right]^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2ch 2x + ch^2 2x) dx =$$
$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} sh 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + ch 4x}{2} dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} sh 2x + \frac{1}{32} sh 4x + c.$$

3.) Integralele de forma  $I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx$  și  $I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx$  se pot obține simultan astfel:

$$I_1 + i I_2 = \int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \int e^{ax} \cdot e^{ibx} dx = \int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + c =$$
$$= \frac{a+ib}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + c$$

Separând partea reală de cea imaginară, avem

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c.$$

## Calculul unor integrale cu ajutorul unor substituții trigonometrice și hiperbolice

Uneori substituțiile indicate în dreptul integralelor ce urmează pot conduce la integrări mai rapide:

1.)  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ , cu  $x = a \cos t$  sau  $x = a \sin t$

2.)  $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ , cu  $x = a \operatorname{tg} t$  sau  $x = a \operatorname{sh} t$

3.)  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ , cu  $x = a \operatorname{ch} t$

**Exemplu.**

$$I = \int \sqrt{x^2 - 2x - 3} dx = \int \sqrt{(x-1)^2 - 4} dx \quad \begin{array}{l} x-1 = 2ch t \\ dx = 2sh t dt \end{array} = 4 \int sh^2 t dt = 2 \int (ch 2t - 1) dt = sh 2t - t + c$$

Pentru revenirea la variabila  $x$  se au în vedere formulele  $sh 2t = 2 sh t ch t$ ,  $e^t = sh t + ch t$  și că din

$$ch t = \frac{x-1}{2} \text{ rezultă } sh t = \sqrt{ch^2 t - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

$$\text{Astfel } I = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 3} + \frac{1}{2} \ln \left( x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right) + c.$$

**Integrale care nu pot fi exprimate prin funcții elementare**

O diferență esențială între calculul diferențial și cel integral este aceea că derivata unei funcții elementare se exprimă totdeauna prin funcții elementare, nu același lucru se poate spune despre primitiva unei funcții elementare.

Așa de exemplu sunt funcțiile:

$$si(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{sinus integral})$$

$$ci(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (\text{cosinus integral})$$

$$li(x) = \int \frac{dx}{\ln x} \quad (\text{logaritm integral})$$

$$\int e^{-x^2} dx \quad (\text{funcția de eroare})$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx \quad (\text{exponențial integral})$$

Tot din această categorie fac parte în general primitivele de forma  $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$

unde  $P$  este polinom de grad  $n > 2$  ca de exemplu  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$  sau funcțiile

$$\text{eliptice } \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}.$$

**Exerciții**

Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

$$1.) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$12.) \int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

$$23.) \int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$2.) \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{x} dx$$

$$13.) \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$24.) \int \sin^5 x \sqrt{\cos x} dx$$

$$3.) \int \frac{sh \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$14.) \int \frac{x^5 dx}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)}$$

$$25.) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$4.) \int x e^x \cos x dx$$

$$15.) \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}$$

$$26.) \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1}}$$

- 5.)  $\int \sin 10x \sin 15x \, dx$
- 6.)  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx$
- 7.)  $\int \ln^n x \, dx$
- 8.)  $\int x^n e^{-x} \, dx$
- 9.)  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \, dx$
- 10.)  $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} \, dx$
- 11.)  $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx$
- 16.)  $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$
- 17.)  $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \, dx$
- 18.)  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}$
- 19.)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}$
- 20.)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$
- 21.)  $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \, dx$
- 22.)  $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$
- 27.)  $\int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + 1}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin x} \, dx$
- 28.)  $\int \frac{dx}{(x^2+1)(2x-\sqrt{x^2+1})}$
- 29.)  $\int \frac{5x \, dx}{\sqrt{1+x^4}}$
- 30.)  $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$
- 31.)  $\int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}$
- 32.)  $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}} \, dx$

## II. INTEGRALA DUBLĂ

### 1. Definiția integralei duble

Fie  $D$  un compact din  $\mathbb{R}^2$  (domeniu închis și mărginit).

Domeniile ce intervin aici, vom presupune că au arie (vezi Manual cls.a XII-a) și frontierele lor sunt curbe netede pe porțiuni, adică reuniuni finite de curbe netede.

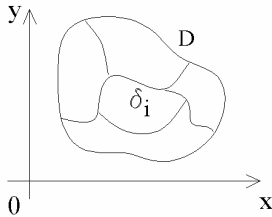
Numim diviziune a lui  $D$ , un număr finit de compacte

$\Delta = \{\delta_i\}_1^n$ , fără puncte interioare comune astfel încât

$$D = \bigcup_1^n \delta_i.$$

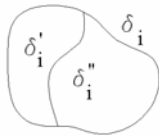
Norma diviziunii  $\Delta$  este prin definiție  $v(\Delta) = \max_{i=1, n} d(\delta_i)$

unde  $d(\delta_i)$  este diametrul compactului  $\delta_i$  adică marginea superioară a distanțelor dintre două puncte oarecare ale lui  $\delta_i$ .



Spunem că diviziunea  $\Delta'$  este mai fină decât  $\Delta$  (scriem  $\Delta' \prec \Delta$ ) dacă orice domeniu al diviziunii  $\Delta$  este o reuniune finită de domenii ale diviziunii  $\Delta'$ . Evident că

$$\Delta' \prec \Delta \Rightarrow v(\Delta') \leq v(\Delta).$$



Fie acum  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție (eventual mărginită),  $\Delta = \{\delta_i\}_1^n$  o diviziune a lui  $D$  și punctele intermediare  $P_i(\xi_i, \eta_i) \in \delta_i \quad i = \overline{1, n}$ .

Fie de asemenea suma integrală

$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_1^n f(P_i) \text{ aria } \delta_i = \sum_1^n f(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } \delta_i.$$

Geometric, dacă  $f \geq 0$ , atunci  $\sigma_{\Delta}(f)$  aproximează volumul corpului  $V$  delimitat de suprafața  $S$  având ecuația  $z = f(x, y)$ , planul  $xOy$  și suprafața cilindrică a cărei generatoare este paralelă cu axa  $Oz$  și se sprijină pe frontiera domeniului  $D$ .

Această aproximație este cu atât mai bună cu cât

diviziunea  $\Delta$  este mai fină.

**Definiția 1.** Spunem că funcția  $f$  este integrabilă pe  $D$ , dacă există și este finită limita

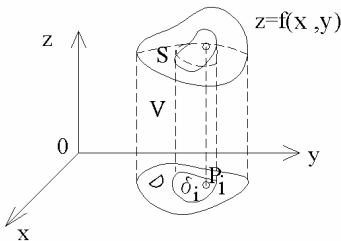
$$\lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f) = I$$

oricare ar fi alegerea punctelor intermediare  $P_i$ .

Această definiție este evident echivalentă cu

**Definiția 2.** Funcția  $f$  este integrabilă pe  $D$ , dacă există un număr real  $I$ , astfel încât

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  așa ca pentru orice diviziune  $\Delta$  a lui  $D$  cu  $v(\Delta) < \eta$ , și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare, să avem



$$|\sigma_{\Delta}(f) - I| < \varepsilon.$$

O definiție echivalentă se poate da și prin șiruri ca și la integrala definită.

Numărul  $I$  se numește **integrala dublă a lui  $f$  pe  $D$**  și se notează

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{sau} \quad I = \iint_D f dx dy.$$

Dacă funcția  $f$  este mărginită pe  $D$ , atunci se pot considera ca și la funcțiile de o singură variabilă, sumele Darboux ale lui  $f$  corespunzătoare diviziunii  $\Delta = \{\delta_i\}_1^n$  a domeniului  $D$

$$s_{\Delta}(f) = \sum_1^n m_i \text{ aria } \delta_i \quad S_{\Delta}(f) = \sum_1^n M_i \text{ aria } \delta_i$$

unde

$$m_i = \inf_{P \in \delta_i} f(P), \quad M_i = \sup_{P \in \delta_i} f(P).$$

Notând cu  $m$  și  $M$  respectiv marginile funcției  $f$  pe  $D$ , au loc evident următoarele inegalități:

$$m \text{ aria } D \leq s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f) \leq M \text{ aria } D.$$

Se pot pune în evidență următoarele proprietăți ale sumelor Darboux:

$$1.) \quad s_{\Delta}(f) = \inf \sigma_{\Delta}(f), \quad S_{\Delta}(f) = \sup \sigma_{\Delta}(f)$$

marginile luându-se după toate alegerile posibile ale punctelor intermediare

$$2.) \quad \text{Dacă } \Delta' \prec \Delta, \text{ atunci } s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

$$\hat{\text{Într-adevăr, dacă }} \delta_i = \delta_i' \cup \delta_i'' \text{ și } m_i' = \inf_{P \in \delta_i'} f(P), \quad m_i'' = \inf_{P \in \delta_i''} f(P),$$

$$\text{atunci } m_i \text{ aria } \delta_i \leq m_i' \text{ aria } \delta_i' + m_i'' \text{ aria } \delta_i''.$$

$$\text{Deducem de aici că dacă } v(\Delta) \downarrow, \text{ atunci } s_{\Delta}(f) \uparrow \text{ și } S_{\Delta}(f) \downarrow.$$

$$3.) \quad \text{Oricare ar fi diviziunile } \Delta_1 \text{ și } \Delta_2, \quad m \text{ aria } D \leq s_{\Delta_1}(f) \leq S_{\Delta_2}(f) \leq M \text{ aria } D.$$

Rezultă de aici că există integralele Darboux ale lui  $f$  pe  $D$ :

$$\underline{I} = \sup_{\Delta} s_{\Delta}(f), \quad \bar{I} = \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f) \quad \text{și că } s_{\Delta}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{\Delta}(f) \quad \forall \Delta.$$

## 2. Criterii de integrabilitate

**Teorema 1 (criteriul lui Darboux).** *O funcție mărginită  $f$  este integrabilă pe  $D$  dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall \Delta$  cu  $v(\Delta) < \eta$*

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon.$$

**Demonstrație**  $\Rightarrow$  Funcția  $f$  fiind integrabilă,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall \Delta$  cu  $v(\Delta) < \eta$  să avem  $I - \varepsilon \leq \sigma_{\Delta}(f) \leq I + \varepsilon$  oricare ar fi alegerea punctelor  $P_i$ .

$$\text{Dar atunci avem și } I - \varepsilon \leq s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f) \leq I + \varepsilon.$$

$$\text{Prin urmare } S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \leq I + \varepsilon - (I - \varepsilon) = 2\varepsilon \quad \forall \Delta \text{ cu } v(\Delta) < \eta.$$

$\Leftarrow$  Presupunem pentru funcția mărginită  $f$  că este îndeplinită condiția din enunț. Atunci are loc și  $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon \quad \forall \Delta$  cu  $v(\Delta) < \eta$ .

Cum  $\varepsilon$  este arbitrar, rezultă  $\bar{I} = \underline{I} = I$ .

Din  $s_{\Delta}(f) \leq I \leq S_{\Delta}(f)$ ,  $s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f)$ , rezultă că  
 $|\sigma_{\Delta}(f) - I| \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$  indiferent de alegerea punctelor  $P_i$ , dacă  $v(\Delta) < \eta$ .

Deci  $f$  este integrabilă și  $\iint_D f dx dy = I$ .

**Teorema 2.** Dacă  $f$  este continuă pe  $D \Rightarrow f$  este integrabilă pe  $D$ .

**Demonstrație.** Funcția  $f$  fiind continuă pe compactul  $D$ , este uniform continuă pe  $D$  și deci  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât oricare ar fi  $P', P'' \in D$  cu  $d(P', P'') < \eta$  să avem

$$|f(P') - f(P'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Fie  $\Delta = \{\delta_i\}_1^n$  o diviziune a lui  $D$  cu  $v(\Delta) < \eta$  și  $m_i, M_i$  marginile lui  $f$  pe  $\delta_i$   $i = \overline{1, n}$ .

Dar  $f$  fiind continuă pe compactul  $\delta_i$ , își atinge marginile pe  $\delta_i$ , deci  $\exists P_i', P_i'' \in \delta_i$  așa ca,  
 $m_i = f(P_i')$ ,  $M_i = f(P_i'')$ . Prin urmare

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) &= \sum_1^n (M_i - m_i) \text{aria } \delta_i \leq \sum_1^n [f(P_i'') - f(P_i')] \text{aria } \delta_i \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \cdot \sum_1^n \text{aria } \delta_i = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cu criteriul lui Darboux rezultă acum integrabilitatea funcției continue  $f$ .

**Definiție.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^2$  se spune că este de **măsură Lebesgue nulă** (sau neglijabilă) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  un șir  $\{I_n\}_n$  de intervale deschise bidimensionale care acoperă

$A$  ( $A \subset \bigcup_n I_n$ ) și astfel încât  $\sum_1^{\infty} \text{aria } I_n < \varepsilon$ .

**Teorema 3 (criteriul lui Lebesgue).** O funcție mărginită este integrabilă pe  $D \Leftrightarrow$  mulțimea punctelor sale de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă.

Drept consecință, dacă mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții mărginite este o curbă netedă pe porțiuni, atunci funcția este integrabilă.

### 3. Proprietățile integralei duble

Se pot pune în evidență următoarele proprietăți:

1.)  $\iint_D dx dy = \text{aria } D$

2.)  $f, g$  integr.  $D, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$  integr.  $D$  și

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy \quad (\text{proprietatea de liniaritate})$$

3.)  $f$  integr.  $D$ ,  $f \geq 0 \Rightarrow \iint_D f \, dx \, dy \geq 0$  (proprietatea de pozitivitate)

4.)  $f, g$  integr.  $D$ ,  $f \leq g \Rightarrow \iint_D f \, dx \, dy \leq \iint_D g \, dx \, dy$  (proprietatea de monotonie)

5.)  $f$  integr.  $D \Rightarrow |f|$  integr.  $D$  și  $\left| \iint_D f \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f| \, dx \, dy$

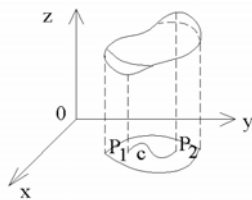
6.)  $f$  integr.  $D$  și  $m \leq f(P) \leq M \quad \forall P \in D \Rightarrow m \text{ aria } D \leq \iint_D f \, dx \, dy \leq M \text{ aria } D$

7.)  $f$  continuă pe  $D \Rightarrow \exists P_0 \in D$  astfel încât

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = f(P_0) \text{ aria } D \quad (\text{teorema de medie})$$

Într-adevăr, dacă  $m$  și  $M$  sunt marginile funcției continue  $f$  pe  $D$  și ele sunt atinse în

$$P_1 \text{ respectiv } P_2 \text{ din } D, \text{ atunci } f(P_1) = m \leq \frac{\iint_D f \, dx \, dy}{\text{aria } D} = \lambda \leq M = f(P_2).$$



Dacă  $C$  este o curbă conținută în  $D$  având capetele  $P_1$  și  $P_2$  și

reprezentarea parametrică  $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$

atunci funcția compusă  $g(t) = f(x(t), y(t))$  este continuă pe  $[\alpha, \beta]$  și  $g(\alpha) = m$ ,  $g(\beta) = M$ .

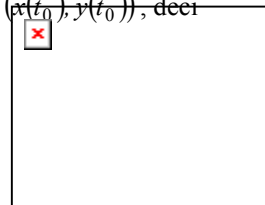
Din proprietatea lui Darboux a funcției  $g$ , deoarece  $g(\alpha) \leq \lambda \leq g(\beta)$  rezultă că  $\exists t_0 \in [\alpha, \beta]$  astfel încât  $\lambda = g(t_0) = f(x(t_0), y(t_0))$ , deci  $\exists P_0(x(t_0), y(t_0)) \in D$  cu proprietatea din enunț.

8.) Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D = D_1 \cup D_2$

unde  $D_1$  și  $D_2$  sunt domenii compacte fără puncte interioare

comune, atunci  $\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D_1} f \, dx \, dy + \iint_{D_2} f \, dx \, dy$

(proprietatea de aditivitate față de domenii).



## 4. Calculul integralei duble

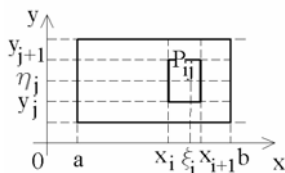
În cele ce urmează vom presupune că  $f$  este funcție continuă pe  $D$ .

1.) Fie  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Fie

$$\Delta': a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\Delta'': c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

diviziuni oarecare ale intervalelor  $[a, b]$  respectiv  $[c, d]$ .





Vom considera pentru  $D$  diviziunea  $\Delta = \{\delta_{ij}\}$

unde  $\delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, m-1}$

Fie punctele  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $\eta_j \in [y_j, y_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, m-1}$ . Evident că  $P_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in \delta_{ij}$  și că  $v(\Delta) \rightarrow 0 \Leftrightarrow v(\Delta') \rightarrow 0, v(\Delta'') \rightarrow 0$ .

Cum funcția  $f$  este integrabilă, avem

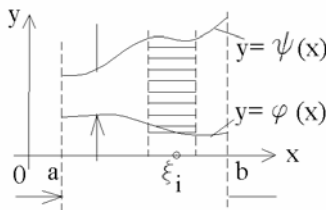
$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}) \text{ aria } \delta_{ij} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \\ &\downarrow \text{când } v(\Delta) \rightarrow 0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i \\ &\downarrow &\downarrow \text{când } v(\Delta'') \rightarrow 0 \\ &\iint_D f(x, y) dx dy &F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy \\ & &\downarrow \\ & &\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) \Delta x_i \\ & &\downarrow \text{când } v(\Delta') \rightarrow 0 \\ & &\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Deci 
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Analog (sau ținând seama de teorema de integrare a unei integrale cu parametru)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

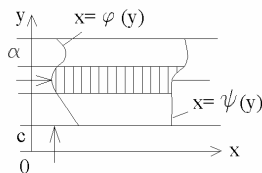
2.) Fie  $D \begin{cases} a \leq x \leq b & \text{unde } \varphi \text{ și } \psi \text{ sunt funcții continue pe } [a, b] \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) & \text{(domeniu simplu în raport cu } Oy) \end{cases}$



În acest caz limitele de integrare la integrala  $F(\xi_i)$  nu mai sunt constante ci dependente de  $\xi_i$

$$F(\xi_i) = \int_{\varphi(\xi_i)}^{\psi(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy$$

și 
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$



3.) Dacă  $D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \varphi(y) \leq x \leq \tau(y) \end{cases}$  cu  $\varphi, \psi$  continue pe  $[a, b]$ .

(domeniu simplu în raport cu  $Ox$ ) atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx.$$

**Exemplu.** Să se calculeze  $I = \iint_D \frac{2x}{(y-2)^2} dx dy$  dacă

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x^2, x \leq (y-2)^2\}.$$

**Soluție.** Domeniul  $D$  este simplu în raport cu  $Ox$  putând fi scris și astfel:

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq (y-2)^2 \end{cases}$$

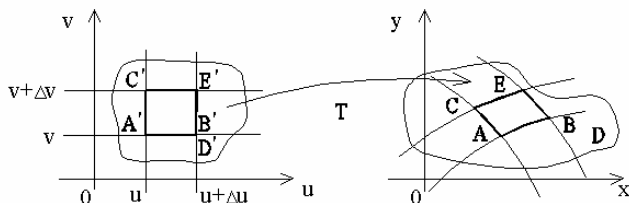
Deci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{(y-2)^2} \frac{2x}{(y-2)^2} dx = \int_0^1 \frac{dy}{(y-2)^2} x^2 \Big|_{\sqrt{y}}^{(y-2)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(y-2)^2} [(y-2)^4 - y] dy = \\ &= \int_0^1 \left[ (y-2)^2 - \frac{y}{(y-2)^2} \right] dy = \frac{(y-2)^3}{3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left[ \frac{1}{y-2} + \frac{2}{(y-2)^2} \right] dy = \ln 2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

### Schimbarea de variabile la integrala dublă

Fie  $f$  o funcție continuă definită pe compactul  $D$  din planul  $xOy$  și transformarea

regulată:  $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D'$ .



Correspondența domeniilor este cea din figură.

Evident, funcția compusă  $f(x(u, v), y(u, v))$  este continuă pe  $D$ .

Ne interesează care este legătura dintre elementul de arie  $dx dy$  din planul  $xOy$  și  $du dv$  din  $uOv$ . Rețeaua de curbe coordonate din  $uOv$  este  $u = \text{const}$  și  $v = \text{const}$ . Avem evident

$$dx = x'_u du + x'_v dv, \quad dy = y'_u du + y'_v dv.$$

Cum  $B' \in v = \text{const}$ ,  $C' \in u = \text{const}$ , rezultă că punctele  $A, B$  și  $E$  au coordonatele  $A(x, y), B(x + x'_u du, y + y'_u du), C(x + x'_v dv, y + y'_v dv)$ , de unde rezultă că

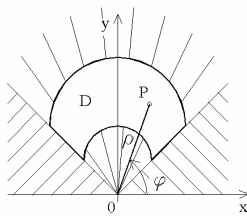
$$dx dy = 2 \text{ aria } \Delta ABC = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + x'_u du & y + y'_u du & 1 \\ x + x'_v dv & y + y'_v dv & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'_u du & y'_u du & 0 \\ x'_v dv & y'_v dv & 0 \end{vmatrix} = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv,$$

deci  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv$ . (formula schimbării de variabile).

**Exemplu.** Să se calculeze  $I = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$  unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ay \leq x^2 + y^2 \leq 2ay, x^2 \leq y^2\}.$$

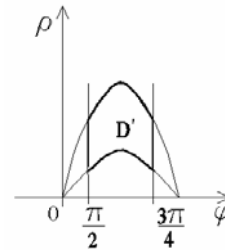
**Soluție.**



Făcând transformarea polară, avem

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \\ a \sin \varphi \leq \rho \leq 2a \sin \varphi \end{cases} \text{ și iacobianul}$$



$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho, \text{ deci}$$

$$I = \iint_{D'} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi \int_{a \sin \varphi}^{2a \sin \varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \varphi \cdot 3a^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\sin^3 \varphi}{3} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 0$$

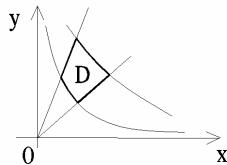
## 5. Aplicații ale integralei duble

**Aria unui domeniu plan**  $\text{aria } D = \iint_D dx dy$

**Exemplu.** Să se calculeze aria domeniului  $D$  definit de inegalitățile  $1 \leq xy \leq 2$ ,  $x \leq y \leq 3x$

**Soluție.** Făcând transformarea  $T : \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ , domeniul  $D$  se

transformă în dreptunghiul  $D' : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 3 \end{cases}$ . Avem apoi

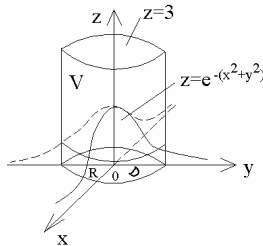
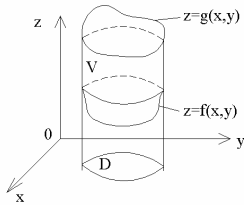


$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left| \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \right| = 2 \frac{y}{x}, \text{ de unde}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v} .$$

Prin urmare  $aria D = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_1^3 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \ln 3 .$

### Calculul volumelor



Fie un domeniu  $V \subset \mathbb{R}^3$  definit de inegalitățile

$$V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ f(x, y) \leq z \leq g(x, y) \end{cases}$$

unde  $f$  și  $g$  sunt funcții continue pe  $D$ .

Cu interpretarea geometrică a integralei duble rezultă că

$$vol V = \iint_D [g(x, y) - f(x, y)] dx dy .$$

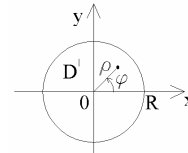
**Exemplu.** Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele

$$z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 3 \text{ și } x^2 + y^2 = R^2 .$$

**Soluție.** Avem

$$vol V = \iint_D [3 - e^{-(x^2+y^2)}] dx dy = 3 \iint_D dx dy - \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \dots$$

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\dots = 3 \text{aria } D - \iint_{D'} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi =$$

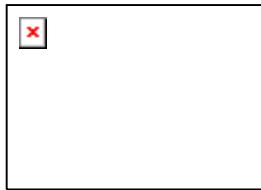
$$= 3\pi R^2 - \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi R^2 + \pi(e^{-R^2} - 1)$$

### Masa și centrul de greutate ale unei plăci plane

Dacă  $D$  este o placă materială din planul  $xOy$  având densitatea superficială  $\rho(x, y)$ , funcție continuă, atunci cum masa plăcii

este  $M = \sum m_i = \sum \rho(P_i) \text{aria } \delta_i ,$

rezultă că  $M = \text{masa } D = \iint_D \rho(x, y) dx dy .$



Coordonatele centrului de greutate  $G(x_G, y_G)$  al plăcii sunt

date evident de formulele

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_G = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

Dacă placa este omogenă ( $\rho = \text{const}$ ), atunci

$$x_G = \frac{1}{\text{aria } D} \iint_D x dx dy, \quad y_G = \frac{1}{\text{aria } D} \iint_D y dx dy.$$

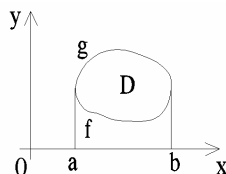
Presupunând că domeniul  $D: \begin{cases} x \in [a, b] \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$  se află în întregime de o parte a axei

$Ox$ , să observăm că ultima formulă poate fi scrisă sub forma

$$\text{aria } D \cdot y_G = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_a^b g^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx.$$

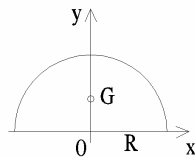
Amplificând cu  $2\pi$  se obține volumul corpului de rotație a domeniului  $D$  în jurul axei  $Ox$  și anume

$$v = \text{aria } D \cdot 2\pi y_G$$



S-a ajuns astfel la **a doua teoremă a lui Guldin**: dacă un domeniu plan se rotește în jurul unei axe din planul său și care nu îl intersectează, atunci volumul corpului de rotație astfel obținut este egal cu produsul dintre aria domeniului și lungimea cercului descris de centrul de greutate.

**Exemplul 1.** Cu ajutorul teoremei lui Guldin putem rapid calcula centrul de greutate al semicercului de rază  $R$ . Astfel

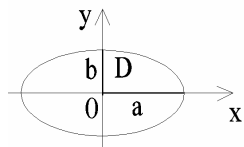


de unde

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_G$$

$$y_G = \frac{4}{3\pi} R = 0,425 R.$$

**Exemplul 2.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene



$$D = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x, y \geq 0 \right. \right\}.$$

**Soluție.** Elipsa fiind un cerc de rază 1 deformat

$$\left( \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right) \text{ vom folosi transformarea polară generalizată:}$$

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \varphi \end{cases} \text{ pentru care } \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = ab\rho. \text{ În acest caz } D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Astfel } \text{aria } D = \iint_D dx dy = \iint_{D'} ab\rho d\rho d\varphi = ab \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi \frac{ab}{4},$$

$$\iint_D x dx dy = \iint_{D'} a \rho \cos \varphi ab \rho d\rho d\varphi = a^2 b \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{a^2 b}{3} \quad \text{și } x_g = \frac{4a}{3\pi}. \text{ Având în vedere}$$

forma domeniului rezultă  $G\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$ .

### Momentele de inerție ale unei plăci plane

Momentele de inerție ale plăcii  $D$  având densitatea superficială  $\rho(x, y)$ , față de originea axelor și față de axele de coordonate sunt date de formulele:

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy, \quad I_{O_x} = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_{O_y} = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

**Exemplu.** Să se calculeze momentul de inerție al discului de rază  $R$  în raport cu centrul său, în ipoteza că este omogen.

**Soluție.** Dacă densitatea discului este  $d$ , atunci avem

$$I_O = d \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = d \iint_{D'} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} d$$

## Exerciții

1.) Să se calculeze  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}y}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$  schimbând ordinea de integrare. R:  $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$

2.) Să se calculeze

a)  $\iint_D \frac{dx dy}{6x + y + 9}$ , unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| - 1 \leq y \leq x^2\}$  R:  $3 \ln 2 - 2$

b)  $\iint_D x \sin(x + y) dx dy$ , unde  $D = [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  R:  $\pi - 2$

c)  $\iint_D \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}{x^2 + y^2} dx dy$ , dacă  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$

d)  $\iint_D (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10) dx dy$ , unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 \leq 0\}$

$$\text{R: } \frac{17\pi}{2}$$

e)  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$  unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, 2y \leq x^2 + y^2 \leq 6y\}$  R:  $\frac{1}{12}$

$$f) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy$$

3.) Să se calculeze ariile domeniilor limitate de

a) elipsa  $(x-2y+3)^2 + (3x+4z+1)^2 = 100$

$$R: \begin{cases} 10\pi \cdot u = x-2y \\ v = 3x+4y \end{cases}$$

b) cercurile  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$  și dreptele  $y = x$ ,  $y = 0$

$$R: 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

c) parabolele  $y^2 = x$ ,  $y^2 = 2x$ ,  $x^2 = ay$ ,  $x^2 = 2ay$ ,  $a > 0$

$$R: \frac{a}{3}$$

4.) Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele

a)

$$z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x$$

$$R: \frac{9}{2} a^4$$

b)  $x^2 + y^2 - az = 0$ ,  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $z = 0$ ,  $a > 0$

$$R: \frac{\pi a^3}{8}$$

5.) Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene limitate de astroida  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  și axele Ox

și Oy

$$R: x_6 = y_6 = \frac{256}{315} \frac{a}{\pi}$$

6.) Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale plăcii omogene mărginite de

curba  $x^2 + y^2 = ay$  ( $a > 0$ ).

$$R: I_x = \frac{5\pi a^4}{64} d, I_y = \frac{\pi a^4}{64} d$$

### III. INTEGRALA TRIPLĂ

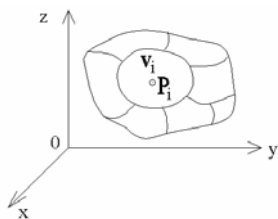
#### 1. Definiția integralei triple

Integrala triplă a unei funcții de trei variabile pe un domeniu compact din  $\mathbb{R}^3$  se introduce absolut analog integralei duble.

Noțiunea de integrabilitate, diversele criterii de integrabilitate, proprietățile funcțiilor integrabile, se transpun cu ușurință de la funcțiile de două la cele de trei variabile.

Pentru a nu relua întreaga teorie și mai ales pentru a simplifica expunerea, ne vom limita la cazul funcțiilor continue.

Fie  $V$  un compact din  $\mathbb{R}^3$  și  $\Delta = \{v_i\}_1^n$  o diviziune a sa, obținută prin împărțirea lui  $V$  într-un număr finit de compacte cu ajutorul unor suprafețe, neavând puncte interioare comune. Norma diviziunii  $\Delta$  este  $v(\Delta) = \max_{i=1,n} d(v_i)$ ,  $d(v_i)$  fiind diametrul mulțimii  $v_i$ .



Fie  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă,  $\Delta = \{v_i\}_1^n$ , o diviziune a lui  $V$ , punctele  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) și suma

integrală 
$$\sigma_{\Delta}(f) = \sum_1^n f(P_i) \text{vol } v_i = \sum_1^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{vol } v_i.$$

Dacă  $f \geq 0$  reprezintă densitatea unui corp ce ocupă domeniul  $V$ , atunci  $\sigma_{\Delta}(f)$  aproximează masa corpului, aproximația fiind cu atât mai bună cu cât diviziunea  $\Delta$  este mai fină.

Numim **integrala triplă a funcției  $f$  pe  $V$** , numărul 
$$I = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f).$$

În cazul funcției continue  $f$ , această limită există, este finită și nu depinde de alegerea punctelor  $P_i$ . Integrala triplă se notează  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ ,  $\iiint_V f dx dy dz$  sau  $\iiint_V f d\omega$ .

#### 2. Calculul integralei triple

Fie  $V$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$  adică un domeniu definit de inegalitățile

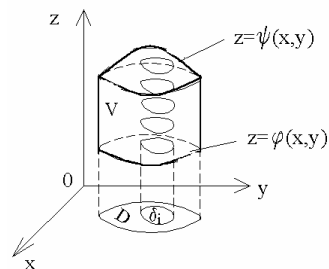
$$V: \begin{cases} (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \end{cases}$$

unde  $\varphi$  și  $\psi$  sunt funcții continue pe  $D$ .

Procedând ca în cazul integralei duble se obține următoarea formulă de calcul

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Prin urmare calculul integralei triple se reduce la calculul unei integrale duble și a unei integrale simple.

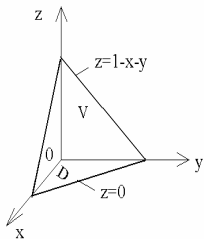




**Exemplu.** Să se calculeze  $I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$  dacă domeniul  $V$  este limitat de planele

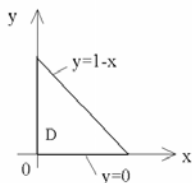
$$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1.$$

**Soluție.**



Deoarece  $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \leq z \leq 1-x-y \end{cases}$  avem

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2} \iint_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} dx dy = \\ &= -\frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dx dy = -\frac{1}{8} \text{aria } D + \frac{1}{2} \iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} = \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ -\frac{1}{1+x+y} \right]_0^{1-x} dy = \\ &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$



### Schimbarea de variabile la integrala triplă.

Dacă domeniul compact  $V$  este imaginea domeniului  $V'$  prin transformarea regulată

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (u, v, w) \in V' \text{ iar } f(x, y, z) \text{ este o funcție continuă pe } V, \text{ atunci are loc formula}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

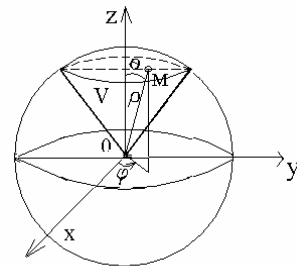
numită formula schimbării de variabile la integrarea triplă.

**Exemplu.** Să se calculeze  $I = \iiint_V z dx dy dz$  unde

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, x^2 + y^2 \leq z^2, z \leq 0 \right\}.$$

**Soluție.** Făcând transformarea sferică:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \text{ avem } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin \theta, \text{ și } V' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$



$$\text{Astfel } I = \iiint_{V'} \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = 8\pi.$$

### 3. Aplicații ale integralei triple

**Calculul volumelor** Faptul că  $vol V = \iiint_V dx dy dz$  rezultă din aceea că orice sumă

integrală a funcției  $f(x, y, z) \equiv 1$  este egală cu  $vol V$ .

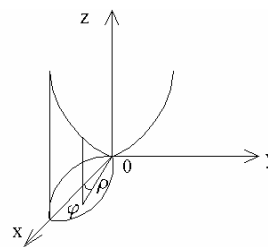
**Exemplu.** Să se calculeze volumul din cilindrul  $x^2 + y^2 = 2ax$  cuprins între paraboloidul  $x^2 + y^2 = 2az$  și planul  $xOy$ .

**Soluție.** Cu transformarea cilindrică:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \text{ avem } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho, \text{ și } V' : \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi \\ 0 \leq z \leq \frac{\rho^2}{2a} \end{cases} . \text{ Prin urmare}$$

$$vol V = \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{2a}} dz =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho d\rho \cdot \frac{\rho^2}{2a} = \frac{1}{2a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{4} \cdot 16a^4 \cos^4 \varphi = \frac{3\pi}{4} a^3 .$$



#### Masa și centrul de greutate ale unui corp

Dacă  $\rho(x, y, z)$  este densitatea unui corp ce ocupă domeniul  $V \subset \mathbb{R}^3$ , atunci masa corpului este dată de  $M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$  iar coordonatele centrului de greutate de:

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz .$$

**Exemplu.** Să se calculeze centrul de greutate al jumătății superioare a sferei de rază  $R$  cu centrul în origine, dacă densitatea sa este constantă.

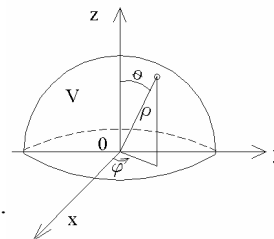
**Soluție.** Corpul fiind omogen,  $z_G = \frac{1}{vol V} \iiint_V z dx dy dz$ . Avem apoi  $vol V = \frac{2\pi}{3} R^3$

și

$$\iiint_V z dx dy dz = \iiint_{V'} \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4} R^4, \text{ de unde } z_G = \frac{3}{8} R .$$

În virtutea simetriei corpului  $V$ , centrul de greutate este  $G\left(0, 0, \frac{3}{8} R\right)$ .



**Momentele de inerție ale unui corp** având densitatea  $\rho(x, y, z)$  și ocupând domeniul

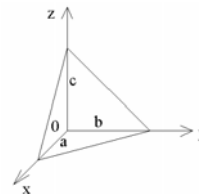
$V$  sunt date de formule ca:  $I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$ ,

$$I_{0z} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{x0y} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

**Exemplu.** Să se calculeze momente de inerție ale piramidei omogene limitate de planele de coordonate și planul  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

**Soluție.** Avem  $\rho = \text{const.}$ , deci

$$I_{x0y} = \rho \iiint_V z^2 dx dy dz = \rho \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z^2 dz = \frac{abc^3}{60} \rho.$$



Prin urmare

$$I_{y0z} = \frac{a^3 bc}{60} \rho, \quad I_{z0x} = \frac{ab^3 c}{60} \rho \text{ și } I_0 = \frac{abc}{60} (a^2 + b^2 + c^2) \rho.$$

### Potențialul newtonian

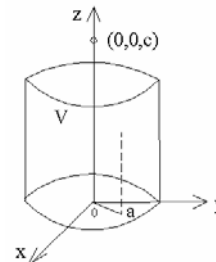
Pentru un punct material de masă  $m$ , potențialul newtonian sau gravitațional se definește prin formula  $U=m/r$ , unde  $r$  este distanța punctului material până la punctul din spațiu în care se consideră potențialul.

În cazul unui corp material care ocupă domeniul  $V \subset \mathbb{R}^3$  și are densitatea  $\rho(x, y, z)$ , potențialul newtonian în punctul  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  este  $U(P_0) = \iiint_V \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$

**Exemplu.** Să se calculeze potențialul newtonian al cilindrului omogen definit de inegalitățile  $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$  într-un punct de pe axa cilindrului.

**Soluție.** Fie  $c > h$  și densitatea  $\mu$ . Avem

$$\begin{aligned} U(0,0,c) &= \mu \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2}} = \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-c)^2}} = 2\pi\mu \int_0^h \left\{ \sqrt{a^2 + (z-c)^2} - |z-c| \right\} dz = \\ &= \pi\mu \left[ a^2 \ln \frac{(h-c) + \sqrt{(h-c)^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2} - c} + (h-c)\sqrt{(h-c)^2 + a^2} + c\sqrt{a^2 + c^2} + h(h-2c) \right]. \end{aligned}$$



## Exerciții

1.) Să se calculeze

a)  $\iiint_V [x^2 + y^2 + (z-2)^2]^{-1/2} dx dy dz$  unde  $V$  este cilindrul  $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

b)  $\iiint_V xyz \sin(x+y+z) d\omega$  unde  $V$  este limitat de planele  $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$

c)  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} d\omega$  unde  $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq z\}$  R:  $\frac{\pi}{10}$

d)  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz$  trecând la coordonate cilindrice R:  $\frac{8}{9} a^2$

e)  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$  R:  $\frac{4\pi}{3}$ ; f)  $\iiint_{0 \leq x,y,z < \infty} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$  R:  $\frac{8}{15}$

2.) Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele

$$x+y+z=a, x+y+z=2a, x+y=z, x+y=2z, y=x, y=3x \quad \text{R: } \frac{49}{864} a^3$$

3.) Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafața  $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$  R:  $\frac{\pi a^3}{3}$

4.) Să se calculeze volumul corpului limitat de sfera  $x^2+y^2+z^2=4$  și paraboloidul  $x^2+y^2=3z$  (interior paraboloidului). R:  $\frac{19\pi}{6}$

5.) Să se determine centrul de greutate al corpului material omogen care ocupă domeniul

$$V: x,y,z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad \text{R: } G\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{b}, \frac{3}{8}c\right)$$

6.) Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului material care ocupă domeniul mărginit de suprafețele  $\frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ,  $z=c > 0$  și având densitatea  $d = \text{const.}$

$$\text{R: } I_{x0y} = \frac{\pi abc^3 d}{5}, I_{y0z} = \frac{\pi a^3 bc d}{20}, I_{x0z} = \frac{\pi ab^3 c d}{20}$$

7.) Să se calculeze masa paralelipipedului  $a \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$  dacă densitatea în fiecare

punct  $(x,y,z)$  este dată de  $\rho(x,y,z) = x+y+z$  R:  $\frac{abc}{2}(a+b+c)$

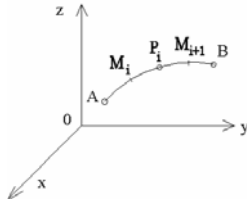
8.) Să se calculeze momentul de inerție în raport cu originea a corpului de densitate  $\rho=1$  care ocupă

domeniul  $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 2az, x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2, a > 0\}$ . R:  $\frac{\pi a^5}{3} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$

## IV. INTEGRALE CURBILINII

Integralele curbilinii se introduc pentru funcții definite pe un arc de curbă.

Fie  $C$  o curbă simplă din  $\mathbb{R}^3$ , netedă (sau netedă pe porțiuni) și orientată, având extremitățile  $A$  și  $B$ .



Fie  $\Delta = \{M_i\}_0^n$ , unde  $A = M_0 < M_1 < \dots < M_n = B$ , o diviziune a ei prin punctele  $M_i \in C$ .

Norma  $v(\Delta)$  a diviziunii  $\Delta$  este cea mai mare dintre

lungimile coardelor  $M_i M_{i+1}$ . Dacă  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$  cu

$x, y, z \in C^1[\alpha, \beta]$  este reprezentarea parametrică a curbei  $C$ , atunci evident că diviziunii  $\Delta$  îi corespunde diviziunea  $\Delta = \{t_i\}_0^n$  a segmentului  $[\alpha, \beta]$  unde  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  și  $M_i(t = t_i)$ . Să observăm că  $v(\Delta) \rightarrow 0 \Leftrightarrow v(\Delta') \rightarrow 0$ . Într-adevăr, cu teorema creșterilor finite avem

$$\begin{aligned} |M_i M_{i+1}| &= \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2} = \\ &= \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2 + [\dot{z}(\zeta_i)]^2} (t_{i+1} - t_i) = \lambda_i (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

unde  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in [t_i, t_{i+1}]$   $i = \overline{1, n-1}$ . Notând cu  $m = \min_{i=0, n-1} \lambda_i$ ,  $M = \max_{i=0, n-1} \lambda_i$ , avem

$$v(\Delta) = \max M_i M_{i+1} \leq M \max (t_{i+1} - t_i) = M v(\Delta') \text{ și}$$

$$v(\Delta') = \max (t_{i+1} - t_i) \leq \frac{1}{m} \max M_i M_{i+1} = \frac{1}{m} v(\Delta).$$

### 1. Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului (de speța I-a)

Fie funcția continuă  $F : C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta = \{M_i\}_0^n$  o diviziune a curbei  $C$ , câte un punct  $P_i$

aparținând arcului  $M_i M_{i+1}$  și suma integrală  $\sigma_\Delta(F) = \sum_0^{n-1} F(P_i) l_i$  unde  $l_i$  este lungimea arcului  $M_i M_{i+1}$ .

În cazul în care  $F$  reprezintă densitatea liniară a firului material având ca imagine curba  $C$ ,  $\sigma_\Delta(F)$  aproximează masa firului.

Prin definiție, integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului a funcției  $F$  de-a lungul arcului  $AB$  este  $\int_{AB} F dl = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_\Delta(F)$ . Se folosește și notația  $\int_C F dl$ .

Se poate demonstra că în ipoteza făcută (curba netedă și funcția  $F$  continuă) limita de sus există, este finită și nu depinde de alegerea punctelor intermediare  $P_i$ .

**Proprietăți ale  $\int_C F dl$ .**

- 1.)  $\int_{AB} F dl$  nu depinde de sensul de parcurs al curbei, adică  $\int_{AB} F dl = \int_{BA} F dl$ .
- 2.)  $\int_{AB} (\alpha F + \beta G) dl = \alpha \int_{AB} F dl + \beta \int_{AB} G dl \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (liniaritatea)
- 3.)  $\int_{AB} F dl = \int_{AC} F dl + \int_{CB} F dl$  dacă  $C \in \widehat{AB}$  (aditivitatea față de arce)

**Calculul  $\int_C F dl$ .**

Evident că dacă  $P_i(\tau_i) \in M_i M_{i+1}$ , atunci  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . Are loc aproximarea

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(F) &= \sum F(P_i) l_i \approx \sum F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} (t_{i+1} - t_i) \approx \\ &\approx \sum F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)} (t_{i+1} - t_i) \end{aligned} \quad \text{unde}$$

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . Aceasta rezultă din continuitatea uniformă a funcției

$g(u, v, w) = \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(v) + \dot{z}^2(w)}$  pe compactul  $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ , precum și din mărginirea funcției  $F(x(t), y(t), z(t))$  pe  $[\alpha, \beta]$ . Într-adevăr,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$  astfel încât oricare ar fi punctele  $P'(u', v', w'), P''(u'', v'', w'')$  cu  $|u' - u''|, |v' - v''|, |w' - w''| < \eta$  să avem

$|g(u', v', w') - g(u'', v'', w'')| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$ . Atunci, dacă  $v(\Delta') < \eta$ , rezultă

$$\begin{aligned} & \left| \sum [F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) - F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) g(\tau_i, \tau_i, \tau_i)] \Delta t_i \right| \leq \\ & \leq \sum |F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))| |g(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) - g(\tau_i, \tau_i, \tau_i)| (t_{i+1} - t_i) \leq \\ & \leq M \sum \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (t_{i+1} - t_i) = M\varepsilon. \end{aligned}$$

Funcția  $F(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  fiind continuă pe  $[\alpha, \beta]$ , deci integrabilă, observăm că trecând la limită  $\sigma_{\Delta}(F)$  când  $v(\Delta) \rightarrow 0$  (echivalent cu  $v(\Delta') \rightarrow 0$ ), obținem formula de calcul a integralei curbilinii de prima speță și anume

$$\int_C F dl = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

**Observații:**

1.) Forma diferențială  $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  se numește **element de arc al curbei C**.

2.) Formula de calcul trebuie adoptată pentru diferitele reprezentări ale curbei care poate fi și plană.

**Exemplu.** Să se calculeze  $I = \int_C xy^2 z dl$  de-a lungul curbei  $C: x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{t^2}{2}$  între punctele  $A(0, 0, 0)$  și  $B\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ .

**Soluție.** Evident că  $t \in [0, 1]$ . Avem apoi 
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \sqrt{2t} \Rightarrow dl = \sqrt{1+2t+t^2} dt = |1+t| dt = (1+t) dt \\ \dot{z} = t \end{cases}$$

și deci 
$$I = \int_0^1 t \cdot \frac{8t^3}{9} \cdot \frac{t^2}{2} (1+t) dt = \frac{4}{9} \int_0^1 t^6 (1+t) dt = \frac{5}{42}.$$

### Aplicații

#### Lungimea unui arc de curbă

Este evident că lungimea curbei  $C$  este dată de formula  $L = \int_C dl$ .

#### Masa și centrul de greutate ale unui fir material

Dacă densitatea  $\rho(x, y, z)$  a firului material, imagine a curbei simple  $C$  este funcție continuă, atunci masa firului este dată de  $M = \int_C \rho(x, y, z) dl$ , iar centrul de greutate  $G$  are

coordonatele  $x_G = \frac{1}{L} \int_C x dl, y_G = \frac{1}{L} \int_C y dl, z_G = \frac{1}{L} \int_C z dl$ , unde  $L$  este lungimea curbei.

**Momentele de inerție ale unui fir material** de densitate  $\rho(x, y, z)$  se calculează cu formule ca:  $I_0 = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$ ,

$$I_{xOy} = \int_C z^2 \rho(x, y, z) dl, \quad I_{Oz} = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dl$$

#### Exemple.

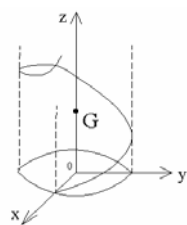
1.) Să se calculeze masa firului material care are ca imagine arcul de parabolă  $y = \frac{x^2}{2}, x \in [0, 1]$  și densitatea liniară  $\rho(x, y) = 1 + x$ .

**Soluție.** Masa este dată de  $M = \int_C (1+x) dl$ , iar  $dl = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+x^2} dx$ , deci

$$M = \int_0^1 (1+x) \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (1+\operatorname{sh} u) \operatorname{ch}^2 u du = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{7\sqrt{2}-2}{6}.$$

2.) Să se determine centrul de greutate al unei spirale elice:  
 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]$  știind că densitatea sa liniară este constantă:

**Soluție.** Din  $\dot{x} = -a \sin t, \dot{y} = a \cos t, \dot{z} = b$  rezultă  $dl = \sqrt{a^2 + b^2} dt$ . Urmează că



$$L = \int_C dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

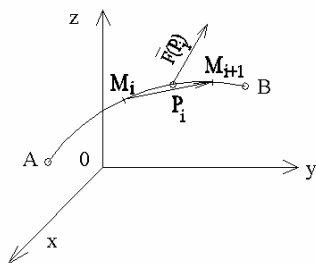
$$\int_C x dl = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0, \quad \int_C y dl = \int_0^{2\pi} a \sin t \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0$$

$$\int_C z dl = \int_0^{2\pi} bt \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi b \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ și deci } G(0, 0, b\pi), \text{ rezultat evident.}$$

## 2. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele (de speța a II-a)

Vom presupune de data aceasta că pe curba  $C$  este definită funcția vectorială continuă  $\vec{F}: C \rightarrow \mathbb{R}^3$  unde  $\vec{F}(P) = X(P)\vec{i} + Y(P)\vec{j} + Z(P)\vec{k}$   $P \in C$ .

Dacă  $\Delta = \{M_i\}_0^n$  este o diviziune a curbei  $C$  și  $P_i \in M_i M_{i+1}$ , să considerăm suma



$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(\vec{F}) &= \sum_0^{n-1} \vec{F}(P_i) \cdot \overrightarrow{M_i M_{i+1}} = \\ &= \sum_0^{n-1} (X(P_i)\Delta x_i + Y(P_i)\Delta y_i + Z(P_i)\Delta z_i) \end{aligned}$$

Dacă  $\vec{F}$  este o forță ce acționează de-a lungul curbei  $C$ , atunci  $\sigma_{\Delta}(\vec{F})$  reprezintă cu aproximație lucrul mecanic efectuat de ea.

Integrala curbilinie a funcției  $\vec{F}$  de-a lungul curbei  $C$  (integrala de speța a doua) se introduce ca fiind  $\int_C X dx + Y dy + Z dz = \lim_{v(\Delta)=0} \sigma_{\Delta}(\vec{F})$ . Ea se notează și  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  având

în vedere că dacă  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , atunci  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ .

Limita de sus, în condițiile impuse curbei de a fi netedă sau netedă pe porțiuni și funcției  $\vec{F}$  de a fi continuă, există, este finită și nu depinde de punctele intermediare  $P_i$ .

### Observații

1.) Analog se definește  $\int_C X dx + Y dy$  unde  $C$  este o curbă din plan.

2.) Integrala curbilinie a funcției vectoriale  $\vec{F}$  de-a lungul curbei închise  $C$  se numește **circulația vectorului  $\vec{F}$**  prin conturul închis  $C$  și se notează  $\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

### Proprietăți:

1.)  $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ;



$$2.) \int_{AB} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \int_{AB} \vec{G} \cdot d\vec{r} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$3.) \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AC} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{CB} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \forall C \in \overset{\frown}{AB}.$$

**Calculul**  $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$

În cazul particular în care  $\vec{F} = X \vec{i}$ , avem

$$\sigma_{\Delta}(F) = \sum X P_i [x(t_{i+1}) - x(t_i)] = \sum X(P_i) \dot{x}(\xi_i) (t_{i+1} - t_i), \text{ unde } \xi_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

Având în vedere că  $\int_C X dx$  nu depinde de alegerea punctelor  $P_i$ , vom alege

$P_i(\xi_i) \in M_i M_{i+1}$ , și vom avea

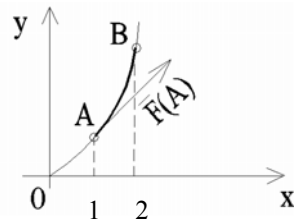
$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(X \vec{i}) &= \sum X(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \dot{x}(\xi_i) (t_{i+1} - t_i) \\ &\downarrow \quad v(\Delta) \rightarrow 0 \quad \downarrow \quad v(\Delta') \rightarrow 0 \\ \int_C X(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt \end{aligned}$$

Ca urmare formula de calcul a integralei curbilinii în raport cu coordonatele este

$$\begin{aligned} \int_C X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{X(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + Y(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + Z(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t)\} dt. \end{aligned}$$

### Aplicații

1.) Să se calculeze lucrul mecanic prestat de forța  $\vec{F}(x, y) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}$  în deplasare pe arcul  $\overset{\frown}{AB}$  al parabolei:  $y = x^2$  de la  $A(1, 1)$  la  $B(2, 4)$ .

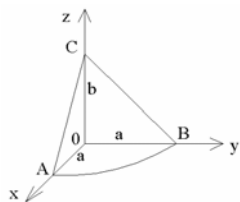


**Soluție.** De-a lungul arcului  $\overset{\frown}{AB}$  a cărei reprezentare explicită este  $y = x^2$ ,  $x \in [1, 2]$  avem  $dy = 2x dx$ , deci lucrul mecanic va fi

$$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} 2x dx + 3y dy = \int_1^2 (2x + 3x^2 \cdot 2x) dx = 25,5$$

2.) Să se calculeze circulația vectorului  $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} - yz\vec{k}$  în conturul închis  $ABCA$  unde  $A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, b)$ ,  $\overset{\frown}{AB}$  este un arc de cerc,  $\overset{\frown}{CA}$  este arc de elipsă.

**Soluție.** Avem



$$\Gamma = \oint_{ABCA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ABCA} x^2 dx + xy dy - yz dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} .$$

Punând în evidență reprezentările parametrice ale celor trei arce avem :

$$(C_1) : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} dx = -a \sin t dt \\ dy = a \cos t dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$\text{și } \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^3 \cos^2 t \sin t + a^3 \sin t \cos^2 t) dt = 0 ,$$

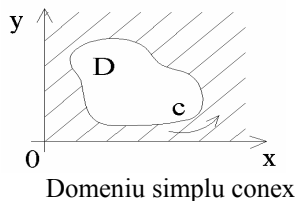
$$(C_2) : \begin{cases} x = 0 \\ y = a \left(1 - \frac{z}{b}\right) \end{cases} \quad z \in [0, b] \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = -\frac{a}{b} dz \end{cases} \quad \text{și } \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^b a \left(1 - \frac{z}{b}\right) z dz = -\frac{ab^2}{6}$$

$$(C_3) : \begin{cases} x = a \sin t \\ y = 0 \\ z = b \cos t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} dx = a \cos t dt \\ dy = 0 \\ dz = -b \sin t dt \end{cases} \quad \text{și } \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t \cos t dt = \frac{a^3}{3} .$$

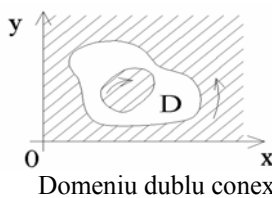
$$\text{Deci } \Gamma = \frac{a^3}{3} - \frac{ab^2}{6} .$$

### 3. Formula lui Green \*

Dacă  $D \subset \mathbb{R}^2$  este un domeniu compact a cărui frontieră este curba netedă pe porțiuni  $C$ , atunci vom considera *sens direct* sau pozitiv de parcurgere a frontierei, acela în care un observator deplasându-se de-a lungul ei lasă interiorul domeniului la stânga.



Domeniu simplu conex



Domeniu dublu conex  
(cu o "gaură")

Ambele domenii au  
frontiera orientată  
direct.

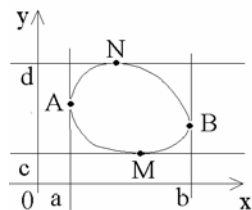
**Teoremă.** Fie  $X$  și  $Y$  două funcții definite și continue pe un domeniu elementar  $D \subset \mathbb{R}^2$  a cărui frontieră este curba netedă  $C$ . Dacă  $\frac{\partial X}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  sunt continue pe  $D$ , atunci are loc

$$\text{formula (lui Green)} \quad \oint_C X dx + Y dy = \iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$$

sensul de parcurs al frontierei fiind cel direct.

\* G. Green (1793 - 1841) matematician britanic.

## Demonstrație



Dacă ecuația arcului  $\widehat{AMB}$  este  $y = \varphi_1(x)$  cu  $x \in [a, b]$  și a arcului  $\widehat{ANB}$ :  $y = \varphi_2(x)$  cu  $x \in [a, b]$ , atunci domeniul  $D$  fiind definit de inegalitățile:

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = \int_a^b [X(x, \varphi_2(x)) - X(x, \varphi_1(x))] dx = \\ &= \int_{ANB} X(x, y) dx - \int_{AMB} X(x, y) dx = - \oint_{C_1} X(x, y) dx. \end{aligned}$$

În mod analog, dacă ecuația arcului  $\widehat{MAN}$  este  $x = \psi_1(y)$  cu  $y \in [c, d]$  și a arcului

$\widehat{MBN}$ ,  $x = \psi_2(y)$  cu  $y \in [c, d]$ , atunci avem  $D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{cases}$  și

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Y}{\partial x} dx = \int_c^d [Y(\psi_2(y), y) - Y(\psi_1(y), y)] dy = \\ &= \int_{MBN} Y(x, y) dy - \int_{MAN} Y(x, y) dy = \oint_C Y(x, y) dy. \end{aligned}$$

Formula lui Green rezultă acum făcând diferența  $I_2 - I_1$ .

### Observații

1.) Formula lui Green rămâne valabilă și pentru domenii care se descompun într-un număr finit de domenii elementare, având în vedere că frontierele interioare sunt parcurse în ambele sensuri. Aici

$$\iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^3 \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} X dx + Y dy = \int_C X dx + Y dy.$$

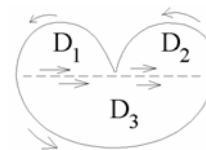
2.) În cazurile particulare:  $Y(x, y) \equiv x$ ,  $X(x, y) \equiv 0$  și  $X(x, y) \equiv y$ ,  $Y(x, y) \equiv 0$ , obținem

formulele  $\iint_D dx dy = \int_C x dy$ ,  $\iint_D dx dy = - \int_C y dx$  de unde rezultă următoarea formulă de

calcul al ariei unui domeniu  $D$  cu ajutorul integralei curbilinii pe frontiera sa.

$$\text{aria } D = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

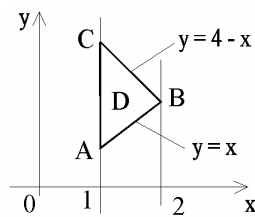
**Exemple.**



1.) Să se calculeze  $I = \oint_C (x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$  unde  $C$  este triunghiul de vârfuri

$A(1,1), B(2,2), C(1,3)$ .

**Soluție.** Curba  $C$  este frontiera domeniului  $D : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 4 - x \end{cases}$

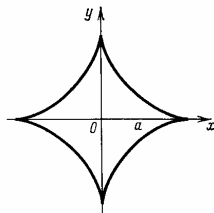


Aplicând formula lui Green, avem  $\frac{\partial Y}{\partial x} = 2(x + y)$ ,  $\frac{\partial X}{\partial y} = 4y$  și

$$I = \iint_D 2(x - y) dx dy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y) dy = -4 \int_1^2 (x - 2)^2 dx = -\frac{4}{3}.$$

2.) Să se calculeze aria domeniului limitat de curba  $C : \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ .

**Soluție.** Avem



$$\begin{cases} dx = -3a \cos^2 t \sin t dt \\ dy = 3a \sin^2 t \cos t dt \end{cases} \Rightarrow x dy - y dx = \frac{3}{4} a^2 \sin^2 2t dt.$$

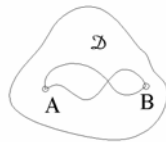
Aria astroidei va fi

$$\text{aria } D = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} a^2 \sin^2 2t dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

#### 4. Integrale curbilinii care nu depind de drum

Fie  $D$  un domeniu din  $\mathbb{R}^2$ ,  $A$  și  $B$  două puncte din  $D$ .

Există funcții vectoriale  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$  pe  $D$  care integrate pe orice curbă care leagă cele două puncte dau un rezultat dependent doar de punctele  $A$  și  $B$ .



Un exemplu din fizică este forța gravitațională al cărei lucru mecanic nu depinde de drumul de-a lungul căruia ea acționează. O integrală

curbilinie care nu depinde de drum, adică de arcul de curbă ce leagă cele două puncte se notează  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,  $\int F \cdot d\vec{r}$  sau  $\int X dx + Y dy$  fără a indica drumul care leagă punctele.

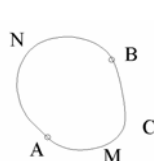
În cele ce urmează vom da condiții necesare și suficiente ca o integrală curbilinie să nu depindă de drum. Vom presupune în continuare că funcțiile  $X$  și  $Y$  sunt continue pe  $D$ .

**Teorema 1.** Integrala (1)  $\int X dx + Y dy$

nu depinde de drum în  $D \Leftrightarrow$  integrala (1) este nulă pe orice curbă închisă din  $D$ .

**Demonstrație**  $\Rightarrow$  Să presupunem că integrala (1) nu depinde de drum.

Fie  $C$  o curbă închisă din  $D$ ,  $A$  și  $B$  două puncte ale sale. Avem evident



$$\int_{\widehat{AMB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{ANB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Rezultă de aici că

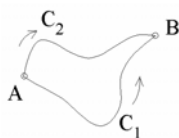
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AMB}} + \int_{\widehat{BNA}} = \int_{AMB} - \int_{ANB} = 0.$$

$\Leftarrow$  Fie  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  oricare ar fi curba închisă  $C \subset D$ . Fie  $A$  și  $B$  două puncte oarecare din  $D$ .

Două curbe  $C_1$  și  $C_2$  care le leagă și nu se taie, alcătuiesc împreună o curbă închisă  $C$  pe care integrala (1) este nulă,  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  de unde rezultă  $\int_{C_1} - \int_{C_2} = 0$  și deci  $\int_{C_1} = \int_{C_2}$ .

Dacă cele două drumuri se intersectează, atunci se alege un al treilea drum  $C_3$  care nu taie nici  $C_1$  nici  $C_2$  și independența de drum rezultă atunci din egalitățile  $\int_{C_1} = \int_{C_3} = \int_{C_2}$ .

**Teorema 2.** Integrala (1) nu depinde de drum  $\Leftrightarrow$  există o funcție  $U$  diferențiabilă pe  $D$  astfel încât  $dU = X dx + Y dy$ . În acest caz



$$\int_A^B X dx + Y dy = U(B) - U(A).$$

**Demonstrație**  $\Rightarrow$  Fie  $A(x_0, y_0)$  un punct fixat din  $D$  și

$M(x, y)$  un punct oarecare.

În ipoteza în care integrala (1) nu depinde de drum ci numai de capete, să considerăm funcția  $U$  dată de formula

$$U(x, y) = \int_A^M X dx + Y dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X dx + Y dy.$$

Vom arăta că  $U$  admite derivate parțiale de ordinul întâi pe  $D$ . Avem

$$\frac{U(x', y) - U(x, y)}{x' - x} = \frac{1}{x' - x} \int_M^{M'} X dx + Y dy = \frac{1}{x' - x} \int_x^{x'} X dx = X(\xi, y) \xrightarrow{x' \rightarrow x} X(x, y)$$

deoarece  $U$  este continuă. Deci  $\frac{\partial U}{\partial x} = X$ . Analog se arată că  $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$ . Cum  $\frac{\partial U}{\partial x}$  și  $\frac{\partial U}{\partial y}$  sunt continue, rezultă că  $U$  este diferențiabilă și că  $dU = X dx + Y dy$ .

Reciproc, dacă  $dU = X dx + Y dy$ , atunci  $\frac{\partial U}{\partial x} = X$  și  $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$ . Să arătăm că integrala

(1) nu depinde de drum. Fie de aceea arcul de curbă  $\widehat{AB}$  având reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \text{ cu } x, y \in C^1[\alpha, \beta]. \quad \text{Atunci}$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} X dx + Y dy &= \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \int_{\alpha}^{\beta} [U'_x \cdot x'(t) + U'_y \cdot y'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt = U(x(t), y(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = U(B) - U(A), \end{aligned}$$

de unde se vede că integrala depinde doar de capetele drumului.

**Lemă.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe domeniul simplu conex  $D$  și

$$\iint_D F(x, y) dx dy = 0 \quad \forall D \subset D, \text{ atunci funcția } f \text{ este identic nulă pe } D.$$

**Demonstrație.** Să presupunem prin absurd că ar exista un punct  $P_0 \in D$  așa ca  $f(P_0) \neq 0$ . Dacă se exemplu,  $f(P_0) > 0$  atunci funcția  $f$  fiind continuă, există o întreagă vecinătate  $V$  a lui  $P_0$  pe care  $f$  să fie pozitivă. Cu formula de medie rezultă atunci existența unui punct  $P_1 \in V$  așa ca  $\iint_V f(x, y) dx dy = f(P_1) \text{ aria } V > 0$  ceea ce contrazice ipoteza pentru  $D = V$ .

**Teorema 3.** Dacă  $\frac{\partial X}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  sunt continue pe  $D$ , atunci integrala (1) nu depinde de

$$\text{drum} \Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ pe } D.$$

**Demonstrație**  $\Rightarrow$  Fie  $D \subset D$  oarecare și  $C = \text{fr } D$ . Dacă integrala (1) nu depinde de drum, atunci conform teoremei 1,  $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ . Aplicând formula lui Green,

$$\text{avem } \iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = 0. \text{ Cum } D \text{ este oarecare și funcția } \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ este continuă,}$$

rezultă cu lema de mai sus că  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$  pe  $D$ .

$$\Leftarrow \text{ Dacă } \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ pe } D, \text{ atunci } \oint_C X dx + Y dy = 0 \text{ oricare ar fi curba închisă } C$$

din  $D$ , deci integrala (1) nu depinde de drum conform teoremei 1.

### Observații

1.) Funcția  $U$  (din teorema 2) numită și primitivă a expresiei  $X dx + Y dy$  nu este unică, deoarece și  $d(U + c) = dU$  oricare ar fi constanta  $c$ , iar  $V$  este așa ca  $dV = X dx + Y dy$ , atunci din  $d(V - U) = 0$  pe  $D$  rezultă  $V = U + c$ . De aceea

$$V(x, y) - V(x_0, y_0) = U(x, y) - U(x_0, y_0) = U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X dx + Y dy.$$

2.) Pentru determinarea primitivei  $U$  este convenabilă alegerea unui drum paralel cu axele:

sau

Astfel

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x X(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x_0, y) dy$$

$$+ \int_{x_0}^x X(x, y) dx$$

3.) Pentru ca o

integrală curbilinie din spațiu  $\int X dx + Y dy + Z dz$  să nu depindă de drum este necesar și

suficient ca

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{pe } D \subset \mathbb{R}^3$$

în ipoteza că  $X, Y, Z \in C^1(\mathcal{D})$ .

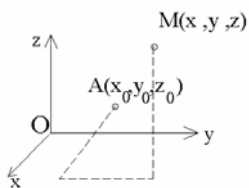
Teorema 1 rămâne evident valabilă și pentru acestea iar în teorema 2 condiția de independență de drum este să existe o funcție diferențială  $U$  astfel încât

$$dU = X dx + Y dy + Z dz.$$

Spunem în acest caz că expresia diferențială de sus este o **diferențială totală**.

Calculul primitivei  $U$  se poate face fie cu ajutorul integralei curbilinii

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} X dx + Y dy + Z dz$$



de-a lungul unui drum convenabil ales, ca cel paralel cu axele pe porțiuni

$(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x, y_0, z_0) \rightarrow (x, y, z_0) \rightarrow (x, y, z)$  fie ținând seama că toate derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $U$  sunt cunoscute

$$\begin{cases} U'_x = X \\ U'_y = Y \\ U'_z = Z. \end{cases}$$

4.) Considerând câmpul vectorial  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ , condiția ca integrala curbilinie  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  să nu depindă de drum este ca  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , ceea ce înseamnă că  $\vec{F}$  este un câmp irotațional.

Totodată se poate observa că în această situație, existând  $U$  astfel încât  $U'_x = X$ ,  $U'_y = Y$ ,  $U'_z = Z$ , avem  $\vec{F} = \text{grad } U$ .

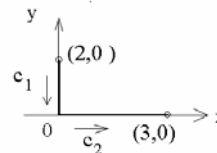
Un câmp vectorial care este gradientul unui câmp scalar, se numește **câmp potențial**.

Funcția  $U$  se numește potențialul scalar al câmpului  $\vec{F}$ . După cum am văzut el

(potențialul scalar) se poate calcula după formula  $U(P) = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

### Exemple

1.) Să se calculeze  $I = \int_{(0,2)}^{(3,0)} y^2 e^x dx + 2ye^x dy$ .



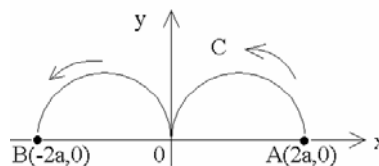
**Soluție.** Integrala nu depinde de drum deoarece  $\frac{\partial X}{\partial y} = 2ye^x = \frac{\partial Y}{\partial x}$ .

De aceea vom alege drumul indicat în figura alăturată și vom avea

$$I = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_2^0 2ye^0 dx + \int_0^3 0 \cdot e^x dx = -4.$$

2.) Să se calculeze  $I = \int_C (a+y) dx + (a+x) dy$  unde

$x^2 + y^2 - 2ax = 0, y \geq 0$  reunit cu semicercul  $x^2 + y^2 + 2a$   $A(2a, 0), a > 0$ .



**Soluție.** Se observă că  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 1$ . Integrala nedepinzând de drum vom alege drumul direct de

la  $A$  la  $B$  pe axa  $Ox$ . Astfel

$$I = \int_A^B (a+y) dx + (a+x) dy = \int_{2a}^{-2a} a dx = -4a^2$$

3.) Să se calculeze o primitivă a expresiei  $(2x-3yz) dx + (2y-3xz) dy + (2z-3xy) dz$ .

**Soluție.** Verificăm mai întâi dacă expresia dată este o diferențială totală, calculând rotorul funcției

$\vec{F} = (2x-3yz)\vec{i} + (2y-3xz)\vec{j} + (2z-3xy)\vec{k}$ . Avem

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-3yz & 2y-3xz & 2z-3xy \end{vmatrix} = \vec{i}(-3x+3x) - \vec{j}(-3y+3y) + \vec{k}(-3z+3z) = \vec{0}.$$

Vom calcula primitivele expresiei date prin ambele metode.

**Metoda I.** Pornind de la un punct convenabil ales, originea de exemplu, pe drumul

$(0, 0, 0) \rightarrow (x, 0, 0) \rightarrow (x, y, 0) \rightarrow (x, y, z)$  avem



$$U(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (2x - 3yz) dx + (2y - 3xz) dy + (2z - 3xy) dz =$$

$$= \int_0^x 2x dx + \int_0^y 2y dy + \int_0^z (2z - 3xy) dz = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz.$$

Primitivele expresiei date vor fi de forma  $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz + C$  cu  $C$  oarecare.

**Metoda a II-a.** Vom determina funcția  $U$  știind că

$$U'_x = 2x - 3yz$$

$$U'_y = 2y - 3xz$$

$$U'_z = 2z - 3xy$$

Din prima ecuație rezultă prin integrare că  $U(x, y, z) = x^2 - 3xyz + f(y, z)$ .

Urmează să determinăm funcția  $f(y, z)$  ținând cont și de următoarele două ecuații ale sistemului, adică de faptul că

$$\begin{cases} -3x + f'_y = 2y - 3xz \\ -3xy + f'_z = 2z - 3xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_y = 2y \\ f'_z = 2z. \end{cases}$$

Problema s-a redus astfel la determinarea funcției de două variabile  $f(y, z)$  cunoscându-i derivatele parțiale.

Din prima ecuație rezultă că  $f(y, z) = y^2 + g(z)$ , iar  $g(z)$  se determină știind că

$g'(z) = 2z$ , deci  $g(z) = z^2 + C$ . Astfel  $U(x, y, z) = x^2 - 3xyz + y^2 + z^2 + C$ .

## Exerciții

1.) Să se calculeze integralele curbilunii de prima speță:

a)  $\int_C ye^{-x} dl$  unde  $C: x = \ln(1+t^2)$ ,  $y = 2 \arctg t - t + 1$ ,  $t \in [0, 1]$ . R:  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

b)  $\int_C (x^2 + y^2) dl$  unde  $C$  este un arc al spiralei logaritmice  $\rho = ae^{m\varphi}$  ( $m > 0$ ) având capetele

$A(0, a)$  și  $O(-\infty, 0)$ . R:  $\frac{a^2 \sqrt{1+m^2}}{5m}$

c)  $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} dl$  unde  $C$  este cercul  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x = y$ . R:  $2\pi a^2$

d)  $\int_C xy dl$  unde  $C$  este conturul pătratului  $|x| + |y| = a$ ,  $a > 0$  R: 0

e)  $\int_C xy dl$  unde  $C$  este sfertul cercului  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$  din primul octant R:  $\frac{R^4 \sqrt{3}}{32}$

2.) Să se calculeze masa firului material având ca imagine curba  $\vec{r} = at\vec{i} + \frac{at^2}{2}\vec{j} + \frac{at^3}{3}\vec{k}$  între  $t_1 = 0, t_2 = 1$  știind că densitatea sa este  $\rho = \sqrt{\frac{3z}{x}}$ .

3.) Să se determine centrul de greutate al firului material reprezentat de curba:  $x = 4t^5$ ,  $y = \sqrt{15}t^4, z = 2t^3$ ,  $t \in [-1, 1]$  având densitatea  $\rho = \frac{1}{2}|z|$ .

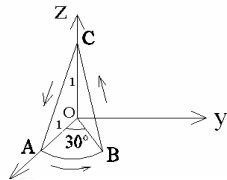
4.) Să se calculeze integralele curbilinii de speța a doua:

a)  $\int_C \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2}$  unde  $C$  este bucla din dreapta a lemniscatei  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$  parcursă în sensul acelor de ceasornic.

b)  $\int_C \frac{(y+z)dx + (x+y)dy + dz}{x^2 + y^2}$  unde  $C$  este segmentul orientat  $AB, A(-1, 1, 0), B(1, 2, -1)$ .

5.) Să se calculeze circulația câmpului  $\vec{V} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  de-a lungul curbei de intersecție a suprafețelor  $x^2 + y^2 + z^2 = a$  și  $x^2 + y^2 - ax = 0$  (curba lui Viviani).

6.



Să se calculeze circulația câmpului  $\vec{V} = x^2\vec{i} - xy^2\vec{j} + yz^2\vec{k}$  prin conturul închis  $ABCA$ .

7.) Fie  $C$  o curbă închisă care mărginește un domeniu de arie  $A$ . Să se calculeze

$$\int_C (y + \cos x \sin y) dx + (1 + \sin x \cos y) dy.$$

8.) Să se calculeze  $\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - m y) dx + (e^x \cos y - m) dy$ ,  $AMO$  fiind semicercul

$x^2 + y^2 = ax$  parcurs de la  $A(a, 0)$  la  $O(0, 0)$  în sens direct.

R:  $\frac{m\pi a^2}{8}$  Se completează cu segmentul  $OA$  și se aplică formula lui Green

9.) Să se calculeze aria buclei curbei  $(x + y)^3 = xy$

R:  $\frac{1}{60}$ . Se obține reprezentarea parametrică făcând  $y = tx$ .

10.) Să se determine o primitivă a integrantului și să se calculeze integrala

$$\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$$

R: 62

11.) Să se calculeze  $\int_{(-1,1,5)}^{(2,2,4)} \frac{z dx + z dy - (x+y) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$ . R:  $\frac{\pi}{4}$

12.) Să se determine constantele  $a$  și  $b$  astfel încât expresia  $\frac{(y^2 + 2xy + ax^2) dx - (x^2 + 2xy + by^2) dy}{(x^2 + y^2)^2}$  să

devină o diferențială totală și să se determine o primitivă.

13.) Să se determine  $u$  dacă

$$du = e^{\frac{y}{z}} dx + \left( e^{\frac{y}{z}} \frac{(x+1)}{z} + ze^{yz} \right) dy + \left( -\frac{e^{\frac{y}{z}} (x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z} \right) dz. \quad \text{R: } u = e^{\frac{y}{z}} (x+1) + e^{yz} - e^{-z}$$

## BIBLIOGRAFIE

1. **A. Angot**, *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și din telecomunicații*, Editura Tehnică, București, 1965.
2. **L. Bal**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
3. **Gh. Budianu, V. Mihăilescu, A. Popa**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
4. **M. Craiu, V.V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
5. **R. Cristescu**, *Matematici superioare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
6. **R. Cristescu**, *Matematici generale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
7. **B. Demidovich**, *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publication, Moscow, 1989.
8. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră și analiză matematică, culegere de probleme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
9. **G.M. Fihtenholț**, *Curs de calcul diferențial și integral*, Editura Tehnică, București, vol. I, II, III, 1963 – 1965.
10. **P. Flondor, O. Stănășilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL București, 1993.
11. **A. Halanay, V. Olaru, S. Turbatu**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
12. **A.D. Myškis**, *Introductory Mathematics for Engineers*, Mir Publication, Moscow, 1977.
13. **M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, vol. I, II, III, 1971.
14. **M. Roșculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
15. **O. Stănășilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
16. **N. Tița, D. Tofan**, *Analiza Matematică Reală*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 2003.
17. **R. Trandafir**, *Probleme de matematici pentru ingineri*, Editura Tehnică, București, 1977.