13.7 Cálculos con Maple

Los cálculos necesarios para la resolución de sistemas de ecuaciones con varias variables pueden ser muy largos, incluso aunque el número de variables sea pequeño. En particular, localizar los puntos críticos de una función de n variables requiere resolver un sistema (generalmente no lineal) de n ecuaciones con n incógnitas. En estas situaciones, el uso eficaz de un sistema de matemáticas por computador como Maple puede ser muy útil. En esta sección opcional (y breve) presentaremos ejemplos de uso de la rutina «fsolve» de Maple, que permite resolver sistemas de ecuaciones no lineales, y encontrar y clasificar puntos críticos y, por consiguiente, resolver problemas de valores extremos.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Maple dispone en su kernel de un procedimiento denominado **fsolve** (por lo que no se necesita cargar ningún paquete para acceder a él), cuyo objetivo es encontrar soluciones reales en punto flotante de sistemas de n ecuaciones en n variables (si se aplica a una ecuación polinómica de una variable intentará encontrar todas sus raíces reales, pero puede perder alguna). A nuestros efectos, una ecuación es, o bien una única expresión f en las variables (en cuyo caso la ecuación se expresará como $f = 0$), o bien dos expresiones relacionadas por un signo igual, como $f = g$. El procedimiento admite dos o tres argumentos. El primero es un conjunto de n ecuaciones separadas por comas, y encerrado por llaves. El segundo es también un conjunto (asimismo encerrado por llaves) que indica las n variables en las que hay que resolver las ecuaciones (el número de variables en las ecuaciones debe ser igual al número de ecuaciones). Los elementos del segundo conjunto pueden consistir en ecuaciones de la forma «variable = estimación inicial», donde la estimación inicial es un número que pensamos que puede estar *cerca* de la verdadera solución. No siempre es posible encontrar una buena estimación inicial de los valores de las variables, por lo que, si lo deseamos, podemos incluir un tercer argumento que especifique intervalos de valores de las variables en los que buscar una solución. Por ejemplo, para obtener una solución del sistema $x^2 + y^3 = 3$, $x\,\mathrm{sen}(y) - y\cos(x) = 0$ cerca del punto $(1, 2)$ podemos intentar

```
> Digits := 6:
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)}, {x=1, y=2});
```

$$\{x = 0.909510, y = 1.47404\}$$

Si no hubiéramos sido capaces de especificar una estimación inicial, pero hubiéramos buscado una solución en el intervalo [0, 2], habríamos obtenido la misma respuesta:

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos (x)},
  {x, y}, {x=0..2, y=0..2});
```

$$\{x = 0.909510, y = 1.47404\}$$

De hecho, sin especificar estimaciones iniciales ni intervalos de búsqueda se obtiene la misma salida

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)}, {x, y});
```

$$\{y = 1.47404, x = 0.909510\}$$

aunque, por sus propias razones privadas, Maple presenta en este caso los valores de x e y en orden inverso. Si hubiéramos especificado un intervalo de búsqueda diferente, habríamos obtenido un resultado diferente:

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)},
  {x, y}, {x=0..2, y=0..1});
```

$$\{y = 0, x = 1.73205\}$$

o incluso ninguna solución en absoluto, si de hecho no existiera solución en los intervalos especificados.

```
> fsolve({x^2+y^2=3, x*sin(y)-y*cos(x)} ,
  {x, y}, {x=0..1, y=0..1}) ;
```

$$fsolve(\{x^2 + y^2 = 3, x\,\mathrm{sen}\,(y) - y\,\mathrm{sen}\,(x)\}, \{x, y\}, \{x = (0..1), y = (0..1)\})$$

Para utilizar eficazmente fsolve es necesario tener una idea de dónde se pueden encontrar las soluciones. Si el número de variables es 2 o 3, se pueden utiliza las rutinas gráficas de Maple para buscar sus posiciones aproximadas.

Ejemplo 1 Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 1 \\ z = x^3 y \\ e^x = 2y - z \end{cases}$$

Solución Empezaremos por definir el conjunto de ecuaciones.

```
> eqns := {x^2+y^4=1, z=x^3*y, exp(x)=2*y-z} ;
```

$$eqns := \{x^2 + y^4 = 1, z = x^3 y, \mathbf{e}^x = 2y - z\}$$

¿Qué vamos a utilizar como estimación inicial? La primera ecuación no la puede cumplir ningún punto exterior al cuadrado $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, por lo que sólo es necesario considerar valores de x e y en el interior de dicho cuadrado. La segunda ecuación obliga entonces a z a estar también entre 1 y -1. Podríamos probar con muchas estimaciones iniciales que cumplieran esta condición y ver lo que obtiene fsolve. Otra forma puede ser realizar varias gráficas implícitas de las tres ecuaciones para algunos valores fijos de z entre -1 y 1, buscando los casos en los que las tres curvas se acercan lo suficiente para tener un punto de intersección común:

```
> with(plots) :
  for z from -1 by .2 to 1 do print (''z ='', z) ;
  implicitplot({x^2+y^4-1, z-x^3*y, exp(x)-2*y+z} ,
  x=-1.5 .. 1.5, y=-1.5 .. 1.5) od;
```

Estos comandos producen 11 gráficas de las tres ecuaciones, considerando que dependen de x e y, para valores de z entre -1 y 1 en pasos de 0.2. Dos de ellas se muestran en las Figuras 13.25 y 13.26. Corresponden a $z = -0.2$ y $z = 0.2$, e indican que probablemente las tres ecuaciones tienen soluciones cerca de $(-1, 0.2, -0.2)$ y $(0.5, 0.9, 0.2)$. Ejecutamos `fsolve` con esos valores iniciales y después sustituimos el resultado en las tres ecuaciones para comprobar que se cumplen. Limitaremos la salida de Maple a 6 cifras significativas, en vez de las 10 por defecto:

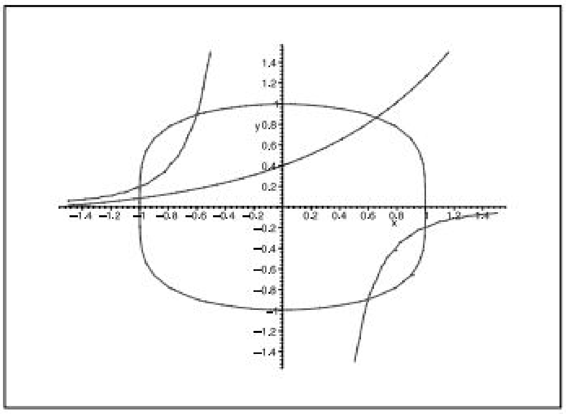

Figura 13.25 $z = -0.2$.

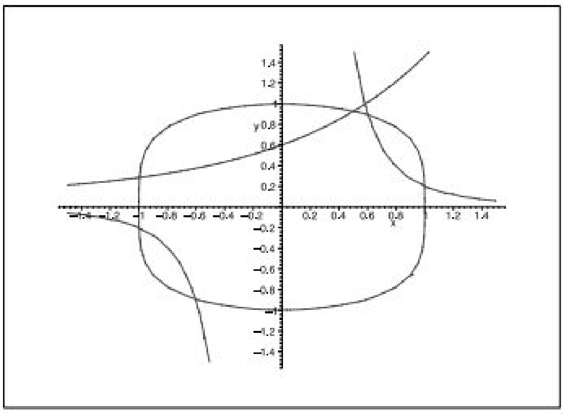

Figura 13.26 $z = 0.2$.

```
> Digits := 6:
  vars := {x=-1, y=0.2, z=-0.2} :
  sols := fsolve(eqns, vars) ;
  evalf(subs(sols, eqns)) ;
```

$$sols := \{x = -.999887, y = 0.122654, z = -.122613\}$$

$$\{-.122613 = -.122612, 1.00000 = 1., 0.367921 = 0.367921\}$$

```
> vars := {x=0.5, y=0.9, z=0.2} :
  sols := fsolve(eqns, vars) ;
  evalf(subs(sols, eqns)) ;
```

$$sols := \{z = 0.138432, x = 0.531836, y = 0.920243\}$$

$$\{0.138432 = 0.138432, 1.00000 = 1., 1.70205 = 1.70206\}$$

Hemos calculado las dos soluciones con seis dígitos significativos. ■

Búsqueda y clasificación de puntos críticos

La búsqueda de los puntos críticos de una función de varias variables requiere resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de igualar a cero las derivadas parciales primeras de la función. Los ejemplos siguientes ilustran cómo realizarlo utilizando la rutina `fsolve` de Maple. Como deseamos también clasificar los puntos críticos, calcularemos los autovalores de la matriz hessiana de la función en cada punto crítico, para determinar si es definida positiva, definida negativa o indefinida.

Como el paquete VectorCalculus contiene un procedimiento `Hessian` para el cálculo de la matriz hessiana y LinearAlgebra contiene un procedimiento `Eigenvalues` para determinar los autovalores de una matriz cuadrada, tendremos, o bien que cargar dichos paquetes, o bien llamar a los procedimientos como `VectorCalculus[Hessian]` y `LinearAlgebra[Eigenvalues]`, respectivamente. Como ahora no necesitamos nada más de esos paquetes, lo haremos de esta última forma. Si tenemos una versión anterior a Maple 8, hay que asegurarse de que el paquete más antiguo linalg tiene los procedimientos `hessian` y `eigenvals`, que harán el mismo trabajo.

Ejemplo 2 Obtenga y clasifique los puntos críticos de

$$(x^2 + xy + 5y^2 + x - y)e^{-(x^2+y^2)}$$

Solución Empezaremos por definir f como la expresión anterior, que sólo depende de las dos variables x e y. No es necesario que f sea una función, por lo que la definiremos como una expresión.

```
> f := (x^2+x*y+5*y^2+x-y)*exp(-(x^2+y^2)) ;
```

$$f := (x^2 + xy + 5y^2 + x - y)\mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}$$

A continuación, definiremos H como la matriz hessiana de f con respecto a las variables x e y. Como esto produce varias líneas de salida, suprimiremos dicha salida.

`> H := VectorCalculus[Hessian] (f, [x, y]) :` Las ecuaciones que hay que resolver para obtener los puntos críticos son

```
> eqns := {diff(f, x)=0, diff(f, y)=0} :
```

De nuevo hemos omitido la salida. Podríamos haber suprimido «= 0» en las dos ecuaciones, ya que se asume por defecto.

Ahora llega la parte difícil. ¿Dónde buscamos las soluciones? Dibujar las curvas de nivel de f puede sugerir las posiciones probables de los puntos críticos.

```
> plots[contourplot] (f, x=-3..3, y=-3..3, grid=[50, 50] ,
  contours=16) ;
```

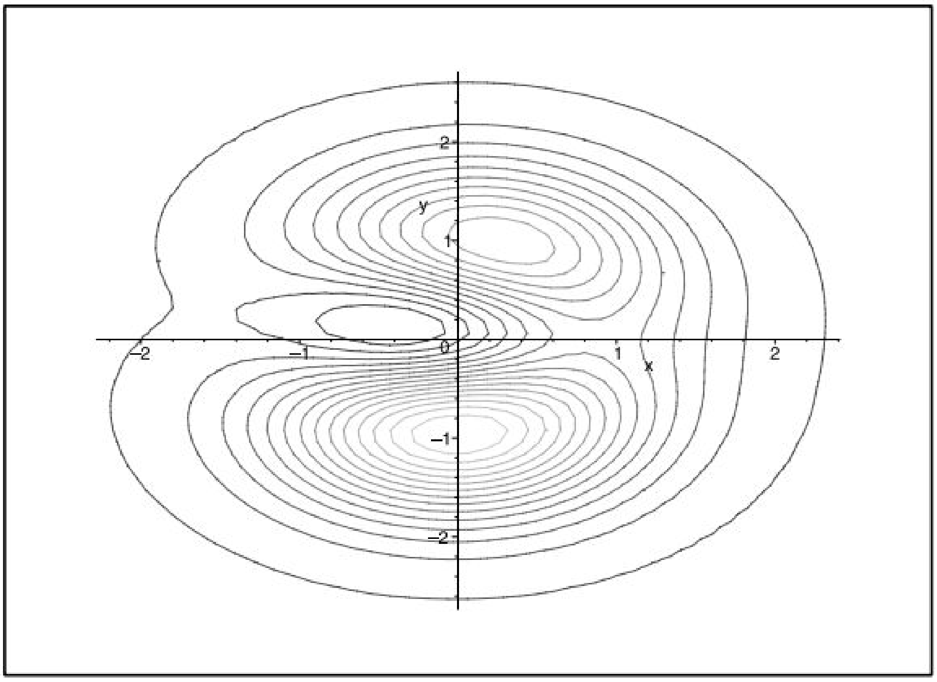

Figura 13.27 Contornos de $f(x, y)$ en el Ejemplo 2.

La gráfica de contornos (Figura 13.27) sugiere que hay cinco puntos críticos, tres extremos locales cerca de $(0.3, 1)$, $(0, -1)$ y $(-0.6, 0.1)$ y dos puntos de ensilladura cerca de $(1, 0)$ y $(-1.6, 0.2)$. Utilizaremos `fsolve` con estas estimaciones iniciales. Para cada una de ellas, ejecutaremos `fsolve` para obtener el punto crítico. Seguidamente, calcularemos el valor de f en cada punto. Finalmente, calcularemos los autovalores del hessiano de f para determinar la naturaleza del punto crítico. De nuevo utilizaremos 6 dígitos significativos.

```
> Digits := 6:
```

(a) Cerca del punto (0.3, 1):

```
> sols := fsolve(eqns, {x=0.3, y=1}) ; evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{x = 0.275057, y = 1.00132\}$$
$$1.57773$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} -2.41894 \\ -6.61497 \end{bmatrix}$$

Como ambos autovalores son negativos, f tiene un valor máximo local de 1.577 73 en el punto crítico (0.275 057, 1.001 32).

(b) Cerca del punto $(0, -1)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=0, y=-1}), evalf(subs(sols,f)) ;
```

$$sols := \{y = -.955506, x = 0.00492113\}$$
$$2.21553$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} -3.58875 \\ -8.54885 \end{bmatrix}$$

Como ambos autovalores son negativos, f tiene un valor máximo local de 2.215 533 en el punto crítico (0.004 921 13, -0.955 506).

(c) Cerca del punto $(-0.6, 0.1)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=-0.6, y=0.1}) ;
  evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{y = 0.132977, x = -.421365\}$$
$$-.283329$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 8.90194 \\ 2.32438 \end{bmatrix}$$

Como ambos autovalores son positivos, f tiene un valor mínimo local de $-0.283\,329$ en el punto crítico $(-0.421\,365, 0.132\,977)$.

(d) Cerca del punto $(1, 0)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=1, y=0}), evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{y = 0.0207852, x = 0.858435\}$$
$$0.762810$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 3.28636 \\ -2.84680 \end{bmatrix}$$

Como el hessiano tiene autovalores positivos y negativos, f tiene un punto de ensilladura en $(0.858\,435, 0.020\,785\,2)$. Su valor en ese punto es 0.762 810.

(e) Cerca del punto $(-1.6, 0.2)$:

```
> sols := fsolve(eqns, {x=-1.6, y=0.2}) ;
  evalf(subs(sols, f)) ;
```

$$sols := \{y = 0.292686, x = -1.58082\}$$
$$0.0445843$$

```
> LinearAlgebra[Eigenvalues] (subs(sols, H)) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0.673365 \\ -.407579 \end{bmatrix}$$

Como el hessiano tiene autovalores tanto positivos como negativos, f tiene un punto de ensilladura en $(-1.580\,82, 0.292\,686)$. Su valor en ese punto es 0.044 584 3.

La exponencial negativa en la definición de f asegura que $f \to 0$ cuando $x^2 + y^2 \to \infty$. Suponiendo entonces que hemos encontrado todos los puntos críticos de f, el valor del punto crítico de (b) debe ser el máximo absoluto y el de (c) el mínimo absoluto.

Observación La parte más difícil al utilizar `fsolve` para sistemas grandes es determinar estimaciones de partida adecuadas para las raíces o puntos críticos. Los procedimientos gráficos sólo son realmente adecuados para sistemas pequeños (una, dos o tres ecuaciones), e incluso en esos casos es importante analizar las ecuaciones o funciones que intervienen para encontrar indicios de dónde pueden estar las raíces o los puntos críticos. He aquí algunos aspectos a considerar:

1. En ciertas ocasiones, algunas ecuaciones pueden ser lo suficientemente simples para que se puedan eliminar ciertas variables, reduciéndose así el tamaño del sistema. Podríamos haber utilizado la segunda ecuación del Ejemplo 1 para eliminar z de las ecuaciones primera y tercera, reduciendo así el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas.
2. El sistema puede resultar de añadir un término extra a un sistema más simple, y la posición de las raíces de este último puede ser conocida. En ese caso se pueden utilizar las posiciones de esas raíces conocidas como estimaciones iniciales.
3. Es conveniente estar siempre alerta frente a la posibilidad de ecuaciones que limiten los valores posibles de algunas variables. Por ejemplo, en el Ejemplo 1 la ecuación $x^2 + y^4 = 1$ limita los valores de x e y al intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicios 13.7

En los Ejercicios 1 y 2, resuelva los sistemas de ecuaciones dados utilizando la rutina `fsolve` de Maple. Utilice 5 dígitos significativos. Esté atento a posibles cambios que puedan reducir el número de ecuaciones a introducir en `fsolve`.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = xy \\ 6xy = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^4 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = \operatorname{sen} z \\ z + z^3 + z^4 = x + y \end{cases}$

En los Ejercicios 3-6, utilice `fsolve` para calcular los resultados pedidos. Utilice 5 dígitos significativos en todos los casos.

3. Calcule los valores máximos y mínimos y sus posiciones para la función

$$f(x, y) = (xy - x - 2y)/((1 + x^2 + y^2)^2)$$

Utilice un diagrama de contornos como ayuda para determinar los puntos de partida adecuados.

4. Evidentemente, $f = 1 - 10x^4 - 8y^4 - 7z^4$ tiene un valor máximo de 1 en (0, 0, 0). Calcule el valor máximo absoluto de $h = f + g$, siendo $g = yz - xyz - x - 2y + z$, comenzando en varios puntos cerca de (0, 0, 0).

5. Calcule el valor mínimo de

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + 0.2xy - 0.3xz + 4x - y$$

6. Calcule los valores máximo y mínimo de

$$f(x, y, z) = \frac{x + 1.1y - 0.9z + 1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos o expresiones?**
  - ◇ Punto crítico de $f(x, y)$
  - ◇ Punto singular de $f(x, y)$
  - ◇ Valor máximo absoluto de $f(x, y)$
  - ◇ Valor mínimo local de $f(x, y)$
  - ◇ f tiene un valor mínimo local en $f(x, y)$
  - ◇ Punto de ensilladura de $f(x, y)$
  - ◇ Forma cuadrática
  - ◇ Restricción
  - ◇ Programación lineal
  - ◇ Envolvente de una familia de curvas
- **Explique el test de la segunda derivada sobre un punto crítico de $f(x, y)$.**
- **Describa el método de los multiplicadores de Lagrange.**
- **Describa el método de los mínimos cuadrados.**
- **Describa el Método de Newton para dos ecuaciones.**

Ejercicios de repaso

En los Ejercicios 1-4, calcule y clasifique los puntos críticos de las funciones dadas.

1. xye^{-x+y} **2.** $x^2y - 2xy^2 + 2xy$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{4 - x - y}$ **4.** $x^2y(2 - x - y)$

5. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$. ¿Tiene f un valor mínimo? Si es así, ¿cuál es y dónde se alcanza?

6. Demuestre que $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ tiene un valor mínimo local en (0, 0, 0). ¿Se alcanza ese valor mínimo en algún otro punto?

7. Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = xye^{-x^2-4y^2}$. Justifique su respuesta.

8. Sea $f(x, y) = (4x^2 - y^2)e^{-x^2+y^2}$.

(a) Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en el plano xy.

(b) Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en la región con forma de cuña definida por $0 \leqslant y \leqslant 3x$.

9. Un alambre de longitud L se corta en tres trozos, y con cada trozo se forma un cuadrado. ¿Cuál es (a) el valor mínimo y (b) el valor máximo de la suma de las áreas de los cuadrados?

10. Un servicio de mensajería acepta paquetes de forma rectangular siempre que la suma de su perímetro y su altura sea menor que 120 pulgadas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de una caja de este tipo?

11. Calcule el área de la elipse más pequeña $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que contenga al rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

12. Calcule el volumen del elipsoide más pequeño

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

que contenga a la caja rectangular $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $-3 \leqslant z \leqslant 3$.

13. Calcule el volumen de la región más pequeña de la forma

$$0 \leqslant z \leqslant a\left(1-\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}\right)$$

que contenga a la caja $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.

14. Una ventana tiene la forma de un rectángulo sobre el que se monta un triángulo isósceles. ¿Cuáles son las dimensiones x, y y z de la ventana (*véase* la Figura 13.28) si su perímetro es L y su área es máxima?

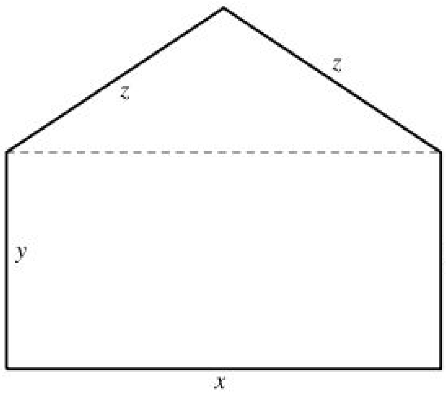

Figura 13.28

15. Un fabricante de productos determina que si fabrica x miles de productos al mes y los vende a y euros cada uno, su beneficio mensual (en miles de euros) será $P = xy - \frac{1}{27}x^2y^3 - x$. Si su fábrica es capaz de producir un máximo de 3000 productos al mes, y las leyes estatales le impiden cobrar más de 2 euros por ese tipo de producto, ¿cuántos productos debería fabricar y cuánto debería cobrar por cada uno para maximizar el beneficio mensual?

16. Calcule la envolvente de la familia de curvas $y = (x-c)^3 + 3c$.

17. Calcule una solución aproximada $y(x, \epsilon)$ de la ecuación $y + \epsilon x e^y = -2x$ con términos hasta de segundo grado en ϵ.

18. (a) Calcule $G'(y)$ si $G(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(xy)}{x}\,dx$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(\pi x) - \tan^{-1}x}{x}\,dx$. *Sugerencia*: Esta integral es $G(\pi) - G(1)$.

Problemas avanzados

1. (Series de Fourier)
Demuestre que las constantes a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) y b_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), que minimizan la integral

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)\right]^2 dx$$

se expresan como

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx$$

Nótese que esas constantes, denominadas **coeficientes de Fourier** de f en $[-\pi, \pi]$, no dependen de n. Si se pueden calcular para todos los enteros positivos k, entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx)$$

se denomina **serie de Fourier (de rango completo)** de f en $[-\pi, \pi]$ (*véase* la Sección 9.9).

2. Este problema es una continuación del Problema 1. Calcule los coeficientes de Fourier (de rango completo) a_k y b_k de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

¿Cuál es el mínimo valor de I_n en este caso? ¿Cómo se comporta cuando $n \to \infty$?

***3.** Calcule $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\ln(tx+1)}{1+t^2}\,dt$.

***4. (Problema de Steiner)** El problema de calcular un punto del plano (o de un espacio de dimensión superior) que minimice la suma de su distancia a n puntos dados es muy difícil. El caso $n = 3$ se conoce como problema de Steiner. Si $P_1P_2P_3$ es un triángulo cuyo ángulo más grande es menor que 120°, existe un punto Q en el interior del triángulo tal que las líneas QP_1, QP_2 y QP_3 forman ángulos de 120° entre sí. Demuestre que la suma de las distancias desde los vértices del triángulo a un punto P es mínima cuando $P = Q$. *Sugerencia*: Demuestre primero que si $P = (x, y)$ y $P_i = (x_i, y_i)$, entonces

$$\frac{d|PP_i|}{dx} = \cos\theta_i \quad \text{y} \quad \frac{d|PP_i|}{dy} = \operatorname{sen}\theta_i$$

siendo θ_i el ángulo que forman $\overline{P_iP}$ y la dirección positiva del eje x. A partir de aquí, demuestre que el punto mínimo P cumple dos ecuaciones trigonométricas en las que intervienen θ_1, θ_2 y θ_3. Intente demostrar después que dos cualesquiera de esos ángulos difieren en $\pm 2\pi/3$. ¿Dónde debería tomarse P si el triángulo tuviera un ángulo de 120° o mayor?

CAPÍTULO 14

Integración múltiple

¿Sabéis qué es un matemático? —preguntó Lord Kelvin a sus alumnos. Se dirigió a la pizarra y escribió

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Apuntando con el dedo a lo que había escrito, se dirigió a la clase—: Un matemático es alguien al que *eso* le parece tan obvio como ‘‘dos por dos son cuatro’’ os lo parece a vosotros.

William Thomson Kelvin (1824-1907)
anécdota recogida en *Men of Mathematics* de E. Bell

Introducción En este capítulo se amplía el concepto de integral definida a funciones de varias variables. Definidas como límites de sumas de Riemann, como en el caso de la integral definida unidimensional, las integrales múltiples se pueden calcular utilizando sucesivas integrales definidas simples. Se emplean para representar y calcular valores de magnitudes especificadas en términos de densidades en regiones del plano o en espacios de dimensión superior. En el ejemplo más simple, el volumen de una región tridimensional se calcula utilizando una *integral doble* de su altura sobre la región plana bidimensional de su base.

14.1 Integrales dobles

La definición de integral definida $\int_b^a f(x)$ está motivada por el *problema estándar del área*, concretamente, el problema de calcular el área de una región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$. De forma análoga se puede motivar la integral doble de una función de dos variables en un dominio D del plano como solución al *problema estándar del volumen*, que consiste en calcular el volumen de la región tridimensional S limitada por la superficie $z = f(x, y)$, el plano xy y el cilindro paralelo al eje z que pasa por la frontera de D (*véase* la Figura 14.1). D se denomina **dominio de integración**. Denominaremos «sólido» a la región tridimensional S, sin que esto implique que esté llena con ninguna sustancia en particular. Definimos así la integral doble de $f(x, y)$ en el dominio D como

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

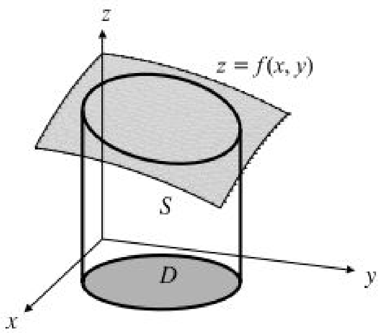

Figura 14.1 Una región *sólida* S dispuesta por encima del dominio D en el plano xy y por debajo de la superficie $z = f(x, y)$.

de forma que su valor será el volumen del sólido S siempre que D sea un dominio razonable y f sea una función «razonable» con valores positivos.

Empecemos con el caso en el que D es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados en el plano xy y f es una función acotada en D. Si D está formada por los puntos (x, y) tales que $a \leqslant x \leqslant b$ y $c \leqslant y \leqslant d$, podemos definir una **partición** P de D en pequeños rectángulos dividiendo los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, por ejemplo, en los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

La partición P de D consiste entonces en los mn rectángulos R_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ formados por los puntos (x, y) para los que $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ e $y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$ (*véase* la Figura 14.2).

El área del rectángulo R_{ij} es

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

y su *diámetro* (es decir, la longitud de su diagonal),

$$\operatorname{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

La **norma** de la partición P es el máximo de los diámetros de los subrectángulos:

$$\|P\| = \lim_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \operatorname{diam}(R_{ij})$$

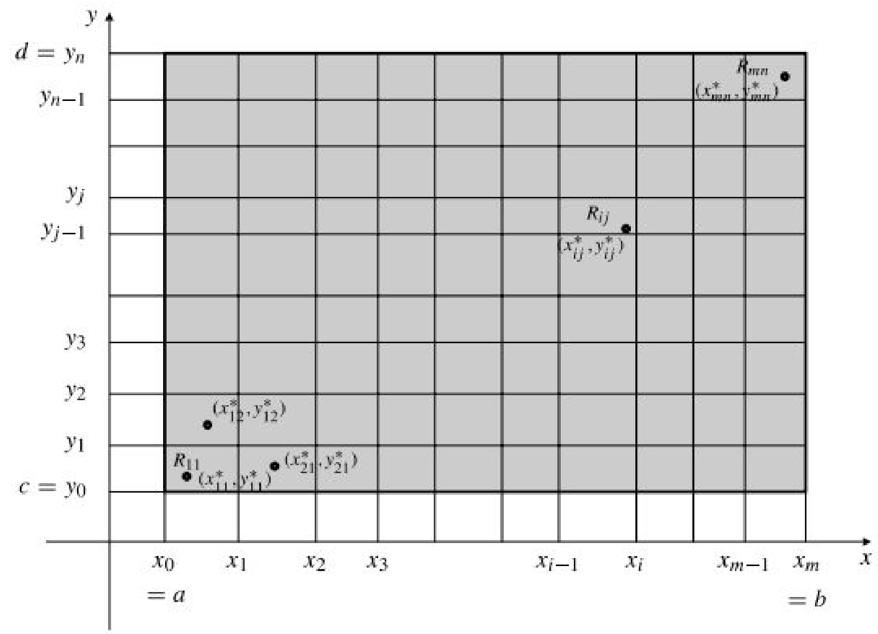

Figura 14.2 Una partición de D (el triángulo sombreado grande) en rectángulos más pequeños R_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$.

Ahora, seleccionamos un punto arbitrario (x^*_{ij}, y^*_{ij}) en cada uno de los rectángulos R_{ij} y formamos la **suma de Riemann**

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A_{ij}$$

que es una suma de mn términos, uno por cada rectángulo de la partición (la ***doble numeración*** indica que i va de 1 a m términos, cada uno de los cuales es a su vez una suma en la que j va de 1 a n). El término correspondiente al rectángulo R_{ij} es, si $f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \geqslant 0$, el volumen de la caja rectangular cuya base es R_{ij} y cuya altura es el valor de f en (x^*_{ij}, y^*_{ij}) (*véase* la Figura 14.3). Por tanto, para funciones positivas f, la suma de Riemann $R(f, P)$ se aproxima al volumen contenido por encima de D y por debajo de la gráfica de f. La integral doble de f sobre D se define como el límite de estas sumas de Riemann, siempre que ese límite exista, cuando $\|P\| \to 0$, independientemente de la elección de los puntos (x^*_{ij}, y^*_{ij}). Precisaremos estas ideas en la definición siguiente.

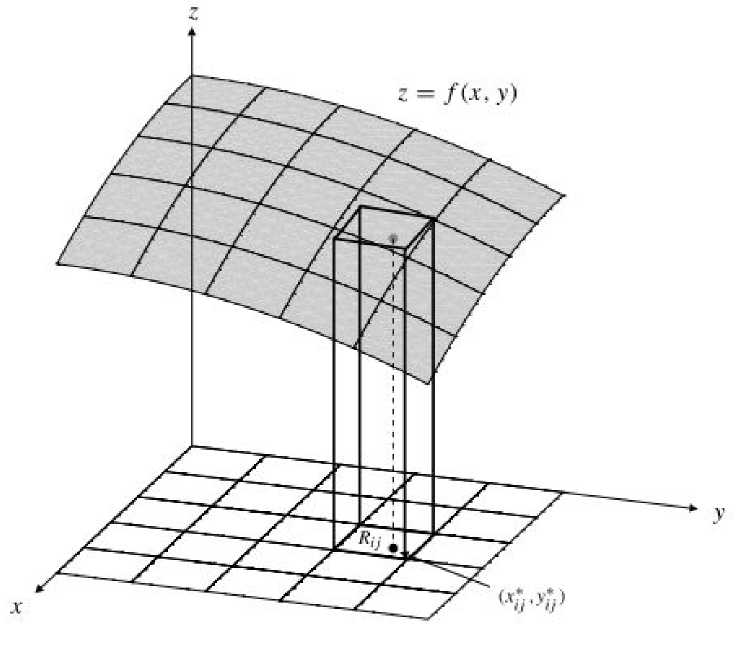

Figura 14.3 Una caja rectangular sobre el rectángulo R_{ij}. La suma de Riemann es la suma de los volúmenes de esas cajas.

DEFINICIÓN 1 Integral doble sobre un rectángulo

Se dice que f es **integrable** sobre el rectángulo D y tiene **integral doble**

$$I = \iint_D f(x, y)\, dA$$

si para todo número positivo ϵ existe un número δ que depende de ϵ tal que

$$|R(f, P) - I| < \epsilon$$

se cumple para toda partición P de D que cumpla $\|P\| < \delta$ y para todas las elecciones de los puntos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) de los subrectángulos de P.

El dA que aparece en la expresión de la integral doble es un *elemento de área*. Representa el límite de $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$ en la suma de Riemann y se puede expresar también como $dx\, dy$ o $dy\, dx$, sin que el orden sea relevante. Cuando se calculen integrales dobles mediante *iteración*, cosa que haremos en la sección siguiente, dA será sustituido por el producto de diferenciales dx y dy y entonces el orden sí será importante.

Como en el caso de funciones de una variable, las funciones continuas en D serán integrables en D. Por supuesto, muchas funciones acotadas pero discontinuas también serán integrables, pero dar una descripción exacta de la clase de las funciones integrables se sale de los límites de este texto.

Ejemplo 1 Sea D el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Utilice una suma de Riemann correspondiente a la partición de D en cuatro cuadrados más pequeños con puntos seleccionados en el centro de cada uno, para calcular un valor aproximado de

$$\iint_D (x^2 + y)\, dA$$

Solución La partición pedida P está formada por las rectas $x = 1/2$ e $y = 1/2$, que dividen a D en cuatro cuadrados, cada uno de área $\Delta A = 1/4$. Los centros de estos cuadrados son los puntos $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ (*véase* la Figura 14.4). Por tanto, la aproximación requerida es

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y)\, dA \approx R(x^2 + y, P) &= \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} \\ &+ \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} = \frac{13}{16} = 0.8125\end{aligned}$$

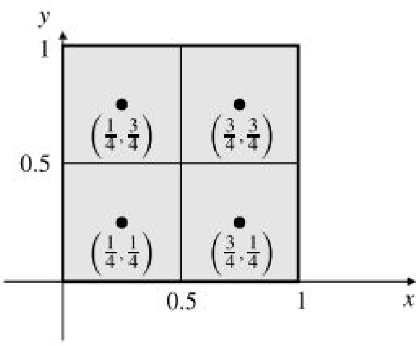

Figura 14.4 La partición del cuadrado del Ejemplo 1.

Integrales dobles en dominios más generales

A menudo es necesario utilizar integrales dobles de funciones acotadas $f(x, y)$ en dominios que no son rectangulares. Si el dominio D está acotado, podemos escoger un rectángulo R cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados, tal que D esté contenido en R (*véase* la Figura 14.5). Si $f(x, y)$ está definida en D, se puede extender su dominio a R definiendo $f(x, y) = 0$ en todos los puntos de R que estén fuera de D. La integral de f en D se puede definir como la integral de la función extendida en el rectángulo R.

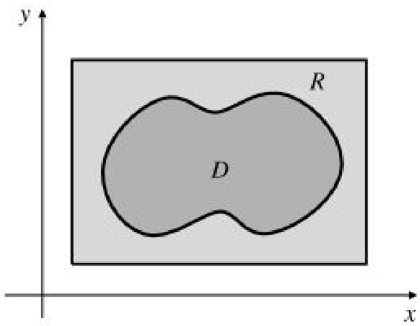

Figura 14.5

DEFINICIÓN 2

Si $f(x, y)$ está definida en el dominio acotado D, sea $\hat{f}$ la extensión de f que vale cero en todo el exterior de D:

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si} \quad (x, y) \text{ pertenece a } D \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) \text{ no pertenece a } D \end{cases}$$

Si D es un dominio *acotado*, entonces estará incluido en algún rectángulo R con lados paralelos a los ejes coordenados. Si $\hat{f}$ es integrable en R, se dice que f es **integrable** en D, y se define la **integral doble** de f en D como

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R \hat{f}(x, y)\, dA$$

Esta definición tiene sentido porque los valores de $\hat{f}$ en la parte de R que está fuera de D son cero, por lo que no contribuyen en nada al valor de la integral. Sin embargo, aunque f sea continua en D, $\hat{f}$ no será continua en R a menos que $f(x, y) \to 0$ cuando (x, y) tienda a la frontera de D. No obstante, si f y D «se comportan bien», la integral existirá. No podemos profundizar demasiado en lo que significa *comportarse bien*, pero enunciaremos, sin demostrarlo, el siguiente teorema que asegura que la mayoría de las integrales dobles que encontraremos, de hecho, existen.

TEOREMA 1 Si f es una función continua en un dominio D *cerrado y acotado* cuya frontera está formada por un número finito de curvas de longitud finita, entonces f es integrable en D.

De acuerdo con el Teorema 2 de la Sección 13.1, una función continua está acotada si su dominio es cerrado y acotado. Sin embargo, en general, no es necesario restringir nuestros dominios a que sean cerrados. Si D es un dominio acotado e $\operatorname{int}(D)$ es su interior (un conjunto abierto), y si f es integrable en D, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{\operatorname{int}(D)} f(x, y)\, dA$$

En la Sección 14.3 trataremos las *integrales dobles impropias* de funciones no acotadas, o en dominios no acotados.

Propiedades de la integral doble

Algunas propiedades de las integrales dobles son análogas a las propiedades de las integrales definidas unidimensionales y no requieren mucho comentario: si f y g son integrables en D, y si L y M son constantes, entonces:

(a) $\iint_D f(x, y)\, dA = 0$ si D tiene área cero.

(b) **Área de un dominio:** $\iint_D 1\, dA =$ área de D (ya que es el volumen de un cilindro de base D y altura 1).

(c) **Integrales como representación de volúmenes:**

Si $f(x, y) \geqslant 0$ en D, entonces $\iint_D f(x, y)\, dA = V \geqslant 0$, siendo V el volumen del sólido que se eleva verticalmente sobre D y que queda por debajo de la superficie $z = f(x, y)$.

(d) Si $f(x, y) \leqslant 0$ en D, entonces $\iint_D f(x, y)\, dA = -V \leqslant 0$, siendo V el volumen del sólido que desciende verticalmente desde D y que queda por encima de la superficie $z = f(x, y)$.

(e) **Dependencia lineal con el integrando:**

$$\iint_D (Lf(x, y) + Mg(x, y))\, dA = L \iint_D f(x, y)\, dA + M \iint_D g(x, y)\, dA$$

(f) **Las desigualdades se conservan:**

Si $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ en D, entonces $\iint_D f(x, y)\, dA \leqslant \iint_D g(x, y)\, dA$

(g) **La desigualdad del triángulo:** $\left| \iint_D f(x, y)\, dA \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\, dA.$

(h) **Aditividad de dominios:** Si $D_1, D_2, \ldots, D_k$ son dominios no solapados en cada uno de los cuales f es integrable, entonces f en la unión $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$ y

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x, y)\, dA$$

Los dominios no solapados pueden compartir puntos de su frontera, pero no pueden tener puntos interiores en común.

Resolución de integrales dobles por inspección

Hasta ahora, no hemos dicho nada sobre cómo *calcular* una integral doble. La técnica principal para hacer esto, denominada *iteración*, se mostrará en la sección siguiente, pero merece la pena señalar que algunas veces las integrales dobles se pueden evaluar utilizando argumentos basados en simetría, o interpretándolas como volúmenes que ya conocemos.

Ejemplo 2 Si R es el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, entonces

$$\iint_R 3\,dA = 3 \times \text{área de } R = 3(b-a)(d-c)$$

En este caso, el integrando es $f(x, y) = 3$ y la integral es igual al volumen del sólido con forma de caja de altura 3 cuya base es el rectángulo R (*véase* la Figura 14.6).

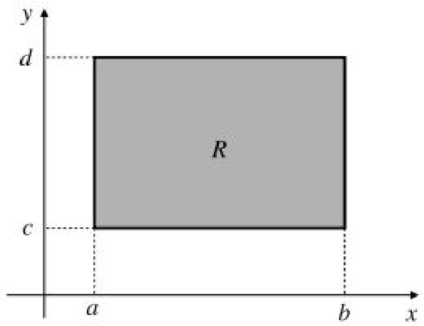

Figura 14.6

Ejemplo 3 Calcule $I = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} (\operatorname{sen} x + y^3 + 4)\,dA$

Solución La integral se puede expresar como la suma de tres integrales por la propiedad (e) de las integrales dobles:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \operatorname{sen} x\,dA + \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} y^3\,dA + \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} 4\,dA \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

El dominio de integración (Figura 14.7) es un disco circular de radio 1 centrado en el origen. Como $f(x, y) = \operatorname{sen} x$ es una función *impar* de x, su gráfica deja tanto volumen por debajo del plano xy en la región $x < 0$ como por encima del plano xy en la región $x > 0$. Estas dos contribuciones a la integral doble se cancelan, por lo que $I_1 = 0$. Nótese que es necesaria la simetría *tanto* del dominio *como* del integrando para que este argumento sea válido.

De forma similar, $I_2 = 0$ porque y^3 es una función impar y D es simétrica respecto al eje x.

Finalmente,

$$I_3 = \iint_D 4\,dA = 4 \times \text{área de } D = 4\pi$$

Por tanto, $I = 0 + 0 + 4\pi = 4\pi$.

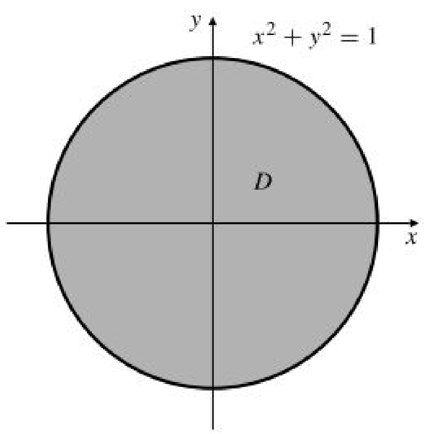

Figura 14.7

Ejemplo 4 Si D es el disco del Ejemplo 3, la integral

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$$

representa el volumen de una semiesfera de radio 1 y, por tanto, tiene el valor $2\pi/3$. ■

Cuando se evalúan integrales dobles, hay que estar siempre atentos para detectar situaciones como las de los ejemplos anteriores. Se puede ahorrar mucho tiempo cuando no se intenta calcular una integral cuyo valor es obvio sin calcularlo explícitamente.

Ejercicios 14.1

Los Ejercicios 1-6 se refieren a la integral doble

$$I = \iint_D (5 - x - y)\, dA$$

siendo D el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. P es la partición de D en seis cuadrados de lado 1 como se muestra en la Figura 14.8.

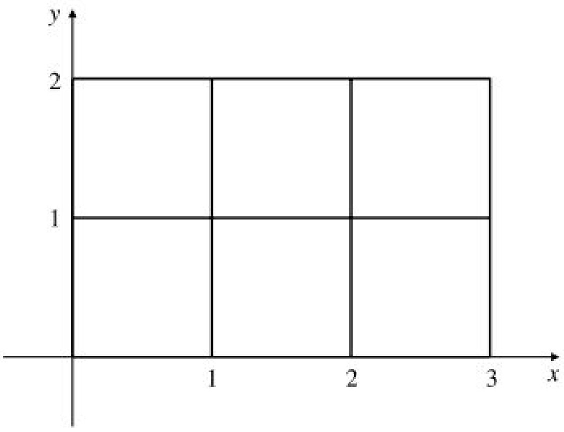

Figura 14.8

En los Ejercicios 1-5, calcule las sumas de Riemann para I correspondientes a la selección dada de los puntos (x_{ij}^*, y_{ij}^*).

1. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina superior izquierda de cada cuadrado.

2. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina superior derecha de cada cuadrado.

3. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina inferior izquierda de cada cuadrado.

4. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina inferior derecha de cada cuadrado.

5. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es el centro de cada cuadrado.

6. Calcule I interpretándolo como un volumen.

En los Ejercicios 7-10, D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 25$ y P es la partición del cuadrado $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$ en cien cuadrados 1×1, como se muestra en la Figura 14.9. Aproxime la integral doble

$$J = \iint_D f(x, y)\, dA$$

siendo $f(x, y) = 1$, calculando las sumas de Riemann $R(f, P)$ correspondientes a las selecciones indicadas de puntos de los cuadrados pequeños. *Sugerencia*: El uso de simetrías puede facilitar el trabajo.

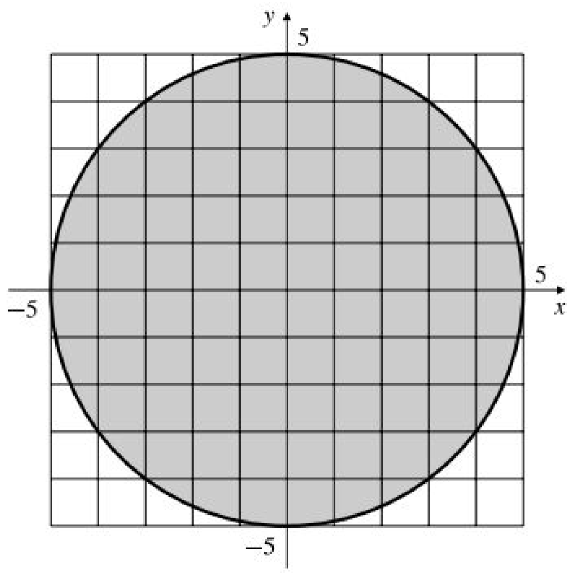

Figura 14.9

7. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina de cada cuadrado que está más cerca del origen.

8. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es la esquina de cada cuadrado que está más lejos del origen.

9. (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es el centro de cada cuadrado.

10. Calcule J.

11. Repita el Ejercicio 5 utilizando el integrando e^x en vez de $5 - x - y$.

12. Repita el Ejercicio 9 utilizando $f(x, y) = x^2 + y^2$ en vez de $f(x, y) = 1$.

En los Ejercicios 13-22, calcule por simple inspección las integrales dobles dadas.

13. $\iint_R dA$, siendo R el rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 3$, $-4 \leqslant y \leqslant 1$.

14. $\iint_D (x + 3)\, dA$, siendo D el semidisco $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$.

15. $\iint_T (x + y)\, dA$, siendo T el paralelogramo cuyos vértices son los puntos $(2, 2)$, $(1, -1)$, $(-2, -2)$ y $(-1, 1)$.

16. $\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} (x^3 \cos(y^2) + 3 \operatorname{sen} y - \pi)\, dA$

17. $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (4x^2y^3 - x + 5)\, dA$

18. $\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dA$

19. $\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} (a - \sqrt{x^2 + y^2})\, dA$

20. $\iint_S (x + y)\, dA$, siendo S el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

21. $\iint_T (1 - x - y)\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

22. $\iint_R \sqrt{b^2 - y^2}\, dA$, siendo R el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

14.2 Iteración de integrales dobles en coordenadas cartesianas

La existencia de la integral doble $\iint_D f(x, y)\, dA$ depende de f y del dominio D. Como veremos, el cálculo de integrales dobles es más sencillo cuando el dominio de integración es de tipo *simple*.

Se dice que el dominio D en el plano xy es **simple** en y si está acotado por dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y por dos gráficas continuas $y = c(x)$ e $y = d(x)$ entre esas rectas (*véase* la Figura 14.10). Las rectas paralelas al eje y cortan (si lo hacen) a un dominio simple en y en un *intervalo* (que puede ser un solo punto). De forma similar, D es un dominio **simple** en x si está acotado por rectas horizontales $y = c$ e $y = d$ y por dos gráficas continuas $x = a(y)$ y $x = b(y)$ entre esas rectas (*véase* la Figura 14.11). Muchos dominios sobre los que hemos calculado integrales son simples en y, simples en x o ambas cosas. Por ejemplo, los rectángulos, triángulos y discos son simples en x y simples en y. Los dominios que no son ni una cosa ni la otra serán en general uniones de un número finito de subdominios no solapados que serán simples en x y simples en y. Denominaremos **regulares** a estos dominios. La región sombreada de la Figura 14.12 se encuentra dividida en cuatro subregiones, y cada una de ellas es simple en x y simple en y.

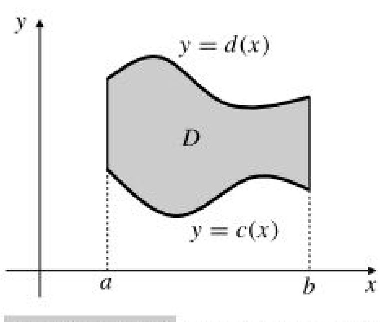

Figura 14.10 Un dominio simple en y.

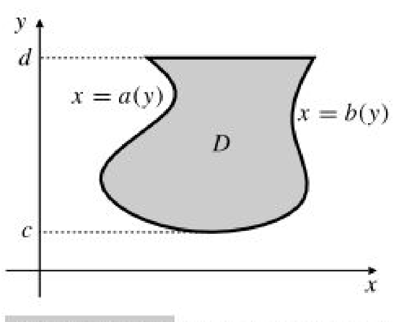

Figura 14.11 Un dominio simple en x.

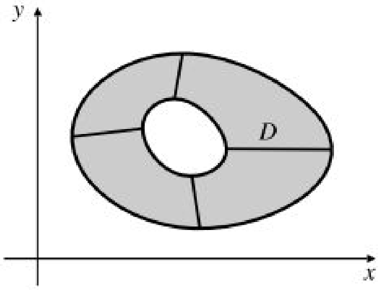

Figura 14.12 Un dominio regular.

Se puede demostrar que una función continua y acotada $f(x, y)$ es integrable en un dominio acotado simple en x o simple en y siendo integrable, por tanto, en cualquier dominio regular.

A diferencia de los ejemplos de la sección anterior, la mayoría de las integrales dobles no se pueden calcular por simple inspección. Necesitamos una técnica para calcular integrales dobles similar a la técnica de cálculo de integrales definidas simples mediante primitivas. Como la integral doble representa un volumen, podremos calcularla en dominios simples mediante una técnica de secciones.

Supongamos, por ejemplo, que D es simple en y, y está acotada por $x = a$, $x = b$, $y = c(x)$ e $y = d(x)$, como se muestra en la Figura 14.13(a). Entonces $\iint_D f(x, y)\,dA$ representa (al menos para f positiva) el volumen de la región sólida interior al cilindro vertical que pasa por la frontera de D y entre el plano xy y la superficie $z = f(x, y)$. Consideremos la sección cruzada de este sólido en el plano vertical perpendicular al eje x en la posición x. Nótese que x es constante en ese plano. Si utilizamos las proyecciones de los ejes y y z en el plano como ejes de coordenadas en dicho plano, la sección cruzada es una región plana acotada por rectas verticales $y = c(x)$ e $y = d(x)$, por la recta horizontal $z = 0$ y por la curva $z = f(x, y)$. El área de la sección cruzada se expresa, por tanto, como

$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy$$

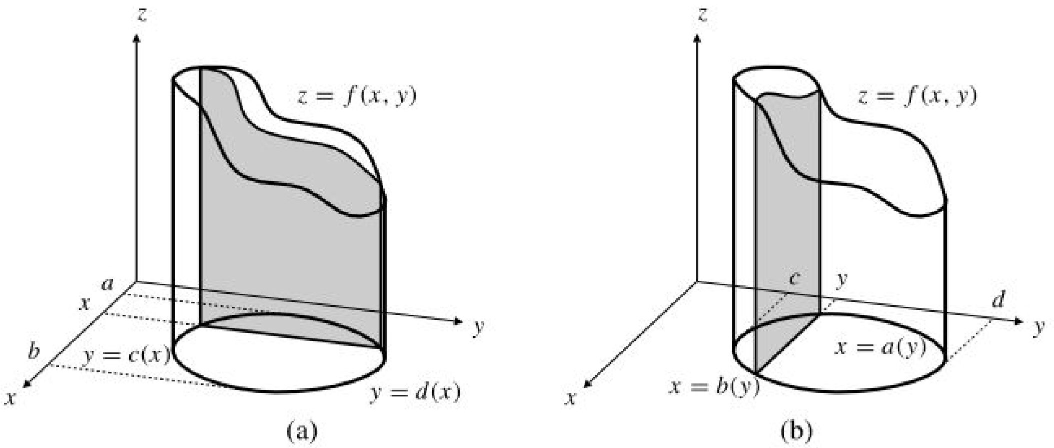

Figura 14.13
(a) En integrales en dominios simples en y, las secciones se deben tomar perpendiculares al eje x.
(b) En integrales en dominios simples en x, las secciones se deben tomar perpendiculares al eje y.

La integral doble $\iint_D f(x, y)\,dA$ se obtiene sumando los volúmenes de secciones «finas» de área $A(x)$ y espesor dx, entre $x = a$ y $x = b$ y, por tanto, es

$$\iint_D f(x, y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\right)dx$$

A efectos de notación, es común omitir los paréntesis grandes y escribir

$$\iint_D f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

o

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

La última forma muestra más claramente a qué variable corresponden los límites de integración.

Las expresiones de los miembros derechos de las fórmulas anteriores se denominan integrales **iteradas**. La **iteración** es el proceso de reducir el problema de evaluar una integral doble (o múltiple) a dos (o más) integrales definidas simples sucesivas. En la iteración anterior, la integral

$$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

se denomina integral **interna**, ya que se debe calcular primero. Se calcula utilizando técnicas estándar, considerando x como constante. El resultado de este cálculo es una función sólo de x (nótese que tanto el integrando como los límites de la integral interna pueden depender de x) y es en el integrando de la integral **externa** donde x es la variable de integración.

En el caso de integrales dobles en dominios simples en x podemos tomar secciones perpendiculares al eje y y obtener una integral iterada con la integral externa en la dirección de y (*véase* la Figura 14.13(b)). Resumimos la exposición anterior en el siguiente teorema, cuya demostración formal, sin embargo, no daremos.

TEOREMA 2 **Iteración de integrales dobles**

Si $f(x, y)$ es continua en el dominio D, acotado y simple en y, dado por $a \leqslant x \leqslant b$ y $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$$

De forma semejante, si f es continua en el dominio D, acotado y simple en x, dado por $c \leqslant y \leqslant d$ y $a(y) \leqslant x \leqslant b(y)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$$

Observación El símbolo dA en la integral doble se sustituye en la integral iterada por dx y dy. Por tanto, dA se escribe frecuentemente como $dx\,dy$ o $dy\,dx$ en la integral doble. Las tres expresiones

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \iint_D f(x, y)\, dy\, dx \qquad \text{y} \qquad \iint_D f(x, y)\, dA$$

indican todas una integral doble de f en D. Sólo cuando la integral doble es iterada, el orden de dx y dy se hace importante. Posteriormente en este capítulo veremos integrales iteradas dobles en coordenadas polares, y dA tomará la forma $r\,dr\,d\theta$.

No siempre es necesario realizar un gráfico tridimensional del volumen sólido representado por una integral doble. Para iterar la integral apropiadamente (en una dirección o en la otra) en general es suficiente hacer un gráfico *del dominio D* sobre el que se realiza la integral. La dirección de iteración se muestra mediante una línea sobre la cual se realiza la integral interna. Los siguientes ejemplos sirven de ilustración.

Ejemplo 1 Calcule el volumen del sólido que está por encima del cuadrado Q definido por $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $1 \leqslant y \leqslant 2$, y por debajo del plano $z = 4 - x - y$.

Solución El cuadrado Q es simple en x y simple en y, por lo que la integral doble correspondiente al volumen se puede iterar en cualquier dirección. Lo haremos de las dos formas para practicar. La recta horizontal situada a una altura y en la Figura 14.14 sugiere que integramos primero con respecto a x siguiendo esta recta (desde 0 hasta 1) e integramos después el resultado con respecto a y desde 1 hasta 2. Iterando la integral doble en esta dirección, calculamos

$$\begin{aligned}
\text{Volumen por encima de } Q &= \iint_Q (4 - x - y)\, dA \\
&= \int_1^2 dy \int_0^1 (4 - x - y)\, dx \\
&= \int_1^2 dy \left(4x - \frac{x^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_1^2 \left(\frac{7}{2} - y\right) dy \\
&= \left(\frac{7y}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 2 \text{ unidades al cubo}
\end{aligned}$$

Utilizando la iteración contraria, como se muestra en la Figura 14.15, calculamos

$$\begin{aligned}
\text{Volumen por encima de } Q &= \iint_Q (4 - x - y)\, dA \\
&= \int_0^1 dx \int_1^2 (4 - x - y)\, dy \\
&= \int_0^1 dx \left(4y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right) dx \\
&= \left(\frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2 \text{ unidades al cubo}
\end{aligned}$$

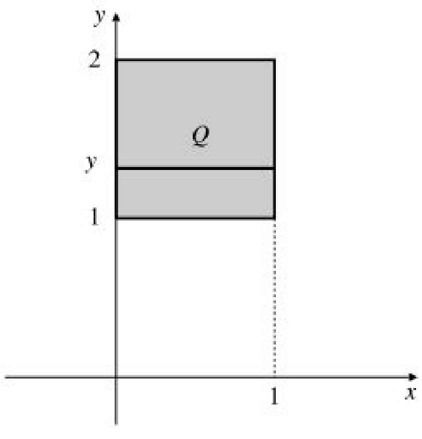

Figura 14.14 La recta horizontal en Q indica iteración con la integral interna en la dirección de x.

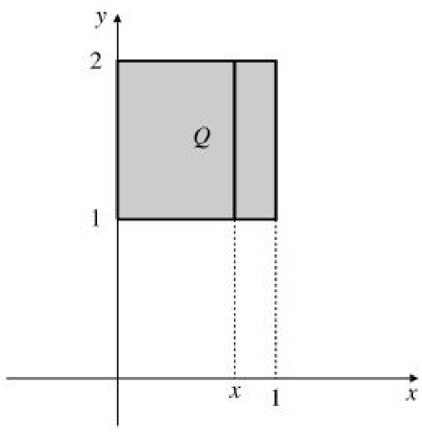

Figura 14.15 La recta vertical en Q indica iteración con la integral interna en la dirección de y.

¡Es reconfortante obtener el mismo resultado de las dos formas! Nótese que como Q es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, los límites de las integrales internas no dependen de las variables de las integrales externas en cada iteración. No debemos esperar que esto ocurra en dominios más generales.

Ejemplo 2 Calcule $\iint_T xy\,dA$ en el triángulo T cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (1, 1).

Solución El triángulo T se muestra en la Figura 14.16. Es simple en x y simple en y. Utilizando la iteración correspondiente a tomar secciones en la dirección que se muestra en la figura, se obtiene:

$$\begin{aligned}\iint_T xy\,dA &= \int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy \\ &= \int_0^1 dx \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

La iteración en la otra dirección (Figura 14.17) conduce al mismo valor:

$$\begin{aligned}\iint_T xy\,dA &= \int_0^1 dy \int_y^1 xy\,dx \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{yx^2}{2}\right)\Bigg|_{x=y}^{x=1} \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2}(1-y^2)\,dy \\ &= \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

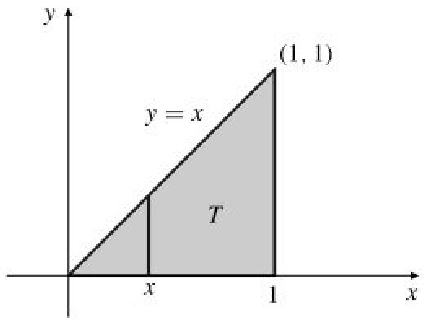

Figura 14.16 El dominio triangular T con una recta vertical que indica iteración con integral interna en la dirección de y.

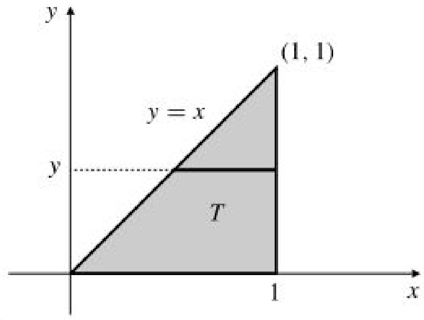

Figura 14.17 El dominio triangular T con una recta horizontal que indica iteración con la integral interior en la dirección de x.

En los dos ejemplos anteriores, la integral doble se puede calcular fácilmente utilizando cualquiera de las dos posibles iteraciones (lo hemos hecho de las dos formas a efectos ilustrativos). Sin embargo, ocurre a menudo que una integral doble se evalúa fácilmente si se itera en una dirección y resulta muy difícil, si no imposible, de calcular si se itera en la otra dirección. Algunas veces incluso aparecen integrales iteradas cuyo cálculo requiere que se expresen como integrales dobles y después se iteren en la dirección contraria.

Ejemplo 3 Calcule la integral iterada $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy$.

Solución No podemos calcular una primitiva de e^{y^3} para evaluar la integral interior con esta iteración, por lo que expresaremos I como una integral doble e identificaremos la región donde se calcula:

$$I = \iint_D e^{y^3}\, dA$$

siendo D la región que se muestra en la Figura 14.18. Volviendo a realizar la iteración con la integración en x en el interior, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx \\ &= \int_0^1 e^{y^3}\, dy \int_0^{y^2} dx \\ &= \int_0^1 y^2 e^{y^3}\, dy = \left.\frac{e^{y^3}}{3}\right|_0^1 = \frac{e-1}{3} \end{aligned}$$

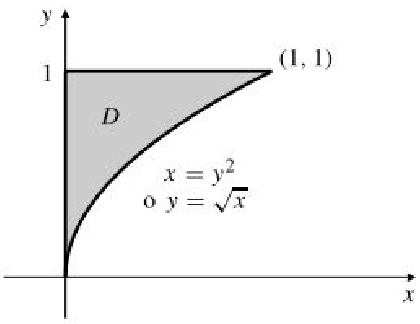

Figura 14.18 La región correspondiente a la integral iterada del Ejemplo 3.

A continuación presentamos un ejemplo de cálculo de volumen de un sólido algo más complicado. Aunque no siempre es necesario dibujar los sólidos para calcular sus volúmenes, es conveniente hacerlo siempre que sea posible. Cuando posteriormente en este capítulo consideremos las integrales triples en regiones tridimensionales, en general será necesario dibujar las regiones. Practique cuanto pueda.

Ejemplo 4 Dibuje y calcule el volumen del sólido limitado por los planos $y = 0$, $z = 0$ y $z = a - x + y$, y el cilindro parabólico $y = a - (x^2/a)$, siendo a una constante positiva.

Solución El sólido se muestra en la Figura 14.19. Su base es el segmento parabólico D en el plano xy limitado por $y = 0$ e $y = a - (x^2/a)$, por lo que el volumen del sólido está dado por

$$V = \iint_D (a - x + y)\, dA = \iint_D (a + y)\, dA$$

Nótese cómo se ha utilizado la simetría para eliminar el término en x del integrando. Este término es una función impar de x, y D es simétrico respecto al eje y. Iterando la integral doble en la dirección que sugiere la sección que se muestra en la figura, obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} dx \int_0^{a-(x^2/a)} (a + y)\, dy \\ &= \int_{-a}^{a} \left.\left(ay + \frac{y^2}{2}\right)\right|_{y=0}^{y=a-(x^2/a)} dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[a^2 - x^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{a^2} \right) \right] dx$$
$$= 2 \int_{0}^{a} \left[\frac{3}{2} a^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{2a^2} \right] dx$$
$$= \left(3a^2 x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5a^2} \right) \Bigg|_{0}^{a}$$
$$= 3a^3 - \frac{4}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^3 = \frac{28}{15} a^3 \text{ unidades al cubo}$$

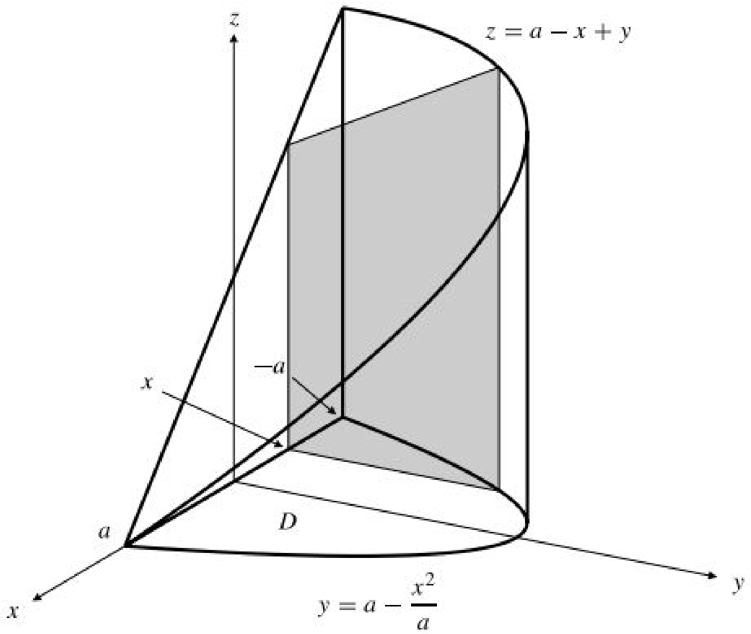

Figura 14.19 El sólido del Ejemplo 4, con una sección perpendicular al eje x.

Observación La rutina **int** de Maple se puede anidar para calcular simbólicamente integrales iteradas dobles (o múltiples). Por ejemplo, la integral iterada para el cálculo del volumen del Ejemplo 4 anterior se puede obtener mediante el comando de Maple

```
> V = int(int(a+y, y=0..a - x^2/a), x=-a..a) ;
```

$$V = \frac{28}{15} a^3$$

Recuérdese que «int» tiene una forma *inerte* «Int», que devuelve la propia integral sin intentar calcularla simbólicamente. Por ejemplo, se puede presentar en pantalla una ecuación de la integral reiterada de la solución del Ejemplo 3 utilizando el comando

```
> Int(Int(exp(y^3), x=0..y^2), y=0..1)
  =int(int(exp(y^3), x=0..y^2), y=0..1) ;
```

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(y^3)}\, dx\, dy = \frac{1}{3} e - \frac{1}{3}$$

Si se desea que Maple aproxime una integral iterada sin intentar que primero la resuelva simbólicamente, se introduce en «evalf» la forma inerte.

```
> evalf(Int(Int(exp(y^3), x=0..y^2), y=0..1)) ;
```

$$.5727606095$$

Por supuesto, Maple no puede resolver todas las integrales de forma simbólica. Si sustituimos exp (y^3) en la integral iterada anterior por exp (x^3), Maple se enfrentará valerosamente con la integral interna (de exp (x^3) con respecto a x) e intentará expresarla mediante la función gamma y una función de dos variables relacionada con la anterior denominada función gamma incompleta, pero no podrá calcular la integral externa (y).

```
> Int(Int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1)
  =int(int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1) ;
```

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(x^3)}\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{1}{9} \frac{y^2\left(-2\pi\sqrt{3} + 3\Gamma\left(\frac{1}{3}, -y^6\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(y^6)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\, dy$$

Podemos forzar de nuevo la evaluación numérica utilizando la función «evalf» aplicada a la forma inerte.

```
> Int(Int(exp(x^3), x=0...y^2), y=0..1)
  =evalf(Int(Int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1)) ;
```

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(x^3)}\, dx\, dy = .3668032540$$

Siempre que se desee calcular una aproximación numérica hay que emplear la forma inerte. En algunas versiones de Maple, intentar utilizar «evalf» con «int(int(...» puede producir resultados inesperados, como un valor complejo de una integral de funciones reales:

```
> evalf(int(int(exp(x^3), x=0..y^2), y=0..1)) ;
```

$$-.1834016270 - .3176609362\, I$$

Ejercicios 14.2

En los Ejercicios 1-4, calcule las integrales iteradas dadas.

1. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x (xy + y^2)\, dy$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y (xy + y^2)\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^\pi \int_{-x}^x \cos y\, dy\, dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^2 dy \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx$

En los Ejercicios 5-14, calcule las integrales dobles mediante iteración.

5. $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, siendo R el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

6. $\displaystyle\iint_R x^2y^2\, dA$, siendo R el rectángulo del Ejercicio 5.

7. $\displaystyle\iint_S (\operatorname{sen} x + \cos y)\, dA$, siendo S el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

8. $\displaystyle\iint_T (x - 3y)\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (a, 0) y (0, b).

9. $\displaystyle\iint_R xy^2\, dA$, siendo R la región finita del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.

10. $\displaystyle\iint_D x\cos y\, dA$, siendo D la región finita del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y la curva $y = 1 - x^2$.

11. $\displaystyle\iint_D \ln x\, dA$, siendo D la región finita del primer cuadrante limitada por la recta $2x + 2y = 5$ y la hipérbola $xy = 1$.

12. $\displaystyle\iint_T \sqrt{a^2 - y^2}\, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (a, 0) y (a, a).

13. $\displaystyle\iint_R \frac{x}{y} e^y \, dA$, siendo R la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

14. $\displaystyle\iint_T \frac{xy}{1+x^4} \, dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

En los Ejercicios 15-18, dibuje los dominios de integración y calcule las integrales iteradas dadas.

15. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} \, dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$

17. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2 + y^2} \, dy \ (\lambda > 0)$

18. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1 - y^4} \, dy$

En los Ejercicios 19-28, calcule los volúmenes de los sólidos indicados.

19. Por debajo de $z = 1 - x^2$ y por encima de la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

20. Por debajo de $z = 1 - x^2$ y por encima de la región $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant y$.

21. Por debajo de $z = 1 - x^2 - y^2$ y por encima de la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

22. Por debajo de $z = 1 - y^2$ y por encima de $z = x^2$.

23. Por debajo de la superficie $z = 1/(x + y)$ y por encima de la región del plano xy limitada por $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = x$.

24. Por debajo de la superficie $z = x^2 \operatorname{sen}(y^4)$ y por encima del triángulo del plano xy cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, \pi^{1/4})$ y $(\pi^{1/4}, \pi^{1/4})$.

25. Por encima del plano xy y por debajo de la superficie $z = 1 - x^2 - 2y^2$.

26. Por encima del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ y por debajo del plano $z = 2 - (x/a) - (y/b)$.

27. En el interior de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$.

28. En el interior del cilindro $x^2 + 2y^2 = 8$, por encima del plano $z = y - 4$ y por debajo del plano $z = 8 - x$.

***29.** Suponga que $f(x, t)$ y $f_1(x, t)$ son funciones continuas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$ y $c \leqslant t \leqslant d$. Sea

$$g(x) = \int_c^d f(x, t)\, dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_c^d f_1(x, t)\, dt$$

Demuestre que $g'(x) = G(x)$ para $a < x < b$. *Sugerencia*: Calcule $\int_a^x G(u)\, du$ invirtiendo el orden de iteración. Diferencie posteriormente el resultado. Ésta es una versión diferente del Teorema 5 de la Sección 13.5.

***30.** Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Sea T el triángulo cuyos vértices son (a, a), (b, a) y (b, b). Iterando $\iint_T f(x)g(y)\, dA$ en las dos direcciones, demuestre que

$$\begin{aligned}\int_a^b & f(x)G(x)\, dx \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b g(y)F(y)\, dx\end{aligned}$$

Esto es una forma alternativa de obtener la fórmula de integración por partes.

31. Utilice la rutina **int** de Maple o rutinas similares de otros sistemas de matemáticas por computador para calcular las integrales iteradas de los Ejercicios 1-4 o las integrales iteradas construidas en los restantes ejercicios anteriores.

14.3 Integrales impropias y un teorema del valor medio

A efectos de simplificación, en la definición de integral doble dada en la Sección 14.1 exigimos que el dominio D fuera un conjunto acotado y que el integrando f fuera acotado en D. Como en el caso de una sola variable, pueden aparecer **integrales dobles impropias** si el dominio de integración no está acotado o si el integrando no está acotado cerca de un punto del dominio o de su frontera.

Integrales impropias de funciones positivas

Una integral impropia de una función f que cumple $f(x, y) \geqslant 0$ en su dominio D, o bien existe (es decir, converge a un valor finito), o bien es infinita (diverge a infinito). La convergencia o divergencia de integrales dobles impropias de funciones *no negativas* se puede determinar iterando y determinando la convergencia o divergencia de las integrales impropias que resultan.

Ejemplo 1 Calcule $I = \iint_R e^{-x^2}\, dA$. En este caso, R es la región definida por $x \geqslant 0$ y $-x \leqslant y \leqslant x$ (*véase* la Figura 14.20).

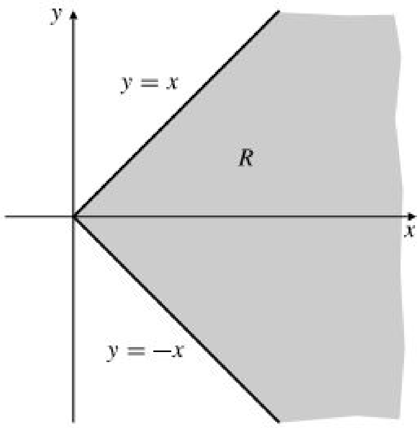

Figura 14.20 Un sector no acotado del plano.

Solución Iteramos con la integral externa en la dirección de x:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dx \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int_{-x}^{x} dy \\ &= 2\int_0^\infty xe^{-x^2}\, dx \end{aligned}$$

Se trata de una integral impropia que se puede expresar como un límite:

$$\begin{aligned} I &= 2 \lim_{r\to\infty} \int_0^r xe^{-x^2}\, dx \\ &= 2 \lim_{r\to\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_0^r \\ &= \lim_{r\to\infty} (1 - e^{-r^2}) = 1 \end{aligned}$$

La integral dada converge, y su valor es 1.

Ejemplo 2 Si D es la región que está por encima del eje x, por debajo de la curva $y = 1/x$ y a la derecha de la recta $x = 1$, determine si la integral doble

$$\iint_D \frac{dA}{x+y}$$

converge o diverge.

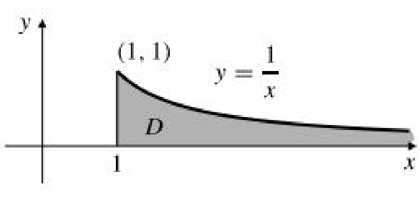

Figura 14.21 El dominio de la integral del Ejemplo 2.

Solución La región D se muestra en la Figura 14.21. Tenemos

$$\iint_D \frac{dA}{x+y} = \int_1^{\infty} dx \int_0^{1/x} \frac{dy}{x+y}$$

$$= \int_1^{\infty} \ln(x+y)\Big|_{y=0}^{y=1/x} dx$$

$$= \int_1^{\infty} \left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) - \ln x\right) dx$$

$$= \int_1^{\infty} \ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{x}\right) dx = \int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Esta integral se puede calcular de forma exacta (*véase* el Ejercicio 28 posterior), pero sólo se nos pide determinar si converge, y eso se puede hacer más fácilmente estimándola. Como $0 < \ln(1+u) < u$ si $u > 0$, tenemos

$$0 < \iint_D \frac{dA}{x+y} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Por tanto, la integral dada converge, y su valor está entre 0 y 1. ■

Ejemplo 3 Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dA$, siendo D la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

Solución La integral es impropia porque el integrando no está acotado cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, un punto frontera de D (*véase* la Figura 14.22). Sin embargo, aplicando iteración se llega a la integral propia:

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)}\, dA = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy$$

$$= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 dx \left(-\frac{1}{x+y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2}$$

$$= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$$

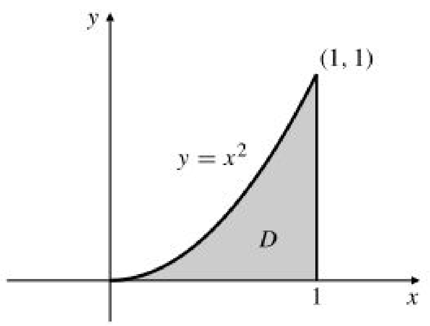

Figura 14.22 La función $\dfrac{1}{(x+y)^2}$ no está acotada en D. ■

Ejemplo 4 Determine la convergencia o divergencia de $I = \iint_D \frac{dA}{xy}$, siendo D la región acotada del primer cuadrante que está entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

Solución El dominio D se muestra en la Figura 14.23. La integral es de nuevo impropia ya que el integrando $1/(xy)$ no está acotado cuando (x, y) tiende al punto frontera $(0, 0)$. Tenemos

$$\begin{aligned} I = \iint_D \frac{dA}{xy} &= \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{x^2}^x \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} (\ln x - \ln x^2)\, dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx \end{aligned}$$

Si sustituimos $x = e^{-t}$ en esta integral, obtenemos

$$I = -\int_\infty^0 \frac{-t}{e^{-t}} (-e^{-t})\, dt = \int_0^\infty t\, dt$$

que diverge a infinito.

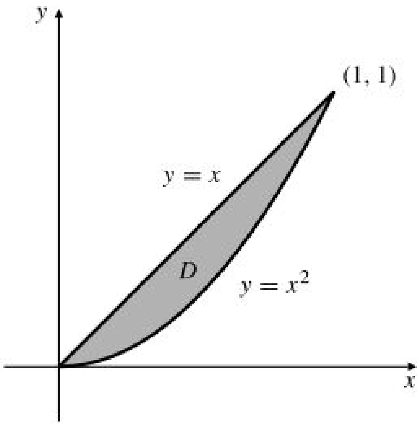

Figura 14.23 $\frac{1}{xy}$ no está acotada en el dominio D.

Observación En los ejemplos anteriores, el integrando era no negativo en el dominio de integración. Los integrandos no positivos se pueden tratar de forma similar, pero no podemos considerar aquí la convergencia de integrales dobles impropias de tipo general en las que los integrandos $f(x, y)$ pueden tomar valores positivos y negativos en su dominio D. Hay que recalcar, sin embargo, que una integral no puede converger a menos que

$$\iint_E f(x, y)\, dA$$

sea finita para todo subdominio regular y acotado E de D. En general, no podemos determinar la convergencia de una integral dada viendo la convergencia de las iteraciones. La integral doble podría divergir aunque las iteraciones convergieran (*véase* el Ejercicio 21 posterior). De hecho, las iteraciones opuestas pueden dar valores diferentes. La causa de esto es la cancelación de volúmenes infinitos de signo contrario (un comportamiento similar en una dimensión se puede ver en la integral $\int_{-1}^1 dx/x$, que no existe, aunque representa una diferencia de áreas «iguales» pero infinitas). Es posible demostrar (para una clase amplia de funciones entre las que se encuentran, por ejemplo, las funciones continuas) que una integral doble impropia de $f(x, y)$ en D converge si la integral de $|f(x, y)|$ en D converge:

$$\iint_D |f(x, y)|\, dA \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dA \text{ converge}$$

En este caso cualquier iteración convergerá al mismo valor. Estas integrales dobles se denominan **absolutamente convergentes** por analogía con las series infinitas absolutamente convergentes.

Un teorema del valor medio para integrales dobles

Sea D un conjunto cerrado y acotado en el plano xy, con área positiva $A = \iint_D dA$. Supongamos que $f(x, y)$ es continua en D. Entonces existen puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D donde f toma valores máximo y mínimo (*véase* el Teorema 2 de la Sección 13.1); es decir,

$$f(x_1, y_1) \leqslant f(x, y) \leqslant f(x_2, y_2)$$

para todos los puntos (x, y) de D. Integrando esta inecuación en D, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1)A &= \iint_D f(x_1, y_1)\, dA \\ &\leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant \iint_D f(x_2, y_2)\, dA = f(x_2, y_2)A \end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo por A, observamos que el *número*

$$\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f(x, y)\, dA$$

está entre los valores mínimo y máximo de f en D:

$$f(x_1, x_1) \leqslant \bar{f} \leqslant f(x_2, y_2)$$

Se dice que un conjunto D del plano es **conexo** si dos puntos cualesquiera de éste se pueden unir mediante una curva paramétrica continua $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ que está en D. Supongamos que esta curva une los puntos (x_1, y_1) (donde $t = 0$) y (x_2, y_2) (donde $t = 1$). Sea $g(t)$ una función que cumple

$$g(t) = f(x(t), y(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Entonces g es continua y toma los valores $f(x_1, y_1)$ en $t = 0$ y $f(x_2, y_2)$ en $t = 1$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número t_0 entre 0 y 1 tal que $f = g(t_0) = f(x_0, y_0)$, donde $x_0 = x(t_0)$ y $y_0 = y(t_0)$. Por tanto, hemos encontrado un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\frac{1}{\text{área de } D} \iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)$$

Y, por tanto, hemos demostrado la siguiente versión el Teorema del Valor Medio.

TEOREMA 3 **Un Teorema del Valor Medio para integrales dobles**

Si la función $f(x, y)$ es continua en un conjunto D cerrado, acotado y conexo en el plano xy, entonces existe un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0) \times (\text{área de } D)$$

Por analogía con la definición de valor medio de funciones de una variable, podemos establecer la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3

El **valor medio** de una función integrable $f(x, y)$ en el conjunto D es el número

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{área de } D} \iint_D f(x, y)\, dA$$

Si $f(x, y) \geqslant 0$ en D, entonces el cilindro de base D y altura constante $\bar{f}$ tiene un volumen igual al de la región sólida que está por encima de D y por debajo de la superficie $z = f(x, y)$. En muchos casos es muy útil interpretar una integral doble en función del valor medio de su función integrando.

Ejemplo 5 El valor medio de x en un dominio D de área A es

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x\, dA$$

Por supuesto, $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la región D. ■

Ejemplo 6 Un número grande de puntos (x, y) se escogen aleatoriamente en el triángulo T cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. ¿Cuál es el valor medio aproximado de $x^2 + y^2$ para esos puntos?

Solución El valor medio aproximado de $x^2 + y^2$ para los puntos escogidos aleatoriamente será el valor medio de la función en el triángulo, concretamente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1/2} \iint_T (x^2 + y^2)\, dA &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2)\, dy \\ &= 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Bigg|_{y=0}^{y=x} dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

■

Ejemplo 7 Sea (a, b) un punto interior de un dominio D en el que $f(x, y)$ es continua. Para un valor positivo r lo suficientemente pequeño, el disco circular cerrado D_r con centro en (a, b) y radio r está contenido en D. Demuestre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

Solución Si D_r está contenido en D, entonces, por el Teorema 3,

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)$$

para algún punto (x_0, y_0) en D_r. Cuando $r \to 0$, el punto (x_0, y_0) tiende a (a, b). Como f es continua en (a, b), tenemos que $f(x_0, y_0) \to f(a, b)$. Por tanto,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

■

Ejercicios 14.3

En los Ejercicios 1-12, determine si las integrales dadas convergen o divergen. Intente calcular las que converjan.

1. $\displaystyle\iint_Q e^{-x-y}\,dA$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

2. $\displaystyle\iint_Q \frac{dA}{(1+x^2)(1+y^2)}$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

3. $\displaystyle\iint_S \frac{y}{1+x^2}\,dA$, siendo S la banda $0 < y < 1$ en el plano xy.

4. $\displaystyle\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}}\,dA$, en el triángulo T cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

5. $\displaystyle\iint_Q \frac{x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dA$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

6. $\displaystyle\iint_H \frac{1}{1+x+y}\,dA$, siendo H la semibanda $0 \leqslant x \leqslant \infty$, $0 < y < 1$.

7. $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)}\,dA$

8. $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|}\,dA$

9. $\displaystyle\iint_T \frac{1}{x^3}\,e^{-y/x}\,dA$, siendo T la región que cumple $x \geqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant x$.

10. $\displaystyle\iint_T \frac{dA}{x^2+y^2}$, siendo T la región del Ejercicio 9.

***11.** $\displaystyle\iint_Q e^{-xy}\,dA$, siendo Q el primer cuadrante del plano xy.

12. $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dA$, siendo R la región $2/\pi \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1/x$.

13. Calcule

$$I = \iint_S \frac{dA}{x+y}$$

siendo S el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$,

(a) Mediante iteración directa de la integral doble.

(b) Utilizando la simetría del integrando y del dominio para expresar

$$I = 2\iint_T \frac{dA}{x+y}$$

siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

14. Calcule el volumen del sólido que está por encima del cuadrado S del Ejercicio 13 y por debajo de la superficie $z = 2xy/(x^2+y^2)$.

En los Ejercicios 15-20, a y b son dos números reales dados, D_k es la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^k$ y R_k es la región $1 \leqslant x \leqslant \infty$, $0 \leqslant y \leqslant x^k$. Calcule todos los valores reales de k para los que las integrales dadas convergen.

15. $\displaystyle\iint_{D_k} \frac{dA}{x^a}$

16. $\displaystyle\iint_{D_k} y^b\,dA$

17. $\displaystyle\iint_{R_k} x^a\,dA$

18. $\displaystyle\iint_{R_k} \frac{dA}{y^b}$

19. $\displaystyle\iint_{D_k} x^a y^b\,dA$

20. $\displaystyle\iint_{R_k} x^a y^b\,dA$

***21.** Calcule las dos iteraciones de la integral impropia

$$\iint_S \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dA$$

siendo S el cuadrado $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Demuestre que la integral doble impropia anterior no existe, considerando

$$\iint_T \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dA$$

siendo T la parte del cuadrado S que está bajo la línea $x = y$.

En los Ejercicios 22-24, calcule el valor medio de las funciones dadas en las regiones dadas.

22. x^2 en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

23. $x^2 + y^2$ en el triángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a - x$.

24. $1/x$ en la región $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

***25.** Calcule la distancia media de los puntos del cuarto de disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ a la recta $x + y = 0$.

26. ¿Tiene la función $f(x, y) = x$ valor medio en la región $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$? Si es así, ¿cuál es?

27. ¿Tiene la función $f(x, y) = xy$ valor medio en la región $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$? Si es así, ¿cuál es?

***28.** Calcule el valor exacto de la integral del Ejemplo 2. *Sugerencia*: Integre por partes $\int_1^\infty \ln(1 + (1/x^2))\, dx$.

***29.** Sea (a, b) un punto interior de un dominio D en el que la función $f(x, y)$ es continua. Para un valor de $h^2 + k^2$ lo suficientemente pequeño, el rectángulo R_{hk}, cuyos vértices son (a, b), $(a + h, b)$, $(a, b + k)$ y $(a + h, b + k)$, estará incluido en D. Demuestre que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} \iint_{R_{hk}} f(x, y) = f(a, b)$$

Sugerencia: Vea el Ejemplo 7.

***30. (Otra demostración de la igualdad de las derivadas parciales mixtas)** Suponga que $f_{12}(x, y)$ y $f_{21}(x, y)$ son continuas en un entorno del punto (a, b). Sin suponer la igualdad de estas derivadas parciales mixtas, demuestre que

$$\iint_R f_{12}(x, y)\, dA = \iint_R f_{21}(x, y)\, dA$$

siendo R el rectángulo cuyos vértices son (a, b), $(a + h, b)$, $(a, b + k)$ y $(a + h, b + k)$, y $h^2 + k^2$ un valor lo suficientemente pequeño. Utilice ahora el resultado del Ejercicio 29 para demostrar que $f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b)$. Esto parece contradecir al Teorema 1 de la Sección 12.4. Sin embargo, en ese teorema sólo se suponía continuidad de las derivadas parciales mixtas *en* (a, b). Aquí suponemos continuidad *en todos los puntos suficientemente cerca de* (a, b).

14.4 Integrales dobles en coordenadas polares

En muchas aplicaciones de las integrales dobles, el dominio de integración, la función integrando o ambos se pueden expresar de forma más sencilla empleando coordenadas polares en lugar de coordenadas cartesianas. Recuérdese que un punto P con coordenadas cartesianas (x, y) se puede expresar también mediante sus coordenadas polares $[r, \theta]$, siendo r la distancia desde P al origen O, y θ el ángulo que OP forma con la dirección positiva del eje x (los ángulos θ positivos se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj). Las coordenadas polares y cartesianas de P se relacionan mediante las transformaciones (*véase* la Figura 14.24)

$$x = r\cos\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad \tan\theta = y/x$$

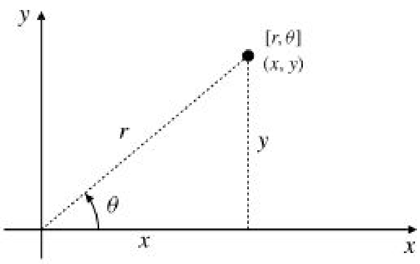

Figura 14.24 Transformaciones de polares a cartesianas.

Consideremos el problema de calcular el volumen V de la región sólida que está por encima del plano xy y por debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. Como el paraboloide corta al plano xy en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el volumen se expresa en coordenadas cartesianas como

$$V = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy$$

El cálculo de esta integral iterada requiere un esfuerzo considerable. Sin embargo, podemos expresar el mismo volumen utilizando coordenadas polares como

$$V = \iint_{r\leqslant 1} (1 - r^2)\, dA$$

Para iterar esta integral, tenemos que saber la forma del ***elemento de área dA*** en coordenadas polares.

En la fórmula cartesiana de V, el elemento de área $dA = dx\,dy$ representa el área de la región «infinitesimal» limitada por las rectas paralelas a los ejes de coordenadas que pasan por x, $x + dx$, y, e $y + dy$ (*véase* la Figura 14.25(a)). En la fórmula en polares, el elemento de área dA debe representar la región «infinitesimal» limitada por las circunferencias de radios r y $r + dr$, y las rectas que parten del origen en ángulos θ y $\theta + d\theta$ (*véase* la Figura 14.25(b)). Obsérvese que dA es aproximadamente el área de un rectángulo de dimensiones dr y $r\,d\theta$. El error de esta aproximación se hace despreciable ***comparado con el tamaño de dA*** cuando dr y $d\theta$ tienden a cero. Por tanto, al transformar una integral doble de coordenadas cartesianas a polares, el elemento de área se transforma de acuerdo con la fórmula

$$\boxed{dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta}$$

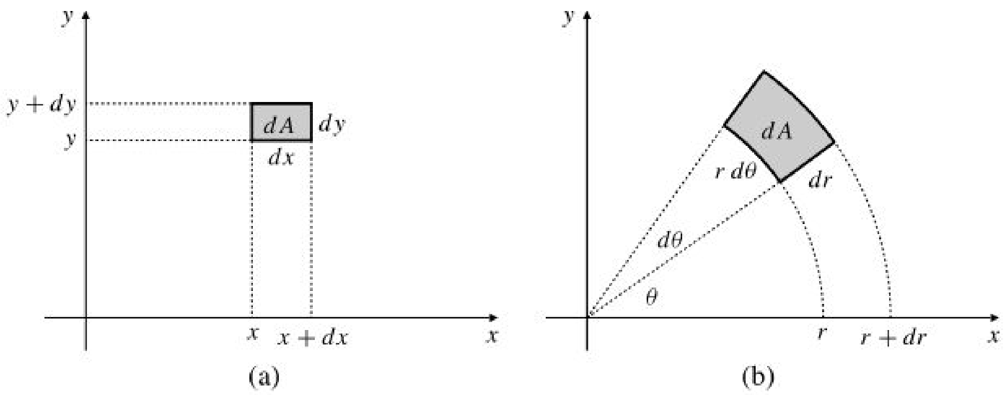

Figura 14.25
(a) $dA = dx\,dy$ en coordenadas cartesianas.
(b) $dA = r\,dr\,d\theta$ en coordenadas polares.

Para iterar la forma polar de la integral doble correspondiente al cálculo de V considerada anteriormente, podemos considerar el dominio de integración como un conjunto en un plano con ***coordenadas cartesianas*** r y θ. En el plano cartesiano xy el dominio es un disco $r \leqslant 1$ (*véase* la Figura 14.26), pero en el plano cartesiano $r\theta$ (con ejes r y θ perpendiculares) el dominio es el rectángulo R especificado por $0 \leqslant r \leqslant 1$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (*véase* la Figura 14.27). El elemento de área en el plano $r\theta$ es $dA^* = dr\,d\theta$, por lo que la transformación a coordenadas polares ($dA = r\,dA^*$) no conserva el área. Entonces, la integral en polares de V es en realidad una integral en cartesianas en el plano $r\theta$, con el integrando modificado por la inclusión de un factor extra r que compensa el cambio de área. Se puede calcular mediante métodos de iteración estándar:

$$\begin{aligned} V = \iint_R (1 - r^2)\,r\,dA^* &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2} \text{ unidades al cubo} \end{aligned}$$

Observación No es necesario dibujar la región R en el plano $r\theta$. Estamos acostumbrados a pensar en coordenadas polares como distancias y ángulos en el plano xy y podemos entender fácilmente observando el disco de la Figura 14.26 que la iteración de la integral en coordenadas polares corresponde a $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$. Es decir, debemos ser capaces de escribir la iteración

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr$$

directamente a partir de la consideración del dominio de integración en el plano xy.

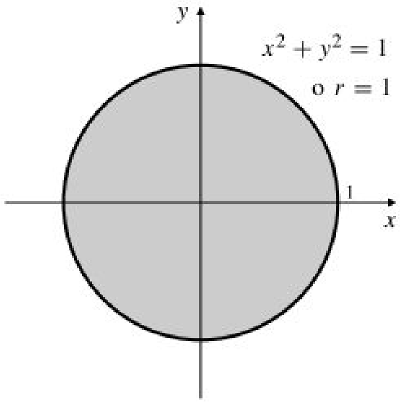

Figura 14.26 El dominio en el plano xy.

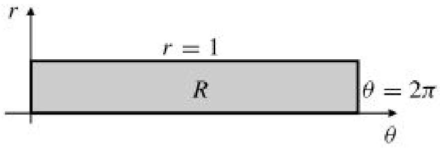

Figura 14.27 El dominio en el plano $r\theta$.

Ejemplo 1 Si R es la parte de la corona $0 < a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$ que está en el primer cuadrante y por debajo de la recta $y = x$, calcule

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dA$$

Solución La Figura 14.28 muestra la región R. Se especifica en coordenadas polares como $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ y $a \leqslant r \leqslant b$. Como

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta} = \tan^2\theta$$

tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\, d\theta \int_a^b r\, dr \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta - 1)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\tan\theta - \theta)\Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 - \pi}{8}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

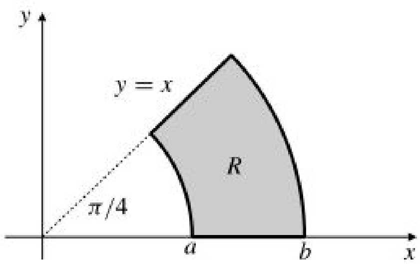

Figura 14.28

Ejemplo 2 **(Área de una región en polares)** Obtenga la fórmula del área de la región en polares R limitada por la curva $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (*véase* la Figura 14.29).

Solución El área A de R es numéricamente igual al volumen de un cilindro de altura 1, por encima de la región R:

$$A = \iint_R dx\,dy = \iint_R r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{f(\theta)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta$$

Obsérvese que en la integral interna de la iteración hay que integrar r en la recta especificada por θ desde 0 hasta $f(\theta)$.

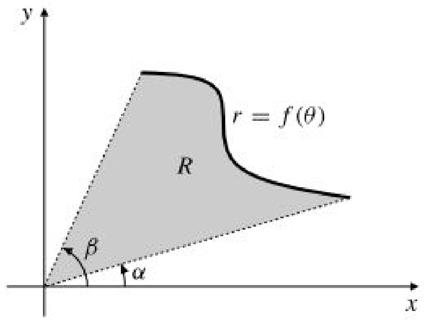

Figura 14.29 Un problema estándar de áreas en coordenadas polares.

No existe una regla firme que indique si se debe o no se debe convertir una integral doble de coordenadas cartesianas a polares. En el Ejemplo 1 anterior, la forma del dominio sugería fuertemente la conversión, con el apoyo del hecho de que el integrando y^2/x^2 se convertía en una función sólo de θ al transformar a coordenadas polares. Es aconsejable en general cambiar a coordenadas polares si este cambio simplifica la integración (es decir, si el *dominio* es «más simple» cuando se expresa en coordenadas polares), aun cuando la forma del integrando se haga más complicada.

Ejemplo 3 Calcule el volumen del sólido que está situado en el primer octante, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y bajo el plano $z = y$.

Solución El sólido se muestra en la Figura 14.30. La base es un cuarto de disco, que se expresa en coordenadas polares mediante las inecuaciones $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant r \leqslant a$. Por consiguiente, la altura se expresa como $z = y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. El volumen del sólido es

$$V = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \int_0^a r^2\,dr = \frac{1}{3}a^3 \text{ unidades al cubo}$$

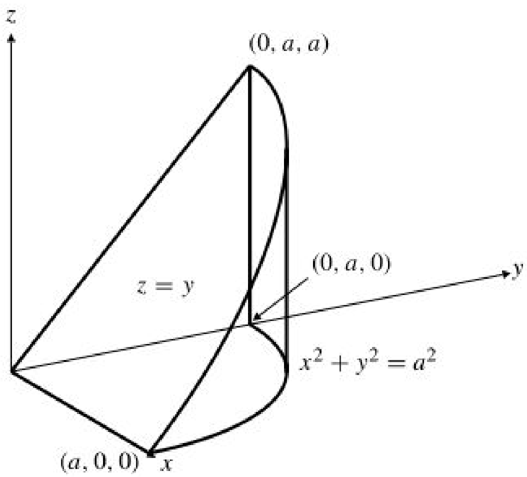

Figura 14.30 Este volumen se calcula fácilmente utilizando iteración en coordenadas polares.

El ejemplo que sigue establece el valor de una integral definida que tiene un papel muy importante en teoría de la probabilidad y en estadística. Es interesante notar que esta integral de una variable no se puede calcular utilizando técnicas de cálculo de una sola variable.

Ejemplo 4 **(Una integral muy importante)** Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Solución La integral impropia (llamémosla I) converge, y su valor no depende del símbolo que utilicemos como variable integración. Por tanto, podemos expresar el cuadrado de la integral como un producto de dos integrales idénticas, pero con sus variables de integración denominadas de forma diferente. A continuación interpretamos este producto como una integral doble impropia y la iteramos en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr \\ &= 2\pi \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^R = \pi \end{aligned}$$

Por tanto, $I = \sqrt{\pi}$.

Nótese que la integral en r de la iteración anterior es una integral impropia convergente; se calcula con la ayuda del cambio $u = r^2$.

En nuestro ejemplo final de iteración en coordenadas polares, intentaremos algo un poco más difícil.

Ejemplo 5 Calcule el volumen de la región sólida que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$, con $a > 0$.

Solución La esfera está centrada en el origen y su radio es $2a$. La ecuación del cilindro se puede convertir en

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

si completamos el cuadrado en los términos en y. Por tanto, es un cilindro circular vertical de radio a que tiene su eje en la recta vertical que pasa por el punto $(0, a, 0)$. El eje z está en el cilindro. Una cuarta parte del volumen requerido está en el primer octante. La Figura 14.31 muestra esta parte.

Si utilizamos coordenadas polares en el plano xy, entonces la ecuación de la esfera es $r^2 + z^2 = 4a^2$ y la ecuación del cilindro es $r^2 = 2ar\,\mathrm{sen}\,\theta$ o, de forma más simple, $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. La parte del primer octante del volumen está por encima de la región especificada por las inecuaciones $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant r \leqslant 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Por tanto, el volumen total es

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\,r\,dr && \text{Cambio } u = 4a^2 - r^2 \\ &= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} (8a^3 - 8a^3\cos^3\theta)\,d\theta && \text{Cambio } v = \mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^3 - \frac{32}{3}a^3 \int_0^1 (1 - v^2)\, dv$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^3 - \frac{64}{9}a^3 = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3 \text{ unidades al cubo}$$

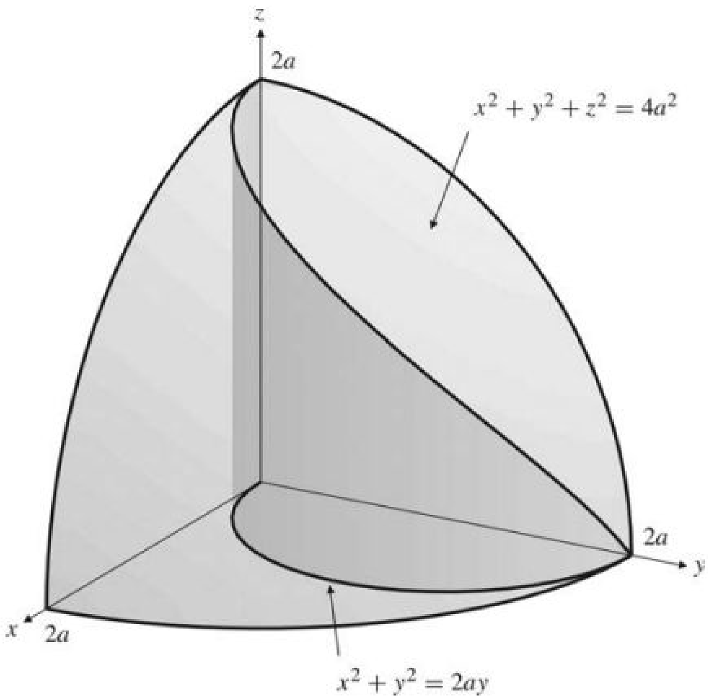

Figura 14.31 La parte del primer octante de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

Cambio de variables en integrales dobles

La transformación de una integral doble a coordenadas polares es sólo un caso especial de una fórmula de cambio de variable en integrales dobles. Supongamos que x e y se expresan en función de otras dos variables u y v mediante las ecuaciones

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$

Esas ecuaciones definen una **transformación** de los puntos (u, v) en un plano cartesiano uv, en puntos (x, y) en el plano xy (*véase* la Figura 14.32). Diremos que la transformación del conjunto S en el plano uv en el conjunto D en el plano xy es *uno a uno* si se cumple que:

(i) Todo punto en S se transforma en un punto en D.
(ii) Todo punto en D es la imagen de un punto en S.
(iii) Puntos diferentes en su S se transforman en puntos diferentes en D.

Si la transformación es uno a uno, en las ecuaciones que la definen se pueden despejar u y v en función de x e y, con lo que se obtiene la **transformación inversa**,

$$u = u(x, y)$$
$$v = v(x, y)$$

que es uno a uno de D en S.

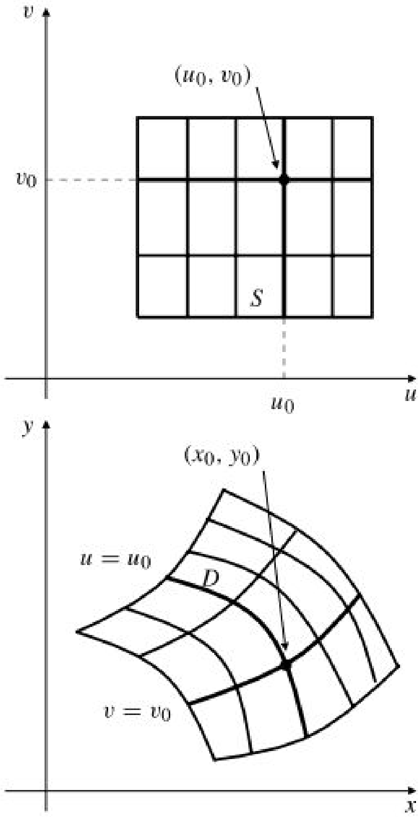

Figura 14.32 Bajo la transformación $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ las rectas $u = u_0$ y $v = v_0$ en el plano uv se transforman en las curvas $\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$ y $\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$ en el plano xy, que denominaremos como $u = u_0$ y $v = v_0$. El punto (u_0, v_0) se transforma en el punto (x_0, y_0).

Supongamos que las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tienen derivadas parciales primeras continuas y que el determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \text{en} \quad (u, v)$$

Como se indicó en la Sección 12.8, el Teorema de la Función Implícita implica que la transformación es uno a uno cerca de (u, v) y que la transformación inversa tiene también derivadas parciales primeras continuas y un jacobiano distinto de cero que cumple

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \quad \text{en } D$$

Ejemplo 6 El jacobiano de la transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Cerca de cualquier punto excepto del origen (donde $r = 0$) la transformación es uno a uno (de hecho, es uno a uno en cualquier conjunto del plano $r\theta$ que no contenga más de un punto donde $r = 0$ y que esté en, por ejemplo, la banda $0 \leqslant \theta < 2\pi$).

Se puede utilizar una transformación uno a uno para transformar la integral doble

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

en una integral doble en el correspondiente conjunto S del plano uv. Mediante la transformación, el integrando $f(x, y)$ se convierte en $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Debemos descubrir la forma de expresar el elemento de área $dA = dx\,dy$ en función del elemento de área $du\,dv$ en el plano uv.

Dado un valor fijo de u (por ejemplo, $u = c$), las ecuaciones

$$x = x(u, v) \quad \text{e} \quad y = y(u, v)$$

definen una curva paramétrica (con v como parámetro) en el plano xy. Esta curva se denomina curva u correspondiente al valor $u = c$. De forma similar, para v fija la ecuación define una curva paramétrica (con parámetro u) denominada curva v. Consideremos el elemento de área diferencial limitado por las curvas u correspondientes a valores cercanos u y $u + du$, y las curvas v correspondientes a valores cercanos v y $v + dv$. Como estas curvas son suaves, para valores pequeños de du y dv, el elemento de área es aproximadamente un paralelogramo, y su área aproximada es

$$dA = |\overline{PQ} \times \overline{PR}|$$

siendo P, Q y R los puntos que se muestran en la Figura 14.33. El error en esta aproximación es despreciable comparado con dA cuando du y dv tienden a cero.

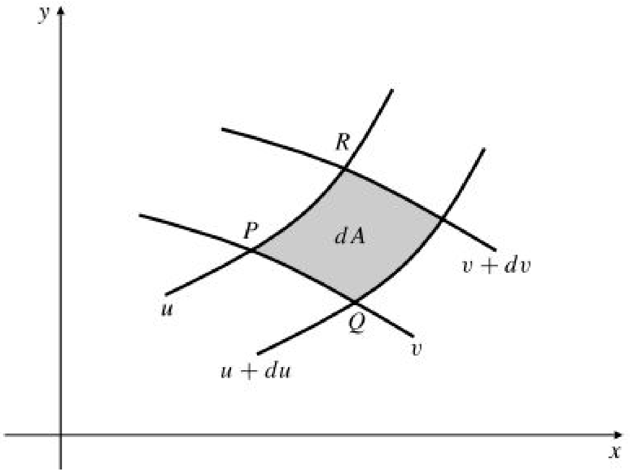

Figura 14.33 Imagen en el plano xy del elemento de área $du\,dv$ en el plano uv.

Tenemos que $\overline{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, siendo

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \quad \text{y} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

Sin embargo, $dv = 0$ en la curva v PQ, por lo que

$$\overline{PQ} = \frac{\partial x}{\partial u}du\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}du\mathbf{j}$$

De forma similar,

$$\overline{PR} = \frac{\partial x}{\partial v}dv\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}dv\mathbf{j}$$

Entonces,

$$dA = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}du & \dfrac{\partial y}{\partial u}du & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}dv & \dfrac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \end{matrix} \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv$$

es decir, el valor absoluto del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ es el cociente entre los correspondientes elementos de área en el plano xy y en el plano uv:

$$dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

El teorema que sigue resume el procedimiento de cambio de variables en una integral doble.

TEOREMA 4 Fórmula de cambio de variables en integrales dobles

Sea $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ una transformación uno a uno de un dominio S en el plano uv en un dominio D en el plano xy. Supongamos que las funciones x e y, y sus derivadas parciales primeras con respecto a u y v, son continuas en S. Si $f(x, y)$ es integrable en D, y si $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, entonces g es integrable en S y

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S g(u, v)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

Observación No es necesario que S o D sean cerrados o que la transformación sea uno a uno en la frontera de S. La transformación a coordenadas polares hace corresponder el rectángulo $0 < r < 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ de forma uno a uno con el disco perforado $0 < x^2 + y^2 < 1$ y, como en el primer ejemplo de esta sección, podemos transformar una integral en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en otra en el rectángulo cerrado $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Ejemplo 7 Utilice el cambio de variables apropiado para calcular el área del disco elíptico E dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

Solución Mediante la transformación $x = au$, $y = bv$, el disco elíptico E es la imagen uno a uno del disco circular D dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$. Suponiendo que $a > 0$ y $b > 0$, tenemos

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv = \left|\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}\right| du\,dv = ab\,du\,dv$$

Por tanto, el área de E se calcula como

$$\iint_E 1\,dx\,dy = \iint_D ab\,du\,dv = ab \times (\text{área de } D) = \pi ab \text{ unidades al cuadrado}$$

A menudo es tentador intentar utilizar la fórmula del cambio de variables para transformar el dominio de un integral doble en un rectángulo, de forma que la integración sea fácil. Como muestra el siguiente ejemplo, esto en general requiere definir la transformación inversa (u y v en función de x e y). Recuérdese que las transformaciones inversas tienen jacobianos inversos.

Ejemplo 8 Calcule el área de la región plana finita limitada por las cuatro parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ y $x = 3y^2$.

Solución La región, que denominaremos D, se muestra en la Figura 14.34. Sea

$$u = \frac{y}{x^2} \quad \text{y} \quad v = \frac{x}{y^2}$$

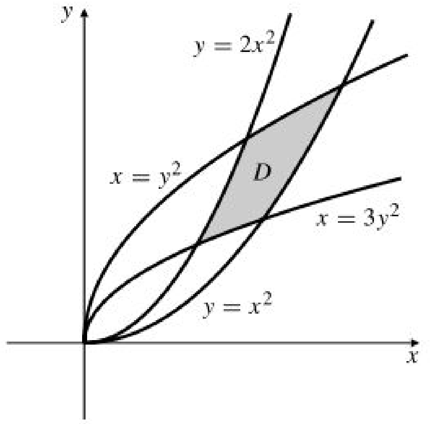

Figura 14.34

Entonces, la región D corresponde al rectángulo R en el plano uv dado por $1 \leqslant u \leqslant 2$ y $1 \leqslant v \leqslant 3$. Como

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \begin{vmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 1/y^2 & -2x/y^3 \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2y^2} = 3u^2v^2$$

se deduce que

$$\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| = \frac{1}{3u^2v^2}$$

y, por tanto, el área de D está dada por

$$\iint_D dx\,dy = \iint_R \frac{1}{3u^2v^2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u^2}\int_1^3 \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{9} \text{ unidades al cuadrado}$$

El siguiente ejemplo muestra lo que puede ocurrir si una transformación del dominio de una integral doble no es uno a uno.

Ejemplo 9 Sea D el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ en el plano xy, y sea S el cuadrado $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ en el plano uv. Demuestre que la transformación

$$x = 4u - 4u^2, \qquad y = v$$

transforma S en D, y utilícela para transformar la integral $I = \iint_D dx\,dy$. Compare el valor de I con el valor de la integral transformada.

Solución Como $x = 4u - 4u^2 = 1 - (1 - 2u)^2$, el valor mínimo de x en el intervalo $0 \leqslant u \leqslant 1$ es 0 (en $u = 0$ y $u = 1$), y el valor máximo es 1 (en $u = \frac{1}{2}$). Por tanto, $x = 4u - 4u^2$ transforma el intervalo $0 \leqslant u \leqslant 1$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Como $y = v$ transforma claramente $0 \leqslant v \leqslant 1$ en $0 \leqslant y \leqslant 1$, la transformación dada transforma S en D. Como

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| du\,dv = \left|\begin{vmatrix} 4 - 8u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right| du\,dv = |4 - 8u|\,du\,dv$$

transformar I lleva a la integral

$$J = \iint_S |4 - 8u|\,du\,dv = 4\int_0^1 dv \int_0^1 |1 - 2u|\,du = 8\int_0^{1/2} (1 - 2u)\,du = 2$$

Sin embargo, $I = \iint_D dx\,dy =$ área de $D = 1$. La razón de que $J \neq I$ es que la transformación no es uno a uno de S a D; realmente transforma S en D dos veces. El rectángulo R definido por $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$ y $0 \leqslant v \leqslant 1$ se transforma uno a uno en D mediante la transformación, por lo que la integral transformada apropiada es $\iint_R |4 - 8u|\,du\,dv$, que es igual a I.

Ejercicios 14.4

En los Ejercicios 1-6, calcule las integrales dobles dadas en el disco D dado por $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, con $a > 0$.

1. $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dA$

2. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA$

3. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dA$

4. $\displaystyle\iint_D |x|\,dA$

5. $\displaystyle\iint_D x^2\,dA$

6. $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dA$

En los Ejercicios 7-10, calcule las integrales dobles dadas en el cuarto de disco Q dado por $x \geqslant 0$, $y > 0$ y $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, con $a > 0$.

7. $\displaystyle\iint_Q y\,dA$

8. $\displaystyle\iint_Q (x + y)\,dA$

9. $\displaystyle\iint_Q e^{x^2+y^2}\,dA$

10. $\displaystyle\iint_Q \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,dA$

11. Calcule $\displaystyle\iint_S (x + y)\,dA$, siendo S la región del primer cuadrante que está dentro del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ y bajo la recta $y = \sqrt{3}x$.

12. Calcule $\displaystyle\iint_S x\,dA$, siendo S el segmento de disco $x^2 + y^2 \leqslant 2$, $x \geqslant 1$.

13. Calcule $\displaystyle\iint_T (x^2 + y^2)\,dA$, siendo T el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

14. Calcule $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln(x^2 + y^2)\,dA$.

15. Calcule la distancia media del origen a los puntos del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

16. Calcule el valor medio de $e^{-(x^2+y^2)}$ en la región anular $0 < a \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant b$.

17. ¿Para qué valores de k, y a qué valor, converge la integral $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dA}{(x^2 + y^2)^k}$?

18. ¿Para qué valores de k, y a qué valor, converge la integral $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1 + x^2 + y^2)^k}$?

19. Calcule $\displaystyle\iint_D xy\,dA$, siendo D la región plana que cumple $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant x$ y $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

20. Calcule $\displaystyle\iint_C y\,dA$, siendo C la mitad superior del disco cardioide $r \leqslant 1 + \cos\theta$.

21. Calcule el volumen que está comprendido entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $3z = 4 - x^2 - y^2$.

22. Calcule el volumen de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

23. Calcule el volumen de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

24. Calcule el volumen de la región que está por encima del plano xy, en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por debajo del plano $z = x + y + 4$.

***25.** Calcule el volumen de la región que está dentro de los tres cilindros circulares $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$. *Sugerencia*: Haga un buen dibujo de la parte de la región que está en el primer octante y utilice simetría siempre que sea posible.

26. Calcule el volumen de la región que está dentro del cilindro circular $x^2 + y^2 = 2y$ y el cilindro parabólico $z^2 = y$.

***27.** Se escogen aleatoriamente muchos puntos en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Calcule el valor medio aproximado de la distancia de esos puntos al lado más cercano del cuadrado más pequeño que contiene a dicho disco.

***28.** Calcule el valor medio de x en el segmento del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$ que está a la derecha de $x = 1$. ¿Cuál es el centroide del segmento?

29. Calcule el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

30. Calcule el volumen de la región del primer octante que está por debajo del paraboloide

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Sugerencia: Utilice el cambio de variables $x = au$, $y = bv$.

***31.** Calcule $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant a} e^{x+y}\,dA$.

32. Calcule $\displaystyle\iint_P (x^2 + y^2)\,dA$, siendo P el paralelogramo limitado por las rectas $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ y $3x + 4y = 6$.

33. Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$ e $y = 2x$.

34. Calcule $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $y = 0$, $y = x$, $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$.

***35.** Sea T el triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Calcule la integral $\iint_T e^{(y-x)/(y+x)}\, dA$:

(a) Mediante transformación en coordenadas polares.

(b) Utilizando la transformación $u = y - x$, $v = y + x$.

36. Utilice el método del Ejemplo 7 para calcular el área de la región que está dentro de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y por encima de la recta $2x + 3y = 6$.

***37. (La función error)** La función error Erf (x) se define para $x \geqslant 0$ como

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Demuestre que $(\operatorname{Erf}(x))^2 = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 - e^{-x^2/\cos^2\theta})\, d\theta$.

A partir de aquí, deduzca que $\operatorname{Erf}(x) \geqslant \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

***38. (Las funciones gamma y beta)** La función gamma $\Gamma(x)$ y la función beta $B(x, y)$ se definen como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad (x > 0)$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} dt, \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

La función gamma cumple

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{y}$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Deduzca las siguientes propiedades de estas funciones:

(a) $\Gamma(x) = 2 \displaystyle\int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds, \qquad (x > 0)$

(b) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(c) Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \operatorname{sen}^{2y-1}\theta\, d\theta$$

(d) $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$

14.5 Integrales triples

Ahora que ya sabemos cómo extender la integración definida a dominios bidimensionales, la extensión a dominios de tres (o más) dimensiones es directa. Dada una función acotada $f(x, y, z)$ definida en una caja rectangular B ($x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$), la integral triple de f en B,

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

se puede definir como un límite adecuado de sumas de Riemann correspondientes a particiones de B en subcajas utilizando planos paralelos a cada uno de los planos coordenados. Omitiremos los detalles. Las integrales triples en dominios más generales se definen extendiendo la función para que sea cero fuera del dominio e integrando en una caja rectangular que contenga al dominio.

Todas las propiedades de las integrales dobles mencionadas en la Sección 14.1 tienen sus propiedades análogas para integrales triples. En particular, una función continua es integrable en un dominio cerrado y acotado. Si $f(x, y, z) = 1$ en el dominio D, entonces la integral triple da el volumen de D:

$$\text{Volumen de } D = \iiint_D dV$$

La integral triple de una función positiva $f(x, y, z)$ se puede interpretar como el «hipervolumen» (es decir, el volumen tetradimensional) de una región del espacio de cuatro dimensiones que tiene como «base» el conjunto tridimensional D y como tope la hipersuperficie $w = f(x, y, z)$. Ésta no es una interpretación particularmente útil; en las aplicaciones surgen otras mucho más útiles. Por ejemplo, si $\delta(x, y, z)$ representa la densidad (masa por unidad de volumen) en la posición