

Daniel RADU

Iordana AȘTEFĂNOAEI

**NOTIUNI FUNDAMENTALE SI  
PROBLEME DE MECANICA  
ANALITICA**

Facultatea de Fizica

[www.phys.uaic.ro](http://www.phys.uaic.ro)

Universitatea "Al. I. Cuza" Iasi

## CUPRINS

<b>Prefață</b> .....	5
<b>Introducere</b> .....	8
<b>I. Noțiuni fundamentale de mecanică analitică</b> .....	11
<b>I.1 Noțiunea de legătură sau constrângere</b> .....	11
I.1.1 Clasificarea legăturilor pentru punctul material .....	14
I.1.2 Problema fundamentală a dinamicii punctului material supus la legături .....	19
I.1.3 Clasificarea legăturilor pentru sistemele de puncte materiale .....	24
I.1.4 Ecuațiile Lagrange de speța I .....	26
<b>I.2 Noțiunea de deplasare elementară</b> .....	27
I.2.1 Deplasări elementare reale, posibile și virtuale .....	27
<b>I.3 Noțiunea de lucru mecanic virtual. Principiul lucrului   mecanic virtual</b> .....	41
I.3.1 Principiul lucrului mecanic virtual .....	41
I.3.2 Principiul vitezelor virtuale .....	45
I.3.3 Principiul lui Torricelli .....	46
<b>II. Principii ale mecanicii analitice</b> .....	49
<b>II.1 Principiul lui D'Alembert</b> .....	49
II.1.1 Spațiul configurațiilor .....	53
II.1.2 Forțe generalizate .....	54
<b>II.2 Principiul lui Hamilton</b> .....	66
<b>III. Problema pendulului simplu</b> .....	81
<b>III.1 Formalismul clasic (newtonian)</b> .....	82
<b>III.2 Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I</b> .....	99
<b>III.3 Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a</b> .....	104
<b>III.4 Formalismul ecuațiilor canonice ale lui Hamilton</b> .....	113
<b>III.5 Formalismul Hamilton-Jacobi</b> .....	117
<b>III.6 Formalismul variabilelor unghi-acțiune</b> .....	125
<b>IV. Probleme rezolvate cu ajutorul principiului lucrului   mecanic virtual</b> .....	135

---

<b>V. Probleme de calcul variațional</b> .....	148
<b>V.1 Elemente de calcul variațional</b> .....	148
V.1.1 Funcționale. Diferențialele unei funcționale .....	148
V.1.2 Extremele funcționalelor .....	159
<b>V.2 Probleme a căror rezolvare necesită elemente de calcul variațional</b> .....	165
<b>VI. Probleme rezolvate cu ajutorul formalismului lagrangean</b> .....	206
<b>VII. Probleme de echilibru și mici oscilații</b> .....	304
<b>VIII. Probleme de mecanica fluidelor</b> .....	352
<b>Anexa A. Alfabetul grec (vechi)</b> .....	380
<b>Anexa B. Elemente de analiză combinatorie, trigonometrie și analiză matematică. Formule utile</b> .....	381
<b>Anexa C. Elemente de calcul vectorial. Aplicații</b> .....	419
<b>Bibliografie</b> .....	502

## Prefață

Prezenta lucrare se deosebește de multe altele care abordează subiecte specifice mecanicii analitice, întrucât ea cuprinde atât capitole de teorie, cât și capitole consacrate doar rezolvării de probleme. Astfel, această lucrare este simultan atât o culegere de prelegeri/lecții de mecanică analitică – prin capitolele I și II – cât și o culegere de probleme rezolvate de mecanică teoretică – prin capitolele III ÷ VIII.

La ora actuală există un număr foarte mare de lucrări de mecanică teoretică/analitică, atât în limba română, cât și în principalele limbi de circulație internațională, unele dintre ele chiar foarte bine scrise; cu toate acestea, din experiența dobândită în predarea cursului de „Mecanică analitică și a mediilor deformabile” studenților de la Facultatea de Fizică a Universității „Al.I. Cuza” din Iași, am ajuns la concluzia că o serie de noțiuni fundamentale ale mecanicii analitice (cum ar fi cea de legătură sau constrângere, ori cea de deplasare elementară – pentru a da doar două exemple) trebuie explicate mai pe îndelete și din perspective diverse, pentru a fi înțelese în profunzime. Exact acest lucru își propune lucrarea de față, atât prin partea ei teoretică, cât și prin aplicațiile propuse. De obicei, acestor noțiuni – cu toate că sunt fundamentale – li se acordă un spațiu relativ redus în marea majoritate a lucrărilor, trecându-se cu destul de multă ușurință peste unele aspecte mai subtile și mai dificil de „prins” la o primă lectură sau audiere. De aceea, în paginile acestei lucrări am insistat (credem noi suficient) asupra acestor noțiuni, dând un număr considerabil de exemple concrete, pentru a ușura și mai mult înțelegerea lor. În acest sens, am rămâne profund recunoscători tuturor celor care, parcurgând această carte, ne vor împărtăși impresiile lor în legătură cu conținutul acesteia, cât și eventualele sugestii și/sau observații asupra modului de prezentare ales.

Evident, nu ne-am putut opri asupra tuturor noțiunilor de bază ale mecanicii teoretice – acesta ar fi fost un demers care ar fi implicat un volum incomparabil mai mare al lucrării – ci ne-am axat pe acele noțiuni care sunt absolut necesare pentru dezvoltarea ulterioară a formalismelor proprii mecanicii teoretice.

De asemenea, spre deosebire de marea majoritate a culegerilor de probleme rezolvate de mecanică analitică (și nu numai), unde enunțurile problemelor sunt separate de secțiunea dedicată prezentării soluțiilor, noi am preferat rezolvarea acestora imediat după enunț. Precizăm că rezolvarea tuturor problemelor a fost făcută extrem de amănunțit, cu respectarea algoritmilor de rezolvare prezentați pentru fiecare formalism în parte, pentru a oferi modele de rezolvare a problemelor de mecanică analitică cu un pronunțat caracter didactic. Calculele au fost efectuate în detaliu, pas cu pas, astfel încât cititorul nu trebuie să mai folosească aproape deloc stiloul și hârtia pentru „a desluși” acele formule și/sau relații intermediare care, fiind considerate ușor de dedus, sunt cel mai adesea omise. În plus, în cadrul acelor probleme care au condus la ecuații neliniare, ecuații transcendente etc. care nu admit soluții analitice, sau la integrale care nu au primitive exprimabile prin funcții analitice cunoscute, pentru a oferi soluții complete și/sau finale ale problemelor abordate, am utilizat soft-ul specializat atât în calcul analitic cât și numeric Mathematica 4.0, prezentând – acolo unde am considerat necesar – și liniile de comandă (specifice acestui soft) care au permis rezolvarea concretă a respectivelor probleme.

Materialul este structurat în 8 capitole, 3 anexe și o bibliografie cu 59 referințe. De asemenea, el cuprinde un număr de 104 reprezentări grafice, folosite pentru a ușura urmărirea raționamentelor și/sau explicațiilor. Datorită volumului și așa destul de mare al lucrării, nu am prezentat aplicații din toate capitolele mecanicii analitice. De exemplu, lucrarea nu conține nici o problemă de mecanica corpului solid-rigid, din teoria elasticității ș.a. Aceste subiecte urmează să constituie conținutul unui al doilea volum al lucrării.

Dorim să ne exprimăm speranța că lucrarea de față va veni în sprijinul studenților facultăților de fizică (și nu numai), răspunzând cerințelor acestora în ceea ce privește lămurirea unor aspecte peste care, din lipsă de timp și spațiu, „s-a trecut” mai repede în cadrul cursurilor predate la catedră. Sperăm, de asemenea, că acest material va fi și un instrument util de lucru la seminariile și/sau laboratoarele de mecanică analitică.

Autorii doresc să mulțumească cu profundă recunoștință și cu aleasă considerație d-lui Voltaire Teodorescu, membru al Catedrei de Fizica Corpului Solid și Fizică Teoretică a Facultății de Fizică de la Universitatea „Al.I. Cuza” din Iași pentru nenumăratele și deosebit de utilele discuții pe marginea unor subiecte importante de mecanică teoretică și, în special, pentru profunzimea și finețea observațiilor domniei sale în legătură cu multe aspecte legate de modul de înțelegere și predare a noțiunilor fundamentale ale mecanicii analitice, care ne-au ajutat în elaborarea prezentei lucrări. De asemenea, dorim să aducem sincere mulțumiri d-rei Aurelia Apetrei și d-lui Adrian Catană, studenți ai aceleiași facultăți, pentru ajutorul prețios în tehnoredactarea lucrării.

*Autorii*

## Introducere

În anul 1788 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a publicat la Paris lucrarea „Mécanique analytique”, care conține atât contribuțiile lui, cât și sinteza principalelor contribuții ale înaintașilor săi, dintre care amintim pe Jean Bernoulli (1654-1705), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), Leonhard Euler (1707-1783) și Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Aceasta poate fi considerată prima lucrare „serioasă” de mecanică analitică, contribuții semnificative fiind aduse apoi și de către Karl Gustav Jacobi (1804-1851), Rowan Hamilton (1805-1865), Jules Henri Poincaré (1854-1912) ș.a.

Mecanica analitică (sau teoretică) este primul curs de fizică teoretică predat studenților care urmează cursurile facultăților de fizică. Aceasta deoarece, printre altele, în cadrul acestui curs sunt prezentate principalele „instrumente de lucru”, cu ajutorul cărora, ulterior, pot fi abordate și alte capitole de fizică teoretică, precum: electrodinamica, mecanica cuantică, teoria relativității, teoria câmpurilor clasice și cuantice, fizica statistică etc. În cadrul prelegerilor de mecanică analitică, orice cadru didactic de predare va include, în mod obligatoriu, formalismele de bază cu ajutorul cărora poate fi rezolvată o problemă de mecanică și anume:

1. formalismul clasic-newtonian;
2. formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I;
3. formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a;
4. formalismul lui Hamilton;
5. formalismul Hamilton-Jacobi.

La toate acestea se mai adaugă unele „instrumente” secundare, însă deosebit de utile în unele situații concrete, cum ar fi: principiul lucrului mecanic virtual (utilizat cu precădere în rezolvarea problemelor de echilibru), principiul lui Maupertuis (sau principiul acțiunii minime, util, printre altele, în determinarea geodezicelor diverselor varietăți spațiale), teorema Noether (deosebit de utilă în determinarea integralelor prime), ecuațiile Routh (care, în unele situații – cum ar fi cea a existenței coordonatelor ciclice – prin introducerea așa-numitelor *variabile Routh*, pot ușura rezolvarea problemelor), parantezele Poisson (cu ajutorul cărora pot

fi determinate integrale prime noi, pornind de la cel puțin două integrale prime independente cunoscute și utilizând teorema Poisson), transformările canonice (care, în unele situații, prin schimbarea coordonatelor și/sau impulsurilor generalizate pot simplifica rezolvarea problemelor foarte mult), formalismul variabilelor unghi-acțiune (util în rezolvarea problemelor referitoare la sistemele fizice care au o mișcare periodică) etc.

Principalul scop al prezentei lucrări este acela de a prezenta într-un mod care se dorește cât mai inteligibil unele noțiuni fundamentale specifice mecanicii analitice și de a exemplifica utilitatea acestora prin rezolvarea unor probleme concrete. De aceea, lucrarea de față are un dublu caracter:

- unul pur teoretic, specific primei părți a cărții, care este dedicată introducerii și explicării unor noțiuni și principii fundamentale ale mecanicii analitice și
- unul aplicativ, specific părții a doua a lucrării, consacrată exemplificării modului de utilizare a formalismelor învățate în cadrul cursurilor de mecanică teoretică, prin rezolvarea unor probleme mai mult sau mai puțin „celebre” de mecanică analitică (și nu numai<sup>1</sup>).

În cadrul lucrării sunt prezentate următoarele noțiuni și principii specifice mecanicii analitice:

1. noțiunea de legătură sau constrângere (cap. I);
2. noțiunea de deplasare elementară (cap. I);
3. noțiunea de lucru mecanic virtual (cap. I);
4. principiul lui D'Alembert (cap. II);
5. principiul lui Hamilton (cap. II),

și sunt rezolvate:

1. problema pendulului gravitațional, prin intermediul tuturor formalismelor amintite mai sus (cap. III);
2. probleme de determinare a pozițiilor de echilibru cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual (cap. IV);
3. probleme de calcul variațional (cap. V);

---

<sup>1</sup> De exemplu, problema izoperimetriei cercului, ca exemplu de problemă de calcul variațional, nu este specifică, totuși, în mod exclusiv mecanicii analitice.



4. probleme diverse (de exemplu: mașina Atwood simplă și dublă, pendule cuplate, pendul cu punct de sprijin în mișcare oscilatorie, pendulul gravitațional dublu etc.) cu ajutorul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a (cap. VI);
5. probleme de studiu a echilibrului și determinare a perioadei micilor oscilații ale unor sisteme mecanice (cap. VII);
6. probleme de mecanica fluidelor (cap. VIII).

În capitolele dedicate rezolvării de probleme, acolo unde situația a cerut-o, am dezvoltat elementele de teorie strict necesare pentru înțelegerea raționamentelor și calculelor efectuate [de exemplu, în cazul problemelor de calcul variațional am prezentat succint câteva elemente de teoria calculului variațional (am definit noțiunea de funcțională și am dat condițiile necesare și suficiente de extremum pentru funcționale), în cazul studiului într-un sistem de referință neinertial a pendulului cu punct de sprijin în mișcare oscilatorie am prezentat pe scurt elemente referitoare la forțele de inerție etc.]. Cel mai adesea, marea majoritate a autorilor preferă să prezinte aceste elemente teoretice auxiliare la sfârșitul lucrărilor, sub formă de anexe. Principalul motiv invocat pentru a justifica această alegere este păstrarea unei anumite coerențe și a unei continuități a chestiunilor prezentate. Cu toate acestea, noi am preferat „să facem unele paranteze” chiar în locurile unde se impuneau trimiteri către anumite anexe sau, și mai rău, către alte lucrări, considerând că în acest fel am venit în sprijinul cititorului, lămurind problema „pe loc”. Sperăm că marea majoritate a cititorilor ne va împărtăși punctul de vedere și totodată va aprecia modul nostru de a proceda, chiar dacă, uneori aceste „paranteze” sunt cam lungi.

# Capitolul I

## Noțiuni fundamentale de mecanică analitică

### I.1. Noțiunea de legătură sau constrângere

Această noțiune joacă un rol fundamental în mecanica analitică și este totodată o noțiune specifică mecanicii analitice, în sensul că, spre deosebire de marea majoritate a noțiunilor de bază ale mecanicii teoretice – care sunt întâlnite și în cadrul mecanicii fizice fenomenologice (mecanicii clasice-newtoniene<sup>1</sup>) – aceasta apare numai în cadrul mecanicii analitice. De altfel, aceasta este noțiunea care deosebește în mod clar un sistem fizic din punctul de vedere al „libertății” corpurilor care îl compun, în cadrul celor „două mecanici”: cea clasică-newtoniană și cea analitică.

De exemplu, în mecanica fenomenologică (clasică, newtoniană) un corp aflat în mișcare în câmp gravitațional exterior nu este considerat un corp liber, deoarece, aflându-se în câmp gravitațional, asupra lui acționează permanent forța de greutate,  $\vec{G} = m\vec{g}$ . Pentru a înțelege lucrurile cât mai exact trebuie să precizăm ce înseamnă că un corp este „liber” în cadrul mecanicii fizice fenomenologice. În acest sens, precizăm că, în contextul amintit, prin *corp liber* se înțelege acel *corp asupra căruia nu acționează nici o forță*. Evident, această definiție este una pur teoretică, idealizată, întrucât în realitate nu există nici un corp în Univers asupra căruia să nu acționeze nici o forță.

Spre deosebire de acestea, din punctul de vedere al mecanicii analitice, corpul considerat mai sus este un corp liber. Deci, chiar dacă asupra corpului acționează permanent forța de greutate, din perspectiva mecanicii teoretice el este totuși un corp liber. Diferența provine din modul de înțelegere al noțiunii de „libertate” în cele două situații. Astfel, în cadrul mecanicii analitice, un corp este considerat liber atât timp cât el

---

<sup>1</sup> Cum ar fi, de exemplu, noțiunile de: punct material, mișcare, viteză, accelerație, masă, forță, inerție, energie cinetică, energie potențială, lucru mecanic etc.

nu este constrâns în nici un fel să se deplaseze după orice direcție și/sau sens (dacă ne referim doar la mișcarea de translație<sup>2</sup>) și să aibă orice<sup>3</sup> viteză. În limbajul specific mecanicii analitice, se spune despre un astfel de corp că el posedă/are numărul maxim posibil de *grade de libertate*. De altfel, cele două noțiuni, cea de legătură sau constrângere și cea de grad de libertate sunt foarte strâns legate între ele, după cum vom vedea.

Așadar, atât timp cât un corp se poate mișca după *oricare* din cele trei direcții reciproc perpendiculare ale unui reper triortogonal față de care se studiază mișcarea corpului în spațiul euclidian tridimensional și are totodată libertatea de a se roti în jurul *oricăreia* din cele trei axe de coordonate – ambele mișcări, și cea de translație și cea de rotație făcându-se cu viteze  $|\vec{v}| \leq c$  (pentru a nu ieși din cadrul mecanicii relativiste) *arbitrar* – spunem despre acesta că este un *corp liber*.

În cadrul mecanicii analitice noțiunea de legătură sau constrângere se definește astfel:

**Definiție:** Numim *legătură* sau *constrângere*, orice condiție de ordin geometric sau cinematic care limitează posibilitățile de mișcare ale unui corp.

Să observăm că în cadrul acestei definiții se face referire atât la condiții de ordin *geometric* (acestea au efect direct asupra mulțimii de valori pe care le poate lua în timpul  $t$  al mișcării *vectorul de poziție* al corpului respectiv,  $\vec{r}$ ), cât și la condiții de ordin *cinematic* (aici se are în vedere restricționarea posibilităților de mișcare ale corpului în ceea ce privește mulțimea de valori pe care le poate lua în timpul  $t$  al mișcării *viteza*  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  a corpului respectiv). Având în vedere cele menționate mai sus, din punct de vedere matematic, o legătură sau constrângere se va putea exprima sub formă implicită, astfel

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0, \quad (1.1)$$

<sup>2</sup> Dacă, de exemplu, dimensiunile acelu corp nu pot fi neglijate (corpul nu poate fi considerat un punct material) atunci trebuie avute în vedere și posibilitățile lui de a efectua mișcări de rotație sau mișcări combinate (translație simultan cu rotație).

<sup>3</sup> Evident, păstrându-ne în limitele mecanicii relativiste ( $|\vec{v}| \leq c$ , unde  $c$  este viteza luminii în vid).

unde, funcției  $f$  i se cere de obicei să fie o funcție de clasă  $C^1$  pe domeniul ei de definiție<sup>4</sup>.

Condițiile de ordin geometric se pot realiza în mod concret/practic obligând corpul să se deplaseze pe o anumită *curbă* fizică (de exemplu, mișcarea unui teleferic pe cablul lui de susținere), pe o anumită *suprafață* fizică (de exemplu, mișcarea unui corp pe un plan înclinat), sau într-un anumit *domeniu tridimensional* (un anumit „volum”, care este delimitat fizic de o suprafață închisă; de exemplu, mișcarea unei pietricele în interiorul unei mingi de fotbal).

Orice legătură apare și își manifestă efectul prin intermediul unei *forțe de legătură*. Aceste forțe de legătură obligă corpul să satisfacă legătura: de exemplu, să se miște pe o anumită curbă sau pe o anumită suprafață, fără a părăsi curba sau suprafața respectivă.

Aici apare o deosebire clară între mecanica newtoniană și cea teoretică: în timp ce în cadrul celei dintâi nu se face nici o deosebire (principială) între eventualele diferite tipuri (ca natură) de forțe, în cadrul mecanicii analitice se face o distincție clară între *forțele aplicate* corpurilor și cele *de legătură*. Aceasta, deoarece, în cadrul mecanicii clasice (newtoniene) este imperios necesar să cunoaștem de la bun început *toate* forțele (de orice natură sau proveniență), măcar ca direcție și sens, pentru a putea astfel scrie ecuația fundamentală a dinamicii (ca expresie matematică a principiului acțiunii forțelor), care stă la baza rezolvării oricărei probleme de mecanică în cadrul acestui formalism. Întrucât forțele de legătură sunt adesea greu de „identificat” – în sensul că, de cele mai multe ori, nu se cunosc de la început modulul, direcția și sensul acestor forțe – „puterea” formalismului clasic-newtonian de rezolvare a problemelor este relativ scăzută.

Cu totul alta este însă situația în cadrul mecanicii analitice. În cadrul formalismelor dezvoltate în cadrul acesteia, cunoașterea *a priori* a forțelor de legătură este înlocuită prin cunoașterea expresiilor analitice ale legăturilor (în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), ceea ce este mult mai facil decât a cunoaște forțele de legătură, sau, pur și simplu nu mai este nevoie să fie cunoscute nici măcar aceste expresii ale

---

<sup>4</sup> Deoarece, în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I, pentru scrierea ecuațiilor corespunzătoare trebuie să existe gradientul acestor funcții scalare.

legăturilor (cum este, de exemplu, cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, a formalismului ecuațiilor canonice ale lui Hamilton, sau a formalismului Hamilton-Jacobi). În toate aceste cazuri (în cadrul oricărui formalism propriu mecanicii analitice) forțele de legătură se determină (evident, dacă acest lucru se dorește) abia la sfârșit, după ce legea de mișcare a corpului/sistemului a fost determinată. Tocmai de aici provine „forța” crescută a formalismelor mecanicii analitice față de cel clasic-newtonian; aceste metode permit rezolvarea unui număr mult mai mare de probleme – chiar și a acelor care implică legături complicate, pentru care forțele de legătură nu pot fi cunoscute de la început.

### I.1.1. Clasificarea legăturilor pentru punctul material

Legăturile pot fi clasificate pe baza a cel puțin trei criterii, și anume:

1. după modul în care sunt exprimate – prin *egalități* sau prin *inegalități*;
2. în funcție de absența sau prezența explicită a *timpului* în expresiile lor;
3. în funcție de absența sau prezența explicită a *vitezei* în expresiile lor;

Cea mai generală formă de exprimare analitică a unei legături (lăsând la o parte aspectul legat de primul criteriu) este cea dată de relația (1.1):

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0.$$

1. Din punctul de vedere al primului criteriu de clasificare, legăturile pot fi exprimate prin *egalități* – și atunci sunt numite *bilaterale* – sau prin *inegalități* – caz în care sunt numite *unilaterale*.

Exemple de legături bilaterale:

i) mișcarea unui corp de masă  $m$  pe o sferă situată în câmp gravitațional (pendulul sferic – vezi Fig. I.1):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, \text{ sau, } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0; \quad (1.2)$$

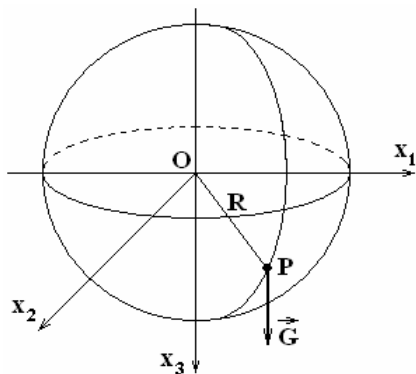


Fig. I.1

ii) mișcarea unui corp pe o suprafață conică, de deschidere unghiulară  $2\theta$  (vezi Fig. I.2):

$$x_1^2 + x_2^2 = (R - x_3 \operatorname{tg} \theta)^2,$$

sau,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{tg}^2 \theta + 2R x_3 \operatorname{tg} \theta - R^2 = 0; \quad (1.3)$$

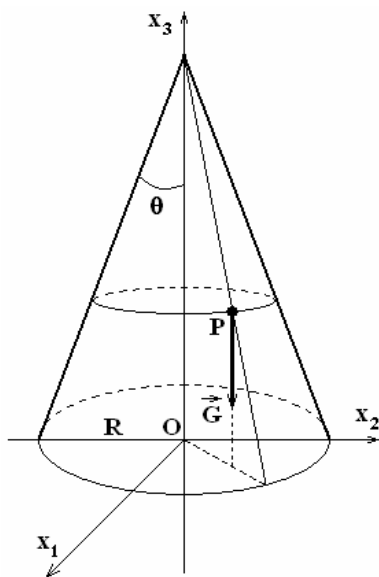


Fig. I.2

iii) mișcarea unei particule pe suprafața unei sfere de rază fixă  $R$ , al cărei centru de mișcă rectiliniu și uniform cu viteza  $\vec{v}_C = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ :

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 = R^2,$$

sau,

$$f(x_1, x_2, x_3; t) \equiv f(\vec{r}; t) = (x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 - R^2 = 0; (1.4)$$

iv) mișcarea în câmp gravitațional a unui corp de masă  $m$  atârnat de o tijă rigidă ideală de lungime  $l$  (pendulul gravitațional cu tijă – vezi Fig. I.3):

$$x_1^2 + x_2^2 = l^2, \text{ sau, } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0.$$

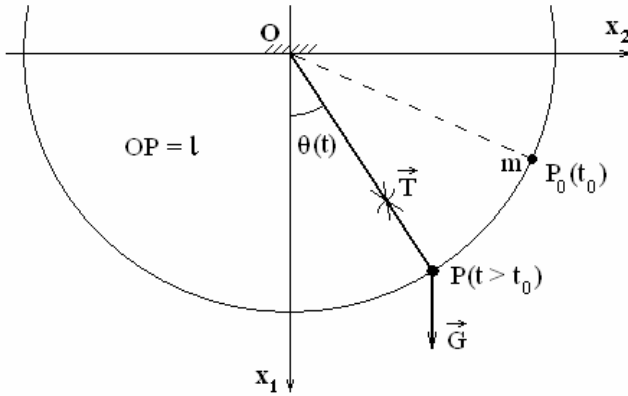


Fig. I.3

Exemple de legături unilaterale:

i) mișcarea în câmp gravitațional a unui corp de masă  $m$  atârnat de un fir flexibil și inextensibil (pendulul gravitațional cu fir – vezi Fig. I.4):

$$x_1^2 + x_2^2 \leq l^2, \text{ sau, } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - l^2 \leq 0; \quad (1.5)$$

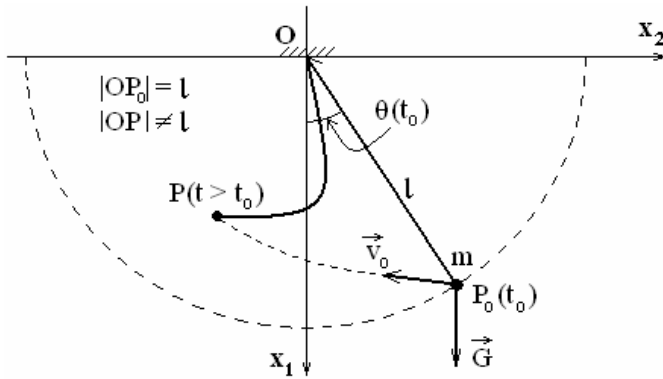


Fig. I.4

ii) mișcarea unei particule de masă  $m$  în interiorul unei mingi de rugby (presupusă a avea forma unui elipsoid de rotație, cu semiaxele  $a$ ,  $b$  și  $c$ ) care este fixă (în repaus):

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1, \text{ sau, } f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 \leq 0; \quad (1.6)$$

iii) mișcarea unei particule de masă  $m$  în interiorul unei mingi de fotbal (presupusă a fi o sferă de rază  $R$ ), în mișcare rectilinie și uniformă, viteza centrului sferei fiind  $\vec{v}_c = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ :

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 \leq R^2,$$

sau,

$$f(x_1, x_2, x_3; t) \equiv f(\vec{r}, t) = (x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 - R^2 \leq 0. \quad (1.7)$$

2. Din punctul de vedere al celui de-al doilea criteriu, legăturile pot conține în expresiile lor analitice timpul în mod explicit – și atunci ele se numesc *reonome* sau *nestaționare*, sau, dimpotrivă, timpul nu apare în mod explicit în aceste expresii – caz în care legăturile se numesc *scleronome* sau *staționare*.

De exemplu, legăturile exprimate de relațiile (1.1), (1.4) și (1.7) sunt reonome (sau nestaționare), iar legăturile exprimate prin relațiile (1.2), (1.3), (1.5) și (1.6) sunt scleronome (sau staționare).



3. În sfârșit, din punctul de vedere al celui de-al treilea criteriu, legăturile pot fi *geometrice* sau *finite* – dacă în expresiile lor analitice nu intervin vitezele în mod explicit – și, respectiv, *cinematice* sau *diferențiale* – dacă vitezele apar în mod explicit în expresiile lor analitice.

De exemplu, legăturile (1.2) ÷ (1.7) sunt geometrice (sau finite), pe când (1.1) este o legătură cinematică (sau diferențială). Un alt exemplu de legătură cinematică este cea care apare în cazul mișcării unui corp care este forțat să aibă tot timpul vectorul vitezei instantanee tangent la curba pe care se mișcă – de exemplu, o hiperbolă de semiaxe  $a$  și  $b$  și cu distanța focală  $\varphi$ ,

$$\frac{(x_1 - \varphi)^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

În acest caz, legătura mai sus amintită se scrie astfel:

$$f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = b^2(x_1 - \varphi)\dot{x}_1 - a^2x_2\dot{x}_2 = 0. \quad (1.8)$$

Derivând total în raport cu timpul expresia (1.1) a celei mai generale legături geometrice, obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ceea ce arată faptul că orice legătură geometrică poate fi scrisă ca o legătură diferențială liniară (liniară în componentele vitezei). Evident, reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

Acele legături diferențiale care pot fi puse sub formă geometrică sau finită se numesc *integrabile*. Legăturile geometrice împreună cu cele integrabile formează clasa legăturilor *olonome*. Legăturile neintegrabile împreună cu cele unilaterale formează clasa legăturilor *neolonome*.

Nu există metode generale de rezolvare a problemelor care implică legături neolonome. În aceste situații, fiecare problemă este studiată separat prin metode și cu mijloace specifice, cât mai adecvate. Evident, pot fi situații în care problema să nu admită soluție analitică și atunci doar metodele numerice sunt cele care pot furniza informații despre mișcarea sistemului respectiv.

De obicei, legăturile sunt investigate (caracterizate) din punctul de vedere al tuturor celor trei criterii simultan. Astfel, legătura (1.3) este

bilaterală, scleronomă și finită, (1.7) este unilaterală, reonomă și geometrică, iar (1.8) este bilaterală, scleronomă și diferențială.

Întotdeauna există o foarte strânsă legătură între numărul de legături și numărul gradelor de libertate ale unui anumit sistem mecanic.

**Definiție:** Se numește *numărul gradelor de libertate* al unui corp, numărul de parametri reali independenți care determină în mod univoc poziția în spațiu a aceluia corp.

Această definiție poate fi generalizată în mod banal la un sistem de corpuri (particule), numărul gradelor de libertate fiind o mărime aditivă.

Dacă respectivul corp este un punct material, atunci el poate avea maxim trei grade de libertate, corespunzător celor trei posibilități de mișcare de translație după cele trei axe ale unui reper triortogonal. Dacă acel corp este un solid rigid, atunci el poate avea maxim șase grade de libertate (trei ale mișcării de translație și trei pentru mișcarea de rotație – sunt posibile maxim trei moduri independente de rotație în spațiul euclidian tridimensional). Numărul maxim de grade de libertate îl are doar acel corp asupra căruia acționează doar forțe aplicate (nu există nici o forță de legătură, deci nu există legături). În general, cu fiecare nouă legătură geometrică bilaterală, numărul gradelor de libertate scade cu câte o unitate. Numărul de legături nu poate depăși numărul gradelor de libertate. Dacă cele două numere sunt egale, atunci starea<sup>5</sup> corpului (sau a sistemului de corpuri) este complet determinată doar de legături, indiferent câte forțe aplicate acționează asupra corpului (sistemului de corpuri).

### I.1.2. Problema fundamentală a dinamicii punctului material supus la legături

**Enunț:** Fiind date: masa punctului material,  $m$ , forțele aplicate asupra punctului material (a căror rezultantă este  $\vec{F}$ ) și condiții inițiale compatibile cu legăturile,  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$  și  $\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$ , să se determine legea de

<sup>5</sup> Care poate fi de repaus sau de mișcare relativă față de un anumit reper.

mişcare a punctului material,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  și forțele de legătură (a căror rezultantă este  $\vec{L}$ ).

**Rezolvare:** Vom rezolva această problemă pentru cazul în care punctul material este obligat să se miște pe o curbă fixă.

i) Curba este dată parametric:  $x_i = x_i(q)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , unde  $q = q(t)$  este un parametru real care depinde de timp. În cel mai general caz, dependența funcțională a lui  $\vec{F}$  este  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ , astfel încât, dacă ținem cont de

parametrizarea făcută, obținem  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \xrightarrow{x_i = x_i(q)} \vec{F}(q, \dot{q}, t)$ . Problema se rezolvă făcând apel la principiul fundamental al dinamicii:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{L}, \quad (1.9)$$

unde  $\vec{r}$  și  $\vec{L}$  sunt necunoscute. Proiectând ecuația vectorială (1.9) pe axele de coordonate ale unui reper triortogonal  $Oxyz$  (considerat în spațiul euclidian  $E_3$ ), în raport cu care studiem mișcarea punctului material, obținem:

$$m\ddot{x}_i = F_i + L_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (1.10)$$

Acesta este un sistem de trei ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi, pentru patru necunoscute:  $L_x, L_y, L_z$  și  $q$ , deoarece, în virtutea parametrizării,  $F_i = F_i(q, \dot{q}, t)$ . Pentru a-l putea rezolva în mod univoc mai avem nevoie de încă o ecuație. Aceasta se determină în felul următor (vezi Fig. I.5): descompunem forța de legătură  $\vec{L}$  în două componente vectoriale reciproc perpendiculare,  $\vec{L}_t$  și  $\vec{L}_n$ ,  $\vec{L} = \vec{L}_t + \vec{L}_n$ , unde componenta  $\vec{L}_t$  este tangentă la curbă în punctul curent, iar componenta  $\vec{L}_n$  se află într-un plan perpendicular la curbă în același punct. Această componentă ( $\vec{L}_n$ ) se numește de obicei *reacțiune normală*, iar cealaltă ( $\vec{L}_t$ ) se numește *forță de frecare*. Dacă  $\vec{L}_t = 0$ , atunci corpul se mișcă fără frecare (evident, acesta este un caz ideal), iar curba ( $\Gamma$ ) se numește *perfect netedă* sau *ideală*. În cazul în care  $\vec{L}_n = 0$ , forța de legătură  $\vec{L}$  este tangentă la o curbă numită *perfect rugoasă*.

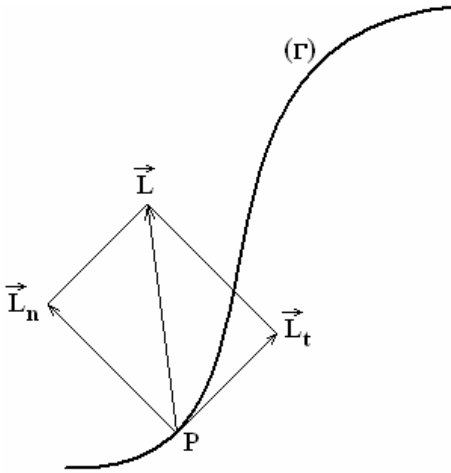


Fig. I.5

În continuare vom presupune curba  $(\Gamma)$  ideală ( $\vec{L}_t = 0$ ), și, deoarece în orice punct al curbei care reprezintă traiectoria corpului de masă  $m$  (și care, în acest caz, coincide cu legătura) viteza  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  a corpului este tangentă la traiectorie (la curba  $(\Gamma)$ ), putem scrie

$$\vec{L} \cdot \vec{v} = \dot{x}L_x + \dot{y}L_y + \dot{z}L_z = 0. \quad (1.11)$$

Acum problema este rezolvabilă (cel puțin în principiu, dificultăți majore putând să apară în continuare datorită expresiei forței aplicate  $\vec{F}$ ) în mod univoc, întrucât suntem în posesia unui sistem de patru ecuații

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = F_i + L_i, & (i = \overline{1,3}), \\ \dot{x}_i L_i = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

cu tot atâtea necunoscute,  $q$  și  $L_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ). Rezolvarea acestui sistem de patru ecuații diferențiale furnizează soluția problemei:  $q = q(t)$ , care exprimă legea de mișcare a corpului pe curba  $(\Gamma)$  și componentele  $L_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) ale forței de legătură.

În vederea formulării metodei ecuațiilor Lagrange de speța I de rezolvare a problemelor de mecanică vom aborda în continuare aceeași problemă, dar în situația în care

ii) Curba este dată sub formă implicită (ca intersecție a două suprafețe spațiale),

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Soluția problemei în acest caz se poate obține în două moduri:

a) rezolvând un sistem de șase ecuații cu tot atâtea necunoscute, sau

b) rezolvând un sistem de cinci ecuații cu tot atâtea necunoscute, ceea ce, evident, este mai simplu.

a) În primul caz sistemul este următorul:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = F_i + L_i, \\ \dot{x}_i L_i = 0, \\ f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1.13)$$

iar cele șase necunoscute sunt  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  și  $L_z$ .

b) În cea de-a doua situație, pentru a determina sistemul de cinci ecuații, vom descompune (oarecum la fel ca în cazul în care curba era dată parametric) forța de legătură  $\vec{L}$  tot după două direcții, dar care, de această dată, nu mai coincid cu direcțiile tangentă și normală la traiectorie, ci cu direcțiile gradientilor celor două funcții,  $\nabla f_1$  și  $\nabla f_2$ , adică direcțiile normale la suprafețele spațiale a căror intersecție dă curba ( $\Gamma$ ). Astfel, presupunând și acum curba ideală (legătura nu comportă frecare), putem scrie (vezi Fig. I.6):

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \mu \nabla f_1 + \nu \nabla f_2,$$

unde  $\mu$  și  $\nu$  sunt doi scalari (care nu pot fi simultan nuli) – coeficienți de proporționalitate între componentele  $\vec{L}_1$  și  $\vec{L}_2$  ale forței de legătură și vectorii gradient ai celor două funcții,  $\nabla f_1$  și respectiv  $\nabla f_2$ .

Pe componente, ecuația vectorială diferențială a mișcării se va scrie astfel:

$$m\ddot{x}_i = F_i + \mu \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1.14)$$

iar sistemul de cinci ecuații cu cinci necunoscute ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\mu$  și  $\nu$ ) va fi

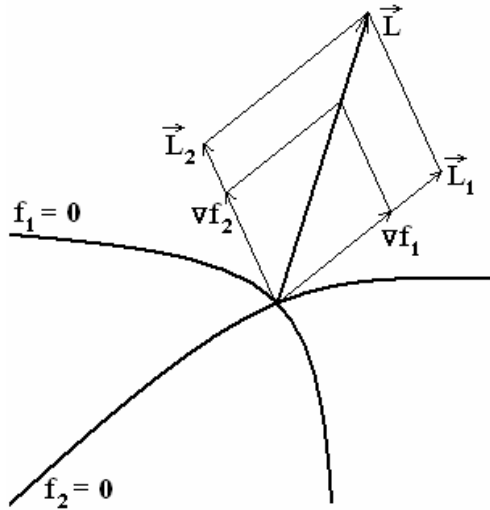


Fig. I.6

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = F_i + \mu \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \\ f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (i = \overline{1,3}). \quad (1.15)$$

În acest fel sunt determinate și legea de mișcare a corpului,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  și forța de legătură,  $\vec{L} = \mu \nabla f_1 + \nu \nabla f_2$ .

**Observație:** În rezolvarea problemei fundamentale a dinamicii punctului material supus la legături am considerat – atât în situația în care curba care exprima legătura era dată parametric, cât și în cazul în care aceasta era dată sub formă implicită – că legătura este ideală (cu alte cuvinte, forța de frecare este nulă). Evident, aceasta este o restricție foarte drastică, în realitate totdeauna existând frecări. La prima vedere, ar apărea că această metodă de rezolvare nu poate fi utilizată în cazul unei probleme reale. Totuși, situația nu este chiar atât de „sumbră”, deoarece, dacă forțele de

frecare sunt cunoscute<sup>6</sup>, fie acestea  $\vec{F}_f (\equiv \vec{L}_t)$ , atunci formalismul prezentat mai sus este în continuare valabil, singura modificare apărând în ceea ce privește forțele aplicate,

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_f.$$

Deci, atunci când forțele de frecare (componentele tangențiale ale forțelor de legătură,  $\vec{L}_t$ ) sunt diferite de zero dar cunoscute, ele pot fi considerate ca și forțe aplicate, iar problema se rezolvă la fel ca mai sus.

### I.1.3. Clasificarea legăturilor pentru sistemele de puncte materiale

Fie un sistem de  $N \geq 2$  puncte materiale. Dacă în orice moment de timp  $t$  al mișcării vectorii de poziție ai celor  $N$  puncte materiale,  $\vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) și vitezele lor,  $\dot{\vec{r}}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) pot lua valori arbitrare, atunci spunem că sistemul este liber (nu este afectat de legături sau constrângeri). În caz contrar sistemul de puncte materiale se numește supus la legături.

Cea mai generală expresie (lăsând la o parte faptul că aceasta poate fi exprimată printr-o egalitate sau printr-o inegalitate) a unei legături pentru un sistem de  $N$  puncte materiale se scrie astfel:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t) = 0 \quad (1.16)$$

și reprezintă, la fel ca în cazul unui singur punct material o condiție de ordin geometric (prin intermediul vectorilor de poziție,  $\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) ai celor  $N$  puncte materiale) și/sau cinematic (prin intermediul vectorilor viteză,  $\dot{\vec{r}}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) ai celor  $N$  puncte materiale) care limitează posibilitățile de mișcare ale punctelor materiale din sistem.

Clasificarea legăturilor pentru un sistem de puncte materiale se face exact la fel ca în cazul unui singur punct material, după aceleași trei criterii. De exemplu, relațiile

---

<sup>6</sup> Pentru detalii vezi nota de subsol de la rezolvarea problemei pendulului gravitațional prin intermediul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I.

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}, \quad l \leq 3N) \quad (1.17)$$

reprezintă  $l$  legături bilaterale, reonome și diferențiale, iar

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}, \quad l \leq 3N) \quad (1.18)$$

exprimă tot  $l$  legături bilaterale, reonome și finite (geometrice). Atât (1.17), cât și (1.18) sunt totodată legături olonome. Numărul de legături care limitează posibilitățile de mișcare ale unui sistem de  $N$  puncte materiale nu poate fi mai mare de  $3N$ . Și aici, ca și în cazul unui singur punct material, dacă  $l = 3N$ , atunci starea sistemului (repaus sau mișcare relativă) este complet determinată de legături, indiferent de numărul și modul de acțiune a forțelor aplicate,  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ). Cu alte cuvinte, în situația în care  $l = 3N$ , starea sistemului este determinată complet (de legături) fără a mai fi necesară rezolvarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării.

De asemenea, la fel ca în cazul unui singur punct material, orice legătură geometrică sau finită poate fi pusă sub formă cinematică sau diferențială prin derivare totală în raport cu timpul. De exemplu, realizând acest lucru pentru legăturile (1.18), avem

$$\sum_{i=1}^N (\text{grad}_i f_j) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad (j = \overline{1, l}),$$

care este o legătură cinematică liniară în viteze, de tipul

$$\sum_{i=1}^N \vec{g}_i^j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \cdot \dot{\vec{r}}_i + g_0^j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}).$$

În schimb, nu toate legăturile cinematice pot fi integrate pentru a putea fi aduse la o formă finită (geometrică). Legăturile diferențiale care pot fi puse sub formă finită se numesc *integrabile*. În caz contrar ele se numesc *neintegrabile* sau *de tip Pfaff* (sau încă, *pfaffiene*). Toate celelalte denumiri și noțiuni (cum ar fi legăturile olonome, numărul gradelor de libertate etc.) se definesc la fel ca în cazul unui singur punct material.



### I.1.4. Ecuațiile Lagrange de speța I

Ecuația fundamentală a dinamicii pentru punctul material cu numărul de ordine  $i$ , a cărui masă este  $m_i$ , se scrie astfel

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1.19)$$

unde  $\vec{F}_i$  reprezintă rezultanta forțelor aplicate acestui punct material, iar  $\vec{L}_i$  este rezultanta forțelor de legătură pentru același punct material.

După cum am văzut, în cazul unui singur punct material, dacă acesta este supus unei singure legături ideale exprimabile sub forma

$$f(x, y, z) = 0, \quad (1.20)$$

(corpul este obligat să se miște pe o suprafață perfect netedă a cărei ecuație sub formă implicită este (1.20)), forța de legătură este

$$\vec{L} \equiv \vec{L}_n = \mu \nabla f,$$

iar dacă punctul material este supus la două constrângeri ideale de tipul

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

(corpul este forțat să se deplaseze fără frecare pe curba aflată la intersecția suprafețelor spațiale date de relațiile (1.21)), atunci forța de legătură se scrie

$$\vec{L} = \mu \nabla f_1 + \nu \nabla f_2.$$

Generalizând aceste rezultate pentru un număr de  $l \leq 3N$  legături ideale care afectează mișcarea unui sistem de  $N$  puncte materiale, putem scrie că forța de legătură care acționează asupra punctului material cu numărul de ordine  $i$  este

$$\vec{L}_i = \sum_{j=1}^l \mu_j (\text{grad}_i f_j). \quad (1.22)$$

Introducând relațiile (1.22) în ecuațiile (1.19) obținem  $N$  ecuații vectoriale diferențiale de ordinul doi

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^l \mu_j (\text{grad}_i f_j), \quad (i = \overline{1,N}), \quad (1.23)$$

care, completate cu ecuațiile (1.18) ale legăturilor olonome (considerate ideale), formează un sistem de  $3N + l$  ecuații scalare

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^l \mu_j (\text{grad}_i f_j), & (i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l}) \\ f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

cu tot atâtea necunoscute:  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) și  $\mu_j$ , ( $j = \overline{1, l}$ ).

Ecuatiile (1.23) se numesc *ecuațiile Lagrange de speța I* și stau la baza formalismului de rezolvare a unei probleme de mecanică cu ajutorul sistemului de ecuații (1.24), apelând la algoritmul prezentat în capitolul dedicat studiului pendulului gravitațional (vezi subcapitolul III-2, pag. #).

## I.2. Noțiunea de deplasare elementară

### I.2.1. Deplasări elementare reale, posibile și virtuale

Aceasta este o altă noțiune fundamentală – cel puțin la fel de importantă ca și cea de legătură – necesară înțelegerii formalismelor „superioare” ale mecanicii analitice (cel al ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, cel al ecuațiilor canonice ale lui Hamilton etc.).

De altfel, necesitatea introducerii și studierii noțiunii pe care am prezentat-o până aici – cea de legătură – ne apare acum ca evidentă, întrucât pe baza ei am elaborat formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I. În mod analog, noțiunea de deplasare elementară ne va ajuta să stabilim un formalism și mai general (și astfel, mai „puternic”) de rezolvare a unei probleme de mecanică (și, după cum vom vedea, nu numai), anume, formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a.

Elementul esențial îl reprezintă și aici tot forțele de legătură. Introducând noțiunea de legătură – care, după cum am văzut, din punct de vedere matematic se poate reprezenta sub forma unei expresii analitice, care depinde de vectorii de poziție ai punctelor materiale, de vitezele acestora și eventual de timp – am reușit să evităm (în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I) necesitatea de a cunoaște explicit forțele de legătură,  $\vec{L}_i$ , încă de la început. Totuși, pentru a putea rezolva o problemă în cadrul acestui formalism este necesar să cunoaștem expresiile analitice ale legăturilor.

În cele ce urmează, vom vedea cum, introducând noțiunea de deplasare elementară, vom reuși să eliminăm chiar și necesitatea de a cunoaște expresiile analitice ale legăturilor (care, de cele mai multe ori sunt mult mai ușor de determinat, în comparație cu forțele de legătură). În acest fel „puterea” de rezolvare a problemelor în cadrul formalismelor bazate pe această noțiune crește simțitor, putând obține o soluție completă chiar și în acele cazuri în care este dificil să identificăm expresiile analitice ale legăturilor. În mod sintetic și schematic, am putea prezenta situația în felul următor:

### **Formalismul clasic (newtonian)**

Obligativitatea cunoașterii tuturor forțelor  
încă de la început (măcar ca direcție și sens)



### **Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I**

Nu necesită cunoașterea forțelor de legătură  
Obligativitatea cunoașterii expresiilor analitice ale legăturilor



### **Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a**

Nu necesită cunoașterea forțelor de legătură  
Nu necesită nici cunoașterea expresiilor analitice ale legăturilor  
Obligativitatea cunoașterii doar a numărului de legături

Evident, gradul de generalitate al formalismelor (și implicit „puterea” lor de rezolvare a unei probleme) crește de sus în jos, în sensul indicat de săgețile verticale.

De fapt, introducerea noțiunii de deplasare elementară are o origine foarte pragmatică. După cum este simplu de înțeles, a rezolva o problemă de statică este mult mai ușor decât a rezolva una de cinematică și, cu atât mai mult, una de dinamică. Dacă rezolvarea unei probleme de statică presupune, de cele mai multe ori – din punct de vedere matematic – rezolvarea unei probleme de algebră<sup>7</sup>, cu totul alta este situația atunci

<sup>7</sup> Cel puțin în ceea ce privește determinarea poziției și/sau condiției de echilibru a unui sistem de puncte materiale.

când avem de rezolvat o problemă de dinamică; în acest caz, trebuie să rezolvăm o problemă de ecuațiile fizicii matematice (de regulă, este necesar să determinăm soluția unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi). Și atunci, ideea este de a face cumva, astfel încât să „transformăm” o problemă de dinamică într-una de statică. Astfel, necesitatea de a determina *legile de mișcare* ale punctelor materiale din sistem (ca soluții ale unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi, scris pentru problema de dinamică respectivă) ar putea fi înlocuită cu necesitatea de a studia *echilibrul* unui sistem de puncte materiale (ca „sarcină” specifică („task”) a problemei de statică corespunzătoare acelei probleme de dinamică). Ori, pentru a realiza acest lucru (pentru a studia echilibrul unui sistem de puncte materiale) trebuie să deplasăm cu cantități elementare (de aici și numele noțiunii pe care o analizăm, anume, aceea de „deplasare elementară”) punctele materiale ale sistemului din pozițiile lor inițiale (de echilibru) și să studiem cum „se comportă” punctele materiale aflate sub acțiunea tuturor forțelor la care sunt supuse, la acest „tratament” (cu alte cuvinte, să studiem ce efect au aceste deplasări elementare asupra staticii sistemului de puncte materiale).

Cum se poate realiza concret acest aparent „miracol”, anume, de a „transforma” o problemă de dinamică într-una de statică, vom vedea atunci când vom discuta despre principiul lui D’Alembert. Partea a doua a „task”-ului, adică studiul echilibrului sistemului de puncte materiale (ca esență a problemei de statică ce corespunde problemei de dinamică inițiale), se poate face, după cum vom vedea, cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual<sup>8</sup>. Dar, pentru a enunța acest principiu, trebuie să introducem mai întâi noțiunea de lucru mecanic virtual, iar pentru a defini această noțiune, este necesar să clarificăm ce se înțelege prin *deplasare elementară virtuală*.

Așadar, în cele ce urmează vom căuta să introducem cât mai pe înțelesul tuturor noțiunile de:

- i) deplasare elementară *reală*;
- ii) deplasare elementară *posibilă* și cea de

---

<sup>8</sup> De fapt, principiul lucrului mecanic virtual permite doar determinarea poziției și/sau condiției de echilibru a unui sistem de puncte materiale. Studiul stabilității acestui echilibru constituie o altă problemă.

iii) deplasare elementară *virtuală*,

toate acestea fiind foarte strâns legate între ele, într-un mod care, de cele mai multe ori este dificil de înțeles. Autorii nu au pretenția de a prezenta problema în mod exhaustiv (sub toate aspectele ei mai mult sau mai puțin particulare), însă, consideră că, prin modul în care va fi prezentat acest subiect, vor contribui la înțelegerea lui într-o manieră ușoară, logică și integratoare<sup>9</sup>.

Fie un sistem de  $N \geq 2$  puncte materiale supus unui număr de  $l < 3N$  legături olonome. În ceea ce privește înțelegerea noțiunii de *deplasare elementară reală*, lucrurile sunt foarte simple. Dificultatea constă însă, în a înțelege cât mai bine celelalte două noțiuni, această înțelegere neputându-se obține decât dacă facem încă de la bun început distincția necesară între problema analizată în cazul unui sistem supus unor legături scleronome – pe de o parte – și în cazul unui sistem supus unor legături reonome – pe de altă parte. De altfel, „factorul timp” este cel care joacă aici rolul esențial. Din păcate, tocmai acest fapt nu apare cu suficientă claritate în unele lucrări care abordează acest subiect.

În intervalul de timp elementar (infinitesimal)  $dt$ , fiind sub acțiunea forțelor aplicate,  $\vec{F}_i$ , și satisfăcând ecuațiile legăturilor (oricare ar fi acestea), precum și condițiile inițiale compatibile cu legăturile, punctul material cu numărul de ordine  $i$  se va deplasa cu cantitatea elementară  $d\vec{r}_i$ . Această deplasare *are loc efectiv*, este *unică*, și, de aceea, este numită *reală*. Aceasta este ceea ce trebuie să se înțeleagă printr-o *deplasare elementară reală*.

În ceea ce privește celelalte două tipuri de deplasări elementare, cele posibile și cele virtuale, pentru a înțelege corect cum stau lucrurile, vom considera că sistemul de puncte materiale este supus unor legături olonome reonome, fie acestea

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}). \quad (1.25)$$

---

<sup>9</sup> Autorii doresc să aducă pe această cale sincere mulțumiri d-lui Voltaire Teodorescu, cu care au avut discuții extrem de fructuoase și căruia îi datorează înțelegerea la care au ajuns. De asemenea, autorii își exprimă întreaga considerație și grațitudine față de d-l prof. dr. Ioan Mercheș, autorul lucrării „Applied Analytical Mechanics” [34], care a constituit un material de studiu valoros și totodată un punct de inspirație în elaborarea acestei lucrări.

În evoluția spațio-temporală a sistemului, punctele materiale se deplasează pe traiectoriile lor reale,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ). Pentru a ușura analiza ne vom referi în continuare la un singur punct material din sistem, fie acesta cel cu numărul de ordine  $i$ . Fixându-ne atenția asupra acestui punct material la un moment oarecare de timp<sup>10</sup>,  $t_1 < t < t_2$  (unde  $t_1$  și  $t_2$  sunt momentele de timp între care urmărim evoluția sistemului de puncte materiale), și urmărind mișcarea în continuare pe parcursul intervalului elementar (infinitesimal) de timp,  $dt$ , acesta (punctul material) are – în principiu – posibilitatea să se deplaseze cu cantitățile elementare, pe care le vom nota tot cu  $d\vec{r}_i$ , de-a lungul unei infinități de traiectorii, corespunzătoare infinității de valori ale vectorului viteză,  $\dot{\vec{r}}_i$  (toate compatibile cu legăturile), pe care – tot în principiu – punctul material le poate lua în acel moment de timp arbitrar ales,  $t$ . Aceste deplasări,  $d\vec{r}_i$  (infinite ca număr), sunt numite *deplasări elementare posibile*. Spunem „în principiu”, deoarece, în realitate punctul material se va deplasa cu o singură viteză (cea reală) pe o singură traiectorie (cea reală), cu cantitatea elementară  $d\vec{r}_i$  (deplasarea elementară reală). Cu alte cuvinte, mulțimea deplasărilor elementare reale (dacă ne referim acum la toate punctele materiale din sistem, cărora le urmărim mișcarea între momentele de timp  $t$  și  $t + dt$ ) este inclusă în mulțimea deplasărilor elementare posibile, deplasările reale fiind acelea care, după cum am precizat mai sus, *satisfac simultan*:

- i) ecuațiile diferențiale ale mișcării;
- ii) ecuațiile legăturilor și
- iii) condițiile inițiale compatibile cu legăturile.

Să considerăm acum legătura fixată (cu alte cuvinte, o transformăm brusc/instantaneu dintr-o legătură reonomă, într-una scleronomă), sau, altfel spus, să „înghețăm” legătura la momentul de timp  $t + dt$ . Deplasările elementare pe care „le poate realiza”<sup>11</sup> în aceste condiții punctul material,

<sup>10</sup> În acest fel, practic noi fixăm poziția punctului material, la cea pe care o are la momentul de timp arbitrar ales,  $t$ .

<sup>11</sup> Am pus între ghilimele „le poate realiza”, deoarece, timpul fiind „înghețat” aceste deplasări nu se fac în timp, ci sunt instantanee. Altfel spus, aceste deplasări au un caracter pur geometric, și

fără a viola legătura, sunt și ele tot infinite ca număr (și, dacă luăm în considerație caracterul lor vectorial, atunci acestea sunt infinite și ca direcție și sens) și se numesc *deplasări elementare virtuale*.

Pentru a putea înțelege mai ușor aceste elemente, vom da în continuare trei exemple concrete, două dintre acestea fiind ilustrate grafic.

Primul dintre ele se referă la mișcarea unui punct material obligat să rămână pe un plan înclinat (legătura în acest caz este reprezentată de suprafața planului înclinat). Pentru a face legătura reonomă, vom presupune că planul înclinat are o mișcare de translație cu viteza constantă  $\vec{v}_{plan}$ , ca în Fig. I.7.

În Fig. I.7 sunt ilustrate două poziții succesive ale planului înclinat (legăturii) separate în timp de intervalul infinitezimal  $dt$  și în spațiu de distanța infinitezimală  $d\vec{r}_{plan}$ . Astfel, la momentul de timp  $t$ , muchia  $AB$  a planului înclinat se află în punctul  $Q(t)$ , iar  $dt$  secunde mai târziu, în punctul  $Q'(t+dt)$ . Poziția fixată la momentul de timp arbitrar ales,  $t$ , a punctului material  $P$  este precizată pe figură prin punctul  $P(t)$ , iar  $P'(t+dt)$  reprezintă poziția reală a punctului material la momentul de timp  $t+dt$ . Conform definiției, vectorii elementari (infinitezimali) având ca punct de aplicație punctul  $P(t)$  și vârfulurile în punctele  $P', P_1, P_2, P_3, P_4$  (ș.a.m.d.; practic, există o infinitate de puncte de acest gen – în fapt, toate punctele din planul înclinat), adică vectorii  $d\vec{r}, d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, d\vec{r}_3$  și respectiv  $d\vec{r}_4$  reprezintă *deplasări elementare posibile* ale punctului material  $P$ . Dintre acestea, doar una singură este cea reală, anume  $d\vec{r} = \overline{PP'}$ . Să observăm că toate deplasările elementare posibile satisfac legătura. În schimb, acestea nu „satisfac” nici ecuațiile de mișcare și nici condițiile inițiale compatibile cu legăturile. Acea deplasare elementară posibilă care satisface aceste ultime două cerințe este unică, are loc în mod efectiv și este numită *reală*.

Să „înghețăm” acum totul la momentul de timp  $t' = t + dt$  (este ca și cum am realiza o fotografie, adică „am lua un instantaneu” la momentul de timp  $t'$ ). Aceasta înseamnă că „am surprins” planul înclinat în poziția în care el se află în momentul „înghețării”, adică aceea în care muchia  $AB$

---

nu reprezintă deplasări care să rezulte ca urmare a modificării în timp a poziției spațiale a punctului material.

a planului înclinat se află în punctul  $Q'(t') = Q'(t + dt)$ . Acum, dacă „ieșim din timp” putem vedea punctul material „mișcându-se”<sup>12</sup> doar pe suprafața planului înclinat. Este ca și cum legătura reonomă (planul înclinat aflat în mișcare cu viteza  $\vec{v}_{plan}$ ) s-ar transforma într-o legătură scleronomă (planul este considerat fix la momentul  $t' = t + dt$ ).

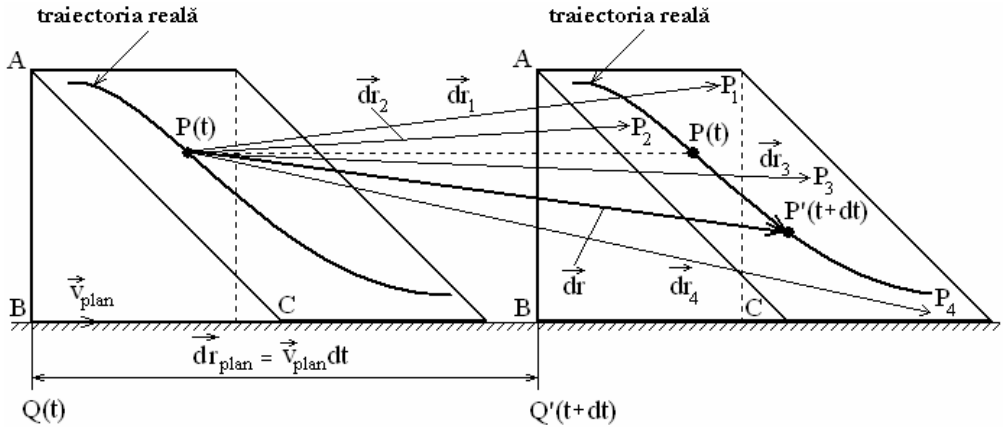


Fig. I.7

Deplasările elementare pe care „le poate realiza” în această situație punctul material  $P$ , astfel încât legătura să fie respectată se numesc *deplasări elementare virtuale*. Evident, acestea sunt deplasări elementare „efectuate” doar pe suprafața planului înclinat (cu alte cuvinte, sunt tangente la legătură). În plus, aceste deplasări sunt, așa cum precizăm și mai înainte, pur geometrice, ele nerealizându-se în timp (se fac după ce „am ieșit din timp”). Exemple de astfel de deplasări elementare sunt reprezentate în Fig. I.8.

Pentru a le deosebi de cele posibile, deplasările elementare virtuale sunt notate cu litera grecească delta mic,  $\delta$ . În Fig. I.8 sunt date două categorii de exemple de deplasări elementare virtuale (care, în esență, sunt identice):

- cu un singur indice, cum sunt  $\delta \vec{r}_1$  și  $\delta \vec{r}_2$ ;
- cu doi indici, cum ar fi  $\delta \vec{r}_{12}$ , sau  $\delta \vec{r}_{34}$ .

<sup>12</sup> Este valabilă aceeași observație pe care am făcut-o în nota de subsol precedentă.



Această diferență de notație apare datorită faptului că am preferat ca deplasării elementare reale,  $d\vec{r}$ , să nu-i atașăm nici un indice (atunci când am dat exemple de deplasări elementare din fiecare categorie: reale, posibile și virtuale), deoarece aceasta este unică.

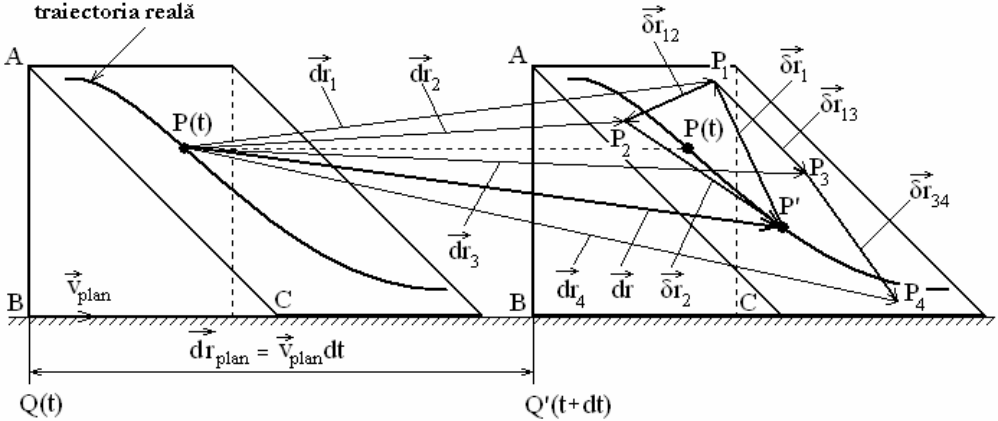


Fig. I.8

Să arătăm în continuare că, întotdeauna, o deplasare elementară virtuală poate fi scrisă ca diferența a două deplasări elementare posibile. Pentru a realiza acest lucru, să considerăm un sistem de puncte materiale supus la  $l$  legături olonome reonome, de tipul (1.25):

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}).$$

Diferențiind aceste relații, obținem condițiile pe care trebuie să le satisfacă deplasările elementare posibile,  $d\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ):

$$\sum_{i=1}^N (\text{grad}_i f_j) \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad (j = \overline{1, l}), \quad (1.26)$$

unde am ținut cont că  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ). Considerând  $dt \equiv \delta t = 0$  (care exprimă condiția pentru a obține deplasările elementare virtuale – reamintim că acestea sunt instantanee), din (1.26) rezultă relațiile satisfăcute de aceste deplasări:

$$\sum_{i=1}^N (\text{grad}_i f_j) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (j = \overline{1, l}). \quad (1.27)$$

Deoarece  $grad_i f_j$  sunt vectori perpendiculari pe suprafețele legăturilor  $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0$ , ( $j = \overline{1, l}$ ), din relațiile (1.27) rezultă că deplasările elementare virtuale sunt totdeauna *tangente la legături*. Nu același lucru se poate însă spune despre deplasările elementare posibile (și, evident, și despre cele reale). Într-adevăr, dacă legăturile sunt scleronome (de exemplu,  $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 0$ , ( $j = \overline{1, l}$ )), atunci relațiile (1.26) satisfăcute de deplasările elementare posibile devin

$$\sum_{i=1}^N (grad_i f_j) \cdot d\vec{r}_i = 0, \quad (j = \overline{1, l}), \quad (1.28)$$

cea ce arată că, în această situație și deplasările elementare posibile sunt tangente la legături. În schimb, dacă legăturile sunt reonome, atunci această proprietate nu mai rămâne valabilă, căci, din relațiile (1.26) rezultă

$$\sum_{i=1}^N (grad_i f_j) \cdot d\vec{r}_i = -\frac{\partial f_j}{\partial t} dt \neq 0, \quad (j = \overline{1, l}).$$

Să scriem acum relațiile (1.26) pentru două seturi distincte de deplasări elementare posibile,  $d\vec{r}_i'$  și  $d\vec{r}_i''$ ,

$$\sum_{i=1}^N (grad_i f_j) \cdot d\vec{r}_i' + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad (j = \overline{1, l})$$

și

$$\sum_{i=1}^N (grad_i f_j) \cdot d\vec{r}_i'' + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad (j = \overline{1, l})$$

și să le scădem. Obținem

$$\sum_{i=1}^N (grad_i f_j) \cdot (d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i'') = 0, \quad (j = \overline{1, l}),$$

care, dacă introducem notația

$$\delta\vec{r}_i^{not.} = d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i'', \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.29)$$

se scrie

$$\sum_{i=1}^N (grad_i f_j) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (j = \overline{1, l}),$$

adică exact relațiile (1.27) satisfăcute de deplasările elementare virtuale. Deci, întotdeauna, deplasările elementare virtuale pot fi scrise ca diferența a două deplasări elementare posibile.

În acest fel apare și mai evidentă notația pe care am utilizat-o în Fig. I.8, în care, deplasărilor virtuale le-am atașat uneori un singur indice, iar alteori doi indici. De exemplu, deplasarea elementară virtuală  $\delta\vec{r}_{12}$  se obține ca diferența dintre deplasările elementare posibile  $d\vec{r}_2$  și  $d\vec{r}_1$  (vezi Fig. I.8),

$$\delta\vec{r}_{12} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1.$$

La fel, deplasarea elementară virtuală  $\delta\vec{r}_{34}$  se obține ca diferența dintre deplasările elementare posibile  $d\vec{r}_4$  și  $d\vec{r}_3$  (vezi Fig. I.8),

$$\delta\vec{r}_{34} = d\vec{r}_4 - d\vec{r}_3.$$

În general, pentru astfel de deplasări elementare virtuale (care să rezulte prin diferența a două deplasări elementare posibile, nici una dintre ele nefiind deplasarea elementară reală, notată simplu cu  $d\vec{r}$ ), putem scrie

$$\delta\vec{r}_{mn} = d\vec{r}_n - d\vec{r}_m, \quad (\forall m, n = \overline{1, N}).$$

În cazul în care una din cele două deplasări elementare posibile este chiar cea reală, avem

$$\delta\vec{r}_i = \pm d\vec{r} \mp d\vec{r}_i, \quad (i = \overline{1, N}).$$

De exemplu (vezi Fig. I.8), pentru deplasarea elementară virtuală  $\delta\vec{r}_1$  avem

$$\delta\vec{r}_1 = -d\vec{r} + d\vec{r}_1,$$

iar pentru  $\delta\vec{r}_2$ ,

$$\delta\vec{r}_2 = d\vec{r} - d\vec{r}_2.$$

Al doilea exemplu se referă la un balon de formă sferică, cu centrul fix, aflat în proces de umflare. Acesta este un exemplu de legătură reonomă foarte ușor de înțeles și este ilustrat grafic în Fig. I.9. Pentru a nu complica figura și a putea urmări mai ușor explicațiile vom reprezenta și aici (ca și în cazul exemplului cu planul înclinat) doar două poziții succesive ale suprafeței balonului, de raze  $R$  și  $R + dR$ . Evident, raza balonului variază continuu, la momentul – arbitrar considerat –  $t$ , raza având valoarea  $R$ , iar la un moment ulterior, depărtat infinitezimal de  $t$

cu cantitatea  $dt$ , raza are valoarea  $R + dR$  (vezi Fig. I.9). Să presupunem că pe suprafața balonului se mișcă o furnică, considerată punct material. Dacă balonul are la momentul inițial  $t_0 = 0$  raza nulă, centrul în punctul de coordonate  $P(0, 0, 0)$  și viteza de creștere a razei balonului este constantă, fie aceasta  $v_R$ , atunci expresia analitică a legăturii este

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - v_R^2 t^2 = 0.$$

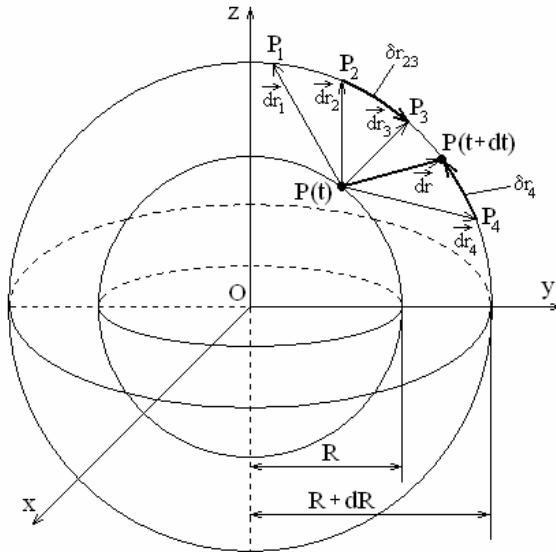


Fig. I.9

La momentul de timp  $t$ , furnica se află în punctul  $P(t)$  pe sfera de rază  $R = R(t) = v_R t$ . La momentul ulterior,  $t' = t + dt$  ea se poate afla – în principiu – în oricare din punctele  $P_1, P_2, P_3, P, P_4$  etc<sup>13</sup>. situate pe sfera de rază  $R' = R(t') = v_R t' = R + dR$ . Atunci, vectorii  $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, d\vec{r}_3, d\vec{r}$  și respectiv  $d\vec{r}_4$ , corespunzătorii punctelor amintite, vor reprezenta (conform definiției) *deplasări elementare posibile*. Evident, dintre toate deplasările posibile (infinite ca număr, direcție și sens) una singură are loc în mod efectiv. Aceasta este, deci, unică și este numită *deplasare elementară reală*,

<sup>13</sup> Există o infinitate de astfel de puncte.

fiind aceea care satisface (pe lângă ecuația legăturii, care este satisfăcută de toate deplasările elementare posibile) și ecuațiile diferențiale ale mișcării, și condițiile inițiale. Pentru a o deosebi de celelalte deplasări elementare posibile, am notat-o simplu, cu  $d\vec{r}$  și este cea care corespunde punctului  $P(t+dt)$  (reprezentată cu o linie mai groasă în Fig. I.9). „Înghițând” acum (la momentul de timp  $t+dt$ , când furnica se află pe sfera de rază  $R'$ ) balonul (legătura) – altfel spus, oprind brusc umflarea balonului (ceea ce este echivalent cu a „scleronomiza” instantaneu legătura), furnica are posibilitatea de a se mișca doar pe suprafața sferei de rază  $R+dR$ . Deplasările elementare „efectuate” de furnică în această situație sunt realizate (toate) pe suprafața sferei de rază  $R'$ , nu au loc în timp (căci timpul a fost „înghețat”), deci sunt deplasări imaginare (virtuale), pur geometrice, neavând nimic de-a face cu mișcarea reală a furnicii (care se face în timp) și se numesc *deplasări elementare virtuale*. În Fig. I.9 am reprezentat doar două astfel de deplasări, din infinitatea lor, anume,  $\delta\vec{r}_{23}$  și  $\delta\vec{r}_4$ . După cum se poate observa cu ușurință din figură, aceste deplasări pot fi scrise (acest lucru fiind valabil pentru orice deplasare elementară virtuală) ca diferența a două deplasări elementare posibile<sup>14</sup>:

$$\delta\vec{r}_{23} = d\vec{r}_3 - d\vec{r}_2$$

și, respectiv,

$$\delta\vec{r}_4 = d\vec{r} - d\vec{r}_4.$$

În fine, ultimul exemplu pe care dorim să-l prezentăm (de această dată fără reprezentare grafică) pentru a înțelege mai bine doar natura deplasărilor elementare virtuale este acela al „rulării” unui film într-un cinematograful. Chiar dacă acest exemplu este mai dificil de reprezentat grafic și necesită astfel o putere mai mare de vizualizare mentală, totuși, el este foarte sugestiv. Filmul (imaginea, sau acțiunea) care apare că se derulează continuu pe ecranul cinematografului reprezintă de fapt o succesiune de cadre (care nu sunt altceva decât niște sui-generis fotografii – cu alte cuvinte, imagini luate instantaneu), care sunt proiectate pe acel ecran cu o frecvență de apariție (dată de viteza de rulare a filmului de pe

<sup>14</sup> În ceea ce privește notarea acestor deplasări elementare virtuale, este valabilă aceeași observație, pe care am făcut-o în primul exemplu, cel cu planul înclinat.

bobina sursă pe cea colectoare) mai mare sau cel puțin egală cu frecvența caracteristică de sesizare distinctă (de către ochiul uman sănătos și normal) a imaginilor care se succed rapid. Frecvența de succesiune a unor imagini ce mai pot fi încă sesizate ca fiind distincte de către aparatul vizual al unui om „normal” și sănătos are o valoare situată în jurul a 16-20 de cadre pe secundă<sup>15</sup>. Să presupunem că în timpul unei proiecții cinematografice, la un anumit moment de timp, operatorul de imagine realizează un stop-cadru (rola tractoare/colectoare a filmului este oprită). Atunci, pe ecran va apărea o imagine statică (de fapt, un cadru din succesiunea foarte mare de cadre – „fotografii” – care sunt separate între ele de intervale foarte înguste care nu conțin nici o imagine; este ceva foarte asemănător cu un film foto obișnuit, numai că „fotografiile vecine” sunt foarte asemănătoare, în sensul că diferă foarte puțin una de alta ca și conținut, fiind totuși distincte). În acest moment (când pe ecran apare proiectat un singur cadru și imaginea este statică – este ceea ce în exemplele anterioare am numit „înghețarea” legăturii) putem aduce tot felul de „retușuri” la imaginea proiectată. De exemplu, putem desena fire de iarbă pe sol, fire de păr în mustața unui personaj etc. Toate aceste mici (infinitezimale) modificări (care, toate pot fi reduse la linii) sunt acele *deplasări elementare virtuale*. Într-adevăr, acestea nu au nimic de-a face cu imaginea reală (dacă filmul nu s-ar fi oprit, pe ecran nu ar fi apărut aceste modificări făcute de noi, ci imaginea *reală*), ele sunt tangente la legătură (completările noastre sunt desenate pe suprafața „fotografiei-cadru”), sunt pur geometrice și nu se fac în timp (timpul, pentru personajele și acțiunea din film „s-a oprit”), adică sunt instantanee ( $\delta t = 0$ ).

---

<sup>15</sup> Dacă frecvența de succesiune a unor imagini depășește această valoare, atunci ochiul uman nu mai poate sesiza că este vorba de imagini separate, ci le percepe ca fiind „un film continuu” – imaginile dau senzația de continuitate. Dimpotrivă, dacă frecvența cu care se succed acele imagini (cadre) este mai mică decât această valoare, atunci acele imagini („fotografii”) vor fi sesizate ca fiind distincte. De exemplu, dacă ochiul uman ar avea această frecvență caracteristică mai mare de 50 de cadre pe secundă (sau, altfel spus, de 50 Hz, care este frecvența curentului electric alternativ de la rețeaua de 220 V, de alimentare cu energie electrică a locuințelor) atunci el nu ar mai percepe lumina emisă de un bec cu incandescență ca fiind continuă, ci ar percepe-o ca și cum becul „ar pâlpa”. Acest efect apare evident atunci, când, într-o emisiune de televiziune este prezentat monitorul unui calculator; oricine își amintește că pe ecranul filmat al monitorului imaginea apare ca și cum „s-ar da peste cap” (ca și cum monitorul ar fi „defect”).

O relație de incluziune între mulțimea deplasărilor elementare virtuale și cea a deplasărilor elementare posibile, apare numai în cazul legăturilor scleronome. Dacă legătura este reonomă, cele două mulțimi nu au nici un element în comun, iar dacă legătura este scleronomă, atunci orice deplasare elementară posibilă este totodată o deplasare elementară virtuală. Cu alte cuvinte, în cazul legăturilor scleronome, mulțimea deplasărilor elementare posibile este inclusă în mulțimea deplasărilor elementare virtuale. Dacă facem notațiile:

- $M_{DER}$  - mulțimea deplasărilor elementare reale;
- $M_{DEP}$  - mulțimea deplasărilor elementare posibile;
- $M_{DEV}$  - mulțimea deplasărilor elementare virtuale;

atunci, sintetizând, pentru legăturile scleronome avem următoarea relație de incluziune între cele trei mulțimi:

$$M_{DER} \subset M_{DEP} \subset M_{DEV},$$

iar dacă legătura este reonomă, atunci

$$M_{DER} \subset M_{DEP}, \quad M_{DER} \cap M_{DEV} = \emptyset, \quad M_{DEP} \cap M_{DEV} = \emptyset.$$

O altă imagine sintetică (sub formă de tabel) asupra celor trei tipuri de deplasări elementare arată astfel<sup>16</sup>:

	Deplasări elementare reale	Deplasări elementare posibile	Deplasări elementare virtuale
Satisfac ecuațiile de mișcare	☑	☒	☒
Satisfac condițiile inițiale	☑	☒	☒
Satisfac legăturile	☑	☑	☑
Au loc în timp	☑	☑	☒
Sunt instantanee	☒	☒	☑
Sunt pur geometrice	☒	☒	☑
Sunt tangente la	☒	☒	☑

<sup>16</sup> Proprietățile enumerate în tabel (asupra celor trei tipuri de legături) sunt valabile strict în cazul legăturilor reonome. Dacă legăturile sunt scleronome, trebuie să avem în considerație precizările anterioare din text.

legătură			
----------	--	--	--

### I.3. Noțiunea de lucru mecanic virtual. Principiul lucrului mecanic virtual

#### I.3.1. Principiul lucrului mecanic virtual

După cum am văzut în paragraful precedent, înlocuirea unei probleme de dinamică cu o problemă echivalentă de statică ar avea marele avantaj că, din punct de vedere matematic, ar permite înlocuirea unei probleme de ecuațiile fizicii matematice cu una de algebră. Mai exact, necesitatea de a rezolva un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi ar putea fi înlocuită cu aceea a rezolvării unui sistem de ecuații algebrice. Cum se poate realiza în mod concret această „echivalare” între o problemă de dinamică și una de statică vom vedea în paragraful următor. Cât privește însă studiul efectiv al unei probleme de statică, trebuie să precizăm că, esența unei astfel de probleme constă întotdeauna în „lămurirea” a două aspecte, din care primul se referă la determinarea poziției și/sau condiției de echilibru a unui sistem de puncte materiale. Acest lucru poate fi realizat cu ajutorul *principiului lucrului mecanic virtual*. La al doilea aspect – și el la fel de important ca primul – anume, studiul stabilității echilibrului unui sistem de puncte materiale, nu ne vom referi aici.

Noțiunea de *lucru mecanic virtual* apare cu necesitate în cadrul demersului pe care ni l-am propus, deoarece, așa cum tocmai am precizat, rezolvarea unei probleme de statică implică, într-o primă etapă, studiul echilibrului unui sistem mecanic. După cum știm, la modul cel mai general, aceasta se face în felul următor: se modifică pozițiile punctelor materiale ale sistemului cu cantități (deplasări) elementare virtuale și se urmărește/constată apoi ce efect au aceste mici deplasări asupra staticii sistemului. Cum oricărei deplasări elementare  $d\vec{r}$  a punctului de aplicație al unei forțe  $\vec{F}$  îi corespunde un lucru mecanic elementar  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , unei deplasări elementare *virtuale*  $\delta\vec{r}$  îi va corespunde un așa-numit *lucru mecanic virtual*,  $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$ .



În termenii deplasărilor elementare virtuale condiția de echilibru se obține astfel:

Fie un sistem de  $N \geq 2$  puncte materiale și  $\delta \vec{r}_i$  o deplasare elementară virtuală a punctului material cu numărul de ordine  $i$ ,  $P_i$ , asupra căruia acționează forța aplicată  $\vec{F}_i$ . Atunci, prin definiție

$$\delta W = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (1.30)$$

este *lucrul mecanic virtual* realizat de această forță. Întrucât punctul material este în echilibru static,  $\ddot{\vec{r}}_i = 0$ , și atunci, din expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii, scris pentru acest punct material,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i,$$

rămâne

$$0 = \vec{F}_i + \vec{L}_i.$$

Înmulțind scalar această relație cu  $\delta \vec{r}_i$  și sumând după indicele  $i$ , obținem

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{L}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.31)$$

Dacă legăturile sunt ideale (cu alte cuvinte, dacă forțele de legătură au doar componente normale la legătură),  $\vec{L}_i \equiv (\vec{L}_i)_{normal} = (\vec{L}_i)_{\perp}$ , ținând cont că totdeauna deplasările elementare virtuale sunt tangente la legătură,  $\delta \vec{r}_i \equiv (\delta \vec{r}_i)_{\parallel}$ , rezultă că lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură este nul:

$$\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{L}_i)_{\perp} \cdot (\delta \vec{r}_i)_{\parallel} = 0.$$

Deci, în cazul legăturilor ideale, relația (1.31) se scrie:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.32)$$

și exprimă – matematic – *principiul lucrului mecanic virtual*, care se poate enunța astfel:

*Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale supus unor legături ideale să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor aplicate să fie nul, pentru orice deplasări virtuale compatibile cu legăturile.*

Fie

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}),$$

$l$  legături ideale care limitează posibilitățile de mișcare ale sistemului de puncte materiale. După cum am văzut în paragraful precedent, deplasările elementare virtuale satisfac relațiile

$$\sum_{i=1}^N (\text{grad}_i f_j) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (j = \overline{1, l}), \quad (1.33)$$

sau

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (j = \overline{1, l}). \quad (1.34)$$

Pe de altă parte, relația (1.32) – care exprimă principiul lucrului mecanic virtual – mai poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0, \quad (1.35)$$

unde  $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ ,  $(i = \overline{1, N})$ . Dacă deplasările elementare virtuale  $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ ,  $(i = \overline{1, N})$  ar fi liniar independente, atunci din (1.35) ar rezulta următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} X_i = 0, \\ Y_i = 0, \\ Z_i = 0, \end{cases} \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1.36)$$

a cărui soluție ar furniza poziția de echilibru:  $x_i, y_i, z_i$ ,  $(i = \overline{1, N})$ , pentru sistemul de puncte materiale. Însă, relațiile (1.34) reprezintă  $l$  constrângeri pentru setul de deplasări virtuale  $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ ,  $(i = \overline{1, N})$ , care, astfel, nu pot fi considerate ca fiind independente.

Pentru a rezolva problema (adică pentru a determina poziția de echilibru a sistemului de puncte materiale) vom utiliza metoda multiplicatorilor lui Lagrange. În acest sens, vom înmulți relațiile (1.34) cu scalarii nenuli  $\lambda_j$ ,  $(j = \overline{1, l})$ , vom suma după  $j$  și vom aduna rezultatul la expresia (1.35) a principiului lucrului mecanic virtual. În acest fel, rezultă:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \left( X_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left( Y_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \left( Z_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0, \quad (1.37)$$

relație care trebuie satisfăcută de orice  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, (i = \overline{1, N})$ . Deoarece deplasările virtuale  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, (i = \overline{1, N})$  se supun celor  $l$  constrângeri (1.34), înseamnă că, din numărul total de  $3N$  deplasări virtuale, doar  $3N - l$  sunt liniar independente. Soluția problemei rezultă astfel: se egalează cu zero  $l$  paranteze rotunde din cele  $3N$  câte sunt în total în relația (1.37), obținându-se astfel  $l$  ecuații algebrice pentru necunoscutele  $\lambda_j, (j = \overline{1, l})$ . În acest fel, în (1.37) rămân doar  $3N - l$  termeni (în care  $\lambda_j, (j = \overline{1, l})$  au fost determinați) corespunzători celor  $3N - l$  deplasări virtuale liniar independente. Coeficienții acestor deplasări virtuale (adică cele  $3N - l$  paranteze rotunde care au rămas în (1.37)) vor trebui să se anuleze, deoarece relația (1.37) reprezintă acum o combinație liniară de „vectori<sup>17</sup>” liniar independenți. În acest fel, toate cele  $3N$  paranteze rotunde din relația (1.37) trebuie să se anuleze, rezultând astfel un sistem de  $3N$  ecuații algebrice cu  $3N + l$  necunoscute (cele  $3N$  coordonate care dau poziția de echilibru:  $x_i, y_i, z_i, (i = \overline{1, N})$  și cei  $l$  multiplicatori Lagrange,  $\lambda_j, (j = \overline{1, l})$ ). Pentru ca problema să aibă soluție unică, sistemul celor  $3N$  ecuații algebrice se completează cu relațiile analitice care exprimă cele  $l$  legături,  $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, (j = \overline{1, l})$ , rezultând astfel un sistem cu  $3N + l$  ecuații, pentru cele  $3N + l$  necunoscute,

<sup>17</sup> „Vectorii” liniar independenți fiind cele  $3N - l$  deplasări virtuale liniar independente.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \\ Y_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0, \\ Z_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0, \\ f_j(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N; t) = 0. \end{array} \right. \quad (i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, l}). \quad (1.38)$$

În acest fel problema este rezolvată complet.

### I.3.2. Principiul vitezelor virtuale

Principiul lucrului mecanic virtual mai are o formulare, anume, cea în termenii așa-numitelor *viteze virtuale*, caz în care el este cunoscut sub denumirea de *principiul vitezelor virtuale*.

Prin analogie cu definiția vitezei obișnuite,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

se introduce noțiunea de *viteză virtuală*, definită prin

$$\bar{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}, \quad (1.39)$$

unde, tot prin analogie cu cazul obișnuit,  $\delta t$  ar desemna intervalul virtual de timp în care are loc deplasarea elementară virtuală  $\delta \vec{r}$ . Evident, aceasta este o definiție formală, deoarece, așa cum am văzut în paragraful dedicat deplasărilor elementare, o deplasare virtuală este una pur geometrică, instantanee, considerată pentru  $\delta t = 0$ . Totuși, făcând abstracție de această observație, noua formă a principiului lucrului mecanic virtual – așa numitul principiu al vitezelor virtuale – se dovedește a fi deosebit de util în determinarea condiției/condițiilor<sup>18</sup> de echilibru cinematic<sup>19</sup> a/ale unui

<sup>18</sup> Trebuie să observăm că, așa cum este și normal, dacă pentru cazul echilibrului static vorbim despre „poziție/poziții” de echilibru, în cazul echilibrului cinematic vorbim despre „condiție/condiții” de echilibru. Aceasta, deoarece, în cazul echilibrului cinematic, punctele materiale ale sistemului aflându-se într-o continuă mișcare, acestea nu pot avea o „poziție” de echilibru, ci, în acest caz va trebui satisfăcută o anumită „condiție” de către diversele mărimi caracteristice sistemului (forțe, momente ale unor forțe, diverse alte elemente specifice sistemului) pentru ca să se asigure condiția de accelerație nulă (condiția de echilibru cinematic).

sistem de puncte materiale. Toate considerațiile făcute anterior rămân valabile și aici, chiar dacă echilibrul nu mai este unul static, deoarece, în ambele cazuri  $\ddot{\vec{r}}_i = 0$  ( $\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \ddot{\alpha}_i = 0$ , pentru mișcarea circulară). Într-adevăr, condiția  $\ddot{\vec{r}}_i = 0$  (respectiv  $\varepsilon_i = 0$ ) nu înseamnă numai repaus (viteză liniară sau unghiulară nulă) – ceea ce corespunde *echilibrului static* – ci și mișcare, numai că o mișcare uniformă, realizată cu viteză (liniară sau unghiulară) constantă,

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \overline{\text{const.}} \quad (\text{respectiv } \omega_i = \text{const.}), \quad (1.40)$$

ceea ce corespunde *echilibrului cinematic*.

Din acest punct de vedere, principiul vitezelor virtuale reprezintă o extindere a principiului lucrului mecanic virtual, la cazul în care constanta din relațiile (1.40) nu este obligată să ia valoarea zero.

Expresia matematică a acestui principiu poate fi dedusă banal pornind de la cea a principiului lucrului mecanic virtual,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

prin împărțirea acesteia din urmă cu intervalul de timp „virtual”,  $\delta t (\neq 0)$ :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \quad (1.41)$$

Pentru mișcarea circulară, această relație se scrie astfel:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i \delta \alpha_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^N M_i \frac{\delta \alpha_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^N M_i \omega_i = 0. \quad (1.42)$$

Întrucât în relațiile (1.41) și (1.42)  $\frac{\delta W}{\delta t}$  are dimensiunile unei puteri, această formă a principiului lucrului mecanic virtual mai este numită uneori și *principiul puterii virtuale*. Asupra acestei forme a principiului

<sup>19</sup> Despre un sistem de puncte materiale se spune că este în echilibru cinematic atunci când are o mișcare uniformă (atât în ceea ce privește mișcarea rectilinie – când accelerația liniară  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  este zero – cât și cea circulară – când accelerația unghiulară  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  este nulă).

lucrului mecanic virtual vom reveni, după ce vom introduce noțiunile de coordonate generalizate și spațiu al configurațiilor.

### I.3.3. Principiul lui Torricelli

În cazul particular când singurele forțe aplicate sistemului de puncte materiale sunt forțele de greutate proprie a punctelor materiale, principiul lucrului mecanic virtual primește forma *principiului lui Torricelli*. Acesta se enunță astfel: *Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale supus unor legături ideale și asupra cărora sunt aplicate doar forțele de greutate proprie ale punctelor materiale să fie în echilibru este ca variația virtuală a cotei centrului de greutate al sistemului să fie zero,  $\delta z_G = 0$ .*

Pentru a rezolva o problemă de echilibru static cu ajutorul acestui principiu, putem utiliza următorul algoritm:

- 1) atașăm sistemului de puncte materiale un sistem de referință triortogonal (de preferință cartezian), având axa  $Oz$  orientată vertical;
- 2) identificăm numărul  $l$  de legături, stabilim numărul gradelor de libertate ale sistemului,  $n = 3N - l$  (unde  $N$  reprezintă numărul punctelor materiale din sistem) și asociem fiecărui grad de libertate o anumită mărime variabilă caracteristică sistemului, astfel încât să rezulte în final un set liniar independent de  $n$  astfel de mărimi ( $n > 0$  parametri liniar independenți, care să caracterizeze sistemul);
- 3) determinăm cota centrului de greutate<sup>20</sup> al sistemului de puncte materiale, cu ajutorul uneia din următoarele relații de definiție:

$$i) \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i, \text{ dacă sistemul este discret, sau}$$

<sup>20</sup> Presupunând că extinderea spațială a sistemului de puncte materiale este relativ mică (astfel încât accelerația gravitațională să nu varieze sensibil în limitele ei), putem identifica centrul de greutate al sistemului de puncte materiale cu centrul lui de masă. Formulele pe care le vom da mai jos sunt scrise în sensul acestei presupuneri.

$$\text{ii) } z_G = \frac{\int_{(D)} z\rho(x, y, z) dx dy dz}{\int_{(D)} \rho(x, y, z) dx dy dz} = \frac{1}{M} \int_{(D)} z\rho(x, y, z) dx dy dz, \text{ dac\u0103 siste-}$$

mul are o distribu\u021bie continu\u0103 de mas\u0103 \u00een domeniul spa\u021bial  $D$ ;

- 4) cota centrului de greutate determinat\u0103 la punctul 3) al algoritmului se va exprima ca o func\u021bie de cei  $n$  parametri liniar independen\u021bi ce caracterizeaz\u0103 sistemul de puncte materiale,

$$z_G = z_G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Calcul\u0103m apoi diferen\u021bala cotei centrului de greutate,  $dz_G$ :

$$dz_G = X_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)d\xi_1 + X_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)d\xi_2 + \dots \\ + X_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)d\xi_n,$$

o identific\u0103m cu prima varia\u021bie  $dz_G \equiv \delta z_G$ ,

$$\delta z_G = X_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\delta\xi_1 + X_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\delta\xi_2 + \dots \\ + X_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\delta\xi_n, \quad (1.43)$$

\u0219i rezolv\u0103m ecua\u021bia  $\delta z_G = 0$ . \u0220in\u0103nd cont de faptul c\u0103 setul de parametri  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  este liniar independent, \u0219i setul de varia\u021bii virtuale  $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$  va fi tot unul liniar independent, \u0219i atunci, din (1.43) va rezulta urm\u0103torul sistem de  $n$  ecua\u021bii algebrice \u00een necunoscutele  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ :

$$\begin{cases} X_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0, \\ X_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0, \\ \vdots \\ X_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0. \end{cases}$$

Solu\u021biile reale ale acestui sistem vor furniza pozi\u021bia de echilibru a sistemului de puncte materiale.

## Capitolul II

### Principii ale mecanicii analitice

#### II.1. Principiul lui D'Alembert

În paragraful precedent, am enunțat principiul lucrului mecanic virtual și am indicat metoda de determinare a poziției (respectiv a condiției<sup>1</sup>) de echilibru pentru un sistem de puncte materiale. Această metodă este utilă în rezolvarea problemelor de statică (respectiv de cinematică), constituind instrumentul de bază în rezolvarea problemei fundamentale a staticii. Totuși, „miracolul” despre care vorbeam în paragraful consacrat deplasărilor elementare, anume, acela de a „transforma” o problemă de dinamică într-una de statică, realizează acest lucru doar într-o primă fază – ce-i drept, foarte utilă – anume, atunci când considerăm sistemul mecanic (fizic) în spațiul real al mișcării, permițând enunțarea principiului lui D'Alembert dar, după cum vom vedea, până la urmă problema revine la a rezolva tot o problemă de dinamică, însă nu pe spațiul real – unde problema este foarte complicată uneori – ci pe spațiul configurațiilor, unde aceasta se simplifică (prin comparație cu problema de dinamică din spațiul real), adesea foarte mult, în sensul în care vom vedea în continuare.

Astfel, să observăm că rezolvarea unei probleme cu ajutorul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I devine din ce în ce mai dificilă, pe măsură ce numărul  $N$  de corpuri din sistem și numărul de legături  $l$  cresc. Se poate ajunge în situația în care sistemul de  $3N+l$  ecuații (cu tot atâtea necunoscute) să devină imposibil de rezolvat chiar și numeric din cauza numărului foarte mare de ecuații. Simplificarea problemei a fost rodul imaginației creatoare și intuiției marelui savant care a fost Lagrange. El a observat un fapt aparent simplu, dar foarte important: cu cât numărul de ecuații ale sistemului (1.24) crește – și aici ne

---

<sup>1</sup> În cazul unui echilibru cinematic și nu static.



interesează în primul rând creșterea numărului de ecuații datorată creșterii numărului  $l$  de legături (număr care *se adună* la  $3N$ ) – cu atât numărul gradelor de libertate ale sistemului scade (pentru a obține numărul gradelor de libertate, din  $3N$  *se scade* numărul de legături:  $n = 3N - l$ ). Așadar, lui Lagrange i-a venit ideea genială de a înlocui numărul mare de necunoscute  $\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) și  $\lambda_j$ , ( $j = \overline{1, l}$ ), cu numărul mai mic (cu atât mai mic, cu cât numărul de legături e mai mare) al altor necunoscute – să le notăm cu  $q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) – necunoscute egale ca număr cu numărul gradelor de libertate  $n$  ale sistemului. Aceste noi necunoscute se numesc astăzi *variabile Lagrange*, sau – pentru a ține cont de proveniența lor (ele practic „înlocuiesc” coordonatele din spațiul real al mișcării,  $\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ )) – *coordonate generalizate*. Și, fiind niște coordonate, este firesc să ne întrebăm: ale cărui spațiu? Spațiul coordonatelor generalizate se numește *spațiul configurațiilor*, este un spațiu abstract și de el ne vom ocupa mai îndeaproape după ce vom discuta despre coordonatele generalizate.

Așadar, coordonatele generalizate au fost introduse cu scopul de a înlocui problema rezolvării unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi (pentru cele  $3N + l$  necunoscute  $\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) și  $\lambda_j$ , ( $j = \overline{1, l}$ ) din cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I) cu aceea a rezolvării unui sistem de aceeași natură, dar cu un număr mai mic cu  $2l$  ecuații (pentru cele  $n = 3N - l$  necunoscute  $q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ )). În plus, formalismul în cadrul căruia se poate realiza acest lucru este mult mai general, permițând abordarea problemelor și din alte capitole ale fizicii (și nu numai).

Modul concret în care se poate face trecerea de la coordonatele spațiului real,  $\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), la noile coordonate,  $q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ), numite după cum am precizat mai sus, coordonate generalizate, nu urmează un algoritm bine stabilit și unic. Alegerea cât mai adecvată a coordonatelor generalizate depinde de „îndemânarea”, intuiția și experiența celui care dorește să rezolve o problemă pe această cale, dar, întotdeauna această „trecere”,

$$\vec{r}_i \rightarrow q_k$$

trebuie să respecte anumite cerințe, și anume:

1) cerințe obligatorii:

- i) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să se facă întotdeauna astfel încât să putem exprima toți vectorii de poziție ai punctelor materiale din sistem în funcție de aceste coordonate generalizate și, eventual, de timp:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \equiv \vec{r}_i(q, t), \quad (i = \overline{1, N}); \quad (2.1)$$

- ii) să respecte ecuațiile legăturilor, adică să avem:

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \equiv$$

$$\equiv f_j(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t); t) = 0, \quad (j = \overline{1, l});$$

- iii) să existe transformarea inversă, adică să putem exprima toate coordonatele generalizate în funcție de vectorii de poziție,

$$q_k = q_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t), \quad (k = \overline{1, n}); \quad (2.2)$$

2) cerințe facultative:

- i) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să țină cont de proprietățile de simetrie ale sistemului fizic studiat;
- ii) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să se facă astfel încât rezolvarea noilor ecuații diferențiale (în noile coordonate) să poată fi făcută cât mai ușor;
- iii) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să conducă la o expresie cât mai simplă a funcției lui Lagrange (pentru sistemele naturale) sau a forțelor generalizate și a energiei cinetice (pentru sistemele care nu admit un potențial, fie el chiar generalizat)<sup>2</sup>.

Ca și coordonatelor spațiului real al mișcării,  $\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), coordonatelor generalizate li se cere să fie funcții continue de timp, cel puțin de două ori derivabile (pentru a exista  $\ddot{q}_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ), analogele accelerațiilor  $\ddot{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) din spațiul real).

<sup>2</sup> Noțiunile noi pe care le-am utilizat aici (cum ar fi: funcția Lagrange, forțe generalizate etc.) vor fi explicate ulterior, tot în cadrul acestui paragraf, consacrat principiului lui D'Alembert.

Spre deosebire însă de coordonatele spațiului real (a căror unitate de măsură este totdeauna metrul), coordonatele generalizate pot fi mărimi din cele mai diverse. De exemplu, putem alege ca și coordonate generalizate: elemente de lungime de arc, elemente de suprafață, unghiuri, componente de potențial/antipotențial sau de intensitate a unor câmpuri fizice, entropia, componente de viteză unghiulară etc. Mai mult, de cele mai multe ori alegerea coordonatelor generalizate nu este unică, ci este posibilă o transformare punct cu punct pe spațiul acestor coordonate, adică putem defini un alt set de coordonate generalizate, prin

$$q_k \rightarrow q_k' = q_k'(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (k = \overline{1, n}).$$

Dacă sistemul de puncte materiale nu este supus nici unei legături, atunci ca și coordonate generalizate pot fi utilizate chiar coordonatele spațiului real, în diverse reprezentări (carteziană,  $x_i, y_i, z_i, (i = \overline{1, N})$ , sau una specifică sistemelor de coordonate curbilinii ortogonale, cum ar fi cea a coordonatelor sferice sau a celor cilindrice). De exemplu, pentru sistemul prezentat în Fig. I.2, existând o singură legătură,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{tg}^2 \theta + 2R x_3 \operatorname{tg} \theta - R^2 = 0,$$

rezultă că punctul material care se mișcă pe suprafața conului are  $n = 3 - 1 = 2$  grade de libertate. În acest caz există mai multe posibilități de a alege cele două coordonate generalizate asociate celor două grade de libertate. De exemplu, putem alege perechea  $(q_1, q_2) = (x_1, x_3)$  sau, la fel de bine, perechea  $(q_1, q_2) = (\varphi, x_3)$ , unde  $\varphi$  este unghiul dintre axa  $Ox_1$  și proiecția în planul  $x_1Ox_2$  a vectorului de poziție a punctului material. Și acestea nu sunt singurele posibilități. Lăsăm cititorului să identifice și alte asemenea perechi de variabile<sup>3</sup>. Dacă facem prima alegere, atunci relațiile (2.1) se vor scrie astfel:

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = \sqrt{[(R/\operatorname{tg} \theta) - x_3]^2 - x_1^2}, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

<sup>3</sup> Mai există cel puțin încă două astfel de posibilități.

iar dacă facem cea de-a doua alegere, atunci avem

$$\begin{cases} x_1 = (R - x_3 \operatorname{tg} \theta) \cos \varphi, \\ x_2 = (R - x_3 \operatorname{tg} \theta) \sin \varphi, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

### II.1.1. Spațiul configurațiilor

După cum deja am precizat, spațiul configurațiilor este spațiul coordonatelor generalizate  $q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ). El este un spațiu matematic abstract (nu are corespondent fizic, real, decât în anumite cazuri particulare) și, de obicei, este notat cu  $R^n$ . Un punct  $P$  al acestui spațiu are  $n$  coordonate – setul celor  $n$  coordonate generalizate. Denumirea sa de spațiu „al configurațiilor” provine din faptul că punctele acestui spațiu nu reprezintă altceva decât „configurații” ale sistemului de puncte materiale în spațiul real, fizic. După cum știm, ansamblul tuturor celor  $N$  vectori de poziție  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  (considerați la un moment de timp dat,  $t$ ) ai celor  $N$  puncte materiale ale sistemului definește ceea ce numim *configurația* sistemului de puncte materiale (la acel moment de timp). Relațiile (2.1) ne arată că, a cunoaște toți vectorii de poziție ai punctelor materiale din sistem, este echivalent cu a cunoaște setul celor  $n$  coordonate generalizate  $q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ). Astfel, întreaga configurație a sistemului de puncte materiale din spațiul real (adică toți  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  considerați la momentul de timp arbitrar  $t$ ) este sintetizată într-un singur punct al spațiului configurațiilor – punctul care are ca și coordonate cele  $n$  coordonate generalizate  $q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ). Aceasta este o treabă formidabilă! Cunoscând poziția unui singur punct din acest spațiu abstract la un moment de timp oarecare  $t$ , cunoaștem de fapt pozițiile tuturor celor  $N$  puncte materiale în spațiul real la acel moment de timp. Acest punct din spațiul configurațiilor, care conține în el întreaga configurație a sistemului din spațiul real se numește *punct reprezentativ al sistemului de puncte materiale*, sau simplu, *punct reprezentativ*. Mai mult, a urmări evoluția

temporală a sistemului de puncte materiale, cu alte cuvinte, a cunoaște toate cele  $N$  traiectorii (date, de exemplu, parametric prin relația vectorială  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) sau, prin setul de relații scalare  $x_i = x_i(t)$ ,  $y_i = y_i(t)$ ,  $z_i = z_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ )) este echivalent cu a urmări evoluția temporală a unui singur punct, anume, punctul reprezentativ în spațiul configurațiilor. Cu alte cuvinte, cunoscând o singură traiectorie în spațiul configurațiilor (traiectoria punctului reprezentativ, numită și *traiectorie generalizată*) cunoaștem de fapt traiectoriile tuturor celor  $N$  puncte materiale ale sistemului. Într-adevăr, cunoscând relațiile  $q_k = q_k(t)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) (care reprezintă legea de mișcare a punctului reprezentativ în spațiul configurațiilor și totodată ecuațiile parametrice ale traiectoriei lui – traiectoria generalizată), prin intermediul relațiilor (2.1) cunoaștem de fapt toate cele  $N$  legi de mișcare  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) ale tuturor punctelor materiale din sistem, legi care reprezintă în același timp ecuațiile parametrice (parametrul fiind chiar timpul) ale traiectoriilor punctelor materiale în spațiul real.

### Observații:

- 1) Traiectoria generalizată nu reprezintă nici una din traiectoriile din spațiul real a vreunui punct material al sistemului, ci „înglobează” în ea toate traiectoriile celor  $N$  puncte materiale ale sistemului;
- 2) Traiectoria generalizată poate fi privită ca o succesiune de puncte reprezentative, fiecare dintre acestea reprezentând configurația întregului sistem la momentele succesive de timp din decursul evoluției temporale a acestuia.

## II.1.2. Forțe generalizate

Diferențiind relațiile (2.1) în raport cu timpul, obținem

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \quad (i = \overline{1, N}), \quad (2.3)$$

care poate exprima:

- i) deplasarea elementară reală a punctului material  $P_i$  în intervalul de timp  $dt$ , dacă  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$  verifică toate cele trei condiții (ecuațiile diferențiale ale mișcării, ecuațiile legăturilor și condițiile inițiale compatibile cu legăturile);
- ii) o deplasare elementară posibilă a aceluiași punct material, supus unor legături reonome,

$$f_j(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t); t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}), \quad (2.4)$$

(dacă  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$  verifică doar ecuațiile acestor legături);

Dacă în (2.3) facem  $dt \rightarrow \delta t = 0$ , atunci  $d\vec{r}_i \rightarrow \delta\vec{r}_i$  și  $dq_k \rightarrow \delta q_k$ , și, conform definiției, relația obținută, adică

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.5)$$

va exprima o deplasare elementară virtuală a aceluiași punct material, supus legăturilor reonome (2.4).

Semnificația mărimilor  $dq_k$  din relațiile (2.3) și  $\delta q_k$  din relațiile (2.5) este analoagă mărimilor corespunzătoare din spațiul real,  $d\vec{r}_i$  și  $\delta\vec{r}_i$ . Deci,  $dq_k$  poate desemna:

- i) o deplasare elementară reală a punctului reprezentativ în spațiul configurațiilor, dacă  $q_k = q_k(t)$  satisfac în spațiul configurațiilor toate cele trei cerințe (corespunzătoare celor satisfăcute de  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$  în spațiul real), anume: ecuațiile diferențiale ale mișcării (ecuațiile Lagrange de speța a II-a), condițiile inițiale compatibile cu legăturile,  $q_{k0} = q_k(t_0)$  și  $\dot{q}_{k0} = \dot{q}_k(t_0)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) din spațiul configurațiilor și ecuațiile legăturilor (2.4);
- ii) o deplasare elementară posibilă a aceluiași punct, dacă acesta satisface doar ecuațiile legăturilor reonome

$$f_j(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t); t) = 0, \quad (j = \overline{1, l}),$$

iar  $\delta q_k$  desemnează o deplasare elementară virtuală a punctului reprezentativ în spațiul configurațiilor. Dacă  $q_1, q_2, \dots, q_n$  sunt liniar independente, atunci și setul deplasărilor elementare virtuale

corespunzătoare,  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ , are aceeași proprietate (este un set de  $n$  deplasări elementare virtuale independente).

Să revenim acum – așa cum am precizat în paragraful precedent – la noțiunea de lucru mecanic virtual. În spațiul real, lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) aplicate unui sistem cu  $N \geq 2$  puncte materiale, la deplasările elementare virtuale  $\delta \vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) este

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

Înlocuind aici mărimile  $\delta \vec{r}_i$  date de relațiile (2.5), obținem

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \\ &= \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \end{aligned} \quad (2.6)$$

unde, prin definiție,

$$Q_k \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (2.7)$$

sunt numite *forțe generalizate*. Deci, în spațiul configurațiilor, principiul lucrului mecanic virtual se scrie astfel:

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0. \quad (2.8)$$

Întrucât forțele aplicate  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) au o dependență funcțională de tipul

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t),$$

având în vedere relațiile (2.1), concluzionăm că forțele generalizate  $Q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) au o dependență funcțională de tipul

$$Q_k = Q_k(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t), \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.9)$$

unde mărimile

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}, \quad (k = \overline{1, n}) \quad (2.10)$$

se numesc (prin analogie cu cazul coordonatelor din spațiul real) *viteze generalizate* și sunt „legate” de vitezele din spațiul real  $\dot{\vec{r}}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) prin relațiile

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad (i = \overline{1, N}), \quad (2.11)$$

care rezultă din (2.3) prin împărțire la intervalul infinitezimal de timp  $dt$ .

**Observație:** După cum se observă din relațiile lor de definiție, forțele generalizate nu se măsoară în newtoni decât în cazul particular când coordonatele generalizate au dimensiune de lungime. Rezultă așadar că, în general, forțele generalizate nu sunt de fapt forțe (în sensul obișnuit, newtonian, al termenului). Semnificația forțelor generalizate este dată totdeauna de cea a coordonatelor generalizate cărora le corespund (cu care sunt asociate, dacă ne referim la expresia (2.8) a principiului lucrului mecanic virtual scris în spațiul configurațiilor). Chiar dacă, în general, forțele generalizate nu au dimensiunea unei forțe, produsul dintre orice forță generalizată și coordonata generalizată corespunzătoare (prin relația (2.8)) are dimensiunea unui lucru mecanic (Joule). De exemplu, dacă coordonata generalizată este o mărime care se măsoară în metri, atunci forța generalizată corespunzătoare este o forță obișnuită (newtoniană), dar dacă coordonata generalizată este o variabilă unghiulară, atunci forța generalizată este un moment al forței (deci, se măsoară în  $N \cdot m$ ) etc.

Această observație este valabilă și în cazul principiului vitezelor virtuale. După cum am văzut în paragraful precedent, principiul vitezelor virtuale derivă din principiul lucrului mecanic virtual. La fel cum principiul lucrului mecanic virtual poate fi scris atât pe spațiul real, cât și în spațiul configurațiilor, și principiul vitezelor virtuale se bucură de aceeași proprietate.

Într-adevăr, avem,

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k}{\delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{\delta t} =$$



$$= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \frac{\delta q_k}{\delta t} = \sum_{k=1}^n Q_k w_k, \quad (2.12)$$

unde prin  $w_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) am desemnat vitezele virtuale generalizate,  $w_k = \frac{\delta q_k}{\delta t}$ , ( $k = \overline{1, n}$ ). Referitor la definiția acestor viteze virtuale generalizate, este valabilă și aici observația făcută cu ocazia introducerii noțiunii de viteză virtuală „obișnuită”,  $\vec{v}_i = \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t}$ , ( $i = \overline{1, N}$ ). Dacă în relația (2.12)  $w_k$  este o viteză „obișnuită” (newtoniană), adică măsurabilă în  $m/s$ , atunci forța generalizată corespunzătoare ei,  $Q_k$ , este o forță „obișnuită” (newtoniană), dar dacă, de exemplu, viteza virtuală generalizată  $w_k$  este o viteză unghiulară, atunci forța generalizată asociată va fi un moment al forței etc.

În concluzie, în spațiul configurațiilor, principiul vitezelor virtuale se scrie sub forma

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \sum_{k=1}^n Q_k w_k = 0. \quad (2.13)$$

Să ne reîntoarcem acum la principiul lui D'Alembert. Mai întâi trebuie să precizăm că acesta face parte din categoria principiilor diferențiale ale mecanicii analitice, adică, din categoria acelor principii care țin cont de comportarea sistemelor mecanice (fizice) la variații infinitezimale ale coordonatelor și vitezelor. Scris pe spațiul real, în esență, principiul lui D'Alembert nu face altceva decât, așa cum spuneam și în introducerea acestui paragraf, să realizeze acel „miracol” al transformării unei probleme de dinamică într-una de statică. Cum se poate acest lucru? Foarte simplu, după cum urmează:

Să considerăm, la fel ca de obicei, un sistem de  $N \geq 2$  puncte materiale,  $P_1, P_2, \dots, P_N$  supuse forțelor aplicate  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) și forțelor de legătură  $\vec{L}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), datorate unor legături olonome. Principiul fundamental (*lex secunda*) al dinamicii newtoniene scris pentru punctul material  $P_i$  are următoarea expresie matematică:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i, \quad (2.14)$$

și este valabil pentru orice punct material din sistem, deci pentru orice  $i = \overline{1, N}$ . Aceasta este expresia principiului acțiunii forței într-un sistem de referință inerțial. Acest fapt, adesea de la sine subînțeles și trecut prea ușor cu vederea, este extrem de important. De ce? Pentru că tocmai această observație permite realizarea aceluia așa-zis „miracol” despre care am tot amintit. Cum? Prin introducerea noțiunii de *forță de inerție*. Din păcate, destul de des această noțiune este înțeleasă rău, sau în cel mai fericit caz, în mod deformat. Și aceasta, deoarece nu se are în vedere deosebirea clară care trebuie făcută între studiul comportării unui sistem fizic față de un sistem de referință inerțial – pe de o parte, și față de un sistem de referință neinerțial – pe de altă parte. Din această cauză, forțele de inerție sunt numite deseori, în mod nefericit, forțe fictive sau forțe imaginare. Această imagine deformată asupra forțelor de inerție este prezentată uneori elevilor încă din clasa a IX-a, atunci când acestora li se predă pentru prima dată acest subiect. De fapt, dacă nu se face clar distincția amintită mai sus, nici nu poate fi altfel. Într-un anumit sens, utilizarea denumirii de forțe fictive sau forțe imaginare dată forțelor de inerție ar fi scuzabilă și astfel ar putea fi tolerată, numai cu condiția de a fi conștienți de faptul că atunci când folosim aceste denumiri ne raportăm la un sistem de referință inerțial<sup>4</sup>. Aceasta, deoarece, așa cum ar trebui să știm, într-un sistem de referință inerțial, forțele de inerție pur și simplu **nu există**. Nu că ar fi imaginare, sau fictive, sau complementare etc. Pe de altă parte, într-un sistem de referință neinerțial aceste forțe există, **sunt reale**, deci pot fi considerate – și chiar trebuie să fie considerate – ca forțe aplicate. Dar atenție! Esențială este reportarea noastră, ca și observatori, la un tip de sistem de referință sau altul (inerțial sau, respectiv, neinerțial).

Totuși, ce sunt aceste forțe de inerție? Efectul lor l-am putut simți cu toții (și astfel ne-am putut da seama cât de „reale” sau „ireale” sunt), de exemplu, atunci când, călătorind cu un mijloc de transport în comun (cum ar fi un tramvai aglomerat în care, evident, trebuie să stăm în picioare), în

---

<sup>4</sup> Și chiar și așa, pentru a elimina definitiv orice posibilitate de confuzie și orice ambiguitate, este de preferat să se renunțe la aceste denumiri. În acest fel se elimină posibilitatea de a lăsa elevilor (mai ales celor din clasa a IX-a, care abia stăpânesc conceptul de forță) o imagine confuză, dubioasă, asupra existenței sau inexistenței acestor forțe.

momentul în care conducătorul aceluși autovehicul frânează brusc (pentru a evita un accident, de exemplu) suntem nevoiți să ne scuzați față de persoana din față (care, la rândul ei trebuie să se scuze față de cea din față ei ș.a.m.d.) pentru că, fără să dorim aceasta (sau, uneori, chiar dorind, însă fără să găsim un motiv bine întemeiat !) „am luat-o în brațe”. Mărimea forței cu care suntem „împinși” în față (la frânare) sau în spate (la accelerare) depinde de viteza de variație a vitezei aceluși mobil, cu alte cuvinte, de accelerația (negativă sau, respectiv, pozitivă) imprimată autovehiculului<sup>5</sup>. Totuși, un trecător care se află în repaus pe trotuar nu sesizează și nu poate determina (din sistemul lui de referință, care este inerțial<sup>6</sup>) existența nici unei forțe care să acționeze asupra călătorilor din mijlocul de transport. Tocmai din această cauză există tendința de a numi, în mod greșit, forțele de inerție ca fiind „imaginare” sau „fictive”. Din acest exemplu banal putem identifica două din cele trei caracteristici ale forțelor de inerție, anume, direcția și sensul. Forțele de inerție au aceeași direcție cu cea a direcției accelerației sistemului de referință neinerțial (tramvaiul aflat în mișcare accelerată, în exemplul nostru) și sens opus față de sensul acestei accelerații (la frânare avem tendința de a merge „înainte”, iar la accelerare, „înapoi”). Asupra mărimii (modulului) acestei forțe nu putem face decât o apreciere calitativă (dacă luăm în considerare exemplul dat aici) și anume, că acesta este direct proporțional cu accelerația sistemului de referință neinerțial (tramvaiul, în exemplul considerat).

Aceste observații sunt corecte și în deplină concordanță cu definiția teoretică dată forțelor de inerție. Astfel, prin definiție, mărimile ( $-m_i \ddot{\vec{r}}_i$ ) (fără sumare) din relațiile (2.14) sunt de obicei notate cu

$$\vec{J}_i \stackrel{\text{def.}}{=} -m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (2.15)$$

<sup>5</sup> Referindu-ne tot la exemplul dat mai sus, dacă viteza cu care se deplasează tramvaiul este mică sau foarte mică, atunci efectul frânării este foarte mic, uneori insesizabil. Dar, dacă viteza este foarte mare și vântul frânează brusc (cu alte cuvinte, decelerația imprimată tramvaiului este foarte mare), atunci cu siguranță „vom lua persoana din față în brațe”.

<sup>6</sup> Aici trebuie să avem în vedere faptul că, în realitate, nu există sisteme de referință inerțiale la modul absolut. Însă, cu o aproximație mai mult sau mai puțin bună, putem considera că un anumit sistem de referință este inerțial. În cazul exemplului dat de noi, trotuarul poate fi considerat un sistem de referință inerțial.

și sunt numite *forțe de inerție*. Într-adevăr, după cum se poate observa, aceste forțe au aceeași direcție cu accelerația  $\ddot{\vec{r}}_i$ , sens opus (datorită semnului minus din relația (2.15)), iar factorul de proporționalitate de care vorbeam mai sus este (în acord cu principiul fundamental al mecanicii newtoniene) chiar masa corpului (punctului material).

Cu ajutorul acestor forțe, principiul fundamental al dinamicii exprimat prin relațiile (14) capătă forma

$$\vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i = 0, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (2.16)$$

Această relație exprimă sub forma matematică principiul lui D'Alembert, care se enunță astfel: *În orice moment de timp există un echilibru perfect între forțele aplicate, forțele de legătură și forțele de inerție care acționează asupra unui corp.*

Ținând cont de observațiile făcute mai sus relativ la forțele de inerție și de modul în care este enunțat, rezultă cu necesitate că acest principiu nu poate fi valabil decât într-un sistem de referință neinertial. Acesta este chiar sistemul de referință în care „miracolul” la care ne-am referit la început poate fi realizat. Într-adevăr, relațiile (2.16) nu exprimă altceva decât condițiile de echilibru pentru un sistem de  $N$  puncte materiale (rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra fiecărui punct material din sistem este zero). În acest fel, problema de dinamică s-a transformat într-una de cinematică ( $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \overline{(\text{const.})}_i$ ) sau chiar de statică (dacă vitezele  $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$  sunt nule), deoarece în acest sistem de referință toate accelerațiile  $\vec{a}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) ale celor  $N$  puncte materiale din sistem sunt nule:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i = 0, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (2.17)$$

Vom ilustra această situație într-un caz foarte simplu. Fie în acest sens un corp paralelipipedic de masă  $m$  care se mișcă uniform accelerat, cu accelerația  $\vec{a} > 0$  sub acțiunea unei forțe  $\vec{F}$ , pe un plan orizontal, ca în Fig. II.1.

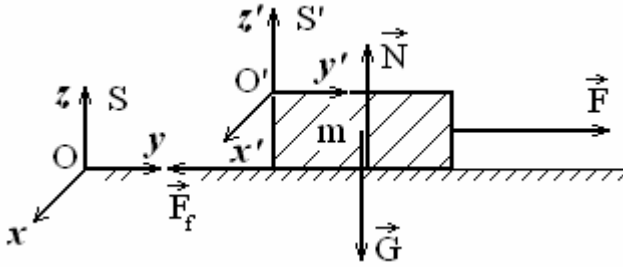


Fig. II.1

Deoarece  $N = G = mg$  și  $|\vec{F}_f| = \mu |\vec{N}|$ , rezultă că accelerația corpului este

$$a = |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}| - \mu mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu g > 0. \quad (2.18)$$

În sistemul de referință inerțial  $S$  (sistemul de referință „al laboratorului”) corpul de masă  $m$  se mișcă uniform accelerat cu accelerația dată de relația (2.18) spre dreapta (vezi Fig. II.2).

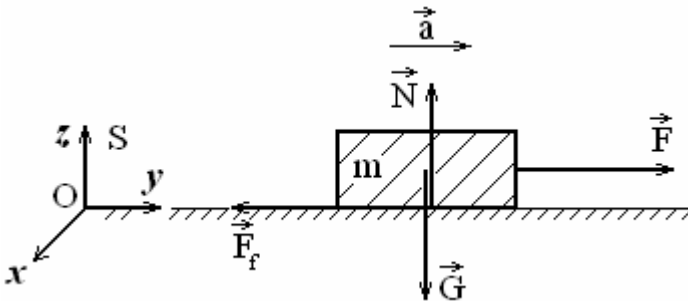


Fig. II.2

Un observator din sistemul de referință neinerțial  $S'$  (referințial solidar cu corpul, deci, care se mișcă spre dreapta cu aceeași accelerație  $a > 0$  față de sistemul de referință „al laboratorului”) va sesiza că, față de el, corpul este în repaus (vezi Fig. II.3).

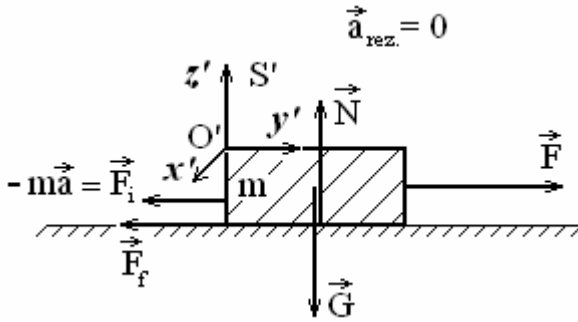


Fig. II.3

Forțele ( $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_f$ ,  $\vec{G}$  și  $\vec{N}$ ) care acționează asupra corpului în referențialul inercial  $S$  vor acționa și în referențialul neinercial  $S'$ . Însă, faptul că în  $S'$  corpul este în repaus nu poate fi explicat decât dacă acceptăm că în acest referențial mai apare o forță, care are aceeași direcție și același modul cu rezultanta forțelor<sup>7</sup>  $\vec{F}$  și  $\vec{F}_f$ , dar sens opus acestuia,

$$\vec{F}_i = -(\vec{F} + \vec{F}_f) = -m\vec{a}. \quad (2.19)$$

Aceasta este tocmai *forța de inerție*. Ea este o forță reală (aplicată) în referențialul neinercial  $S'$  și are rolul de a „explica” situația fizică concretă care apare în acest referențial (faptul că  $\ddot{\vec{r}} = 0$ ). Deci, raportându-ne la referențialul  $S'$  (și implicit, luând în considerare forța de inerție  $\vec{F}_i$ ) am transformat problema de dinamică într-una de statică. Într-adevăr, în  $S'$  avem

$$m\vec{a}_{rez.} = \vec{F} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_i = 0, \quad (2.20)$$

adică  $\vec{a}_{rez.} = \ddot{\vec{r}} = 0$ . Spre deosebire de forțele  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_f$ ,  $\vec{G}$  și  $\vec{N}$  care acționează atât în  $S$  cât și în  $S'$ , forța de inerție  $\vec{F}_i$  nu acționează decât în referențialul neinercial  $S'$ . Cu alte cuvinte, în sistemul de referință inercial  $S$ , forța de inerție pur și simplu *nu există*.

<sup>7</sup> Evident, e vorba despre rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra corpului, dar, având în vedere faptul că aici  $\vec{G} + \vec{N} = 0$ , la forța rezultantă vor contribui doar  $\vec{F}$  și  $\vec{F}_f$ .

Să observăm că „miracolul” transformării problemei de dinamică într-una de statică nu rezolvă problema până la capăt. Într-adevăr, dacă am dori să studiem acum problema de statică la care am ajuns, ar trebui să cunoaştem toate forţele care acţionează asupra corpului în referenţialul neinertial  $S'$ , deci şi forţa de inerţie,  $\vec{F}_i = -m\ddot{\vec{r}}$ . Ori, aceasta nu este cunoscută deoarece ar presupune problema de dinamică deja rezolvată. Într-adevăr, pentru a şti acceleraţia  $\ddot{\vec{r}}$  este nevoie să cunoaştem legea de mişcare  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  (sau măcar cea a vitezei  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ ). Am dat astfel peste un cerc vicios: pentru a rezolva problema, trebuie să-i cunoaştem soluţia! De aceea, soluţia trebuie căutată în altă parte. Acest lucru a fost realizat pentru prima dată tot de către Lagrange, pornind de la principiul lui D'Alembert, dar scris într-o formă uşor diferită de (2.16). Pentru a o determina vom înmulţi scalar expresia (2.16) cu deplasările virtuale din spaţiul real al mişcării,  $\delta\vec{r}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ). Rezultă:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{J}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{J}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (2.21)$$

unde am ținut cont că, în cazul legăturilor ideale,

$$\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \cdot \delta\vec{r}_i \equiv \sum_{i=1}^N (\vec{L}_i)_{\text{normal}} \cdot (\delta\vec{r}_i)_{\text{tangențial}} = 0.$$

Relația (2.21), care se mai scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{J}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (2.22)$$

exprimă principiul lui D'Alembert sub forma dată de către Lagrange. El se enunță în felul următor:

*Suma lucrurilor mecanice virtuale elementare ale tuturor forțelor aplicate și de inerție care acționează asupra unui sistem mecanic supus unor legături ideale este nulă.*

Această formă a principiului lui D'Alembert este mult mai utilă deoarece nu conține forțele de legătură. Ea este utilizată pentru a deduce ecuațiile diferențiale de ordinul doi ale mişcării sistemului în spaţiul configurațiilor. Aceste ecuații sunt unele dintre cele mai importante – chiar celebre – din întreaga fizică și poartă numele de *ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a*, sau, mai simplu, *ecuațiile lui Lagrange*. Modul de deducere a

acestor ecuații este prezentat foarte bine în multe lucrări de specialitate<sup>8</sup> și de aceea nu ne vom opri asupra acestui lucru aici.

După cum se poate observa, până la urmă, rezolvarea problemei de dinamică din spațiul real nu a putut fi ocolită total, „trecerea” printr-o problemă de statică (enunțată într-un referențial neinertial, pe spațiul real), pentru a ajunge în final tot la o problemă de dinamică (dar pe spațiul configurațiilor) având totuși un câștig: problema de dinamică de pe spațiul configurațiilor este mai ușor de rezolvat decât cea din spațiul real al mișcării. Aceasta fie doar și datorită faptului că sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi are mai puține ecuații (cu  $2l$ , unde  $l$  reprezintă numărul de legături).

În încheierea acestui paragraf vom prezenta, fără a indica modul concret în care pot fi obținute din principiul lui D'Alembert (2.22), ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a. Acestea sunt:

- pentru sistemele pentru care nu poate fi definit un potențial (și deci, nici o funcție Lagrange),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.23)$$

unde  $T = T(q_k, \dot{q}_k, t)$  este energia cinetică a sistemului de puncte materiale, iar  $Q_k, (k = \overline{1, n})$  sunt forțele generalizate;

- pentru sistemele naturale (sistemele pentru care poate fi definit un potențial, fie el și generalizat),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.24)$$

unde  $L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, t)$  este funcția lui Lagrange pentru sistemele care admit un potențial simplu („obișnuit”) și  $L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, \dot{q}_k, t)$ , pentru sistemele care admit un potențial generalizat (care depinde de viteze).

<sup>8</sup> Vezi de exemplu lucrarea „Applied Analytical Mechanics”, „The voice of Bucovina” Press, Iași, 1995, elaborată de I. Mercheș și L. Burlacu (pag. 52).



## II.2. Principiul lui Hamilton

Principiul lui Hamilton este un principiu de bază nu doar în mecanica analitică, ci, am putea spune, fără să exagerăm, în întreaga fizică. El face parte din categoria principiilor integrale, fiind totodată (după cum vom arăta în detaliu) un principiu variațional. Spre deosebire de principiile diferențiale, cele integrale consideră mișcarea unui sistem fizic într-un interval *finit* (și nu infinitezimal) de timp. Aceste principii operează cu variații globale (și nu infinitezimale) considerate fie pe spațiul real, fie pe cel al configurațiilor.

Înainte de a prezenta principiul lui Hamilton menționăm că, la modul absolut nu există vreo diferență între cele două categorii de principii (cele diferențiale și respectiv cele integrale), căci, după cum vom vedea, între principiile mecanicii analitice există o legătură foarte strânsă, oricare ar fi categoria acestora.

Pentru a înțelege mai ușor raționamentele vom începe analiza noastră în spațiul real al mișcării,  $R^3$ .

Fie un sistem de  $N \geq 2$  puncte materiale, supus la  $l$  legături olonome,

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad (k = \overline{1, l}) \quad (2.25)$$

și să presupunem cunoscută legea de mișcare a sistemului de puncte materiale în spațiul real,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.26)$$

în intervalul finit de timp  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Fie, de asemenea, o altă lege de mișcare a aceluiași sistem de puncte materiale,

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^*(t), \quad (i = \overline{1, N}), \quad (2.27)$$

care satisface ecuațiile legăturilor (2.25), fără a verifica ecuațiile diferențiale de ordinul doi ale mișcării (de exemplu, ecuațiile fundamentale ale dinamicii scrise pentru un sistem supus la legături sau ecuațiile Lagrange de speța I) și nici condițiile inițiale compatibile cu legăturile. O astfel de mișcare o vom numi (prin analogie cu terminologia utilizată în cazul deplasărilor elementare) *mișcare virtuală*. Vom cere (prin analogie cu cazul

funcțiilor  $y = y(x) \in C^2[a, b]$ , pe a căror mulțime este definită funcționala  $J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ , și care trebuie să treacă – toate – prin aceleași două puncte  $P(a, a_1)$  și  $Q(b, b_1)$  situate pe „frontiera domeniului” de variație a variabilei independente  $x \in [a, b]$  – vezi subcapitolul V.1, observația de la pagina #) ca cele două traiectorii descrise de legile de mișcare (2.26) și (2.27) să treacă prin aceleași două puncte  $P_1$  și  $P_2$  corespunzătoare celor două momente de timp  $t_1$  și  $t_2$  (cu alte cuvinte, vom cere ca cele două traiectorii „să coincidă” la capetele intervalului de variație a variabilei independente, care aici este timpul  $t$  – vezi Fig. II.4), adică

$$\bar{r}_i(t_1) = \bar{r}_i^*(t_1) \text{ și } \bar{r}_i(t_2) = \bar{r}_i^*(t_2), \quad (i = \overline{1, N}). \quad (2.28)$$

Definind deplasarea virtuală  $\delta \bar{r}_i$  ca reprezentând variația vectorului de poziție al punctului material cu numărul de ordine  $i$  dintr-un punct al traiectoriei reale ( $C_{real}$ ) într-un punct infinitezimal depărtat de acesta și aparținând traiectoriei virtuale ( $C_{virtual}$ )  $\equiv (C^*)$  prin (vezi Fig. II.4):

$$\delta \bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(t) - \bar{r}_i^*(t), \quad (i = \overline{1, N}), \quad (2.29)$$

condițiile (2.28) se vor scrie astfel:

$$\delta \bar{r}_i(t_1) = 0, \quad \delta \bar{r}_i(t_2) = 0, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (2.30)$$

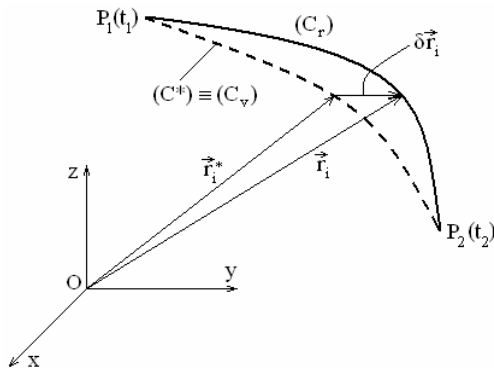


Fig. II.4

Încă de la început evidențiem faptul că, pentru a găsi relația matematică ce exprimă principiul lui Hamilton, vom porni de la relația analoagă ce exprimă principiul lui D'Alembert sub forma dată de către Lagrange. În acest fel este mai mult decât evidentă „înrudirea” dintre cele două principii ale mecanicii analitice (legătură amintită chiar la început).

Principiul lui D'Alembert se scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

de unde,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \delta W,$$

sau, exprimând derivata de ordinul doi a vectorului de poziție  $\vec{r}_i$  ca derivata celei de ordinul întâi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \delta W. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Analizând termenul  $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i$ , se observă că el provine din variația

virtuală a energiei cinetice  $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2$  a sistemului de puncte materiale.

Într-adevăr, evaluând energia cinetică a mișcării virtuale, avem

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\vec{r}}_i^*|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\vec{r}}_i - \delta \dot{\vec{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( |\dot{\vec{r}}_i|^2 - 2\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i + |\delta \dot{\vec{r}}_i|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( |\dot{\vec{r}}_i|^2 - 2\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = T - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i, \end{aligned}$$

de unde,

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = T - T^* = \delta T.$$

Utilizând acest rezultat în relația (2.31) putem scrie

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \delta T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \delta W,$$

de unde,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) = \delta T + \delta W = \delta(T + W). \quad (2.32)$$

Integrând acum această relație între momentele de timp  $t_1$  și  $t_2$  și ținând cont de relațiile (2.30), obținem

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T + W) dt,$$

sau,

$$\left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i(t_2) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i(t_1) = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T + W) dt,$$

adică,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T + W) dt = 0,$$

unde am ținut cont de relațiile (2.30). Având în vedere comutativitatea operatorilor de integrare,  $\int \cdot dt$  și variație,  $\delta \cdot$ , relația precedentă se mai scrie:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = 0, \quad (2.33)$$

și reprezintă expresia matematică a așa-numitului *principiu al lui Hamilton generalizat*, denumire dată din motive pe care le vom prezenta ulterior.

Dacă forțele aplicate sistemului de puncte materiale sunt forțe potențiale, adică dacă ele derivă dintr-un potențial  $V(\vec{r}, t)$ , atunci, evaluând potențialul corespunzător mișcării virtuale,  $V(\vec{r}^*, t)$ , avem

$$\begin{aligned} V(\vec{r}^*, t) &\equiv V(\vec{r}_1^*, \vec{r}_2^*, \dots, \vec{r}_N^*; t) = V(\vec{r}_1 - \delta \vec{r}_1, \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_1; t) = \\ &= V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) - \sum_{i=1}^N (\text{grad}_i V) \cdot \delta \vec{r}_i + \mathcal{O}(|\delta \vec{r}_i|^2) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) - \\ &- \sum_{i=1}^N (\text{grad}_i V) \cdot \delta \vec{r}_i = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) + \\ &+ \delta W, \end{aligned}$$

sau,

$$V(\vec{r}^*, t) \equiv V^* = V + \delta W,$$

de unde,

$$\delta W = -(V - V^*) = -\delta V,$$

care, înlocuită în expresia (2.33) conduce la

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt = 0, \quad (2.34)$$

unde  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T(\dot{\vec{r}}, t) - V(\vec{r}, t)$  este funcția lui Lagrange scrisă pe spațiul real.

Relația (2.34) reprezintă expresia matematică a *principiului lui Hamilton* dar nu este folosită în forma în care a fost determinată aici, deoarece mărimile  $\vec{r}_i$  și  $\dot{\vec{r}}_i$  care apar ca variabile în expresia funcției lui Lagrange nu sunt independente, ci satisfac aceleași constrângeri, date de relațiile (2.25). Din această cauză întreg raționamentul făcut mai sus se reia pe spațiul configurațiilor,  $R^n$ . În acest fel, coordonatele și vitezele reale vor fi înlocuite prin analogele lor generalizate de pe spațiul configurațiilor. Întrucât coordonatele generalizate sunt independente, și vitezele generalizate vor fi la fel, ceea ce va duce la forma finală, corectă, a principiului lui Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Nu vom relua toate calculele făcute anterior pe spațiul real, ci vom indica doar etapele principale. Astfel, legilor de mișcare (2.26) și (2.27) din spațiul real le vor corespunde legile de mișcare

$$q_k = q_k(t), \quad (k = \overline{1, n}) \quad (2.26')$$

și respectiv

$$q_k^* = q_k^*(t), \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.27')$$

din spațiul configurațiilor, iar condițiilor (2.30) din spațiul real le vor corespunde noile condiții din spațiul configurațiilor,

$$\delta q_k(t_1) = 0, \quad \delta q_k(t_2) = 0, \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.30')$$

variațiile virtuale ale coordonatelor generalizate fiind definite cu ajutorul unor relații analoage celor de pe spațiul real, (2.29), adică,

$$\delta q_k(t) = q_k(t) - q_k^*(t), \quad (k = \overline{1, n}). \quad (2.29')$$

Deoarece coordonatele generalizate sunt independente, rezultă că, exceptând condițiile (2.29') și variațiile virtuale ale lor,  $\delta q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) sunt independente. În plus, conform definiției, aceste variații sunt și instantanee (cu alte cuvinte, nu se fac în timp) ceea ce, într-o reprezentare grafică cu axa timpului în abscisă și cu axa ordonatelor sintetizând prin „compactificare” toate cele  $n$  dimensiuni ale spațiului configurațiilor, implică ortogonalitatea acestora la axa timpului (vezi Fig. II.5).

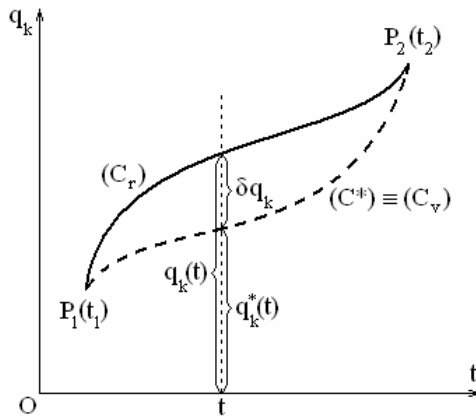


Fig. II.5

În aceste condiții, expresiei (2.34) din spațiul real îi va corespunde următoarea expresie pe spațiul configurațiilor:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (2.35)$$

Integrala

$$S \equiv S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.36)$$

este numită *integrala acțiunii* sau, simplu, *acțiune*.

Cu ajutorul ei, relația (2.35) se transcrie astfel

$$\delta S = 0. \quad (2.37)$$

Această relație extrem de simplă conține totuși în ea, esențializată, întreaga mecanică analitică! Ea exprimă *principiul lui Hamilton* pentru sistemele naturale supuse la legături olonome, care se enunță astfel: *Dintre toate traiectoriile generalizate posibile, care trec prin două puncte fixe din spațiul configurațiilor, corespunzătoare la două momente de timp  $t_1$  și  $t_2$ , mișcarea reală se realizează pe acea traiectorie, care face acțiunea staționară.* Deoarece, de cele mai multe ori extremumul integralei acțiunii este un minim, acest principiu mai este numit uneori și *principiul acțiunii minime*.

El a fost publicat de către William Rowan Hamilton în anul 1834 și de atunci putem spune că fizicienilor le-a fost pus la dispoziție un instrument deosebit de important de studiu, în principiu, a oricărui sistem fizic, nu doar mecanic.

Așa cum am spus mai sus, principiul lui Hamilton conține în esență întreaga mecanică analitică. Cu alte cuvinte, toate rezultatele formalismelor de bază ale mecanicii analitice (cel lagrangean și cel hamiltonian) pot fi obținute pornind de la acest principiu. Să arătăm acest lucru.

1. În cazul formalismului lagrangean vom arăta cum, pornind de la principiul lui Hamilton, pot fi deduse ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a, atât pentru sisteme naturale (cu potențial simplu și generalizat), cât și pentru sisteme pentru care nu poate fi definit un potențial, fie el chiar generalizat (pentru care forțele aplicate nu sunt forțe potențiale):

- i) pentru a deduce ecuațiile lui Lagrange se speța a II-a pentru sisteme naturale cu potențial simplu,  $V = V(q, t)$ , vom porni de la forma (2.37) a principiului lui Hamilton,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0,$$

pentru variații  $\delta q$  virtuale și independente (arbitrare<sup>9</sup>) ale coordonatelor generalizate. Astfel, avem:

<sup>9</sup> ... dar satisfăcând condițiilor  $\delta q_k(t_1) = 0$  și  $\delta q_k(t_2) = 0$ .

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (t_2) \delta q_k (t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (t_1) \delta q_k (t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \delta q_k dt = 0,
\end{aligned}$$

unde am avut în vedere condițiile (2.30') satisfăcute de variațiile virtuale ale coordonatelor generalizate,  $\delta q_k$ . Deoarece  $\delta q_k$  sunt arbitrare, din relația de mai sus rezultă cu necesitate ecuațiile căutate,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = \overline{1, n}); \quad (2.38)$$

ii) în cazul sistemelor naturale care admit potențiale generalizate, trebuie să arătăm că forma (2.33) a principiului lui Hamilton este echivalentă cu (2.37), cu condiția ca forțele generalizate să poată fi scrise sub forma

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (k = \overline{1, n}), \text{ unde } V = V(q, \dot{q}, t) \text{ este}$$

potențialul generalizat. Într-adevăr, după cum foarte ușor se poate arăta, dacă forțele generalizate au o astfel de reprezentare, atunci ecuațiile Lagrange de speța a II-a în

forma generală,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = \overline{1, n})$  pot fi scrise



sub forma uzuală,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ , ( $k = \overline{1, n}$ ), adică tot

cu ajutorul unei funcții Lagrange, dar în care potențialul  $V$  este unul generalizat:  $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t)$ . Să arătăm așadar că (2.33) trece în (2.37) dacă are loc

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_k}. \text{ Avem,}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_k} \right] \delta q_k dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \\ &+ \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} (t_2) \delta q_k (t_2) - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} (t_1) \delta q_k (t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta S = 0. \quad q.e.d. \end{aligned}$$

- iii) în vederea deducerii ecuațiilor Lagrange pentru sisteme care sunt supuse unor forțe aplicate care nu derivă dintr-un

potențial (fie el și generalizat) vom porni de la forma (2.33) a principiului lui Hamilton. Avem,

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k dt + \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) dt - \\
 &- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k dt + \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \\
 &- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k dt + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} (t_2) \times \\
 &\times \delta q_k (t_2) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} (t_1) \delta q_k (t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta q_k dt = \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k dt, \quad (k = \overline{1, n}),
 \end{aligned}$$

unde am ținut cont de condițiile (2.30'). Cum variațiile  $\delta q_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) sunt arbitrare<sup>10</sup>, din relația anterioară rezultă cu necesitate ecuațiile căutate,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (2.39)$$

Întrucât relația (2.33) permite deducerea pe cale variațională atât a ecuațiilor Lagrange de speța a II-a pentru sistemele naturale care admit un potențial generalizat cât și a

<sup>10</sup> Mai puțin condițiile (2.30').

ecuațiilor Lagrange de speța a II-a pentru sistemele supuse unor forțe nepotențiale, (2.39), se spune că ea exprimă *principiul lui Hamilton generalizat*.

2. În cazul formalismului hamiltonian vom arăta cum poate fi dedus pe cale variațională sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton, „inima” formalismului hamiltonian. Astfel, utilizând expresia (2.37) a principiului lui Hamilton și definiția funcției lui Hamilton,  $H = p_k \dot{q}_k - L$ , avem:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_k \dot{q}_k - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} [\delta(p_k \dot{q}_k) - \delta H] dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} (p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta H dt = \int_{t_1}^{t_2} p_k \delta \dot{q}_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k \delta p_k dt - \\
 &- \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (p_k \delta q_k) dt - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k dt + \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k \delta p_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt = (p_k \delta q_k) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k dt + \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k \delta p_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt = p_k(t_2) \delta q_k(t_2) - \\
 &- p_k(t_1) \delta q_k(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k \delta p_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt,
 \end{aligned}$$

unde, din nou am avut în vedere relațiile (2.30<sup>o</sup>). Datorită faptului că variațiile  $\delta q_k$  și  $\delta p_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) sunt arbitrare<sup>11</sup>, din relația de mai

<sup>11</sup> Este valabilă și aici observația făcută la nota de subsol precedentă.

sus rezultă cu necesitate că  $\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$  și  $\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$ , care reprezintă sistemul ecuațiilor canonice ale lui Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = + \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}. \end{cases} \quad (2.20)$$

### Observații

1. Principiul lui Hamilton este un principiu variațional. Într-adevăr, o comparație rapidă a rezultatelor obținute în acest paragraf cu acelea prezentate în paragraful dedicat funcționalelor și extremelor acestora, scoate în evidență o identitate de formă între cele două cazuri (vezi subcapitolul V.1). Acest lucru reiese cu claritate din corespondența următoare:

Variabila independentă  $x$   $\leftrightarrow$  Variabila independentă  $t$

Variabila dependentă  
(parametrul variațional)  
 $y = y(x)$   $\leftrightarrow$  Variabila dependentă  
(parametrul variațional)  
 $q = q(t)$

Funcția de clasă  $C^2$   
 $f = f(x, y, y')$   $\leftrightarrow$  Funcția lui Lagrange  
 $L = L(t, q, \dot{q})$

Funcționala  
 $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$   $\leftrightarrow$  Funcționala acțiunii  
 $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt$

Ecuațiile Euler-Lagrange  $\leftrightarrow$  Ec. Lagrange de speța a II-a

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = \overline{1, n})$$

După cum am văzut în paragraful dedicat calculului variațional, soluțiile  $y_i = y_i(x)$  ale ecuațiilor Euler-Lagrange sunt acele „puncte” în care funcționala de bază (funcționala care a determinat forma concretă a acestor ecuații prin intermediul funcției  $f(x, y, y')$ ) este staționară; cu alte cuvinte, soluțiile ecuațiilor Euler-Lagrange sunt acele „puncte” în care funcționala este extremă (minimă sau maximă), acestea numindu-se și *extremale*. Din acest punct de vedere, soluțiile ecuațiilor Lagrange de speța a II-a nu sunt altceva decât extremalele funcționalei acțiunii,  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ .

În această lumină, principiul lui Hamilton poate fi enunțat astfel: *Mișcarea reală a unui sistem fizic dat este cea descrisă de extremala funcționalei acțiunii*. Cu alte cuvinte, dintre toate funcțiile  $y_i = y_i(x)$  de clasă  $C^2$  definite pe intervalul temporal  $t \in [t_1, t_2]$  și care satisfac condițiilor  $y_i(t_1) = a$ ,  $y_i(t_2) = b$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ), unde  $a$  și  $b$  sunt două constante reale, mișcării reale a sistemului îi corespunde acea funcție care face funcționala acțiunii extremă.

2. Deoarece în acest paragraf am utilizat mărimi ce pot fi definite în raport cu orice sistem de referință, urmează că principiul lui Hamilton nu depinde de alegerea coordonatelor;
3. Întreaga informație despre sistemul fizic studiat este conținută într-o singură funcție scalară, funcția lui Lagrange, care, odată cunoscută permite determinarea simplă și rapidă a ecuațiilor diferențiale ale mișcării, precum și a legilor de conservare asociate;
4. Principiul lui Hamilton poate fi utilizat pentru a descrie într-o manieră unitară și alte sisteme fizice (în afara celor mecanice), cum ar fi, de exemplu, câmpurile fizice. Acest lucru este posibil datorită faptului că termenii care intră în expresia funcției lui Lagrange au dimensiuni de energie (mărimă care poate fi definită pentru orice sistem fizic), în timp ce nu orice tip de mișcare/interacțiune poate fi descrisă prin intermediul forțelor (care, uneori, sunt foarte greu de identificat). De exemplu, ecuațiile fundamentale ale electrodinamicii (ecuațiile lui Maxwell), cele ale teoriei elasticității

(ecuațiile Lamé), ecuația fundamentală a mecanicii cuantice nerelativiste (ecuația Schrödinger) etc., pot fi deduse pornind de la principiul lui Hamilton;

5. Din cele amintite mai sus reiese faptul că principiul lui Hamilton are un grad de aplicabilitate extrem de mare, fiind unul dintre cele mai generale principii ale naturii. Odată identificată funcția lui Lagrange ce caracterizează un anumit sistem, putem spune că „am prins în ecuație” acel aspect al universului. În acest scop există mai multe criterii-principii care trebuie luate în considerație atunci când dorim să construim funcția lui Lagrange pentru un anumit sistem fizic. Acestea sunt:

- *Principiul superpoziției.* Dacă sistemul este alcătuit din cel puțin două particule, atunci funcția lui Lagrange a întregului sistem trebuie să conțină trei grupuri de termeni: (i) termeni care să descrie fiecare particulă din sistem, ca și când aceasta ar fi singură, (ii) termeni care să descrie interacțiunea dintre fiecare particulă a sistemului cu oricare altă particulă din sistem și (iii) termeni care să descrie interacțiunea fiecărei particule a sistemului cu câmpurile de forță exterioare (evident, dacă acestea există);
- *Principii de invarianță.* Acțiunea trebuie să fie construită în așa fel încât să fie invariantă la transformările grupului de simetrie ce caracterizează sistemul fizic studiat. De exemplu, în cazul mecanicii clasice-newtoniene, acest grup este grupul transformărilor Galilei-Newton, mecanicii relativiste îi corespunde grupul transformărilor Lorentz-Einstein etc.;
- *Principiul de corespondență.* Acest principiu cere ca toate rezultatele cunoscute într-un domeniu particular al unui alt domeniu mai general să poată fi obținute din principiul lui Hamilton aplicat în domeniul mai general. De exemplu, trebuie ca toate rezultatele mecanicii clasice-newtoniene să poată fi obținute din principiul lui Hamilton aplicat în cadrul mecanicii analitice;
- *Principiul simetriei.* Funcția lui Lagrange trebuie construită astfel încât aceasta să fie nu doar cea mai simplă cu putință, ci și astfel încât să conducă la ecuații diferențiale ale mișcării

---

care să evidențieze/înglobeze proprietățile de simetrie ale sistemului fizic studiat. În acest fel, rezolvarea acelor ecuații va fi mult ușurată. Acest lucru poate fi luat în considerație prin alegerea potrivită/convenabilă a coordonatelor generalizate.

## Capitolul III

### Problema pendulului simplu

#### (sau matematic, sau încă, gravitațional)

În cele ce urmează vom rezolva problema fundamentală a dinamicii unui sistem fizic cu legături în cadrul a șase formalisme (clasic-newtonian, al ecuațiilor Lagrange de speța I, al ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, al lui Hamilton, formalismul Hamilton-Jacobi și formalismul variabilelor unghi-acțiune) pentru a scoate astfel în evidență asemănările și deosebirile care există între aceste formalisme și pentru a sesiza gradul sporit de generalitate (în strânsă legătură cu creșterea „puterii”) a formalismelor mecanicii analitice față de cel clasic-newtonian – pe de o parte – dar și a formalismelor mecanicii analitice între ele<sup>1</sup> – pe de altă parte.

Sistemul fizic particular pe care-l vom studia este alcătuit dintr-un corp de dimensiuni neglijabile (punct material) care se deplasează în plan vertical pe un arc de cerc în câmp gravitațional uniform și omogen. Acest sistem mecanic poate fi realizat cu ajutorul unei tije rigide de masă neglijabilă, fixată la capătul superior într-o articulație ideală și având la celălalt capăt un corp de masă  $m$  asimilabil unui punct material.

Precizăm că ne vom opri doar asupra studiului mișcării acestui sistem într-un caz particular relativ simplu, și anume, cel al oscilațiilor de amplitudine oarecare, libere, armonice și neamortizate, întrucât cazul general (cel care se referă la mișcarea neliniară, amortizată și eventual în regim forțat) necesită cunoștințe de dinamică neliniară (implicând noțiuni specifice cum ar fi: puncte de bifurcație, atractori strani, coeficienți Lyapunov etc.) și iese din cadrul considerațiilor din această lucrare. În plus, principalul scop pe care îl urmărim aici este acela de a oferi un exemplu de aplicare a cunoștințelor teoretice dobândite în cadrul cursului

---

<sup>1</sup> De exemplu, formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a este mai general și are o arie de aplicabilitate mai mare decât cel al ecuațiilor Lagrange de speța I.



de mecanică analitică, referitoare la cele șase metode distincte de rezolvare a unei probleme de mecanică.

### III.1. Formalismul clasic (newtonian)

În cadrul acestui formalism se consideră cunoscute masa corpului, forțele care acționează asupra corpului (inclusiv forțele de legătură) și condițiile inițiale compatibile cu legăturile, și se cere să se găsească legea de mișcare, traiectoria și eventual alte elemente caracteristice mișcării.

Dorim să evidențiem încă de pe acum faptul că una dintre principalele deosebiri dintre formalismul clasic (newtonian) și cele cinci formalisme ale mecanicii analitice este cea referitoare la forțele de legătură, care trebuie cunoscute încă de la început (măcar ca număr, direcție și sens) în cadrul formalismului newtonian, pe când, în cadrul formalismelor mecanicii analitice ele se determină abia la sfârșit.

Rezolvarea problemei în cadrul acestui formalism se bazează pe principiul fundamental al dinamicii (*lex secunda*), care furnizează ecuația diferențială a mișcării. Evident, pentru a putea scrie expresia matematică a acestui principiu trebuie cunoscute toate forțele care acționează asupra corpului (deci și cele de legătură), iar rezolvarea ecuației diferențiale a mișcării necesită cunoașterea condițiilor inițiale (poziția și viteza la momentul considerat inițial). Soluția acestei ecuații diferențiale reprezintă chiar *legea de mișcare a corpului*,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Să notăm cu  $\vec{G}$  forța de greutate (forța *aplicată* corpului) și fie  $\vec{T}$  forța de *legătură* (tensiunea din tijă). Pentru a scrie ecuația fundamentală a mișcării vom alege un reper cu originea în punctul de suspensie a tijeii, având axa  $Ox$  verticală, orientată în jos, iar axa  $Oy$  orizontală, orientată spre dreapta, așa ca în Fig. III.1.

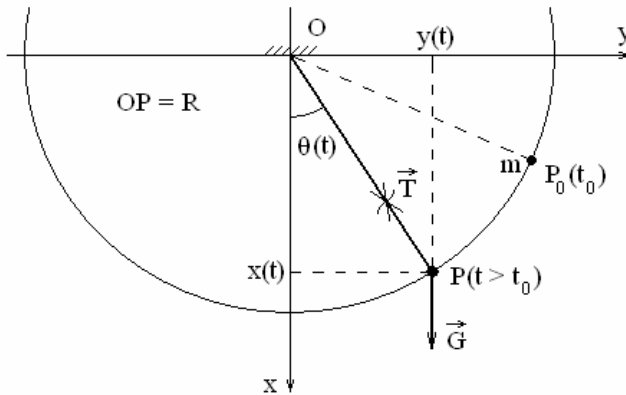


Fig. III.1

La momentul inițial,  $t=0$ , corpul se află în punctul  $P_0(x_0, y_0)$  și este în repaus ( $v_{0x}=0$ ,  $v_{0y}=0$ ). La un moment oarecare de timp,  $t$ , tija face cu verticala unghiul  $\theta(t)$ . Proiectând ecuația fundamentală a mișcării pe cele două axe, putem scrie:

$$Ox: \quad m\ddot{x} = mg - T \cos \theta,$$

$$Oy: \quad m\ddot{y} = -T \sin \theta,$$

sau,

$$\begin{cases} \ddot{x} = g - \frac{T}{m} \cos \theta, \\ \ddot{y} = -\frac{T}{m} \sin \theta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Suntem astfel în posesia unui sistem de două ecuații diferențiale cu patru necunoscute:  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $T$ . Pentru a-l rezolva vom apela la ecuațiile parametrice ale traiectoriei corpului de masă  $m$ ,

$$x = R \cos \theta,$$

$$y = R \sin \theta.$$

Derivatele totale de ordinul unu și doi în raport cu timpul ale acestor ultime două relații sunt

$$\dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta$$

și respectiv,

$$\ddot{x} = -R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta,$$

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

Cu acestea din urmă în (3.1) obținem:

$$\begin{cases} -R\ddot{\theta} \operatorname{tg} \theta - R\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\cos \theta} - \frac{T}{m}, \\ R\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2 \operatorname{tg} \theta = -\frac{T}{m} \operatorname{tg} \theta, \end{cases} \quad (3.2)$$

care este un sistem de două ecuații diferențiale cu două necunoscute, deci rezolvabil în mod univoc.

Prin eliminarea lui  $T$  între cele două relații (3.2) obținem

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0, \quad (3.3)$$

care este ecuația diferențială a mișcării.

În cazul în care unghiul  $\theta_0 = \theta(t_0 = 0)$  are valori mai mici decât cinci grade de arc, sinusul unghiului  $\theta < \theta_0$  poate fi aproximat cu valoarea unghiului exprimată în radiani,

$$\sin \theta \cong \theta$$

și atunci ecuația (3.3) devine

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0, \quad (3.4)$$

care este binecunoscuta *ecuație diferențială a oscilatorului liniar armonic*. Deci, în acest caz (condiții inițiale care să respecte restricția  $\theta_0 < 5^\circ$ ) corpul de masă  $m$  efectuează oscilații libere<sup>2</sup> neamortizate<sup>3</sup>, izocrone, cu amplitudinea și faza inițială depinzând de condițiile inițiale. Soluția ecuației (3.4) poate fi scrisă în cel puțin patru moduri:

$$\theta = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.5 \text{ a})$$

<sup>2</sup> În sensul că oscilațiile nu sunt forțate.

<sup>3</sup> Oscilațiile au loc în vid (nu există frecare între corp și mediul în care acesta se mișcă – observație valabilă și pentru tijă), iar articulația este ideală (nu există pierderi de energie prin frecare în articulație).

$$\theta = B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t, \quad (3.5 \text{ b})$$

$$\theta = C \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.5 \text{ c})$$

și

$$\theta = D \cos(\omega_0 t + \psi), \quad (3.5 \text{ d})$$

unde  $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$ , iar constantele arbitrare de integrare  $A_1$  și  $A_2$ ,  $B_1$  și  $B_2$ ,  $C$  și  $\varphi$  și respectiv  $D$  și  $\psi$ , se determină din condițiile inițiale. De exemplu, dacă vom considera soluția (3.5 c), avem

$$\theta_0 = \theta(t_0 = 0) = C \sin \varphi$$

și

$$\dot{\theta}_0 = \omega_0 C \cos \varphi = 0.$$

Cum  $C$  nu poate fi zero, rezultă  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  și atunci, din  $\theta_0 = C \sin \varphi$  rezultă  $C = \theta_0$ , deci soluția finală va fi

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

În acest caz, perioada mișcării oscilatorii armonice a pendulului este

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (3.6)$$

și depinde doar de lungimea pendulului (tije),  $R$ , fiind independentă de amplitudinea mișcării (cu alte cuvinte, oricare ar fi amplitudinea mișcării oscilatorii armonice libere și neamortizate, dacă ea îndeplinește condiția de oscilații mici,  $\theta_0 < 5^\circ$ , perioada rămâne tot timpul aceeași; astfel de oscilații se numesc *izocrone* sau *tautocrone* <sup>4</sup>).

Să studiem acum cazul în care unghiul  $\theta_0$  are o valoare oarecare. Evident, în această situație ecuația diferențială a mișcării nu mai poate fi integrată imediat și, în plus, trebuie să vedem dacă mișcarea mai rămâne una oscilatorie. Pentru aceasta vom transforma derivata de ordinul doi în

<sup>4</sup> În limba greacă *tauto* înseamnă același/aceeași, iar *chronos* înseamnă timp.

raport cu timpul a unghiului  $\theta$  într-o derivată de ordinul unu în raport cu  $\theta$ , astfel:

$$\ddot{\theta} \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}.$$

Înlocuind  $\ddot{\theta}$  astfel transformat în ecuația (3.3) obținem

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -\frac{2g}{R} \sin \theta$$

și separând variabilele, avem

$$d\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R} \sin \theta d\theta,$$

de unde,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

adică,

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0)}. \quad (3.7)$$

Cum  $\dot{\theta}$  trebuie să fie o mărime reală (ea exprimă de fapt viteza unghiulară, care este o mărime fizică observabilă/măsurabilă), cantitatea de sub radical trebuie să fie o mărime pozitivă,

$$(\cos \theta - \cos \theta_0) \geq 0,$$

ceea ce conduce la

$$|\theta| \leq \theta_0.$$

Observăm așadar că mișcarea în acest caz are două *puncte de întoarcere*, anume,

$$\theta_1 = -\theta_0, \quad \theta_2 = +\theta_0.$$

Să analizăm în continuare modul de variație a mărimilor  $\theta = \theta(t)$  și  $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$ . Pentru aceasta vom considera axa verticală  $Ox$  ca axă de zero pentru valorile unghiului  $\theta$ : unghiurile măsurate pe arcul de cerc spre dreapta le vom considera pozitive, iar unghiurile măsurate spre stânga, negative.

Vom începe analiza pornind din punctul inițial, caracterizat de  $\theta_i = \theta_0$  și  $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_0 = 0$ . Pentru a ușura analiza vom nota punctul de plecare

cu litera  $A$ , punctul de trecere prin zero a unghiului  $\theta$  cu  $C$  ș.a.m.d. (vezi Fig. III.2).

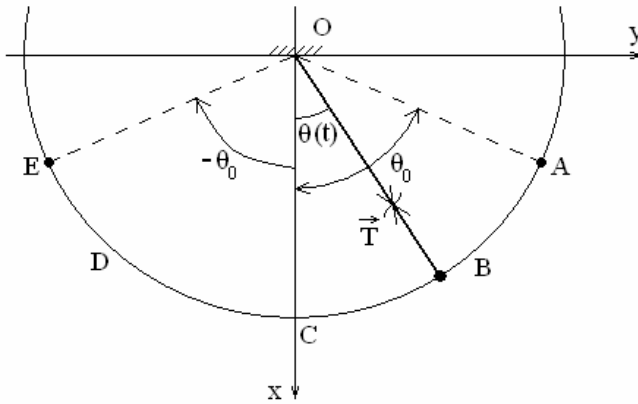


Fig. III.2

În intervalul  $A \rightarrow B \rightarrow C$  unghiul  $\theta$  scade prin valori pozitive până la zero, iar  $\dot{\theta}$  (viteza unghiulară) scade de la zero (cât era în  $A$ ) la valoarea minimă,  $\dot{\theta}_{\min}$ , prin valori negative. De acest lucru ne putem convinge ușor dacă vom utiliza definiția derivatei unei funcții într-un punct și desenul ajutător din Fig. III.3. Într-adevăr,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} < 0.$$

În intervalul  $C \rightarrow D \rightarrow E$  unghiul  $\theta$  scade prin valori negative până la cea mai mică valoare a sa,  $- \theta_0$  (corpul nu poate trece de acest punct, mergând spre valori mai negative ale lui  $\theta$ , deoarece punctul  $\theta = - \theta_0$  este punct de întoarcere), iar  $\dot{\theta}$  crește, tot prin valori negative (după cum se poate constata în urma unei analize ca mai sus) până la valoarea zero.

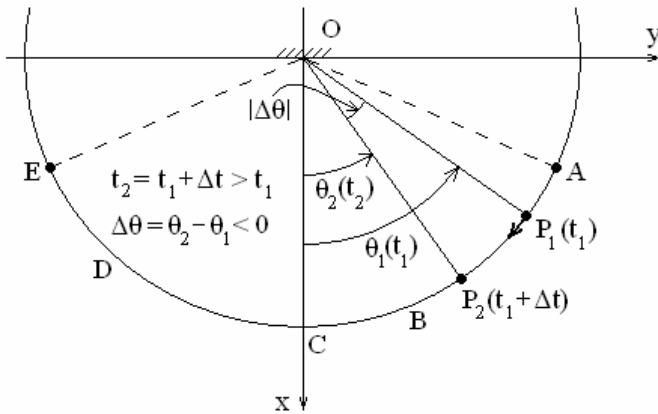


Fig. III.3

Pe intervalul  $E \rightarrow D \rightarrow C$  unghiul  $\theta$  crește prin valori negative până la valoarea zero, iar  $\dot{\theta}$  crește (de data aceasta prin valori pozitive) până la valoarea maximă,  $\dot{\theta}_{\max}$ , pe care o atinge în  $C$ . În intervalul următor,  $C \rightarrow B \rightarrow A$ , unghiul  $\theta$  crește prin valori pozitive până la valoarea maximă (inițială),  $\theta_0$  și nu poate trece de acest punct (mergând spre valori mai mari decât  $\theta_0$ ) deoarece și punctul  $\theta = +\theta_0$  este punct de întoarcere. Viteza unghiulară,  $\dot{\theta}$  scade în acest interval de la valoarea sa maximă la zero (prin valori pozitive). Din acest moment, mișcarea se reia exact la fel, de unde tragem concluzia că, și în acest caz, mișcarea rămâne una oscilatorie.

Această analiză poate fi completată cu cea realizată în termeni energetici. Dacă vom considera ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională planul perpendicular pe axa  $Ox$ , care trece prin punctul  $C$ , atunci, deoarece legătura este ideală (nu există pierderi energetice prin frecare și nici prin alte mecanisme), energia potențială maximă din punctul  $A$  este „cheltuită” pe seama realizării lucrului mecanic de către câmpul gravitațional, care duce la creșterea energiei cinetice a corpului de masă  $m$  (nulă în punctul  $A$ ) la valoarea sa maximă (valoare numeric egală cu aceea a lucrului mecanic realizat de câmpul gravitațional și egală cu energia potențială din punctul inițial  $A$ ) din punctul  $C$ , unde energia potențială este nulă. Neexistând pierderi de

energie și fiind implicat un câmp conservativ (câmpul gravitațional) energia totală a sistemului se conservă. Am putea spune că are loc o „transformare” continuă de energie, între cea cinetică și cea potențială, energii care „trec” succesiv prin valorile nule și maxime (obținute în punctele  $A$ ,  $C$  și  $E$ ) în alternanță (când una dintre ele este maximă, cealaltă este nulă și viceversa). Sinteza acestei analize este prezentată în tabelul următor:

Punctul →	<b>A</b>		<b>C</b>		<b>E</b>		<b>C</b>		<b>A</b>
$\theta(t)$	$\theta_0$	$\begin{matrix} (+) \\ \searrow \end{matrix}$	$0$	$\begin{matrix} (-) \\ \searrow \end{matrix}$	$-\theta_0$	$\begin{matrix} \nearrow \\ (-) \end{matrix}$	$0$	$\begin{matrix} \nearrow \\ (+) \end{matrix}$	$\theta_0$
$\dot{\theta}(t)$	$0$	$\begin{matrix} (-) \\ \searrow \end{matrix}$	$\dot{\theta}_{\min}$	$\begin{matrix} \nearrow \\ (-) \end{matrix}$	$0$	$\begin{matrix} \nearrow \\ (+) \end{matrix}$	$\dot{\theta}_{\max}$	$\begin{matrix} (+) \\ \searrow \end{matrix}$	$0$
$E_c$	$0$	$\nearrow$	$E_{c\max}$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$E_{c\max}$	$\searrow$	$0$
$E_p$	$E_{p\max}$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$E_{p\max}$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$E_{p\max}$

Deoarece (făcând abstracție de semn) mișcarea se face în mod identic pe fiecare din cele patru subintervale ale unui ciclu complet,  $\widehat{ABC} \rightarrow \widehat{CDE} \rightarrow \widehat{EDC} \rightarrow \widehat{CBA}$ , rezultă că perioada mișcării este de patru ori intervalul de timp corespunzător oricăruia din cele patru subintervale. De exemplu, dacă notăm cu  $(\Delta t)_{\widehat{ABC}}$  intervalul de timp necesar corpului pentru a parcurge primul subinterval (arcul de cerc/traiectorie  $\widehat{ABC}$ ), atunci perioada mișcării va fi

$$\tau = 4(\Delta t)_{\widehat{ABC}}.$$

Pentru a-l determina pe  $\tau$  utilizăm relația (3.7). Deoarece, conform tabelului de variație de mai sus,  $\dot{\theta}$  este negativ pe intervalul  $\widehat{ABC}$ , avem

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{R}}(\cos \theta - \cos \theta_0),$$

de unde,

$$dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{R}}(\cos \theta - \cos \theta_0)} = -\sqrt{\frac{R}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

și atunci,



$$\begin{aligned} \tau &= 4(\Delta t)_{ABC} = 4 \int_0^{(\Delta t)_{ABC}} dt = -4 \sqrt{\frac{R}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \\ &= \sqrt{\frac{8R}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

În continuare vom exprima perioada mișcării,  $\tau$ , în două moduri, cel mai des întâlnite în aplicații:

- 1) cu ajutorul integralelor eliptice complete de speța I și
- 2) prin intermediul unei serii de puteri pare ale sinusului amplitudinii unghiulare a mișcării,  $\theta_0$ .

În acest sens, în integrala (3.8) să realizăm următoarea schimbare de variabilă:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi = k \sin \varphi,$$

unde am făcut notația evidentă,  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ .

Avem atunci,

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \varphi d\varphi,$$

de unde,

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

Pentru mărimea  $(\cos \theta - \cos \theta_0)$  care apare în integrandul din (3.8) avem

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_0 &= -(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta_0) = -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = \\ &= -2k^2 \sin^2 \varphi + 2k^2 = 2k^2 (1 - \sin^2 \varphi) = 2k^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Prin înlocuirea acestor relații în (3.8) rezultă

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{8R}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{8R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k \cos\varphi \, d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2} \sqrt{2} k \cos\varphi} = \\ &= 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}. \end{aligned}$$

Am ajuns astfel la o integrală de tipul

$$F(\varphi_0, k) = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

numită *integrală eliptică de speța I*.  $\varphi_0$  se numește *amplitudinea*, iar  $k$  se numește *modulul* integralei eliptice de speța I. Integrala

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

se numește *integrală eliptică completă de speța I*. Aceste integrale nu au primitive exprimabile prin funcții analitice cunoscute și, de obicei, ele se tablează.

Cu ajutorul acestei integrale, perioada pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, de amplitudine oarecare se poate scrie astfel

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} K(k) = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}. \quad (3.9)$$

Să găsim acum cea de-a doua formă pentru  $\tau$ , cea exprimabilă ca o serie de puteri. Pentru această să observăm că, excluzând valoarea singulară  $\theta_0 = \pi$ , avem  $|k| < 1$ . Atunci, dezvoltând în serie integrandul din (3.9) obținem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \dots = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} \sin^{2n} \varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Într-adevăr, notând  $k^2 \sin^2 \varphi = z$ , pentru funcția  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$  avem următoarea dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului  $z = z_0$ :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{df}{dz} \right)_{z=z_0} (z - z_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 f}{dz^2} \right)_{z=z_0} (z - z_0)^2 + \dots$$

Dacă  $z_0 = 0$ , atunci dezvoltarea în serie se numește de tip *Mac-Laurin* și se scrie astfel

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{df}{dz} \right)_{z=0} z + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 f}{dz^2} \right)_{z=0} z^2 + \dots$$

În cazul nostru,  $f(0) = 1$ ,  $\frac{df}{dz} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-z)^{3/2}}$ ,  $\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{(1-z)^{5/2}}$  etc.

Înlocuind, obținem

$$\begin{aligned}
f(z) &= 1 + \frac{1}{2} z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} z^n = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} z^n,
\end{aligned}$$

cea ce justifică relația (3.10). Deoarece  $|k| < 1$ , seria de puteri (3.10) este uniform și absolut convergentă pe intervalul  $(0, \pi)$ . Aceasta ne permite să o integrăm termen cu termen (operatorii de integrare și sumare comută în acest caz, adică integrala seriei este egală cu seria integralelor). Pentru a face acest lucru să deducem mai întâi o formulă utilă, numită *formula lui Wallis*.

Fie în acest sens integralele de forma

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi,$$

unde  $n$  este un număr întreg.

Putem scrie

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \, d\varphi - \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = I_{2n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

și integrând prin părți ultimul termen din relația de mai sus,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\left(\frac{1}{2n-1} \sin^{2n-1} \varphi\right) = \frac{1}{2n-1} \left[ \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2n-1} \sin^{2n-1} \varphi\right) (-\sin \varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi, \end{aligned}$$

avem

$$I_{2n} = I_{2n-2} - \frac{1}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = I_{2n-2} - \frac{1}{2n-1} I_{2n},$$

de unde rezultă următoarea relație de recurență:

$$2nI_{2n} = (2n-1)I_{2n-2}.$$

Dând valori lui  $n$  de la 1 la  $n$  obținem

$$\begin{array}{ll} n=1; & 2 \cdot I_2 = I_0 \\ n=2; & 4I_4 = 3I_2 = \frac{1 \cdot 3}{2} I_0 \\ n=3; & 6I_6 = 5I_4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} I_0 \\ \vdots & \vdots \\ n=n-1; & 2(n-1)I_{2n-2} = (2n-3)I_{2n-4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-4)} I_0 \\ n=n; & 2nI_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)} I_0, \end{array}$$

de unde,

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} I_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

ceea ce reprezintă formula căutăată (a lui Wallis).

Ținând cont de aceste rezultate, putem scrie

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} \sin^{2n} \varphi \right] d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi \right] = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} \right] \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} \right] \right\} \end{aligned}$$

și atunci, pentru perioada pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, cu amplitudine mare (oarecare) se obține expresia

$$\begin{aligned} \tau &= 4\sqrt{\frac{R}{g}} K(k) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} \right] \right\} = \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} \right] \right\} = T_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} \right] \right\} = \\ &= T_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Acest rezultat este exact (nu am făcut până aici nici un fel de aproximații). Dacă amplitudinea oscilațiilor satisface relația  $\theta_0 < \pi/2$ , atunci putem dezvolta în serie și  $\sin \frac{\theta_0}{2}$ . Folosind binecunoscuta dezvoltare în serie a funcției trigonometrice sinus,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1},$$

avem

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \left( \frac{\theta_0}{2} \right)^{2l+1} = \frac{\theta_0}{2^1 \cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots$$

Întrucât de multe ori în practică este suficient să ne oprim la primii trei termeni ai acestei dezvoltări în serie, să determinăm în cele ce urmează coeficienții numerici  $C_i$ , ( $i=1, 2, 3, 4, \dots$ ) ai primilor patru termeni ce apar ca puteri pare ale amplitudinii de oscilație  $\theta_0$  din dezvoltarea în serie a lui  $\tau$ . Primul coeficient este<sup>5</sup>  $C_1=1$ , căci, conform relației (3.11) avem

$$\begin{aligned} \tau &= T_0 (C_1 + C_2 \theta_0^2 + C_3 \theta_0^4 + C_4 \theta_0^6 + \dots) = T_0 (1 + C_2 \theta_0^2 + C_3 \theta_0^4 + C_4 \theta_0^6 + \dots) \approx \\ &\approx T_0 (1 + C_2 \theta_0^2 + C_3 \theta_0^4 + C_4 \theta_0^6). \end{aligned}$$

Pentru a determina ceilalți trei coeficienți,  $C_2$ ,  $C_3$  și  $C_4$  trebuie să observăm că la coeficienții numerici ai diverselor puteri pare ale lui  $\theta_0$  contribuie mai mulți termeni ai seriei (3.11), după cum urmează: pentru  $C_2$  contribuie doar termenul corespunzător lui  $n=1$ , pentru  $C_3$  termenii corespunzători lui  $n=1$  și  $n=2$ , iar pentru  $C_4$  termenii corespunzători lui  $n=1$ ,  $n=2$  și  $n=3$ . Astfel, din relația (3.11) avem

$$\begin{aligned} \tau &= T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right\} \approx \\ &\approx T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cum

<sup>5</sup> Lăsând la o parte factorul  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ .

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2^1 \cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots \approx \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{48} + \frac{\theta_0^5}{3840}, \quad (3.13)$$

putem scrie

$$\sin^2 \frac{\theta_0}{2} = \left( \frac{\theta_0}{2^1 \cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots \right)^2 = \frac{\theta_0^2}{4} + \mathcal{O}(\theta_0^4). \quad (3.14)$$

Deci, ținând cont de relația (3.12), coeficientul lui  $\theta_0^2$  va fi

$$C_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Pentru a-l determina pe  $C_3$  trebuie să utilizăm și expresia lui  $\sin^4 \frac{\theta_0}{2}$ . Din relația (3.13) rezultă

$$\begin{aligned} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} &= \left( \frac{\theta_0}{2^1 \cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots \right)^4 = \\ &= \left( \frac{\theta_0}{2^1 \cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots \right)^2 \times \\ &\times \left( \frac{\theta_0}{2^1 \cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots \right)^2 = \left( \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{48} + \frac{\theta_0^5}{3840} + \mathcal{O}(\theta_0^7) \right)^2 \times \\ &\times \left( \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{48} + \frac{\theta_0^5}{3840} + \mathcal{O}(\theta_0^7) \right)^2 = \left( \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{\theta_0^6}{2304} - 2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\theta_0^3}{48} + 2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\theta_0^5}{3840} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) \times \\ &\times \left( \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{\theta_0^6}{2304} - 2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\theta_0^3}{48} + 2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\theta_0^5}{3840} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) = \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) \times \\ &\times \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) = \frac{\theta_0^4}{16} - \frac{\theta_0^6}{96} + \mathcal{O}(\theta_0^8). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Scriind (3.14) astfel încât să punem în evidență coeficienții lui  $\theta_0^4$  și  $\theta_0^6$ ,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} &= \left( \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{3! \cdot 2^3} + \frac{\theta_0^5}{5! \cdot 2^5} - \frac{\theta_0^7}{7! \cdot 2^7} + \dots \right)^2 = \left( \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{48} + \frac{\theta_0^5}{3840} + \mathcal{O}(\theta_0^7) \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{\theta_0^6}{2304} - 2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\theta_0^3}{48} + 2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\theta_0^5}{3840} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) = \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

pentru coeficientul  $C_3$  rezultă următoarea valoare:

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot \left( -\frac{1}{48} \right) + \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{16} = \frac{11}{3072},$$

unde am avut în vedere că, în acord cu (3.12), coeficienții lui  $\sin^2 \frac{\theta_0}{2}$  și  $\sin^4 \frac{\theta_0}{2}$  sunt  $\frac{1}{4}$  și respectiv  $\frac{9}{64}$ .

În sfârșit, pentru a-l determina pe  $C_4$  va trebui să considerăm și contribuția lui  $\sin^6 \frac{\theta_0}{2}$  la termenul în  $\theta_0^6$ :

$$\begin{aligned} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} &= \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right)^3 = \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right)^2 \times \\ &\times \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) = \left( \frac{\theta_0^4}{16} - \frac{\theta_0^6}{96} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) \times \\ &\times \left( \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} + \frac{\theta_0^6}{1440} + \mathcal{O}(\theta_0^8) \right) = \frac{\theta_0^6}{64} + \mathcal{O}(\theta_0^8). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Atunci, ținând cont de (3.12), (3.16), (3.15) și (3.17), pentru  $C_4$  rezultă valoarea

$$C_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1440} + \frac{9}{64} \cdot \left( -\frac{1}{96} \right) + \frac{225}{2304} \cdot \frac{1}{64} = \frac{173}{737280}.$$

Așadar, pentru  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$  putem scrie că



$$\begin{aligned} \tau &= 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \dots \right) \approx \\ &\approx 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dacă amplitudinea oscilațiilor este mică ( $\theta_0 < 5^\circ$ ) termenii care conțin  $\theta_0^2$ ,  $\theta_0^4$  etc. sunt neglijabili în raport cu unitatea și se reobține binecunoscuta formulă (aproximativă) a perioadei oscilațiilor izocrone,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (3.19)$$

Această formulă este utilizată în construcția ceasornicelor astronomice, pentru care  $\theta_0 = 1^\circ 30'$ .

În ceea ce privește forța de legătură (tensiunea din tijă),  $\vec{T}$ , trebuie precizat faptul că în cadrul acestui formalism ea trebuie cunoscută de la bun început (măcar ca direcție și sens), căci altfel problema nu poate fi rezolvată (această forță trebuie utilizată pentru scrierea expresiei matematice a principiului fundamental al mecanicii, care stă la baza formalismului clasic-newtonian). Aceste două caracteristici ale lui  $\vec{T}$  (direcția și sensul) rezultă din Fig. III.1, iar modulul poate fi determinat utilizând relațiile (3.1), (3.3) și (3.7) astfel:

Din a doua relație (3.1) rezultă

$$|\vec{T}| = T = -\frac{m\ddot{y}}{\sin \theta} = -\frac{m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{\sin \theta},$$

în care, dacă ținem cont de (3.3) și (3.7) găsim

$$\begin{aligned} T &= -\frac{m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{\sin \theta} = \\ &= -\frac{m \left\{ R \left( -\frac{g}{R} \sin \theta \right) \cos \theta - R \left[ \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right] \sin \theta \right\}}{\sin \theta} = \quad (3.20) \\ &= mg (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0). \end{aligned}$$

Cu aceasta, problema este rezolvată în cadrul formalismului clasic-newtonian. Să abordăm acum aceeași problemă utilizând formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I.

### III.2. Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I

În cadrul acestui formalism problema se enunță astfel: date fiind masa corpului, forțele aplicate corpului, ecuațiile analitice ale legăturilor și condițiile inițiale compatibile cu legăturile, să se afle legea de mișcare a corpului, forțele de legătură și eventual elementele mișcării (traectoria, perioada mișcării etc.).

După cum putem observa, în cadrul acestui formalism (ca și în toate celelalte din cadrul mecanicii analitice) nu este necesară cunoașterea *a priori* a forțelor de legătură, acestea apărând aici ca necunoscute ale problemei, determinându-se *a posteriori*. De altfel, acesta este și principalul avantaj al formalismelor mecanicii analitice. În cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I, cunoașterea forțelor de legătură este înlocuită de cunoașterea expresiilor analitice ale legăturilor (date ori sub formă explicită, ori sub formă implicită). De cele mai multe ori forțele de legătură nu sunt cunoscute de la început și determinarea lor este adesea deosebit de dificilă. În cazurile în care aceste forțe nu pot fi cunoscute încă de la bun început, formalismul clasic (newtonian) nu poate furniza soluția problemei. Singura rezolvare nu poate veni decât dinspre unul din formalismele mecanicii analitice.

În cele ce urmează vom rezolva această problemă în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I. Algoritmul de rezolvare a unei probleme în cadrul acestui formalism este următorul:

- i) identificarea forțelor aplicate  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), unde  $N$  reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem și exprimarea lor pe componente în raport cu un referențial (sau mai multe) ales(e) în mod convenabil;
- ii) stabilirea condițiilor inițiale compatibile cu legăturile  $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0)$  și  $\dot{\vec{r}}_{i0} = \dot{\vec{r}}_i(t_0)$ ;

- iii) identificarea legăturilor și determinarea expresiilor analitice ale acestora,  $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0$ , ( $k = \overline{1, s}$ ), unde  $s$  reprezintă numărul de legături;
- iv) scrierea și rezolvarea sistemului de  $3N + s$  ecuații (cele  $3N$  ecuații de speța I ale lui Lagrange,  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i f_k$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) și cele  $s$  expresii ale legăturilor) cu cele  $3N + s$  necunoscute (cele  $3N$  coordonate  $x_i = x_i(t)$ ,  $y_i = y_i(t)$  și  $z_i = z_i(t)$  și cele  $s$  constante nenule  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, s}$ );
- v) determinarea forțelor de legătură  $\vec{L}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) utilizând relațiile lor

$$\text{de definiție, } \vec{L}_i = \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i f_k.$$

Înainte de a „aplica” acest algoritm în cazul problemei de față precizăm că formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I este valabil doar pentru legăturile ideale. Evident, această situație este extrem de restrictivă, ea fiind o idealizare care nu își are corespondent în realitate. Totuși, în măsura în care forțele de frecare sunt cunoscute<sup>6</sup>, acestea pot fi considerate ca și forțe aplicate și adăugate acestora din urmă.

Față de sistemul de referință ales ca la început (pentru formalismul newtonian), singura forță aplicată (forța de greutate) are următoarele componente,

---

<sup>6</sup> De obicei forțele de frecare se determină pe cale empirică. De exemplu, în cazul mișcării relative de translație a două corpuri, se determină pe cale experimentală că forța de frecare este proporțională cu reacțiunea normală,  $\vec{F}_f = \mu \vec{N}$ , coeficientul de proporționalitate  $\mu$  fiind numit *coeficient de frecare* (static sau la alunecare). În cazul deplasării unui corp într-un fluid vâcos, tot pe cale experimentală se găsește că forța de frecare la viteze mici (în regim laminar) este proporțională cu puterea întâi a vitezei relative de mișcare a corpului față de mediu,  $\vec{F}_f = -k \vec{v}_r$ , unde  $k$  este un coeficient care depinde de vâscozitatea fluidului în care are loc mișcarea și de forma secțiunii transversale a corpului, iar la viteze mari (regim turbulent sau de tranziție) aceeași forță este proporțională cu pătratul vitezei relative,  $\vec{F}_f = -k |\vec{v}_r|^2 \hat{v}$ , în care  $\hat{v}$  este versorul direcției de mișcare a corpului, iar  $k$  este o „constantă” ce depinde de densitatea mediului în care are loc mișcarea, de aria secțiunii transversale a corpului și de un așa-numit *coeficient de formă* al corpului (notat de obicei cu  $C_x$  și strâns legat de calitățile „aerodinamice” ale corpului).

$$\vec{G} = (mg, 0, 0),$$

iar condițiile inițiale sunt, evident, aceleași cu cele din cazul formalismului clasic (newtonian),

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0) = (R \cos \theta_0, R \sin \theta_0, 0)$$

și

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0.$$

Fără a restrânge deloc generalitatea problemei am considerat că mișcarea are loc în planul  $xOy$  (sau, echivalent, în planul  $z=0$ ).

Corpul de masă  $m$  este supus la două legături, și anume:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (3.21 \text{ a})$$

și

$$f_2(z) = z = 0. \quad (3.21 \text{ b})$$

Deoarece sistemul în discuție conține doar un singur punct material, indicele  $i$  nu-și mai află rostul, iar sistemul de ecuații care conduce la legea de mișcare a corpului de masă  $m$  este

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \sum_{k=1}^2 \lambda_k \text{grad } f_k, \\ f_1(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ f_2(z) = z = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Expresiile gradientilor celor două funcții  $f_k$ , ( $k=1, 2$ ) care exprimă legăturile sunt

$$\text{grad } f_1 = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} \quad (3.23 \text{ a})$$

și respectiv

$$\text{grad } f_2 = 0 \quad (3.23 \text{ b})$$

și atunci, notând  $\lambda_1$  simplu cu  $\lambda$ , sistemul (3.22) devine

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg + 2\lambda x, \\ m\ddot{y} = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

care este un sistem de patru ecuații cu tot atâtea necunoscute  $(x, y, z, \lambda)$ .

Relația (3.24 c) permite parametrizarea legăturii  $f_1(x, y)$  sub forma

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \end{cases}$$

și atunci, primele două ecuații ale sistemului (3.24) pot fi rescrise astfel:

$$\begin{cases} m(-R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta) = mg + 2\lambda R \cos \theta, \\ m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) = 2\lambda R \sin \theta. \end{cases} \quad (3.25)$$

În acest fel problema este simplificată, întrucât totul revine acum la a rezolva un sistem de două ecuații diferențiale cu două necunoscute: funcția  $\theta = \theta(t)$  și scalarul nenul  $\lambda$ . Trecând termenul  $mg$  din membrul drept al primei ecuații din (3.25) în membrul stâng și împărțind apoi cele două ecuații, obținem

$$\frac{-R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta - g}{R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

de unde rezultă o ecuație diferențială de ordinul al doilea pentru  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0, \quad (3.3')$$

care coincide cu ecuația (3.3) obținută în cadrul formalismului clasic-newtonian.

De aici încolo rezolvarea problemei urmează exact aceeași cale ca în cadrul primului formalism (newtonian). Singura diferență este modalitatea de determinare a forței de legătură,  $\vec{L}$ , care aici nu este cunoscută – inițial – nici măcar ca direcție și sens (și, cu atât mai mult, ca mărime/modul). Aceasta se poate determina din relația ei de definiție,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \text{grad } f_k = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 = \lambda \text{grad } f_1 = \\ &= 2\lambda x \vec{i} + 2\lambda y \vec{j} = 2\lambda R (\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta). \end{aligned}$$

Modulul acestei forțe (de legătură) este

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = L = \sqrt{4\lambda^2 R^2 \cos^2 \theta + 4\lambda^2 R^2 \sin^2 \theta} = 2\lambda R, \quad (3.26)$$

unde  $\lambda$  poate fi determinat din relația (3.25 b),

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{2R \sin \theta} = \\ &= \frac{m \left\{ R \left( -\frac{g}{R} \sin \theta \right) \cos \theta - R \left[ \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right] \sin \theta \right\}}{2R \sin \theta} = \\ &= \frac{mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta)}{2R}, \end{aligned}$$

în care am utilizat relațiile (3.3') și (3.7). Așadar, pentru mărimea forței de legătură rezultă valoarea

$$L = 2\lambda R = mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta), \quad (3.27)$$

expresie care, până la o diferență de semn (care va fi explicată mult mai ușor și cu un grad sporit de evidență în cadrul formalismului următor, cel al ecuațiilor Lagrange de speța a II-a) coincide cu cea a lui  $|\vec{T}| = T$  dată de relația (3.20). Rezultatul este corect, deoarece nu putem spune că am obținut pentru o aceeași mărime (modulul forței de legătură) două valori diferite, prin două procedee diferite, întrucât  $|L| = |T|$ . Acest lucru reiese imediat, având în vedere că, în mod riguros matematic, relația (3.26) se scrie astfel:

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \equiv L = \sqrt{4\lambda^2 R^2 \cos^2 \theta + 4\lambda^2 R^2 \sin^2 \theta} = \\ &= |2\lambda R|, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la relația evidentă,

$$|L| = mg |2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta| = mg |3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0| = |T|,$$

adică, exprimată în  $N$  (newtoni) forța de legătură are o *aceeași valoare numerică*. Diferența de semn apare datorită faptului că vectorii  $\vec{T}$  și  $\vec{L}$  au sensuri opuse (gradientul, având direcția și sensul normalei exterioare la curba ce reprezintă legătura (traietoria), este opus ca sens vectorului  $\vec{T}$  așa cum a fost el considerat, adică având sensul normalei interioare la traiectorie (înspre centrul de curbură) – vezi Fig. III.1).

### III.3. Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a

În cadrul acestui formalism, problema se enunță la fel ca în cazul precedent, diferențe apărând doar în ceea ce privește modul concret de rezolvare a problemei. O diferență notabilă, chiar și față de formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I, este faptul că, în acest caz (ca și pentru formalismele care vor urma) nu este nevoie să cunoaștem în mod concret nici forțele de legătură (ce nu era nevoie să fie cunoscute nici în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), dar nici măcar expresiile analitice ale legăturilor (lucru esențial totuși pentru formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I), ci doar *numărul* acestor legături. Astfel, în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a (formalism bazat – așa după cum îi spune și numele – pe ecuațiile Lagrange de speța a II-a), algoritmul de rezolvare a unei probleme oarecare este următorul:

- i) identificarea forțelor aplicate  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), unde  $N$  reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem;
- ii) stabilirea condițiilor inițiale (compatibile cu legăturile) în spațiul real,  $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0)$  și  $\dot{\vec{r}}_{i0} = \dot{\vec{r}}_i(t_0)$ ;
- iii) identificarea legăturilor (aici este esențial numărul  $s$  al acestora și mai puțin expresiile lor analitice), a numărului gradelor de libertate efective ale sistemului,  $n = 3N - s$  și alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate,  $q_j = q_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;
- iv) stabilirea „relațiilor de legătură” între spațiul real și spațiul configurațiilor,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \equiv \vec{r}_i(q; t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), inversarea lor,  $q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \equiv q_j(\vec{r}; t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) și determinarea condițiilor inițiale în spațiul configurațiilor,  $q_{j0} = q_j(t_0)$ ,  $\dot{q}_{j0} = \dot{q}_j(t_0)$ , ( $j = \overline{1, n}$ );
- v) determinarea, după caz, a energiei cinetice  $T = T(q, \dot{q}, t)$  și a forțelor generalizate  $Q_j = Q_j(q, \dot{q}, t)$  – în cazul sistemelor pentru

care nu poate fi definit un potențial, sau a funcției Lagrange  $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t)$  – pentru sistemele naturale<sup>7</sup>;

vi) scrierea și rezolvarea ecuațiilor Lagrange de speța a II-a,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = \overline{1, n}),$$

determinând astfel, cu ajutorul condițiilor inițiale din spațiul configurațiilor, legea de mișcare în acest spațiu,  $q_j = q_j(t)$ ,  $(j = \overline{1, n})$ , care reprezintă totodată ecuațiile parametrice ale traiectoriei generalizate a mișcării în spațiul configurațiilor;

vii) determinarea legii de mișcare în spațiul real,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j(t); t) \equiv \vec{r}_i(t)$ ,  $(i = \overline{1, N}; j = \overline{1, n})$ ;

viii) aflarea forțelor de legătură din expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii pentru sistemele cu legături,

$$\vec{L}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \quad (i = \overline{1, N}).$$

În continuare vom utiliza acest algoritm pentru a rezolva problema pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, pentru o valoare arbitrară a amplitudinii de oscilație.

Singura forță aplicată sistemului este forța de greutate,  $\vec{G} = (mg, 0, 0)$ , ale cărei componente au fost exprimate în raport cu sistemul de referință  $xOy$  din Fig. III.4.

Condițiile inițiale în spațiul real al mișcării sunt, evident, aceleași cu cele din cazul formalismelor anterioare (clasic-newtonian și cel al ecuațiilor Lagrange de speța I),

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0) = (R \cos \theta_0, R \sin \theta_0, 0)$$

și

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0,$$

unde, fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic, am considerat că mișcarea are loc în planul  $z = 0$ .

<sup>7</sup> Un sistem mecanic se numește *natural* dacă pentru el poate fi definit un potențial (simplu sau generalizat).



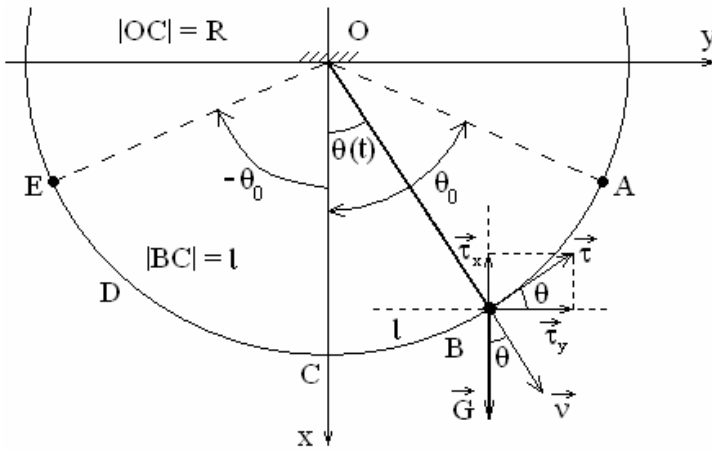


Fig. III.4

Mișcarea este afectată de două legături (cele deja precizate în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), astfel că sistemul are doar un singur grad de libertate,  $n = 3N - s = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ . Acestui grad de libertate  $i$  se asociază o coordonată generalizată a cărei alegere nu este unică. De exemplu, ca și coordonată generalizată putem considera coordonata  $x$  a corpului, sau coordonata  $y$ , sau lungimea de arc  $l$  (măsurată de-a lungul traiectoriei în raport cu un punct de referință arbitrar (dar convenabil) ales, de exemplu în raport cu punctul  $C$ ), sau, în fine, unghiul  $\theta$  dintre axa  $Ox$  și tijă. În cazul general, alegerea coordonatelor generalizate depinde de experiența (celui care studiază problema) în rezolvarea problemelor de mecanică analitică, de „fler”, de intuiție și, în principiu, trebuie să țină seama de simetria și particularitățile sistemului, astfel încât coordonatele generalizate alese să conducă la ecuații Lagrange de speța a II-a cât mai ușor de rezolvat. Oricum, totdeauna este posibilă o transformare „punctuală” în spațiul configurațiilor, care permite alegerea unui alt set de coordonate generalizate în locul celui inițial,  $q_j \rightarrow q_j' = q_j'(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), dacă în primele coordonate rezolvarea ecuațiilor Lagrange de speța a II-a se dovedește a fi dificilă sau chiar imposibilă (din punct de vedere analitic).

Așadar, ca și coordonată generalizată asociată unicului grad de libertate al corpului, vom alege coordonata unghiulară  $\theta$ .

Relațiile care fac legătura între coordonatele  $x$  și  $y$  ale spațiului real și coordonata generalizată  $\theta$  (a spațiului unidimensional al configurațiilor) sunt

$$x = R \cos \theta,$$

$$y = R \sin \theta.$$

Condițiile inițiale în spațiul configurațiilor sunt

$$\theta(t_0 = 0) = \theta_0,$$

$$\dot{\theta}(t_0 = 0) = \dot{\theta}_0 = 0.$$

Întrucât acesta este un sistem natural (pentru el poate fi definit un potențial și deci o funcție Lagrange) nu suntem nevoiți să recurgem la varianta mai complicată a ecuațiilor Lagrange în formularea cu energia cinetică  $T = T(q, \dot{q}, t)$  și forțele generalizate  $Q_j = Q_j(q, \dot{q}, t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.28)$$

unde  $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  sunt forțele generalizate, ci o vom face uz de ecuațiile

Lagrange de speța a II-a în formularea cu funcția Lagrange  $L = T - V$ , unde potențialul  $V$  (care, de la caz la caz, poate fi un potențial simplu,  $V = V(\vec{r}_i, t)$ , unul generalizat (sau depinzând de viteze),  $V = V(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$ , sau chiar o energie potențială,  $V = V(\vec{r}_i)$ ), în această situație este chiar energia potențială a corpului. Totuși, pentru a indica metoda generală de calcul, nu vom scrie direct expresia lui  $V$ , ci o vom deduce conform „rețetei standard”: după cum știm, sistemele naturale sunt acelea pentru care poate fi definit un potențial, adică acele sisteme pentru care forțele aplicate sunt forțe potențiale (forțe care derivă dintr-un potențial),

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_i V(\vec{r}_i, t) \stackrel{\text{formal}}{=} -\frac{dV}{d\vec{r}_i}.$$

Atunci, diferențiala potențialului este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate sistemului, luat cu semn schimbat,

$$dV = -\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

În cazul de față, având în vedere că singura forță aplicată este forța de greutate  $\vec{G} = (mg, 0, 0)$ , rezultă

$$dV = -mgdx,$$

de unde, prin integrare, obținem

$$V = -mgx + V_0.$$

Constanta arbitrară de integrare  $V_0$  se determină prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru potențial (energia potențială). Într-adevăr, deoarece  $\text{grad}(V + V_0) = \text{grad} V$ , unde  $V_0$  este o constantă, rezultă că niciodată un potențial (o energie potențială) nu este univoc determinat(ă). Cu alte cuvinte, avem întotdeauna deplina libertate în a alege (în mod convenabil) poziția nivelului de referință al potențialului (energiei potențiale). De obicei, constanta  $V_0$  (și implicit poziția nivelului de referință pentru energia potențială) se alege astfel încât expresia matematică a funcției care exprimă acest potențial (energie potențială) să fie cea mai simplă cu putință. În cazul de față, dacă luăm

$$V(x=0) = 0,$$

adică dacă vom considera nivelul de referință pentru energia potențială în planul  $yOz$ , sau, echivalent,  $x=0$ , atunci  $V_0 = 0$  și energia potențială se va scrie

$$V = V(x) = -mgx. \quad (3.29)$$

Cum  $x = R \cos \theta$ , rezultă că expresia potențialului  $V$  în coordonata generalizată  $\theta$  este

$$V(\theta) = -mgR \cos \theta.$$

Energia cinetică a corpului va fi (conform definiției generale,

$$T = \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\vec{r}}_i \right|^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2):$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2, \quad (3.30)$$

iar pentru funcția Lagrange a sistemului obținem expresia

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta. \quad (3.31)$$

Ecuția Lagrange de speța a II-a pentru sistemul analizat este

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (3.32)$$

Din relația (3.31) rezultă că  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$  și atunci  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (mR^2 \dot{\theta}) = mR^2 \ddot{\theta}$ , iar  $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR \sin \theta$ . Așadar, ecuația Lagrange devine

$$mR^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0, \quad (3.33)$$

adică aceeași ecuație diferențială pentru variabila unghiulară  $\theta$  ca și cea obținută prin metodele specifice celorlalte două formalisme analizate anterior.

De aici încolo rezolvarea problemei se face în mod identic ca și prin formalismul clasic sau cel al ecuațiilor Lagrange de speța I, singura deosebire apărând în ceea ce privește determinarea forței de legătură, care, în cadrul acestui formalism rezultă din expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii sistemelor cu legături,

$$\vec{L}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (3.34)$$

Înainte de a determina forța de legătură, facem observația că, pentru a-l determina pe  $\dot{\theta}$  în acest caz<sup>8</sup> nu mai suntem nevoiți să apelăm la artificii matematice utilizat în cadrul formalismului clasic-newtonian pentru exprimarea lui  $\ddot{\theta}$  ca derivata totală în raport cu  $\theta$  a lui  $\dot{\theta}^2/2$ ,  $\dot{\theta}$  putând fi obținut prin intermediul unui element specific formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, anume, cu ajutorul unei integrale prime a ecuației Lagrange (3.32). Într-adevăr, deoarece timpul nu apare explicit în expresia funcției Lagrange (3.31), rezultă că ecuația (3.32) admite integrala primă

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \text{const.},$$

care este forma particulară (pentru cazul sistemului fizic analizat) a integralei prime

$$\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{const.}, \quad (j = \overline{1, n})$$

<sup>8</sup> În cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a.

a ecuațiilor Lagrange de speța a II-a,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), în cazul în care lagrangeanul sistemului nu depinde explicit de timp, și care, după cum știm, în cazul legăturilor scleronome, exprimă energia totală a sistemului (care se conservă).

Cum  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$ , integrala primă  $\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \text{const.}$  se va scrie astfel:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L &= mR^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = \text{const.} = E, \end{aligned}$$

unde  $E$  reprezintă energia totală a sistemului. Constanta din relația de mai sus (care este chiar energia totală  $E$ ) se poate determina utilizând condițiile inițiale,  $\theta(t_0 = 0) = \theta_0$  și  $\dot{\theta}(t_0 = 0) = \dot{\theta}_0 = 0$ . Rezultă

$$\text{const.} = E = -mgR \cos \theta_0$$

și atunci integrala primă devine

$$\frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = -mgR \cos \theta_0,$$

de unde,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

ceea ce conduce la expresia lui  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (q.e.d).$$

În cazul general, pentru rezolvarea unei probleme oarecare<sup>9</sup>, se poate apela și la cel de-al doilea tip de integrale prime a ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, anume, acela corespunzător variabilelor ciclice: dacă funcția lui Lagrange nu depinde explicit de o anumită coordonată generalizată (coordonată care, în această situație, se numește *ciclică*), atunci impulsul generalizat corespunzător acelei variabile ciclice se conservă.

<sup>9</sup> Nu este cazul problemei de față.

Într-adevăr, să presupunem că  $q_\alpha$  este o coordonată generalizată care satisface această condiție (este variabilă ciclică). Atunci, evident

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

și, utilizând ecuația Lagrange pentru  $q_\alpha$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ , rezultă că

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0, \text{ ceea ce implică}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha = \text{const.},$$

unde, prin definiție,  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$  este impulsul generalizat corespunzător coordonatei generalizate  $q_\alpha$ .

Revenind la determinarea forței de legătură, să observăm că, întrucât în acest caz  $N = 1$ , indicele  $i$  din relația (3.34) nu-și mai are rostul, și, de aceea, pentru problema de față avem

$$\vec{L} = m\vec{r} - \vec{F} = m\vec{r} - \vec{G}. \quad (3.35)$$

Spre deosebire de formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I, unde am determinat mai întâi proiecțiile forței de legătură pe axele de coordonate, acum ne vom raporta la un sistem de axe ortogonale strâns legat de traiectoria corpului, având una din axe tangentă la traiectorie și cu sensul dat de creșterea variabilei unghiulare  $\theta$  (axă al cărei versor l-am notat cu  $\vec{\tau}$  – vezi Fig. III.4) iar cea de-a doua axă, normală la traiectorie în punctul curent, având sensul dat de normala exterioară la curba ce reprezintă traiectoria (axă al cărei versor este notat în Fig. III.4 cu  $\vec{\nu}$ ).

Componentele forței de legătură  $\vec{L}$  pe cele două direcții (de versori  $\vec{\tau}$  și  $\vec{\nu}$ ) sunt

$$L_\tau = \vec{L} \cdot \vec{\tau} \quad (3.36)$$

și

$$L_\nu = \vec{L} \cdot \vec{\nu}. \quad (3.37)$$

Pentru a determina proiecțiile  $L_r$  și  $L_v$  ale lui  $\vec{L}$  pe cele două direcții, vom scrie mai întâi expresiile versorilor  $\vec{\tau}$  și  $\vec{\nu}$  față de sistemul de referință  $xOy$ . Pentru aceasta vom utiliza Fig. III.4, din care rezultă că

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_x + \vec{\tau}_y = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$$

și

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}_x + \vec{\nu}_y = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta.$$

Din relația (3.35) avem

$$\vec{L} = (m\ddot{x} - mg, m\ddot{y}, 0)$$

iar  $L_r$  și  $L_v$  devin

$$\begin{aligned} L_r &= \vec{L} \cdot \vec{\tau} = [(m\ddot{x} - mg)\vec{i} + m\ddot{y}\vec{j}] \cdot (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta) = \\ &= m(g - \ddot{x}) \sin \theta + m\ddot{y} \cos \theta, \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} L_v &= \vec{L} \cdot \vec{\nu} = [(m\ddot{x} - mg)\vec{i} + m\ddot{y}\vec{j}] \cdot (\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) = \\ &= m(\ddot{x} - g) \cos \theta + m\ddot{y} \sin \theta. \end{aligned}$$

Având în vedere că

$$\ddot{x} = -R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

și

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta,$$

în care

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

și

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta,$$

pentru  $L_r$  avem

$$\begin{aligned} L_r &= m(g + R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta + mR\ddot{\theta} \cos^2 \theta - \\ &- mR\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = mg \sin \theta + mR\ddot{\theta} \sin^2 \theta + mR\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + \\ &+ mR\ddot{\theta} \cos^2 \theta - mR\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = mg \sin \theta + mR\ddot{\theta} = mR \left( \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta \right) = 0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

ceea ce era de așteptat, ținând cont de faptul că legătura este ideală (forța de frecare, dată de componenta tangențială a forței de legătură, trebuie să fie nulă).

Pentru proiecția pe direcția normalei la traiectorie a forței de legătură,  $L_v$ , avem

$$\begin{aligned} L_v &= -m(R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta + g) \cos \theta + mR\ddot{\theta} \sin \theta \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \\ &= -mg \cos \theta - mR\ddot{\theta}(\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta) - mR\dot{\theta}^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \\ &= -mg \cos \theta - 2mg(\cos \theta - \cos \theta_0) = mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.39)$$

de unde, pentru modulul forței de legătură,  $L = |\vec{L}|$ , obținem

$$L \equiv |L_v| = mg|2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta|. \quad (3.40)$$

Se observă că în cadrul acestui formalism am obținut exact aceeași valoare pentru forța de legătură ca și în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I, adică o valoare opusă ca semn celeia determinată prin formalismul clasic-newtonian. Diferența de semn apare acum foarte evidentă, ea datorându-se faptului că vectorii  $\vec{T}$  (tensiunea din tijă – vezi Fig. III.1) și  $\vec{v}$  (normala exterioară la traiectorie – vezi Fig. III.4) au sensuri opuse.

Cu aceasta problema este complet rezolvată și în continuare o vom aborda în cadrul unui nou formalism, cel hamiltonian.

### III.4. Formalismul ecuațiilor canonice ale lui Hamilton

În cadrul acestui formalism enunțul problemei este același cu cel din cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I (sau de speța a II-a). Pentru a rezolva o problemă oarecare prin formalismul hamiltonian (formalism care are la bază sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton), se poate utiliza următorul algoritm:

- i) identificarea forțelor aplicate  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), unde  $N$  reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem și exprimarea lor



- pe componente în raport cu un referențial (sau mai multe) ales(e) în mod convenabil;
- ii) stabilirea condițiilor inițiale (compatibile cu legăturile) în spațiul real,  $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0)$  și  $\dot{\vec{r}}_{i0} = \dot{\vec{r}}_i(t_0)$ ;
- iii) identificarea numărului gradelor de libertate ale sistemului fizic studiat,  $n = 3N - s$  și alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate,  $q_j = q_j(t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ );
- iv) stabilirea „relațiilor de legătură” între spațiul real și spațiul configurațiilor,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \equiv \vec{r}_i(q; t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ );
- v) determinarea funcției lui Lagrange  $L = L(q, \dot{q}, t)$  a sistemului și a impulsurilor generalizate, canonic conjugate cu coordonatele generalizate,  $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ , ( $j = \overline{1, n}$ );
- vi) inversarea relațiilor  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \equiv \vec{r}_i(q; t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) pentru a determina coordonatele generalizate ca funcții de coordonatele spațiului real,  $q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \equiv q_j(\vec{r}; t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) și stabilirea condițiilor inițiale în spațiul fazelor,  $q_{j0} = q_j(t_0)$ ,  $p_{j0} = p_j(t_0)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;
- vii) determinarea funcției lui Hamilton (hamiltonianul sistemului) utilizând relația de definiție:  $H = p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t)$ ;
- viii) scrierea și rezolvarea sistemului de ecuații canonice ale lui Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{q}_j = + \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \quad (3.41)$$

ceea ce conduce la legea de mișcare a sistemului în spațiul fazelor,  $q_j = q_j(t)$ ,  $p_j = p_j(t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) (care reprezintă totodată și

ecuațiile parametrice ale traiectoriei generalizate a sistemului în spațiul fazelor);

ix) determinarea legii de mișcare în spațiul real,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ ;

x) determinarea forțelor de legătură,  $\vec{L}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ).

În continuare vom utiliza acest algoritm pentru a rezolva problema pendulului gravitațional în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, pentru o valoare arbitrară a amplitudinii de oscilație  $\theta_0$ .

Singura forță aplicată sistemului este forța de greutate,  $\vec{G} = (mg, 0, 0)$ , ale cărei componente au fost exprimate în raport cu sistemul de referință  $xOy$  din Fig. III.4.

Condițiile inițiale sunt, evident, aceleași cu cele din cazul formalismelor anterioare (clasic-newtonian, cel al ecuațiilor Lagrange de speța I și speța a II-a),

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0) = (R \cos \theta_0, R \sin \theta_0, 0)$$

și

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0,$$

unde, fără a restrânge în vreun fel generalitatea problemei, am considerat că mișcarea are loc în planul  $z = 0$ .

Mișcarea este afectată de două legături (cele deja precizate în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), astfel că sistemul are doar un singur grad de libertate,  $n = 3N - s = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ . Ca și coordonată generalizată asociată unicului grad de libertate al corpului, vom alege coordonata unghiulară  $\theta$  (la fel ca în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a).

Relațiile care fac legătura între coordonatele  $x$  și  $y$  ale spațiului real și coordonata generalizată  $\theta$  (a spațiului unidimensional al configurațiilor) sunt

$$x = R \cos \theta,$$

$$y = R \sin \theta.$$

Determinarea funcției Lagrange (a lagrangeanului sistemului) se face la fel ca în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, obținându-se următoarea expresie:

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta.$$

Impulsul generalizat canonic conjugat coordonatei generalizate  $\theta$  va fi

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}. \quad (3.42)$$

În acest caz, spațiul fazelor este unul bidimensional, un punct oarecare al acestui spațiu având două coordonate,  $(\theta, p_\theta)$ . Condițiile inițiale în spațiul fazelor vor fi

$$\theta(t_0 = 0) = \theta_0,$$

$$p_\theta(t_0 = 0) = (p_\theta)_0 = mR^2\dot{\theta}(t_0 = 0) = 0,$$

iar hamiltonianul sistemului este

$$\begin{aligned} H = p_\theta\dot{\theta} - L &= p_\theta \frac{p_\theta}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2 \frac{p_\theta^2}{m^2R^4} - mgR \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mR^2} - mgR \cos \theta = H(\theta, p_\theta). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton pentru pendulul matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, de amplitudine oarecare se scrie astfel:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = + \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \\ \dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Ținând cont de expresia (3.43) a hamiltonianului, sistemul de ecuații (3.44) devine

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ \dot{p}_\theta = -mgR \sin \theta. \end{cases} \quad (3.45)$$

Acesta este un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întâi cuplate. Pentru a-l rezolva vom urmări să decuplăm cele două ecuații. Derivând total în raport cu timpul prima ecuație a sistemului (3.45) obținem

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{P}_\theta}{mR^2},$$

care – introducând  $\dot{p}_\theta$  din a doua ecuație a sistemului – devine

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgR \sin \theta}{mR^2} = -\frac{g}{R} \sin \theta,$$

sau,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0, \quad (3.46)$$

adică ecuația diferențială satisfăcută de coordonata generalizată  $\theta$ . După cum se poate observa cu ușurință, aceasta coincide cu ecuația corespunzătoare (cea pentru variabila  $\theta$ ) obținută în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a.

De aici încolo rezolvarea problemei decurge la fel ca în cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, atât în ceea ce privește analiza și determinarea elementelor mișcării<sup>10</sup>, cât și a forței de legătură,  $\vec{L} = m\ddot{\vec{r}} - \vec{G}$ .

### III.5. Formalismul Hamilton-Jacobi

Problema se enunță la fel ca în cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I. În ceea ce privește rezolvarea unei probleme oarecare prin intermediul formalismului Hamilton-Jacobi (formalism care are ca nucleu ecuația Hamilton-Jacobi) trebuie să urmărim etapele algoritmului de mai jos:

- i) identificarea forțelor aplicate  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), unde  $N$  reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem;

---

<sup>10</sup> Cu observația că determinarea lui  $\dot{\theta}$  urmează metoda din cadrul formalismului clasic-newtonian (bazată pe acel artificiu matematic simplu) și nu cea a formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, deoarece, chiar dacă sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton este echivalent cu ecuațiile de speța a II-a ale lui Lagrange, totuși, în cazul de față avem de rezolvat acest sistem și nu ecuațiile lui Lagrange, deci nu mai putem utiliza cele două tipuri de integrale prime amintite în cadrul formalismului anterior.

- ii) stabilirea condițiilor inițiale (compatibile cu legăturile) în spațiul real,  $\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0)$  și  $\dot{\vec{r}}_{i0} = \dot{\vec{r}}_i(t_0)$ ;
- iii) identificarea numărului gradelor de libertate ale sistemului fizic studiat,  $n = 3N - s$  și alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate,  $q_j = q_j(t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ );
- iv) stabilirea „relațiilor de legătură” între spațiul real și spațiul configurațiilor,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \equiv \vec{r}_i(q; t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), inversarea lor,  $q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) \equiv q_j(\vec{r}; t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) și determinarea condițiilor inițiale în spațiul configurațiilor,  $q_{j0} = q_j(t_0)$ ,  $\dot{q}_{j0} = \dot{q}_j(t_0)$ , ( $j = \overline{1, n}$ );
- v) determinarea funcției lui Lagrange a sistemului,  $L = L(q, \dot{q}, t)$ , a impulsurilor generalizate (canonic conjugate coordonatelor generalizate),  $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) și stabilirea celor  $2n$  condiții inițiale în spațiul fazelor,  $q_{j0} = q_j(t_0)$ ,  $p_{j0} = p_j(t_0)$ , ( $j = \overline{1, n}$ );
- vi) determinarea funcției lui Hamilton (a hamiltonianului sistemului),  $H = p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t)$ ;
- vii) scrierea și rezolvarea ecuației Hamilton-Jacobi,
- $$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0, \quad (3.47)$$
- unde  $S = S(q, t)$  este funcția principală a lui Hamilton, soluție a ecuației Hamilton-Jacobi;
- viii) determinarea legii de mișcare în spațiul configurațiilor,  $q_j = q_j(t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), utilizând teorema Jacobi;
- ix) determinarea legii de mișcare în spațiul real,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), utilizând relațiile stabilite la punctul iv) al algoritmului;
- x) aflarea forțelor de legătură utilizând expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii pentru sistemele cu legături,

$$\vec{L}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \quad (i = \overline{1, N}).$$

Vom aplica acum acest algoritm pentru a rezolva aceeași problemă a pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate și de amplitudine oarecare.

Pentru aceasta, să observăm mai întâi (conform primului punct al algoritmului) că singura forță aplicată sistemului este forța de greutate,

$$\vec{G} = (mg, 0, 0),$$

ale cărei componente au fost exprimate în raport cu sistemul de referință  $xOy$  din Fig. III.4.

Condițiile inițiale în spațiul real sunt, evident, aceleași cu cele din cazul formalismelor anterioare,

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0) = (R \cos \theta_0, R \sin \theta_0, 0)$$

și

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0,$$

unde, fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic, am considerat că mișcarea are loc în planul  $z = 0$ .

Mișcarea este afectată de două legături (cele deja precizate în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), astfel că sistemul are doar un singur grad de libertate,  $n = 3N - s = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ . Acestui grad de libertate îi vom asocia ca și coordonată generalizată – din motive lesne de înțeles – aceeași variabilă unghiulară  $\theta$ , ca și în cazul ultimelor două formalisme (Lagrange și Hamilton).

Relațiile de legătură între coordonatele  $x$  și  $y$  ale spațiului real și coordonata generalizată  $\theta$  sunt

$$x = R \cos \theta,$$

$$y = R \sin \theta,$$

iar condițiile inițiale în spațiul configurațiilor se scriu astfel:

$$\theta(t_0 = 0) = \theta_0,$$

$$\dot{\theta}(t_0 = 0) = \dot{\theta}_0 = 0.$$

Următoarele două etape ale algoritmului presupun determinarea lagrangeanului și a hamiltonianului sistemului. Nu vom face aici încă o dată acest lucru (modul concret de obținere a celor două funcții se găsește

în cadrul formalismelor corespunzătoare), ci vom da direct expresiile matematice pentru  $L = L(q, \dot{q}, t)$  și  $H = H(q, p, t)$ . După cum am văzut,

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta$$

și

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mR^2} - mgR \cos \theta. \quad (3.48)$$

Pentru a scrie ecuația Hamilton-Jacobi vom ține cont de teorema Jacobi, conform căreia

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

În cazul nostru, având un singur grad de libertate,  $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$ , astfel că funcția lui Hamilton devine

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - mgR \cos \theta,$$

iar ecuația Hamilton-Jacobi este

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2mR^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - mgR \cos \theta = 0. \quad (3.49)$$

Pentru rezolvarea ecuației Hamilton-Jacobi (3.47) nu există o metodă generală, infailibilă, ci, de la caz la caz se urmărește ca, utilizând diferite procedee (în funcție și de forma particulară pe care o are această ecuație) să se determine soluția ei. Totuși, în multe situații concrete se poate utiliza metoda separării variabilelor (a timpului,  $t$ , a variabilelor ciclice,  $q_\alpha$ , sau a unor perechi de variabile,  $(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha})$ ).

Oricare ar fi situația, soluția problemei în cadrul acestui formalism este dată de

**Teorema Jacobi:** Dacă  $S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n; t)$  este o soluție (integrală) completă<sup>11</sup> a ecuației Hamilton-Jacobi, atunci soluția generală a sistemului de ecuații canonice ale lui Hamilton<sup>12</sup> este dată de

<sup>11</sup> O soluție (integrală) completă a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi este o soluție (integrală) care conține atâtea constante arbitrare independente câte variabile independente are

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad b_j = \frac{\partial S}{\partial a_j}, \quad (3.50)$$

unde  $b_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) sunt noi constante.

Nu vom demonstra aici această teoremă, ci, precizăm că, odată cunoscută o integrală completă a ecuației Hamilton-Jacobi,  $S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n; t)$ , soluția problemei rezultă imediat prin înlocuirea acestei integrale complete în relațiile (3.50–2), ceea ce furnizează legea de mișcare în spațiul configurațiilor,

$$q_j = q_j(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n; t), \quad (j = \overline{1, n}),$$

cele  $2n$  constante arbitrare de integrare,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , determinându-se din cele  $2n$  condițiile inițiale.

Legea de mișcare în spațiul real,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ), se poate determina apoi cu ajutorul relațiilor stabilite la punctul iv) al algoritmului,  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q(t); t)$ , ( $i = \overline{1, N}$ ).

Revenind la situația concretă a problemei pe care o analizăm, trebuie să determinăm o integrală completă,  $S = S(\theta, E, t)$ , a ecuației (3.49). Această integrală completă depinde de o singură constantă

aceia ecuație. Ecuația Hamilton-Jacobi are  $(n+1)$  variabile independente (cele  $n$  coordonate generalizate  $q_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) și timpul  $t$ ). Totuși, deoarece variabila dependentă  $S(q, a, t)$  intră în ecuația Hamilton-Jacobi doar sub formă de derivate parțiale, una din cele  $(n+1)$  constante arbitrare trebuie să fie pur aditivă, adică

$$S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}; t) = S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n; t) + \text{const.},$$

unde, fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic, am considerat ca fiind aditivă cea de-a  $(n+1)$ -a constantă,  $a_{n+1}$ . Deoarece la derivare această constantă „dispare”, ea poate fi omisă, astfel încât soluția completă a ecuației Hamilton-Jacobi se va scrie  $S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n; t)$ , cele  $n$  constante arbitrare independente,  $a_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), numindu-se *esențiale*.

<sup>12</sup> Observăm astfel, că, între cele două formalisme (cel al ecuațiilor canonice ale lui Hamilton și cel al ecuației Hamilton-Jacobi) există o foarte strânsă legătură (ca, de altfel, și între formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a și cel al ecuațiilor canonice ale lui Hamilton).



(arbitrară) esențială (pe care am notat-o – nu întâmplător<sup>13</sup> – cu  $E$ ), deoarece există două variabile independente ( $\theta$  și  $t$ ).

Deoarece funcția lui Hamilton (3.48) nu depinde explicit de timp, acesta se separă (ca variabilă independentă) și putem căuta o soluție a ecuației Hamilton-Jacobi de forma

$$S(\theta, a, t) = W(\theta, a) + S_1(a, t), \quad (3.51)$$

unde  $a$  este constanta (arbitrară) esențială a problemei, iar  $W$  și  $S_1$  sunt două funcții deocamdată necunoscute. Introducând (3.51) în ecuația Hamilton-Jacobi a problemei noastre,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\theta, \frac{\partial S}{\partial \theta}\right) = 0,$$

obținem

$$\frac{\partial S_1(a, t)}{\partial t} + H\left(\theta, \frac{\partial W(\theta, a)}{\partial \theta}\right) = 0. \quad (3.52)$$

Întrucât primul termen depinde doar de variabilă independentă  $t$ , iar termenul al doilea depinde numai de variabila independentă  $\theta$ , ecuația (3.52) poate fi satisfăcută doar dacă fiecare din cei doi termeni sunt egali cu o aceeași constantă (dar cu semne diferite), pe care o vom nota cu  $E$ :

$$H\left(\theta, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = E \quad (3.53)$$

și

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -E. \quad (3.54)$$

Deoarece soluția completă a ecuației (3.52) nu poate depinde decât de o singură constantă esențială, rezultă că  $a$  trebuie să fie chiar  $E$ . Din ecuația (3.53) apare acum evident de ce am preferat să notăm constanta din ecuațiile (3.53) și (3.54) cu  $E$ : legătura fiind scleronomă și funcția lui Hamilton nedepinzând explicit de timp, înseamnă că aceasta din urmă are semnificația energiei totale a sistemului, care se conservă,  $E = \text{const.}$

Ecuația (3.53) se numește *ecuația Hamilton-Jacobi redusă*, iar din ecuația (3.54) rezultă că

---

<sup>13</sup> Această constantă nu este altceva – după cum vom vedea – decât energia totală a sistemului, care se conservă (deci este o constantă).

$$S_1(a, t) \equiv S_1(E, t) = -Et,$$

astfel încât, relația (3.51) devine

$$S = S(\theta, a, t) \equiv S(\theta, E, t) = -Et + W(\theta, E). \quad (3.55)$$

Aceasta este integrala completă a ecuației Hamilton-Jacobi a problemei noastre,  $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\theta, \frac{\partial S}{\partial \theta}\right) = 0$ . Pentru a determina funcția  $W(\theta, E)$  trebuie să rezolvăm ecuația Hamilton-Jacobi redusă (3.53). Vom vedea însă că nu este nevoie să cunoaștem în mod explicit această funcție (în cazul de față). Cu

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

în expresia funcției lui Hamilton, aceasta devine

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 - mgR \cos \theta,$$

iar ecuația Hamilton-Jacobi redusă (3.53) se va scrie

$$\frac{1}{2mR^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 - mgR \cos \theta = E$$

De aici obținem

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \pm \sqrt{2mR^2 (E + mgR \cos \theta)},$$

de unde,

$$W(\theta, E) = \pm \int \sqrt{2mR^2 (E + mgR \cos \theta)} d\theta.$$

Din teorema lui Jacobi (relația 3.50–2) – care, în cazul nostru, se scrie

$$\frac{\partial S}{\partial E} = b \text{ – rezultă:}$$

$$-t + \frac{\partial W}{\partial E} = b. \quad (3.56)$$

Din motive de omogenitate dimensională constanta  $b$  trebuie să fie una temporală (trebuie să se măsoare în secunde); de aceea o vom nota cu  $t_1$ .

Atunci, relația (3.56) devine

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t + t_1,$$

adică,

$$\pm \frac{\partial}{\partial E} \left[ \int \sqrt{2mR^2 (E + mgR \cos \theta)} d\theta \right] = t + t_1,$$

sau, ținând cont că  $E$  este o constantă esențială, iar  $\theta$  este o variabilă independentă,

$$\pm \int \frac{\partial}{\partial E} \left[ \sqrt{2mR^2 (E + mgR \cos \theta)} \right] d\theta = t + t_1,$$

sau încă,

$$\pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R} \cos \theta}} = t + t_1.$$

De aici rezultă că „funcția”  $t + t_1$  este primitiva funcției

$\pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R} \cos \theta}}$  în raport cu variabila independentă  $\theta$ . Atunci, prin

derivarea totală în raport cu  $\theta$  a „funcției”  $t + t_1$ , obținem

$$\frac{d}{d\theta} (t + t_1) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R} \cos \theta}},$$

sau,

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R} \cos \theta}},$$

sau, încă,

$$\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R} \cos \theta}},$$

ceea ce conduce la

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R} \cos \theta}.$$

Introducând o nouă constantă prin

$$\text{const.} = \cos \theta_0 = -\frac{E}{mgR}, \quad (3.57)$$

obținem pentru  $\dot{\theta}$  expresia

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{R}(\cos \theta - \cos \theta_0)}, \quad (3.58)$$

relație identică aceleia obținute anterior prin alte două metode (utilizând un artificiu matematic simplu – în cadrul formalismului clasic-newtonian – și integrala primă a energiei – în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a).

De aici încolo rezolvarea problemei se face la fel ca în cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a.

Observație: modul în care am introdus noua constantă,  $\cos \theta_0$  – dată de relația (3.57) – este în concordanță cu expresia energiei totale a sistemului, dedusă în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a,  $E = -mgR \cos \theta_0$ .

### III.6. Formalismul variabilelor unghi-acțiune

Acest formalism poate fi utilizat cu succes în rezolvarea problemelor referitoare la sistemele care realizează o mișcare periodică. El derivă din formalismul Hamilton-Jacobi și constă, în esență, în utilizarea unor variabile canonice noi, anume: *variabilele acțiune*,  $J_\alpha$  și *variabilele unghi*,  $w_\alpha$ , în locul „parametrilor canonici” constanți  $Q_\alpha = b_\alpha$  și  $P_\alpha = a_\alpha$ , ( $\alpha = \overline{1, n}$ ), unde  $n$  reprezintă numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Să prezentăm pe scurt esența acestui nou formalism. Pentru aceasta să considerăm un sistem conservativ cu un singur grad de libertate. În aceste condiții putem scrie

$$H(q, p) = E, \quad (3.59)$$

unde  $E$  reprezintă energia totală a sistemului, care se conservă. Relația (3.59) este ecuația implicită a unei curbe în planul fazelor și reprezintă traiectoria generalizată corespunzătoare evoluției sistemului considerat.

Proprietățile mișcării periodice sunt date de tipul traiectoriei generalizate. Putem vorbi de două tipuri de mișcări periodice:

1. Dacă traiectoria generalizată este o curbă închisă, mișcarea este numită *vibrație*. În acest caz coordonata generalizată  $q$  oscilează între două valori constante, atât  $q$  cât și  $p$  fiind funcții periodice de timp, cu aceeași perioadă (vezi Fig. III.5);

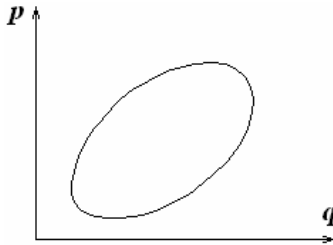


Fig. III.5

2. Dacă, rezolvând ecuația (3.59) obținem  $p = p(q, E)$  ca o funcție periodică de variabila  $q$ , cu perioada  $q_0$ , adică  $p(q + kq_0, E) = p(q, E)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , mișcarea periodică este numită  *rotație*, sau, uneori, mișcare de  *revoluție*. În acest caz<sup>14</sup> coordonata  $q$  poate lua orice valoare (vezi Fig. III.6).

Menționăm că există sisteme care sunt caracterizate simultan atât de o mișcare de vibrație, cât și de una de rotație. Un astfel de sistem este, după cum vom vedea, chiar cel analizat în cadrul problemei de față, anume, pendulul simplu.

Definim *variabila acțiune* prin

$$J = \oint p \, dq, \quad (3.60)$$

unde integrala se ia pe un ciclu complet de variație a coordonatei  $q$ . Ea reprezintă atât aria suprafeței închise de curba din Fig. III.5, cât și aria hașurată din Fig. III.6, corespunzătoare unei perioade a mișcării de rotație.

<sup>14</sup> Un exemplu simplu de astfel de sistem este un corp solid-rigid care se rotește în jurul unei axe fixe.

Din modul în care este definită, mărimea  $J$  are aceleași dimensiuni cu integrala acțiunii  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ . Ținând cont de relațiile  $p = p(q, E)$  și (3.60), rezultă că  $J = J(E)$ , de unde, inversând dependența funcțională, rezultă că  $E = E(J)$ . Integrala completă corespunzătoare hamiltonianului (3.59) este<sup>15</sup>  $S(q, E)$ , sau, dacă ținem cont de faptul că  $E = E(J)$ , obținem

$$S = S(q, E). \quad (3.61)$$

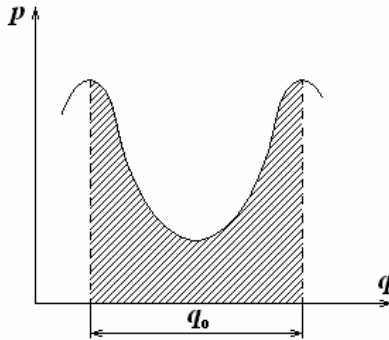


Fig. III.6

Variabila canonică  $w$  asociată lui  $J$  este numită *variabilă unghi* și se definește prin

$$w = \frac{\partial S}{\partial J}, \quad (3.62)$$

iar noul hamiltonian – ținând cont de relațiile (3.59) și  $E = E(J)$  – va fi

$$H = \mathcal{H}(J). \quad (3.63)$$

Deoarece coordonata  $w$  este asociată cu un moment cinetic, ea are dimensiunea unui unghi. Cu această alegere, ecuațiile canonice conduc la

<sup>15</sup> Și depinde de o singură constantă esențială,  $E$ .

$$\begin{cases} \dot{J} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = 0, \\ \dot{w} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \nu(J), \end{cases} \quad (3.64)$$

ceea ce înseamnă că  $J = \text{const.}$  (lucru deja cunoscut, căci am văzut că  $J = J(E)$ , cu  $E = \text{const.}$ ). În consecință și  $\nu$  este o constantă (ce depinde de  $J$ ). Integrând (3.64 – 2) obținem

$$w = \nu t + \varphi, \quad (3.65)$$

unde  $\varphi$  este o constantă (arbitrară) de integrare.

Pentru a găsi semnificația variabilei  $\nu$  vom determina modul de variație al variabilei unghiulare  $w$  la un ciclu complet de variație al coordonatei  $q$  (atât pentru o mișcare de vibrație, cât și pentru una de rotație). Avem,

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq \stackrel{(62)}{=} \oint \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial J} dq = \oint \frac{\partial p}{\partial J} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = 1.$$

Dacă notăm cu  $\tau$  perioada corespunzătoare unui ciclu complet, ultimele două relații dau  $\Delta w = \nu \Delta t \equiv \nu \tau = 1$ , de unde,

$$\nu = \frac{1}{\tau}. \quad (3.66)$$

Acest rezultat arată faptul că  $\nu$  este frecvența mișcării periodice de variație a lui  $q$ . De aici rezultă o concluzie foarte importantă: perioada unei mișcări poate fi determinată fără a fi necesar să rezolvăm ecuațiile de mișcare, dacă se cunoaște dependența de variabila  $J$  a hamiltonianului. De asemenea, inversând relația (3.61) și utilizând (3.65) poate fi determinată dependența temporală a coordonatei  $q$ .

Să aplicăm formalismul prezentat mai sus la mișcarea de „vibrație” a pendulului simplu.

După cum am văzut în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, lagrangeanul sistemului este

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta.$$

Deci, în acest caz  $q \equiv \theta$ , iar impulsul generalizat corespunzător este

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta},$$

cea ce conduce la următoarea formă a hamiltonianului,

$$\begin{aligned} H &= p\dot{\theta} - L = mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = \frac{p^2}{2mR^2} - mgR \cos \theta = E. \end{aligned}$$

Atunci, ecuația traiectoriei generalizate în planul fazelor,  $(\theta, p)$ , este

$$p = \pm \sqrt{2mR^2(E + mgR \cos \theta)}, \quad (3.67)$$

iar variabila acțiune  $J$ , conform definiției, va fi

$$J = -2 \int_{\theta_0}^{-\theta_0} \left[ 2mR^2(E + mgR \cos \theta) \right]^{1/2} d\theta = 4 \int_0^{\theta_0} \left[ 2mR^2(E + mgR \cos \theta) \right]^{1/2} d\theta.$$

Ecuația a doua a sistemului (3.64) se va scrie

$$\nu = \nu(J) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial \mathcal{H}}} = \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial E}} = \left( \frac{\partial J}{\partial E} \right)^{-1},$$

și atunci, conform lui (3.66),

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{dJ}{dE}, \quad (3.68)$$

sau, efectuând derivata,

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \frac{d}{dE} \left( \int_0^{\theta_0} \sqrt{2mR^2(E + mgR \cos \theta)} d\theta \right) = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{2mR^2 d\theta}{2\sqrt{2gm^2R^3(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \\ &= 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = 4 \sqrt{\frac{R}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \end{aligned}$$

rezultat obținut deja în cadrul primului formalism, prin intermediul căruia am rezolvat problema (formalismul clasic-newtonian). De aici încolo, rezolvarea urmează aceeași cale ca în cadrul formalismului newtonian. În ceea ce privește determinarea forțelor de legătură (în acest caz, tensiunea din tijă), remarcăm faptul că formalismul variabilelor canonice unghi-acțiune nu pune la dispoziție nici o modalitate concretă în acest sens. De altfel, formalismul de față este utilizabil doar pentru sisteme care



efectuează o mișcare periodică, caz în care problema centrală este determinarea perioadei mișcării.

În cazul micilor oscilații ( $\theta_0 < 5^\circ$ ), ținând cont de aproximația

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \mathcal{O}(\theta^4) \cong 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

obținem hamiltonianul

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - mgR \cos \theta \cong \frac{p^2}{2mR^2} - mgR \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{p^2}{2mR^2} - mgR + \frac{mgR\theta^2}{2},$$

sau, omițând termenul constant ( $-mgR$ ),

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} + \frac{mgR\theta^2}{2} = E,$$

de unde,

$$p = \pm \sqrt{2mR^2 \left( E - \frac{mgR\theta^2}{2} \right)},$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned} J &= -2 \int_{\theta_0}^{-\theta_0} \left[ 2mR^2 \left( E - \frac{mgR\theta^2}{2} \right) \right]^{1/2} d\theta = \sqrt{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[ 2mR^2 (2E - mgR\theta^2) \right]^{1/2} d\theta = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (4mER^2 - 2m^2 gR^3 \theta^2)^{1/2} d\theta = 4E \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} (1 - \varphi^2)^{1/2} d\varphi = \\ &= 4E \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\psi_1}^{\psi_1 + \pi} \cos^2 \psi d\psi = 4E \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\psi_1}^{\psi_1 + \pi} \frac{1 + \cos 2\psi}{2} d\psi = 4E \sqrt{\frac{R}{g}} \left[ \int_{\psi_1}^{\psi_1 + \pi} \frac{d\psi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\psi_1 + \pi} \frac{\cos 2\psi}{2} d\psi \right] = 4E \sqrt{\frac{R}{g}} \left[ \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\sin 2\psi}{4} \right)_{\psi_1}^{\psi_1 + \pi} \right] = 2\pi E \sqrt{\frac{R}{g}}. \end{aligned}$$

În relația de mai sus am folosit schimbările de variabilă

$$\theta \sqrt{\frac{mgR}{2E}} = \varphi = \sin \psi,$$

$$\varphi_1 = \theta_0 \sqrt{\frac{mgR}{2E}}, \text{ iar } \psi_1 = \arcsin(-\varphi_1). \text{ Așadar,}$$

$$J = 2\pi E \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad (3.69)$$

ceea ce conduce la binecunoscuta formulă a perioadei micilor oscilații (izocrone) ale unui pendul simplu,

$$\tau = \frac{dJ}{dE} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (3.70)$$

După cum am văzut, ecuația traiectoriei generalizate în planul fazelor pentru pendulul simplu este

$$p = \pm \sqrt{2mR^2(E + mgR \cos \theta)}.$$

Valoarea  $p = 0$  a impulsului generalizat corespunde valorii particulare a unghiului  $\theta$  dată de

$$\cos \theta_0 = -\frac{E}{mgR}. \quad (3.71)$$

Dacă  $E < mgR$  atunci pendulul efectuează o mișcare periodică, unghiul  $\theta$  variind între valorile limită  $(-\theta_0)$  și  $\theta_0$ , cu  $\theta_0$  dat de relația (3.71). În acest caz avem o mișcare „de vibrație”, iar traiectoriile generalizate în planul fazelor  $(\theta, p)$  sunt curbele închise notate cu (1) în Fig. III.7.

Dacă  $E > mgR$ , atunci nu există nici o limitare pentru unghiul  $\theta$ , atât unghiul  $\theta$ , cât și unghiurile  $\theta + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) conducând la aceeași stare de mișcare a sistemului. Traiectoriile generalizate din planul fazelor sunt în acest caz curbele notate cu (3) în Fig. III.7.

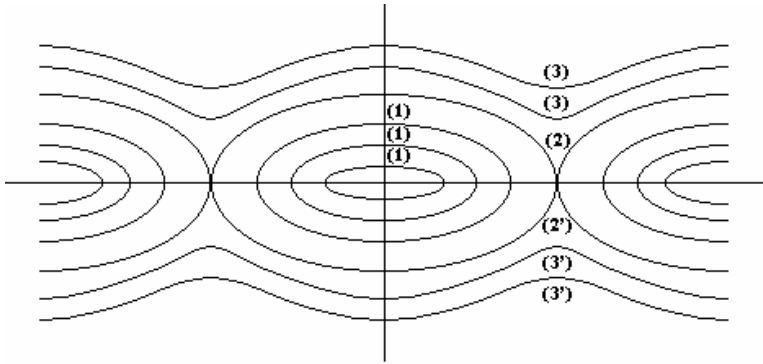


Fig. III.7

O situație specială apare în cazul limită  $E = mgR$ , pentru care se obțin curbele notate cu (2) și (2') în Fig. III.7. Aceste curbe corespund valorilor  $\theta = \pm \pi$  (în cazul general,  $\theta = (2k+1)\pi$ ) și  $p = 0$  care desemnează pozițiile de echilibru instabil ale sistemului<sup>16</sup>.

\*  
\* \*

În încheiere ne propunem să evaluăm abaterea de la timpul real/exact pe care o face un *pendul astronomic* (pentru care amplitudinea de oscilație este  $\theta_0 = 1^\circ 30'$ ) în timp de un an, în ipoteza că el efectuează oscilații izocrone cu perioada

$$T_{izo} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

luând în considerare doar abaterea de la „condiția de izocronicitate”<sup>17</sup>.

Perioada „exactă” (cea care ține cont de dependența acesteia de amplitudinea  $\theta_0$  a oscilațiilor) este dată de relația (3.9):

<sup>16</sup> În acest caz, o mică perturbație poate scoate pendulul dintr-o astfel de poziție, iar punctul reprezentativ din spațiul fazelor parcurge curba (2) sau (2').

<sup>17</sup> Nu vom considera efectul asupra acestei erori datorat variației accelerației gravitaționale sau altor factori, cum ar fi: abaterea de la caracterul armonic al oscilațiilor, amortizarea nenulă a oscilațiilor etc.

$$T_{non-izo} = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

unde  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ . Diferența de timp înregistrată în decurs de o perioadă, în cele două situații, este

$$\Delta T = T_{non-izo} - T_{izo} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \left[ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \pi \right] > 0.$$

Cu alte cuvinte, ceasornicul care efectuează oscilații izocrone (ceasornicul „ideal”) „va merge înainte” cu  $\Delta T$  secunde pentru fiecare perioadă. În unitatea de timp pendulul care măsoară timpul „exact” efectuează

$$v_{non-izo} = \frac{1}{T_{non-izo}}$$

oscilații complete, ceea ce înseamnă că în timp de un an (365 de zile) el va realiza un număr de

$$N_{exact} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot v_{non-izo} = \frac{365 \cdot 24 \cdot 3600}{T_{non-izo}}$$

oscilații complete. Rezultă că diferența de timp înregistrată de cele două ceasornice în timp de un an este

$$\begin{aligned} \Delta t_{(1 \text{ an})} &= N_{exact} \Delta T = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \frac{T_{non-izo} - T_{izo}}{T_{non-izo}} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \left( 1 - \frac{T_{izo}}{T_{non-izo}} \right) = \\ &= 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \left( 1 - \frac{\pi}{2K(k)} \right) = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \left[ 1 - \pi \left( 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Efectuând calculele numerice, pentru  $\Delta t_{(1 \text{ an})}$  se obține următoarea valoare:

$$\Delta t_{(1 \text{ an})} = 1350,897 \text{ s} \approx 22,515 \text{ min},$$

iar pentru o zi se obține valoarea

$$\Delta t_{(1 \text{ zi})} = 3,701 \text{ s},$$

adică o diferență destul de mare pentru a considera „bună” funcționarea unui ceasornic în ipoteza oscilațiilor izocrone. Aceasta se datorează diferenței destul de mari dintre perioadele de oscilație corespunzătoare

celor două cazuri, care, pentru un pendul care „bate secunda” (adică pentru care  $R = \frac{g}{4\pi^2}$ ) este de

$$\Delta T_{(1s)} = T_{non-izo} - T_{izo} = T_{non-izo} - 1 = 1.000042838 - 1 = 42,838 \mu s .$$

## Capitolul IV

### Probleme rezolvate cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual

#### Problema 1

Utilizând principiul lucrului mecanic virtual, să se determine poziția de echilibru a sistemului din Fig. IV.1. Se cunosc: masele celor două corpuri,  $m_1$  și  $m_2$ , unghiul  $\alpha$  al planului înclinat și distanța  $a$  de la vârful planului înclinat până la axa scripetelui. Se neglijează frecările și raza discului scripetelui, iar firul se presupune inextensibil. De asemenea, se presupune că în tot timpul mișcării corpul de masă  $m_1$  nu părăsește suprafața planului înclinat, iar corpul de masă  $m_2$  se deplasează doar pe verticală.

#### Rezolvare

Să identificăm mai întâi legăturile care „afectează” mișcarea corpurilor.

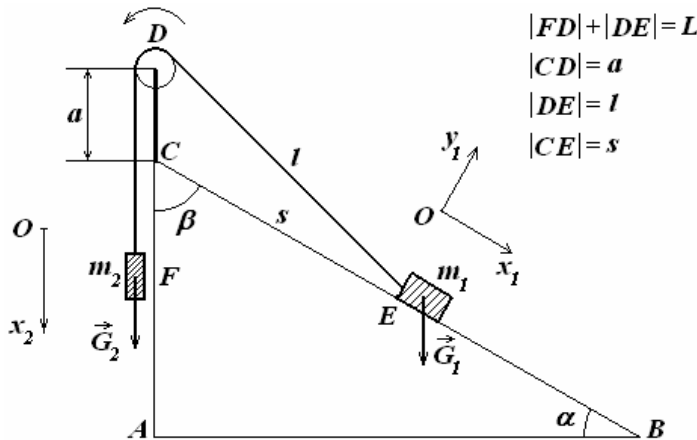


Fig. IV.1

Atașăm fiecărui corp în parte câte un sistem de referință, ca în figură. După cum se poate constata cu ușurință din Fig. IV.1, ecuațiile legăturilor sunt:

- $f_1(z_1) = z_1 = C_1$ ,

unde constanta  $C_1$  poate fi considerată nulă, fără a restrânge

cu nimic generalitatea problemei;

- $f_2(y_1) = y_1 = 0$ , (corpul de masă  $m_1$  nu părăsește suprafața planului înclinat);
- $f_3(y_2) = y_2 = C_2$ ;
- $f_4(z_2) = z_2 = C_3$  și
- $f_5(x_1, x_2) = x_1^2 + 2ax_1 \sin \alpha + x_2 + a(a+1) - L = 0$ .

Facem observația că și constantele  $C_2$  și  $C_3$  pot fi considerate nule, fără să fie afectat cu nimic gradul de generalitate al problemei. Cu  $L$  am notat lungimea (constantă) a firului care leagă cele două corpuri, iar în scrierea legăturii  $f_5$  am utilizat teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul oarecare  $CED$  și am presupus că originile celor două sisteme de referință (față de care raportăm mișcarea corpurilor) coincid cu punctul  $C$  (vârful planului înclinat). Rezultă deci că sistemul are  $3 \cdot 2 - 5 = 1$  grad de libertate.

Principiul lucrului mecanic virtual se scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (4.1)$$

unde  $N$  reprezintă numărul de corpuri din sistem, iar  $\vec{F}_i$ , ( $i = \overline{1, N}$ ) reprezintă forțele aplicate acestor corpuri; în cazul nostru, acestea sunt forțele de greutate,  $\vec{G}_1$  și  $\vec{G}_2$ . Atunci, relația (4.1) devine

$$\vec{G}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{G}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0. \quad (4.2)$$

Față de sistemele de referință corespunzătoare, vectorii din relația de mai sus se vor scrie pe componente astfel:

$$\vec{G}_1 = (m_1 g \sin \alpha, -m_1 g \cos \alpha, 0),$$

$$\vec{G}_2 = (m_2 g, 0, 0),$$

$$\delta \vec{r}_1 = (-\delta x_1, 0, 0)$$

și

$$\delta \vec{r}_2 = (\delta x_2, 0, 0),$$

unde am ținut cont de sensul (convențional ales) de mișcare a ansamblului celor două corpuri (corpul de masă  $m_1$  urcă pe planul înclinat, deci se mișcă în sens contrar sensului pozitiv al axei  $Ox_1$ ). Ținând cont de aceste relații, expresia (4.2) a principiului lucrului mecanic virtual devine

$$-m_1 g \delta x_1 \sin \alpha + m_2 g \delta x_2 = 0. \quad (4.3)$$

Expresia (4.3) este o combinație liniară nulă a mărimilor  $\delta x_1$  și  $\delta x_2$ , cu coeficienții constanți  $m_1 g \sin \alpha$  și  $m_2 g$ . Evident, cele două variații virtuale ale coordonatelor celor două corpuri,  $\delta x_1$  și  $\delta x_2$  nu pot fi liniar independente. În caz contrar ar trebui ca  $m_1 g \sin \alpha = 0$  și  $m_2 g = 0$ , ceea ce este absurd. De altfel, acest lucru noi deja l-am găsit, întrucât am arătat că sistemul are un singur grad de libertate, deci, doar o singură variație virtuală a coordonatelor celor două corpuri este liniar independentă. În consecință, cele două variații,  $\delta x_1$  și  $\delta x_2$  sunt liniar dependente și va trebui să eliminăm una din ele. Pentru aceasta să observăm că (vezi Fig. IV.1) o variație a coordonatei  $x_1$  a corpului de masă  $m_1$  este identică unei variații a mărimii  $s = |CE|$ , adică,

$$\delta x_1 \equiv \delta s, \quad (4.4)$$

și o variație a coordonatei  $x_2$  a corpului de masă  $m_2$  este egală cu o variație a mărimii  $l = |DE|$  (firul fiind inextensibil, cu cât urcă sau coboară corpul de masă  $m_2$ , tot cu atât se mărește, respectiv se micșorează, distanța  $l = |DE|$ ), adică,

$$\delta x_2 \equiv \delta l. \quad (4.5)$$

În concluzie, a determina o relație între cele două variații virtuale  $\delta x_1$  și  $\delta x_2$ , este echivalent cu a determina o relație între mărimile  $\delta s$  și  $\delta l$ . Acest lucru se poate face cu ușurință utilizând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul  $CED$ :

$$\begin{aligned} l^2 &= a^2 + s^2 - 2as \cos(\pi - \beta) = a^2 + s^2 + 2as \cos \beta = \\ &= a^2 + s^2 + 2as \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a^2 + s^2 + 2as \sin \alpha. \end{aligned}$$



De aici, prin diferențiere, avem

$$2l \, dl = 2s \, ds + 2a \, ds \sin \alpha ,$$

sau,

$$l \, dl = (s + a \sin \alpha) \, ds .$$

Trecând acum de la diferențiale la variații virtuale infinitezimale, rezultă relația căutată

$$l \, \delta l = (s + a \sin \alpha) \, \delta s ,$$

care, ținând cont de relațiile (4.4) și (4.5), devine

$$l \, \delta x_2 = (s + a \sin \alpha) \, \delta x_1 ,$$

de unde,

$$\delta x_2 = \frac{s + a \sin \alpha}{l} \, \delta x_1 .$$

Înlocuind  $\delta x_2$  din această relație în (4.3) obținem

$$-m_1 g \delta x_1 \sin \alpha + m_2 g \frac{s + a \sin \alpha}{l} \delta x_1 = 0 ,$$

sau, aducând la același numitor și dând în factor  $\delta x_1$ ,

$$\left[ -m_1 g l \sin \alpha + m_2 g (s + a \sin \alpha) \right] \delta x_1 = 0 , \quad (4.6)$$

relație valabilă pentru orice variație virtuală infinitezimală  $\delta x_1$ . Cu alte cuvinte,  $\delta x_1$  fiind arbitrară, paranteza pătrată trebuie să se anuleze; ceea ce rezultă reprezintă tocmai condiția căutată de echilibru:

$$-m_1 g l \sin \alpha + m_2 g (s + a \sin \alpha) = 0 ,$$

sau,

$$-m_1 g \sqrt{a^2 + s^2 + 2as \sin \alpha} \sin \alpha + m_2 g (s + a \sin \alpha) = 0 ,$$

sau încă,

$$m_1 g \sqrt{a^2 + s^2 + 2as \sin \alpha} \sin \alpha = m_2 g (s + a \sin \alpha) ,$$

care, prin simplificare cu  $g \neq 0$  și ridicare la pătrat, conduce la următoarea ecuație de gradul doi în  $s$ :

$$m_1^2 (a^2 + s^2 + 2as \sin \alpha) \sin^2 \alpha = m_2^2 (s + a \sin \alpha)^2 .$$

Aceasta se mai scrie astfel:

$$s^2 (m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha) - 2sa \sin \alpha (m_1^2 \sin^2 \alpha - m_2^2) + a^2 \sin^2 \alpha (m_2^2 - m_1^2) = 0$$

și are soluțiile

$$s_{1,2} = \frac{a \sin \alpha (m_1^2 \sin^2 \alpha - m_2^2)}{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha (m_1^2 \sin^2 \alpha - m_2^2)^2 - a^2 \sin^2 \alpha (m_2^2 - m_1^2)(m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha)}}{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha},$$

sau,

$$s_{1,2} = a \sin \alpha \left[ -1 \pm \frac{\sqrt{(m_1^2 \sin^2 \alpha - m_2^2)^2 - (m_2^2 - m_1^2)(m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha)}}{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha} \right].$$

Soluția acceptabilă din punct de vedere fizic este

$$s \equiv s_1 = a \sin \alpha \left[ \frac{\sqrt{(m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha)^2 - (m_2^2 - m_1^2)(m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha)}}{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha} - 1 \right],$$

care se mai scrie

$$\begin{aligned} s \equiv s_1 &= a \sin \alpha \left[ \frac{m_1 \cos \alpha \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha}}{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha} - 1 \right] = \\ &= a \sin \alpha \left[ \frac{m_1 \cos \alpha}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se observă faptul că, pentru ca sistemul să aibă o poziție de echilibru, trebuie să fie îndeplinite simultan condițiile

$$m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha > 0$$

și

$$\frac{m_1 \cos \alpha}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha}} \geq 1.$$

Cu alte cuvinte, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha > 0, \\ m_1 \cos \alpha \geq \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha} \end{cases} \quad (4.8)$$

să fie compatibil.

Sistemul (4.8) mai poate fi scris și astfel:

$$\begin{cases} |\sin \alpha| < \frac{m_2}{m_1}, \\ m_1 \geq m_2. \end{cases}$$

Putem sesiza cu ușurință că sistemul este compatibil, rezultând și o condiție necesară asupra unghiului  $\alpha$  al planului înclinat; având în vedere că  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , această condiție este

$$\alpha < \arcsin \frac{m_2}{m_1}, \text{ cu } m_1 > m_2.$$

În aceste condiții, sistemul este în echilibru pentru

$$s = a \sin \alpha \left[ \frac{m_1 \cos \alpha}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right]. \quad (4.9)$$

## Problema 2

Să se rezolve problema precedentă utilizând principiul lui Torricelli.

### Rezolvare

Întrucât sistemul este supus doar forțelor de greutate proprie a punctelor materiale, problema poate fi rezolvată și utilizând principiul lui Torricelli. De altfel, principiul lui Torricelli nu este altceva decât o formă particulară a principiului lucrului mecanic virtual, și anume atunci când singurele forțe aplicate sistemului de puncte materiale sunt forțele de greutate proprie a punctelor materiale.

Principiul lui Torricelli „spune” simplu că

$$\delta z_G = 0, \quad (4.10)$$

unde  $z_G$  reprezintă cota centrului de greutate al sistemului de puncte materiale.

Urmând algoritmul de rezolvare a unei probleme cu ajutorul principiului lui Torricelli, descris în paragraful dedicat lucrului mecanic virtual, trebuie să atașăm sistemului de puncte materiale un sistem de referință unic (unul și același pentru toate corpurile sistemului), de preferință un reper triortogonal cartezian, având axa  $Oz$  verticală (vezi Fig. IV.2). Vom alege apoi ca nivel de referință pentru energia potențială a sistemului planul  $z = 0$  (altfel spus, planul  $xOy$ ), caz în care coordonata  $z$  a centrului de greutate al sistemului (cota centrului de greutate) va fi dată de relația<sup>1</sup>

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^N z_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N z_i m_i, \quad (4.11)$$

unde  $N$  reprezintă numărul total de puncte materiale ale sistemului, iar

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

este masa întregului sistem discret de puncte materiale.

În cazul nostru  $N = 2$ , astfel că relația (4.11) devine

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.12)$$

În acest fel, problema devine (cel puțin pentru moment) o problemă de geometrie plană. Pentru a ușura raționamentele vom simplifica figura, păstrând în ea doar elementele strict necesare determinării coordonatelor verticale  $z_1$  și  $z_2$  ale celor două corpuri (vezi Fig. IV.3).

Astfel, se observă că avem

$$a = |CD|, \quad l = |DE|, \quad s = |CE|, \quad z_1 = |EN| = |AH|, \quad z_2 = |AF|.$$

De asemenea,

$$|FC| + a + l = L,$$

---

<sup>1</sup> În ipoteza că extinderea spațială a sistemului nu este într-atât de mare, încât câmpul gravitațional să varieze sensibil între cele mai îndepărtate extremități ale domeniului ocupat de corpuri.

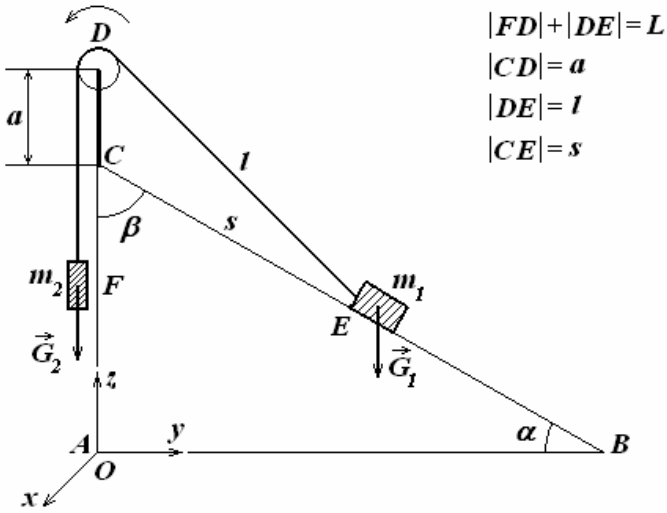


Fig. IV.2

$$|AC| - z_1 = s \sin \alpha$$

și

$$|AC| = z_2 + |FC|.$$

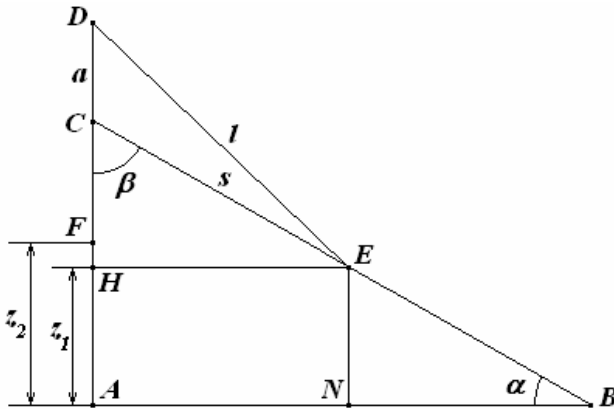


Fig. IV.3

Din aceste relații rezultă

$$|FC| = L - a - l,$$

$$z_1 = |AC| - s \sin \alpha$$

și

$$z_2 = |AC| - |FC| = |AC| - L + a + l.$$

Cu aceste rezultate în relația (4.12) avem

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ m_1 (|AC| - s \sin \alpha) + m_2 (|AC| - L + a + l) \right] = \\ &= \frac{|AC|(m_1 + m_2) - m_2(L - a) + m_2 l - m_1 s \sin \alpha}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Având în vedere faptul că  $|AC| = \text{const.}$ , rezultă că putem scrie

$$z_G = C_0 + \frac{m_2 l - m_1 s \sin \alpha}{m_1 + m_2}, \quad (4.13)$$

unde, prin  $C_0$  am notat mărimea constantă

$$C_0 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{|AC|(m_1 + m_2) - m_2(L - a)}{m_1 + m_2}.$$

Diferențiind relația (4.13) și trecând apoi de la diferențiale la variații virtuale infinitezimale, obținem

$$\delta z_G = \frac{m_2 \delta l - m_1 \delta s \sin \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Utilizând aici relația dintre  $\delta l$  și  $\delta s$  obținută în rezolvarea problemei precedente,

$$l \delta l = (s + a \sin \alpha) \delta s,$$

găsim,

$$\begin{aligned} \delta z_G &= \frac{m_2 \frac{(s + a \sin \alpha)}{l} \delta s - m_1 \delta s \sin \alpha}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{1}{l(m_1 + m_2)} \left[ m_2 (s + a \sin \alpha) - m_1 l \sin \alpha \right] \delta s. \end{aligned}$$

Cum  $\delta s$  este arbitrară, din relația de mai sus rezultă

$$m_2(s + a \sin \alpha) - m_1 l \sin \alpha = 0,$$

sau,

$$m_2(s + a \sin \alpha) = m_1 \sqrt{s^2 + a^2 + 2as \sin \alpha} \sin \alpha,$$

care, prin ridicare la pătrat conduce la următoarea ecuație de gradul doi în  $s$ :

$$m_2^2(s + a \sin \alpha)^2 = m_1^2(s^2 + a^2 + 2as \sin \alpha) \sin^2 \alpha,$$

ce se mai poate scrie și astfel:

$$s^2(m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \alpha) - 2sa \sin \alpha(m_1^2 \sin^2 \alpha - m_2^2) + a^2 \sin^2 \alpha(m_2^2 - m_1^2) = 0,$$

adică aceeași ecuație de gradul doi în  $s$  obținută în rezolvarea problemei precedente. De aici încolo rezolvarea se face exact la fel ca în problema precedentă.

### Problema 3

Utilizând principiul lui Torricelli să se determine poziția de echilibru a tije omogene și rigide de lungime  $2l$  din Fig. IV.4. Se cunoaște raza semicilindrului fix (încăstrat)  $R$ , iar frecările se neglijează.

### Rezolvare

După cum simplu se poate observa din Fig. IV.4, poziția de echilibru a tije este determinată univoc doar de unghiul  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , care este astfel necunoscuta problemei.

Încă de la bun început putem anticipa (ceea ce va trebui să reiese și din calcule) că tija omogenă și rigidă  $AB$  nu va putea rămâne în echilibru în interiorul semicilindrului, decât dacă centrul ei de greutate  $C$  „cade” în interiorul semicilindrului. Evident, dacă centrul de greutate este în afara semicilindrului, forța de greutate, prin momentul pe care îl creează în raport cu polul  $N$ , va „răsturna” tija, care astfel va cădea în afara semicilindrului.

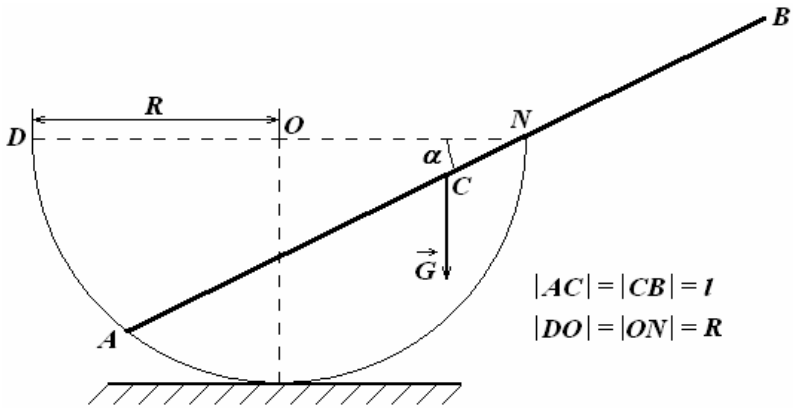


Fig. IV.4

Problema poate fi rezolvată cu ajutorul principiului lui Torricelli, deoarece singura forță aplicată tijei este forța de greutate proprie  $\vec{G} = m\vec{g}$ , unde  $m$  este masa tijei omogene. Alegând un sistem de referință cartezian cu axele ca în Fig. IV.5 și nivelul de referință pentru energia potențială ca fiind planul orizontal care trece prin diametrul  $DN$  al semicilindrului (planul  $xOy$ ), problema devine (cel puțin pentru moment) o problemă de geometrie plană. Mai exact, trebuie să determinăm segmentul  $|MC| = z_G$  din Fig. IV.5.

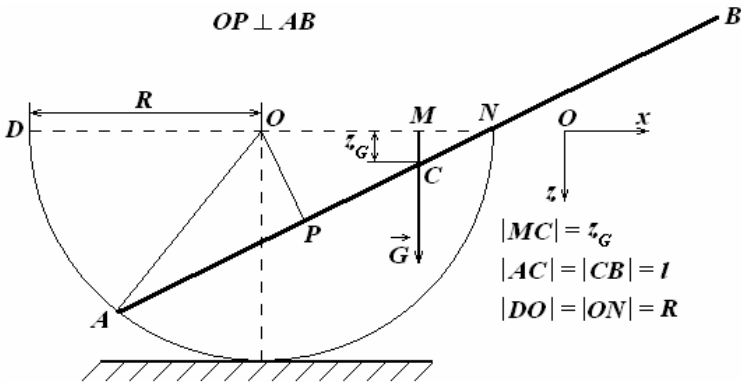


Fig. IV.5



Avem,

$$\begin{aligned} |MC| &= |NC| \sin \alpha = (|AN| - |AC|) \sin \alpha = \\ &= (2|AP| - l) \sin \alpha = (2R \cos \alpha - l) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Cota centrului de greutate al tijei este deci

$$z_G = (2R \cos \alpha - l) \sin \alpha. \quad (4.14)$$

Principiul lui Torricelli „cere” ca  $\delta z_G = 0$ . Diferențind relația (4.14) și trecând apoi de la diferențială la variația virtuală infinitezimală, obținem

$$\delta z_G = [-2R \sin^2 \alpha + (2R \cos \alpha - l) \cos \alpha] \delta \alpha = 0.$$

Cum  $\delta \alpha$  este arbitrar, relația anterioară implică anularea parantezei pătrate:

$$-2R \sin^2 \alpha + (2R \cos \alpha - l) \cos \alpha = 0,$$

adică,

$$\begin{aligned} -2R \sin^2 \alpha + 2R \cos^2 \alpha - l \cos \alpha &= -2R(1 - \cos^2 \alpha) + 2R \cos^2 \alpha - l \cos \alpha = \\ &= 4R \cos^2 \alpha - l \cos \alpha - 2R = 0, \end{aligned}$$

care este o ecuație de gradul doi în  $\cos \alpha$ . Soluțiile acestei ecuații sunt

$$(\cos \alpha)_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Deoarece  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , doar soluția cu semnul plus are sens fizic, deci

$$\cos \alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}. \quad (4.15)$$

În concluzie, tija va rămâne în echilibru în interiorul semicilindrului în poziția dată de unghiul

$$\alpha = \arccos \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R} \right). \quad (4.16)$$

Deoarece  $\forall \alpha$ ,  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ , va trebui să cerem ca (vezi relația (4.15)):

$$\cos \alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R} \leq 1.$$

Aceasta este echivalent cu

$$l^2 + 32R^2 \leq 64R^2 + l^2 - 16Rl,$$

adică,

$$l \leq 2R, \tag{4.17}$$

ceea ce înseamnă că centrul de greutate al tijei trebuie „să cadă” în interiorul semicilindrului, așa cum am precizat încă de la început.

## Capitolul V

### Probleme de calcul variațional

#### V.1 Elemente de calcul variațional

##### V.1.1. Funcționale. Diferențialele unei funcționale.

**Definiție:** Se numește *funcțională* o aplicație definită pe un spațiu liniar  $X$ , sau pe o parte a lui  $X$ , cu valori în corpul scalarilor peste care este definit spațiul liniar  $X$ .

Deci, la modul cel mai simplu, putem privi o funcțională ca pe o „funcție” al cărei domeniu de definiție este o mulțime de funcții și al cărei codomeniu este o mulțime de „numere” (scalari<sup>1</sup>).

Din modul în care este definită rezultă că, de fapt, o funcțională este un operator.

Fie  $J(y)$  o funcțională definită pe un domeniu  $\mathcal{D}$  al unui spațiu Banach  $\mathcal{B}$ , cu valori pe dreapta reală  $\mathcal{R}$ .

**Definiție:** Se numește *spațiu Banach* un spațiu liniar normat și metric complet (completitudinea este deci asigurată în raport cu metrica).

**Definiție:** Se numește *spațiu complet* un spațiu liniar în care orice șir Cauchy este convergent către un element al spațiului.

**Definiție:** Se numește *șir Cauchy* în spațiul metric  $(X, d)$  un șir  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elemente ale lui  $X$  care satisface proprietatea:  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon$ .

---

<sup>1</sup> Trebuie să avem în vedere aici că, în funcție de natura spațiului liniar  $X$ , scalarii acestuia nu sunt întotdeauna numere/cifre (fie ele reale sau complexe). Cu alte cuvinte, trebuie să avem grijă să înțelegem noțiunea de scalar în sensul cel mai larg (în general, scalar  $\neq$  număr, cu toate că, în mod obișnuit, prin scalar înțelegem un număr – cel mai adesea – real).

**Definiție:** Se numește *distanță* pe mulțimea  $X$  orice aplicație  $d$  definită pe  $X \times X$  cu valori reale pozitive,  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , care satisface proprietățile:

$$D_1: d(x, y) = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = y, (x, y \in X);$$

$$D_2: d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X;$$

$$D_3: d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$$

**Definiție:** Se numește *spațiu metric* orice pereche  $(X, d)$ , unde  $X$  este o mulțime, iar  $d$  este o distanță definită pe  $X$ .

**Definiție:** Se numește *spațiu normat*, un spațiu liniar pe care s-a dat (s-a definit) o normă,  $p$ .

**Definiție:** Se numește *normă* orice seminormă care satisface proprietatea:  $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

**Definiție:** Se numește *seminormă* o funcție cu valori reale,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ , care satisface proprietățile:

$$SN_1: p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X;$$

$$SN_2: p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \forall x, y \in X \text{ și } \lambda \text{ un scalar nenul.}$$

O normă se notează de obicei astfel:  $p(x) \stackrel{\text{not.}}{=} \|x\|$ .

Fie deci  $J(y)$  o funcțională în condițiile precizate anterior. Fie și  $y \in \mathcal{D}$ ,  $h \in \mathcal{B}$  astfel încât  $y + h \in \mathcal{D}$ .

**Definiție (diferențiabilitate 1):** Spunem că funcționala  $J(y)$  este *diferențiabilă în „punctul”*<sup>2</sup>  $y$  dacă diferența  $J(y + h) - J(y)$  se poate scrie astfel:

$$J(y + h) - J(y) = \delta(y, h, J) + r(y, h, J),$$

unde  $\delta(y, h, J)$  este o funcțională liniară în  $h$ ,

$$\delta(y, \alpha h_1 + \beta h_2, J) = \alpha \delta(y, h_1, J) + \beta \delta(y, h_2, J),$$

<sup>2</sup> Am folosit ghilimele pentru cuvântul „punct”, deoarece în acest context cuvântul punct este utilizat oarecum forțat, pentru a păstra limbajul utilizat în cadrul analizei matematice a funcțiilor obișnuite. De fapt, aici acest „punct” este o funcție. Din această cauză, metaforic vorbind, am putea spune că o funcțională este „o funcție de funcții”.

cu  $\alpha$  și  $\beta$  doi scalari, iar  $r(y, h, J)$  este o funcțională care satisface condiția

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|r(y, h, J)|}{\|h\|} = 0.$$

**Definiție (diferențiabilitate 2):** Spunem că funcționala  $J(y)$  este *diferențiabilă în „punctul”*  $y$  dacă există  $\delta(y, h, J)$  o funcțională liniară în  $h$ , astfel încât

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} [J(y+h) - J(y) - \delta(y, h, J)] = 0.$$

**Definiție:** În condițiile din definiția de mai sus (a diferențiabilității unei funcționale într-un „punct”), funcționala  $\delta(y, h, J)$  se numește *diferențiala* funcționalei  $J(y)$ .

**Teoremă:** Dacă  $\delta(y, h, J)$  există, atunci ea este unică.

Nu dăm aici demonstrația acestei teoreme (demonstrație care se bazează pe metoda reducerii la absurd).

**Definiție:** Dacă funcționala  $r(y, h, J)$  se poate reprezenta sub forma

$$r(y, h, J) = \frac{1}{2} \delta_2(y, h, J) + r_2(y, h, J),$$

unde,

$$\delta_2(y, t h, J) = t^2 \delta_2(y, h, J)$$

și

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|r_2(y, h, J)|}{\|h\|^2} = 0,$$

atunci funcționala  $\delta_2(y, h, J)$  se numește *diferențiala secundă* a funcționalei  $J(y)$ .

Pentru a înțelege mai ușor aceste noțiuni vom prezenta în continuare analogia remarcabilă care există între acestea și cele referitoare la o funcție obișnuită.

Fie așadar o funcție  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită pe un interval  $I$  al axei reale și cu valori în mulțimea numerelor reale, derivabilă în punctul  $x_0 \in I$ .

Atunci, pentru  $x \neq x_0$  putem scrie

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0). \quad (*)$$

Deoarece funcția  $f(x)$  este derivabilă în punctul  $x_0 \in I$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = f'(x_0),$$

de unde, rezultă cu necesitate că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Dacă notăm diferența  $x - x_0$  cu  $h$ , atunci  $x = x_0 + h$  și putem scrie

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + h \alpha(x_0 + h) \stackrel{\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(x_0 + h) = 0}{\approx} h f'(x_0).$$

Funcția  $g = h f'(x_0)$  (care este în mod evident liniară în  $h$ ) se numește diferențiala funcției  $f(x)$  în punctul  $x_0$  și, de obicei, se notează

$g \stackrel{not.}{=} df(x_0)$ . Cu această notație, liniaritatea în  $h$  se scrie astfel:

$$\begin{aligned} (\alpha h_1 + \beta h_2) f'(x_0) &\equiv df(x_0, \alpha h_1 + \beta h_2) = (\alpha h_1 + \beta h_2) f'(x_0) = \\ &= \alpha h_1 f'(x_0) + \beta h_2 f'(x_0) = \alpha df(x_0, h_1) + \beta df(x_0, h_2) \equiv \\ &\equiv \alpha h_1 f'(x_0) + \beta h_2 f'(x_0). \end{aligned}$$

Analogia cere următoarele corespondențe mai mult decât evidente:

$$\begin{array}{ccc} J & \rightarrow & f \\ y & \rightarrow & x_0 \\ h & \rightarrow & h \\ \delta(y, h, J) & \rightarrow & d(x_0, h, f) \\ r(y, h, J) & \rightarrow & r(x_0, h, f) \end{array}$$

unde am folosit notațiile

$$f'(x_0)(x - x_0) = h f'(x_0) = df(x_0, h) \equiv d(x_0, h, f)$$

și

$$\alpha(x)(x - x_0) = h \alpha(x_0 + h) \equiv r(x_0, h, f).$$

Condiției de limită asupra funcționalei  $r(y, h, J)$ ,  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|r(y, h, J)|}{\|h\|} = 0$ , îi

va corespunde în cadrul acestei analogii următoarea condiție asupra funcției  $\alpha(x)$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \alpha(x_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Amintim și faptul că de obicei se preferă notația  $h \stackrel{\text{not.}}{=} dx$ , astfel că diferențiala funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se scrie astfel:  $df(x_0) = f'(x_0)dx$ .

Pentru a sesiza analogia și în ceea ce privește diferențiala secundă a unei funcționale, vom utiliza dezvoltarea în serie Taylor a funcției  $f(x)$  în jurul punctului  $x_0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \beta(x)(x - x_0)^2, \end{aligned} \quad (**)$$

unde am utilizat notația

$$\beta(x)(x - x_0)^2 = \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(iv)}(x_0)(x - x_0)^4 + \dots$$

cu condiția evidentă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0.$$

Având în vedere relația (\*), și dezvoltarea în serie Taylor (\*\*) rezultă

$$\alpha(x)(x - x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \beta(x)(x - x_0)^2.$$

Utilizând notația cu  $h = x - x_0$ , putem scrie

$$\alpha(x)(x - x_0) = h \alpha(x_0 + h) \equiv r(x_0, h, f) = \frac{1}{2} h^2 f''(x_0) + h^2 \beta(x_0 + h),$$

sau, dacă definim variația secundă (de ordinul doi<sup>3</sup>) a funcției  $f(x)$  în punctul  $x_0$  prin

$$\delta_2 f = f''(x_0)(x - x_0)^2 = h^2 f''(x_0) \equiv \delta_2(x_0, h, f),$$

avem

$$r(x_0, h, f) = \frac{1}{2} \delta_2(x_0, h, f) + r_2(x_0, h, f),$$

unde am introdus notația evidentă

<sup>3</sup> Aceasta ar mai putea fi numită (ca să păstrăm limbajul din teoria funcționalelor) „diferențiala secundă” (sau de ordinul doi) a funcției  $f(x)$  în punctul  $x_0$  și ar putea fi notată prin  $d_2 f(x_0)$ .

$$r_2(x_0, h, f) = h^2 \beta(x_0 + h).$$

Evident,

$$\delta_2(x_0, th, f) = (th)^2 f''(x_0) = t^2 h^2 f''(x_0) = t^2 \delta_2(x_0, h, f)$$

și

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(x_0, h, f)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \beta(x_0 + h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} [\beta(x_0 + h)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0,$$

ceea ce duce analogia până la capăt, dacă, în plus, la lista de corespondențe de mai sus le adăugăm și pe următoarele două:

$$\delta_2(y, h, J) \rightarrow \delta_2(x_0, h, f),$$

$$r_2(y, h, J) \rightarrow r_2(x_0, h, f).$$

Un exemplu de funcțională foarte des întâlnit în cadrul mecanicii analitice este  $J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ , în care, funcției  $f(x, y, y')$  i se cere să satisfacă anumitor condiții de continuitate.

Fie deci funcția  $f(x, y, z)$  de clasă  $C^2$  pe domeniul  $\mathcal{D}: a \leq x \leq b, -\infty < y, z < +\infty$ , cu derivate parțiale în raport cu  $y$  și  $z$  uniform continue.

**Definiție (continuitatea într-un punct în limbaj  $(\varepsilon, \eta(\varepsilon))$ ):** Fie funcția  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in I$  un punct din domeniul ei de definiție. Spunem că funcția  $f(x)$  este *continuă în punctul*  $x_0$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in I$ , de îndată ce  $|x - x_0| < \eta(\varepsilon)$ .

**Observație:**  $\eta$  depinde doar de  $\varepsilon$  dacă ne referim la continuitatea într-un singur punct. Acesta va depinde însă (în general) și de punctul  $x_0$  dacă ne referim la continuitatea pe întreg intervalul  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definiție (continuitatea într-un punct în limbajul vecinătăților):** Fie  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in I$ . Se spune că funcția  $f(x)$  este *continuă în punctul*  $x_0$  dacă  $\forall U(f(x_0)), \exists V(x_0)$ , astfel încât  $\forall x \in I \cap V(x_0), f(x) \in U(f(x_0))$ .

**Definiție (continuitatea într-un punct în limbajul șirurilor):** Fie  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in I$ . Se spune că funcția  $f(x)$  este *continuă în punctul*



$x_0$  dacă  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un șir convergent la  $x_0$ , șirul  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent la  $f(x_0)$ .

**Definiție:** Fie funcția  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se spune că  $f(x)$  este *uniform continuă* pe  $I \subset \mathbb{R}$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ ,  $\forall x', x'' \in I$  de îndată ce  $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$ .

**Observație:**  $\eta$  depinde doar de  $\varepsilon$  și este independent de  $x'$  și  $x''$  ce satisfac  $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$ . Fie  $f(x)$  doar continuă pe  $I \subset \mathbb{R}$  și  $x' \in I$ . Dacă păstrăm  $x'$  fix, la un  $\varepsilon$  dat corespunde un  $\eta$  care se schimbă dacă  $\varepsilon$  se schimbă, dar care depinde și de  $x'$  ales, adică  $\eta = \eta(\varepsilon, x')$ . Dacă  $x'$  parcurge mulțimea  $I$ ,  $\varepsilon$  fiind fix, mulțimea valorilor lui  $\eta(\varepsilon, x')$  are o margine inferioară,  $\eta_0(\varepsilon) = \inf_{\substack{\forall x' \in I \\ \varepsilon \text{ fix}}} \{\eta(\varepsilon, x')\}$ . Dacă  $\eta_0(\varepsilon) > 0$ , spunem că

funcția  $f(x)$  este uniform continuă pe  $I$ .

**Teoremă:** O funcție continuă pe un interval compact<sup>4</sup> este uniform continuă pe acel interval (de exemplu:  $f(x) = x^3$ ,  $x \in [1, 3]$ ).

**Teorema creșterilor finite (Lagrange):** Fie funcția  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a, b \in I$  două puncte din intervalul  $I$ . Dacă

$L_1$ : funcția  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  și

$L_2$ : funcția  $f$  este derivabilă pe  $(a, b)$ ,

atunci<sup>5</sup>  $\exists^* c \in (a, b)$ , astfel încât

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

**Observație:** Adesea se consideră următoarele formulări echivalente pentru relația  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ :

1.  $f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi)$ ,  $a < \xi < x$ ;
2.  $f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ .

**Definiții:** Spunem că funcția  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este *derivabilă* în punctul  $x_0 \in I$ , dacă raportul  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  are limită finită în punctul  $x_0$ . Limita

<sup>4</sup> Un interval compact este un interval închis și mărginit.

<sup>5</sup> Simbolul  $\exists^*$  înseamnă „există cel puțin”.

însăși se numește *derivata* funcției  $f(x)$  în punctul  $x_0$  și se notează cu

$$f'(x_0): \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Revenind, să considerăm funcționala

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

definită pe mulțimea funcțiilor  $y = y(x) \in C^2[a, b]$ , care satisfac în plus condițiilor  $y(a) = 0, y(b) = 0$ . Dacă definim drept normă pe spațiul acestor funcții mărimea

$$\|y\| = \max \left\{ \sup_{x \in [a, b]} |y(x)|, \sup_{x \in [a, b]} |y'(x)| \right\},$$

atunci mulțimea acestor funcții formează un spațiu Banach<sup>6</sup>  $\mathcal{B}$ .

Fie acum  $h(x)$  o funcție din acest spațiu Banach. Evident,  $y(x) + h(x) \in \mathcal{B}$  și atunci este bine definită funcționala

$$J(y+h) = \int_a^b f(x, y+h, y'+h') dx,$$

deci putem calcula diferența

$$\begin{aligned} J(y+h) - J(y) &= \int_a^b f(x, y+h, y'+h') dx - \int_a^b f(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b [f(x, y+h, y'+h') - f(x, y, y')] dx. \end{aligned}$$

Aplicând teorema creșterilor finite sub integrală, rezultă

$$\begin{aligned} J(y+h) - J(y) &= \int_a^b [f(x, y+h, y'+h') - f(x, y, y')] dx = \\ &= \int_a^b \left[ h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h, y'+\theta h') + h' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y+\theta h, y'+\theta h') \right] dx, \end{aligned} \quad (5.1)$$

<sup>6</sup> Am considerat ca și spațiu linear de definiție a unei funcționale un spațiu de tip Banach, deoarece pe o astfel de structură matematică avem definite toate noțiunile matematice utile în cadrul mecanicii analitice și anume: noțiunea de convergență, cea de continuitate, cea de derivabilitate și cea de integrabilitate.

unde  $0 < \theta < 1$ .

Utilizând notațiile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h, y' + \theta h'), \quad 0 < \theta < 1 \quad (5.2)$$

și

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^* \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y + \theta h, y' + \theta h'), \quad 0 < \theta < 1, \quad (5.3)$$

relația (5.1) se poate scrie mai simplu astfel:

$$J(y+h) - J(y) = \int_a^b \left[ h \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* + h' \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^* \right] dx, \quad 0 < \theta < 1.$$

Introducând acum noi notații:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h, y' + \theta h') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') \stackrel{\text{not.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* - \frac{\partial f}{\partial y} = f_0$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y + \theta h, y' + \theta h') - \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') \stackrel{\text{not.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^* - \frac{\partial f}{\partial y'} = f_1$$

și ținând cont de faptul că  $\frac{\partial f}{\partial y}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  sunt uniform continue, rezultă că

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât

$$\left| \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* - \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |f_0| < \varepsilon$$

și

$$\left| \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^* - \frac{\partial f}{\partial y'} \right| = |f_1| < \varepsilon,$$

de îndată ce

$$|(y + \theta h) - y| = |\theta h| < |h| < \eta(\varepsilon)$$

și, respectiv,

$$|(y' + \theta h') - y'| = |\theta h'| < |h'| < \eta(\varepsilon),$$

adică – ținând cont de definiția normei – de îndată ce  $\|h\| < \eta(\varepsilon)$ . Cu notațiile (5.2) și (5.3) avem,

$$J(y+h) - J(y) = \int_a^b \left( h \frac{\partial f}{\partial y} + h' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \int_a^b (h f_0 + h' f_1) dx. \quad (5.4)$$

Utilizând proprietățile integralelor, se poate cu ușurință verifica faptul că integrala

$$L(h) = \int_a^b \left( h \frac{\partial f}{\partial y} + h' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

este liniară în funcția  $h$ . Într-adevăr,

$$\begin{aligned} L(\alpha h_1 + \beta h_2) &= \int_a^b \left[ (\alpha h_1 + \beta h_2) \frac{\partial f}{\partial y} + (\alpha h_1' + \beta h_2') \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx = \\ &= \alpha \int_a^b \left( h_1 \frac{\partial f}{\partial y} + h_1' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \beta \int_a^b \left( h_2 \frac{\partial f}{\partial y} + h_2' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = \\ &= \alpha L(h_1) + \beta L(h_2). \end{aligned}$$

Apoi,

$$\left| \int_a^b (h f_0 + h' f_1) dx \right| \leq \max(|h|, |h'|) \int_a^b (|f_0| + |f_1|) dx,$$

adică,

$$\frac{1}{\|h\|} \left| \int_a^b (h f_0 + h' f_1) dx \right| \leq \int_a^b (|f_0| + |f_1|) dx \leq 2\varepsilon(b-a). \quad (5.5)$$

Deci (5.4) dă o descompunere a lui  $J(y+h) - J(y)$  într-o funcțională liniară în  $h(x)$  și o a doua ce satisface condiția (5.5). Cu alte cuvinte, condițiile de diferențiabilitate sunt satisfăcute, iar diferențiala lui  $J(y)$  este

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b \left( h \frac{\partial f}{\partial y} + h' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (5.6)$$

Având în vedere faptul că funcția  $f(x, y, y')$  este de clasă  $C^2$  pe domeniul ei de definiție,  $f \in C^2(\mathcal{D})$ , unde  $\mathcal{D}: a \leq x \leq b, -\infty < y, y' < +\infty$ , putem integra prin părți termenul al doilea din (5.6) și obținem

$$\int_a^b h' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \left( h \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx.$$

Dar

$$\left( h \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_a^b = h(b) \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) - h(a) \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(a), y'(a))$$

și cum  $h(x) \in \mathcal{B}$ , avem  $h(a) = 0$  și  $h(b) = 0$ , ceea ce conduce la

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b h(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx. \quad (5.7)$$

Generalizarea acestui rezultat la cazul unei funcționale de tipul

$$\int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx,$$

în care funcția de  $(n+2)$  variabile,  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  este o funcție de clasă  $C^n$  pe domeniul ei de definiție,  $\mathcal{D}: a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, y', \dots, y^{(n)} < +\infty$ , se poate face cu ușurință. Astfel, printr-un raționament analog se poate deduce expresia diferențialei acestei funcționale,

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b h(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right) \right] dx. \quad (5.8)$$

Alte exemple de funcționale mai des întâlnite (împreună cu diferențialele lor) sunt:

i)  $J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ , unde funcția  $x$ , care depinde de variabila (parametrul)  $t$  este o funcție vectorială (cu  $n$  componente),  $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  și  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ .

Prin calcule analoage celor efectuate în cazul funcționalei  $J(y)$ , pentru diferențiala funcționalei  $J(x)$  rezultă expresia

$$\delta(x, h, J) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n h_i(t) \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] dt; \quad (5.9)$$

ii)  $J(z) = \int_{\Omega} f \left( x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$ , pentru care se obține

$$\delta(z, h, J) = \int_{\Omega} h \left[ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right) \right] dx dy, \quad (5.10)$$

în care  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  și  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ .

## V.1.2. Extremele funcționalelor

### A) Condiții necesare de extremum

Fie  $J(y)$  o funcțională diferențiabilă definită pe un spațiu Banach  $\mathcal{B}$ .

**Definiție:**  $y_0$  se numește „punct” de maxim relativ al funcționalei  $J(y)$  dacă  $\exists V(y_0)$  o vecinătate a lui  $y_0$ , astfel încât,  $\forall y \in V(y_0)$ ,

$$J(y) \leq J(y_0).$$

**Definiție:**  $y_0$  se numește „punct” de minim relativ al funcționalei  $J(y)$  dacă  $\exists V(y_0)$  o vecinătate a lui  $y_0$ , astfel încât,  $\forall y \in V(y_0)$ ,

$$J(y) \geq J(y_0).$$

**Teoremă:** Dacă  $J(y)$  este o funcțională diferențiabilă și  $y_0$  este un „punct” în care  $J(y)$  este extremă, atunci,  $\forall h \in \mathcal{B}$ ,

$$\delta(y_0, h, J) = 0. \quad (5.11)$$

Deci, o condiție necesară pentru ca  $y_0$  să fie un punct de extremum pentru funcționala  $J(y)$  este ca diferențiala funcționalei,  $\delta(y, h, J)$ , să se anuleze în acest punct.

**Definiție:** „Punctele”  $y_0$  în care este satisfăcută condiția (5.11) se numesc *extremale*.

Cu alte cuvinte, extremalele unei funcționale sunt acele funcții  $y_0(x)$  care anulează prima diferențială a funcționalei.

## B) Condiții suficiente de extremum

**Teoremă:** Dacă funcționala  $J(y)$  admite diferențiala primă  $\delta(y, h, J)$  și diferențiala secundă  $\delta_2(y, h, J)$ , atunci condiția necesară și suficientă pentru ca „punctul”  $y_0$  să facă pe  $J(y)$  maximă este ca  $\forall h \in \mathcal{B}$ , să avem

$$\delta(y_0, h, J) = 0, \quad r(y_0, h, J) \leq 0,$$

iar pentru ca „punctul”  $y_0$  să facă pe  $J(y)$  minimă este ca  $\forall h \in \mathcal{B}$ , să avem

$$\delta(y_0, h, J) = 0, \quad r(y_0, h, J) \geq 0.$$

Într-adevăr, pentru că  $J(y)$  admite diferențială primă, avem

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = \delta(y_0, h, J) + r(y_0, h, J).$$

Dar  $\delta(y_0, h, J) = 0$  este condiția necesară ca  $y_0$  să fie extremală. Rămâne

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = r(y_0, h, J).$$

Deci, pentru ca  $y_0$  să fie punct de

- maxim relativ, adică pentru ca  $J(y_0 + h) - J(y_0) \leq 0$  este necesar și suficient ca  $r(y_0, h, J) \leq 0$ ;
- minim relativ, adică pentru ca  $J(y_0 + h) - J(y_0) \geq 0$  este necesar și suficient ca  $r(y_0, h, J) \geq 0$ ;

Se poate arăta că, pentru a fi îndeplinite aceste condiții, trebuie să avem

- 1) Pentru ca  $r(y_0, h, J) \leq 0$ ,  $\begin{cases} - \text{ condiția necesară : } \delta_2(y_0, h, J) \leq 0, \\ - \text{ condiția suficientă : } \delta_2(y_0, h, J) \leq -C \|h\|^2 \end{cases}$
- 2) Pentru ca  $r(y_0, h, J) \geq 0$ ,  $\begin{cases} - \text{ condiția necesară : } \delta_2(y_0, h, J) \geq 0, \\ - \text{ condiția suficientă : } \delta_2(y_0, h, J) \geq C \|h\|^2, \end{cases}$

unde  $C > 0$  este o constantă.

**Teoremă:** Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domeniu din spațiul  $n$ -dimensional abstract  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$  un punct din acest domeniu și  $\mathcal{H}$  mulțimea funcțiilor  $h(x) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  continue pe domeniul  $\Omega$  și care, în plus,

se anulează pe frontiera  $\partial\Omega$  a lui  $\Omega$ . În aceste condiții, dacă  $A(x)$  este o funcție continuă pe  $\Omega$  și

$$\int_{\Omega} h(x)A(x) dx = 0, \quad \forall h(x) \in \mathcal{H},$$

atunci  $A(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$ .

Fie funcționala  $J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ . Condiția necesară de extremum pentru această funcțională este ca diferențiala ei, (5.7), să se anuleze:

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b h(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx \equiv G(y) = 0, \quad \forall h(x).$$

Întrucât:

$$- h \in C^2[a, b];$$

$$- h(a) = 0, \quad h(b) = 0;$$

$$- f \in C^2(a \leq x \leq b, -\infty < y, y' < \infty), \text{ (deci } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \text{ este continuă),}$$

ne situăm exact în condițiile teoremei anterioare, care ne asigură că, pentru

$$\text{ca } \int_a^b h(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0, \quad \forall h(x), \text{ este necesar și suficient ca}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (5.12)$$

care este numită *ecuația Euler a extremalelor*. Aceasta se mai poate scrie astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5.13)$$

Pentru funcționala

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

unde  $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , ecuațiile extremalelor sunt



$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Aceste ecuații au fost deduse pentru prima dată de către Euler în anul 1744 și ulterior au fost utilizate de către Lagrange în mecanică. În prezent ele sunt cunoscute sub denumirea de *ecuațiile Euler-Lagrange*.

Pentru funcționala

$$\int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx,$$

condiția necesară de extremum (ecuația Euler a extremalelor) este

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right) = 0.$$

Fie o ecuație diferențială de ordinul  $n$ , dată sub formă implicită,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

**Definiție:** Se numește *integrală intermediară* (sau *de ordin  $k$* ) a ecuației date, o ecuație diferențială de ordin  $n-k$ , ce conține  $k \geq 1$  constante arbitrare,

$$\psi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0$$

și care este verificată de integrala generală

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

a ecuației diferențiale date.

Pentru  $k=1$ , ecuația diferențială de ordinul  $n-1$ ,

$$\chi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C) = 0,$$

care depinde de o singură constantă de integrare,  $C$ , se numește *integrală primă* a ecuației diferențiale  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

**Integrale prime** ale ecuațiilor Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0, \quad (i = \overline{1, n}):$$

1. Să presupunem că funcția  $f$  nu depinde explicit de  $y_i$ . Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \text{ iar din ecuațiile Euler-Lagrange rezultă că } \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0,$$

adică

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = \text{const.} \quad (5.14)$$

2. În cazul în care funcția  $f$  nu depinde explicit de variabila independentă  $x$ , o integrală primă a ecuațiilor Euler-Lagrange este

$$\dot{y}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} - f = \text{const.} \quad (5.15)$$

Într-adevăr, să derivăm total în raport cu  $x$  relația (5.15). Avem:

$$\frac{d}{dx} \left( \dot{y}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{d}{dx} f = 0, \text{ sau, } \ddot{y}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} + \dot{y}_i \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} \dot{y}_i - \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \ddot{y}_i = 0,$$

$$\text{sau încă, } -\dot{y}_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] = 0 \text{ q.e.d.}$$

**Observație:** Pentru a determina diferențiala funcționalei

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

definită pe mulțimea funcțiilor  $y = y(x) \in C^2[a, b]$ , am considerat că aceste funcții satisfac în plus condițiilor  $y(a) = 0, y(b) = 0$ . Toate considerațiile pe care le-am făcut pentru a deduce ecuația Euler a extremalelor acestei funcționale rămân valabile și dacă vom considera condițiile mai puțin restrictive  $y(a) = a_1 \neq 0$  și  $y(b) = b_1 \neq 0$ . Esențiale sunt însă condițiile  $h(a) = 0, h(b) = 0$ , care cer ca, dacă funcția  $y_0 = \varphi(x)$  trece prin punctele  $P(a, a_1)$  și  $Q(b, b_1)$ , atunci și curba  $y(x) = \varphi(x) + h(x) = y_0(x) + h(x)$  să treacă prin aceleași puncte (vezi Fig. V.1).

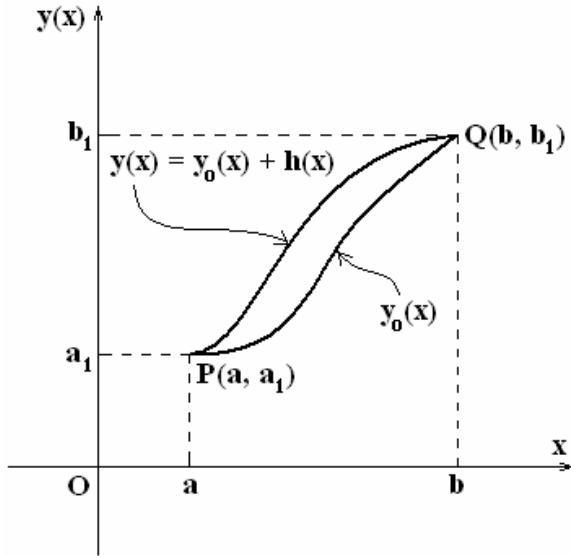


Fig. V.1

### C) Extremele condiționate ale funcționalelor

Fie funcționala  $J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ , în care funcția  $y = y(x)$  este supusă unei constrângeri, care se exprimă prin intermediul unei alte funcționale de același tip (definită pe același domeniu) ca  $J(y)$ , anume,

$$G(y) = \int_a^b g(x, y, y') dx = \text{const.} \equiv C.$$

Pentru a determina extremele condiționate ale acestei funcționale vom apela la următoarea

**Teoremă:** Pentru ca  $y_0$  să fie un „punct” de extremum a funcționalei  $J(y)$ , unde  $y(x)$  satisface condiției suplimentare  $G(y) = C$ , este necesar ca  $y_0$  să anuleze diferențiala funcționalei  $W(y) = J(y) - \lambda G(y)$ , unde  $\lambda \neq 0$  este un scalar oarecare nenul.

Deci, pentru determinarea extremelor condiționate ale unei funcționale,  $J(y)$ , se caută extremele libere ale unei noi funcționale,

$W(y)$ , construită cu ajutorul funcționalei inițiale și a funcționalei care exprimă condiția (constrângerea),  $G(y)$ , astfel

$$W(y) = J(y) - \lambda G(y) = \int_a^b [f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')] dx = \int_a^b w(x, y, y') dx,$$

unde prin  $w$  am notat funcția  $w = f - \lambda g$ , cu  $\lambda$  scalar oarecare diferit de zero. Soluția unei astfel de probleme implică determinarea atât a extremalelor condiționate ale funcționalei  $J(y)$ , cât și a scalarului  $\lambda \neq 0$ . Acest lucru se poate face utilizând teorema de mai sus, care furnizează sistemul de două „ecuații”:

$$\begin{cases} \delta(y, h, W) = 0, \\ G(y) = 0, \end{cases}$$

cu două necunoscute:  $y_0$  (extremala) și  $\lambda$ .

## V.2. Probleme a căror rezolvare necesită elemente de calcul variațional

### 1. Problema brahisticronei

Cronologic vorbind, această problemă – care a fost formulată pentru prima dată de către Jean Bernoulli în anul 1696 – este prima problemă de calcul variațional. Ea se enunță astfel:

Dintre toate curbele situate într-un plan vertical și care trec prin două puncte date (fixate) să se determine aceea de-a lungul căreia o particulă grea se deplasează fără frecare în timpul cel mai scurt.

De altfel, cuvântul brahisticronă provine din alipirea a două cuvinte grecești, anume: „brachistos” (care înseamnă „cel mai scurt”) și „chronos” (care înseamnă „timp”).

## Rezolvare

Alegând un sistem de referință ca în Fig. V.2, unde cele două puncte fixe sunt (fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei)  $P_0(0, 0)$  și  $P_1(x_1, y_1)$ , putem scrie

$$ds = v dt \quad (5.16)$$

unde  $v$  este viteza particulei de-a lungul curbei, iar  $dt$  este intervalul infinitesimal de timp în care particula a parcurs distanța infinitesimală de-a lungul curbei,  $ds$ .

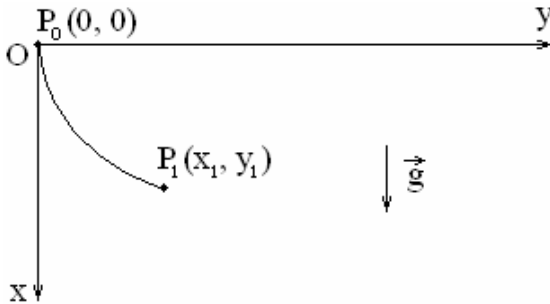


Fig. V.2

De aici, pentru întreg intervalul temporal necesar particulei să se deplaseze din  $P_0(0, 0)$  în  $P_1(x_1, y_1)$  obținem,

$$t = \int_0^t dt = \int_{P_0}^{P_1} \frac{ds}{v}. \quad (5.17)$$

Viteza  $v$  poate fi obținută din teorema variației energiei cinetice sau din legea conservării energiei. Ținând cont că particula pleacă din repaus, în ambele cazuri se obține

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx, \quad (5.18)$$

de unde,

$$v = \sqrt{2gx}. \quad (5.19)$$

Pe de altă parte,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2(1 + y'^2),$$

unde  $y' = \frac{dy}{dx}$ . De aici rezultă că

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2}. \quad (5.20)$$

Introducând acum (5.19) și (5.20) în relația (5.17), pentru timpul căutat,  $t$ , se obține relația

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} dx = \int_0^{x_1} f(x, y') dx. \quad (5.21)$$

După cum se poate observa, timpul  $t$  a fost obținut sub forma unei funcționale a cărei funcție „caracteristică”  $f(x, y')$  nu depinde de variabila dependentă  $y = y(x)$ . Aceasta înseamnă că pentru ecuația Euler a extremalelor,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

avem următoarea integrală primă:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.}, \quad (5.22)$$

unde

$$f(x, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}}. \quad (5.23)$$

Considerând pentru constanta din relația (5.22) valoarea  $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ , unde  $a$  este o nouă constantă și ținând seama de (5.23), relația (5.22) devine

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

de unde, prin separarea variabilelor obținem

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx. \quad (5.24)$$

Pentru rezolvarea acestei integrale vom face schimbarea de variabilă

$$\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = u. \quad (5.25)$$

Avem,

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{2a-x} + \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{2a-x}}}{2a-x} dx = du,$$

sau,

$$\frac{a}{\sqrt{x}(2a-x)^{3/2}} dx = du,$$

de unde,

$$dx = \frac{du}{a} (2a-x)^{3/2} \sqrt{x}. \quad (5.26)$$

Din (5.25) rezultă că

$$x = \frac{2au^2}{1+u^2}, \quad (5.27)$$

care, introdusă în (5.26) conduce la

$$dx = \frac{du}{a} \frac{2a}{1+u^2} \sqrt{\frac{2a}{1+u^2}} \frac{u\sqrt{2a}}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{4au}{(1+u^2)^2} du. \quad (5.28)$$

Cu (5.25) și (5.28) în (5.24) obținem

$$\begin{aligned} y &= \int_0^u \frac{4au^2}{(1+u^2)^2} du = -2a \int_0^u u d\left(\frac{1}{1+u^2}\right) = -2a \left[ \left(\frac{u}{1+u^2}\right) \Big|_0^u - \int_0^u \frac{du}{1+u^2} \right] = \\ &= -2a \left[ \frac{u}{1+u^2} - (\arctg u) \Big|_0^u \right] = -2a \left( \frac{u}{1+u^2} - \arctg u \right). \end{aligned}$$

Făcând acum o nouă schimbare de variabilă prin

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

din relația anterioară rezultă

$$y = -2a \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{\theta}{2} \right) = -2a \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$= -2a \left( \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = a(\theta - \sin \theta).$$

iar din relația (5.27) pentru  $x$  rezultă

$$x = \frac{2au^2}{1+u^2} = 2a \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2} = a(1 - \cos \theta).$$

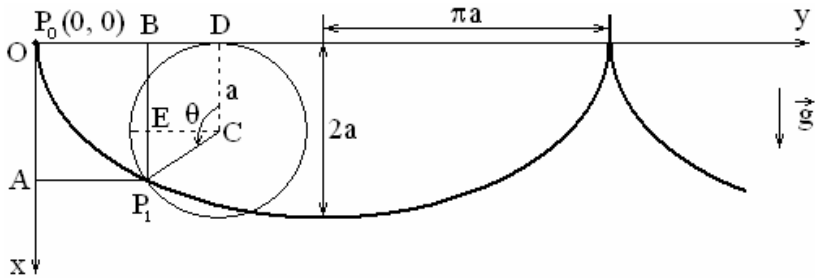


Fig. V.3

Așadar, am obținut

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \theta), \\ y = a(\theta - \sin \theta), \end{cases} \quad (5.29)$$

care reprezintă ecuațiile parametrice ale unei cicloide având ca bază axa  $Oy$  și concavitatea în sus (vezi Fig. V.3). Constanta până aici arbitrară  $a$  este chiar raza cercului care, prin rostogolire fără alunecare pe axa  $Oy$  generează cicloida. Într-adevăr, după cum rezultă din Fig. V.3, cicloida va fi generată de punctul  $P_1$  (fix față de cercul de rază  $a$ , care se rostogolește fără frecare pe axa  $Oy$ ). În plus,



$$\begin{aligned} x = \|OA\| &= \|DC\| + \|EP_1\| = a + \|CP_1\| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

iar pentru  $y$  avem

$$\begin{aligned} y = \|OB\| &= \|OD\| - \|BD\| = \widehat{DP_1} - \|BD\| = \widehat{DP_1} - \|EC\| = \\ &= a\theta - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a(\theta - \sin \theta). \end{aligned}$$

Așadar, curba de-a lungul căreia o particulă se deplasează fără frecare, între două puncte situate la cote diferite în câmp gravitațional, în timpul cel mai scurt, este cicloida (un arc de cicloidă).

## 2. Problema lăntișorului

Să se determine forma curbei de echilibru după care se așează un lanț omogen de lungime dată,  $l$ , sub acțiunea propriei greutate și suspendat între două puncte date  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$ .

### Rezolvare

Condiția de echilibru a lăntișorului este ca energia lui potențială gravitațională să fie extremă (în acest caz, minimă). Să evaluăm această energie potențială. Pentru aceasta vom împărți lăntișorul în elemente infinitezimale de lungime, astfel încât, de-a lungul fiecărui element de lungime, să poată fi neglijată variația coordonatei verticale  $y$  (vezi Fig. V.4).

Atunci, considerând planul  $xOz$  ca nivel de referință pentru energia potențială, elementul de lungime  $dl$  reprezentat în Fig. V.4 va avea energia potențială gravitațională

$$dE_p = dm g y = dl \lambda g y, \quad (5.30)$$

unde  $\lambda = l/m$  este masa unității de lungime a lăntișorului,  $m$  fiind masa lui. Deoarece

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

considerând numai soluția pozitivă, putem scrie

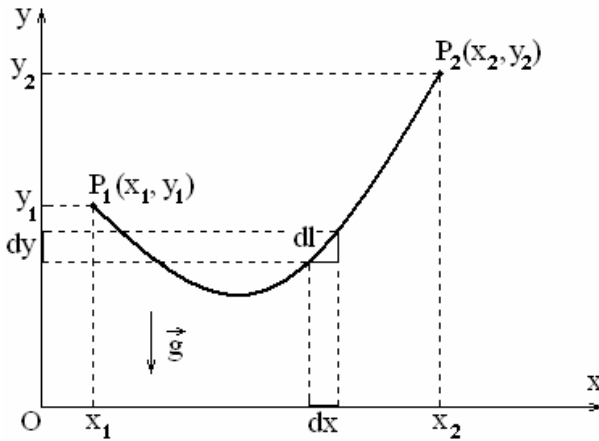


Fig. V.4

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx, \tag{5.31}$$

unde  $y' = dy/dx$ . Atunci, energia potențială a întregului lanț va fi

$$E_p = \int_{P_1}^{P_2} dE_p = \int_{P_1}^{P_2} dl \lambda g y = \lambda g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{5.32}$$

și se observă că aceasta este dată (lăsând la o parte constanta multiplicativă  $\lambda g$ , care nu influențează în nici un fel extremele funcționalei energiei potențiale) de funcționala:

$$E(y) = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{5.33}$$

Așadar, pentru a rezolva problema trebuie să impunem condiția ca funcționala (5.33) să fie extremă. Dar, condiția care exprimă faptul că lăncișorul are o lungime dată (constantă),

$$l = \int_{P_1}^{P_2} dl = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{5.34}$$

reprezintă o constrângere pentru funcțiile  $y = y(x)$  care realizează extremumul funcționalei energiei potențiale. Deci, avem de a face cu o

problemă de extremum condiționat. După cum se poate observa cu ușurință, constrângerea (5.34) se exprimă printr-o funcțională de același tip cu cea căreia trebuie să-i determinăm extremumul,

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \text{const.} \quad (5.35)$$

Conform teoriei, a determina extremumul condiționat al funcționalei (5.33) cu constrângerea (5.35) este echivalent cu a determina extremele libere ale unei noi funcționale,

$$F(y) = E(y) - \mu L(y), \quad (5.36)$$

unde  $\mu$  este un scalar nenul, în rest arbitrar. Așadar, pentru a determina forma curbei de echilibru a lăncșorului trebuie să găsim extremele funcționalei (5.36). Pentru aceasta este necesar să rezolvăm ecuația Euler a extremalelor

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (5.37)$$

pentru această funcțională:

$$F(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ (y - \mu) \sqrt{1 + y'^2} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y') \, dx,$$

unde

$$f(y, y') = (y - \mu) \sqrt{1 + y'^2}.$$

Întrucât  $f(y, y')$  nu depinde explicit de variabila independentă  $x$ , înseamnă că avem următoarea integrală primă:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.} \equiv C, \quad (5.38)$$

care se mai scrie

$$y' \frac{(y - \mu) \cancel{y'}}{\cancel{y'} \sqrt{1 + y'^2}} - (y - \mu) \sqrt{1 + y'^2} = C,$$

sau, aducând la același numitor,

$$y - \mu = -C \sqrt{1 + y'^2},$$

de unde, prin ridicare la pătrat, pentru  $y'^2$  obținem

$$y'^2 = \frac{1}{C^2} \left[ (y - \mu)^2 - C^2 \right].$$

Considerând numai soluția pozitivă, de aici avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C} \sqrt{(y - \mu)^2 - C^2},$$

sau, separând variabilele,

$$\frac{dy}{\sqrt{(y - \mu)^2 - C^2}} = \frac{dx}{C}.$$

Pentru a integra această ecuație diferențială facem schimbarea de variabilă

$$y - \mu = C \operatorname{ch} u. \quad (5.39)$$

Deci,  $dy = C \operatorname{sh} u \, du$  și obținem

$$\int \frac{C \operatorname{sh} u \, du}{C \operatorname{sh} u} = \frac{x}{C} + C_1,$$

sau,

$$u = \frac{x}{C} + C_1,$$

de unde,

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} \left( \frac{x}{C} + C_1 \right).$$

Introducând acest rezultat în relația (5.39) obținem extremalele căutate,

$$y = \mu + C \operatorname{ch} \left( \frac{x}{C} + C_1 \right). \quad (5.40)$$

Evident, doar una dintre curbele acestei familii infinite (ca număr de funcții) va fi aceea care ne interesează pe noi, anume, aceea care trece prin punctele  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  și care, în plus, satisface constrângerii

(5.34). Impunând aceste condiții, rezultă următorul sistem de trei ecuații algebrice pentru cele trei constante necunoscute ( $\mu$ ,  $C$  și  $C_1$ ) din (5.40):

$$\begin{cases} y_1 = \mu + C \operatorname{ch}\left(\frac{x_1}{C} + C_1\right), \\ y_2 = \mu + C \operatorname{ch}\left(\frac{x_2}{C} + C_1\right), \\ l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{C} + C_1\right)} dx, \end{cases}$$

care se mai scrie astfel:

$$\begin{cases} y_1 = \mu + C \operatorname{ch}\left(\frac{x_1}{C} + C_1\right), \\ y_2 = \mu + C \operatorname{ch}\left(\frac{x_2}{C} + C_1\right), \\ l = C \operatorname{sh}\left(\frac{x_2}{C} + C_1\right) - C \operatorname{sh}\left(\frac{x_1}{C} + C_1\right). \end{cases}$$

Lăsăm în seama cititorului rezolvarea acestui sistem. Prin înlocuirea expresiilor constantelor  $\mu$ ,  $C$  și  $C_1$  (soluții ale sistemului de mai sus) se obține rezultatul final al problemei. Se observă că forma curbei de echilibru a lăncșorului este dată de funcția cosinus hiperbolic. Din această cauză curbei cosinus hiperbolic i se mai spune și „curba lăncșor”.

### 3. Problema izoperimetriei cercului

Să se determine forma curbei plane, de lungime dată,  $l$ , care închide suprafața de arie maximă.

#### Rezolvare

Conform Fig. V.5, aria suprafeței delimitată de curba închisă ( $\Gamma$ ) este dată de relația

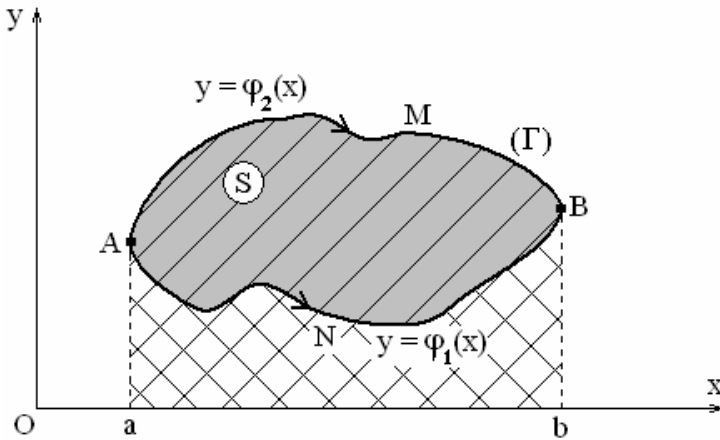


Fig. V.5

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx = - \int_b^a \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx = \\ &= - \left[ \int_a^b \varphi_1(x) dx + \int_b^a \varphi_2(x) dx \right] = - \left[ \int_{\widehat{ANB}} \varphi_1(x) dx + \int_{\widehat{BMA}} \varphi_2(x) dx \right] = \\ &= - \oint_{(\Gamma)} y dx, \end{aligned}$$

unde am scris aria căutată ca diferența a două arii: una<sup>7</sup>, a suprafeței mărginite de graficul funcției  $y = \varphi_2(x)$  (partea superioară, situată între punctele A și B, a curbei închise  $\Gamma$ ), axa absciselor și cele două drepte din planul  $xOy$  de ecuații  $x = a$  și  $x = b$ , și cealaltă<sup>8</sup>, a suprafeței mărginite de graficul funcției  $y = \varphi_1(x)$  (partea inferioară, situată între punctele A și B, a curbei închise  $\Gamma$ ), axa absciselor și aceleași două drepte din planul  $xOy$  de ecuații  $x = a$  și  $x = b$ .

Pentru a scrie într-o formă mai simetrică relația de mai sus, îi vom aduna „zero” scris astfel

<sup>7</sup> Este vorba despre aria suprafeței hașurate o singură dată, cu linii paralele cu prima bisectoare.

<sup>8</sup> Este vorba despre aria suprafeței dublu hașurate (în carouri).

$$0 = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} d(xy) = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} x dy + \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} y dx$$

și obținem

$$\mathcal{A} = - \oint_{(\Gamma)} y dx + \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} x dy + \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} y dx = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} (x dy - y dx). \quad (5.41)$$

Dacă presupunem curba  $\Gamma$  dată parametric,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

cu  $a = x(t_1)$  și  $b = x(t_2)$ , atunci aria  $\mathcal{A}$  va fi dată de relația

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt. \quad (5.42)$$

Problema revine deci la a determina extremalele funcționalei

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt, \quad (5.43)$$

cu condiția ca perimetrul curbei  $\Gamma$  să aibă o lungime dată:

$$l = \oint_{(\Gamma)} dl = \oint_{(\Gamma)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \oint_{(\Gamma)} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

unde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  și  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ .

Așadar, avem din nou o problemă de extremum condiționat pentru o funcțională. Modul de rezolvare a problemei este identic cu cel din problema precedentă. Funcționala care exprimă constrângerea este

$$L(x, y) = \oint_{(\Gamma)} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \text{const.} \equiv l \quad (5.44)$$

și se observă că este de același tip cu funcționala căreia trebuie să-i determinăm extremalele. Conform teoriei generale trebuie să construim o nouă funcțională,

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= F(x, y) - \lambda L(x, y) = \oint_{(r)} \left[ \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right] dt = \\
 &= \oint_{(r)} g(x(t), y(t)) dt,
 \end{aligned}$$

(unde  $\lambda$  este un scalar nenul, în rest arbitrar) ale cărei extreme libere sunt totodată „punctele” de extrem condiționat pentru funcționala (5.43). Pentru a determina extremalele funcționalei  $G(x, y)$  trebuie să rezolvăm ecuațiile Euler-Lagrange corespunzătoare:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (5.45)$$

unde

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Efectuând derivatele necesare, (5.45) devine

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2}y - \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) - \frac{1}{2}\dot{y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( +\frac{1}{2}x - \lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) + \frac{1}{2}\dot{x} = 0, \end{cases}$$

sau,

$$\begin{cases} -\dot{y} - \lambda \frac{\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{x} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0, \\ +\dot{x} - \lambda \frac{\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{y} \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0, \end{cases}$$

sau încă,



$$\begin{cases} \dot{y} \left[ -1 - \lambda \frac{\ddot{x}y - \ddot{y}x}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right] = 0, \\ \dot{x} \left[ +1 + \lambda \frac{\ddot{x}y - \ddot{y}x}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right] = 0. \end{cases} \quad (5.46)$$

Soluțiile care derivă din  $\dot{x} = 0$  și  $\dot{y} = 0$  nu sunt acceptabile, astfel că rămâne o singură posibilitate, anume, anularea parantezei pătrate, care, până la o diferență de semn este aceeași în ambele ecuații:

$$1 + \lambda \frac{\ddot{x}y - \ddot{y}x}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0,$$

sau,

$$\frac{\ddot{x}y - \ddot{y}x}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\lambda}. \quad (5.47)$$

Până aici nu am spus nimic despre parametrul  $t$ . Alegând acum în mod convenabil acest parametru, mai precis, considerând că parametrul  $t$  este chiar lungimea arcului de curbă,  $l$  (măsurată în raport cu un punct fixat de pe curba  $\Gamma$ ), avem

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left( \frac{dx}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dl)^2} = \frac{(dl)^2}{(dl)^2} = 1 \quad (5.48)$$

și atunci, din (5.47) rămâne

$$\ddot{y}x - \ddot{x}y = -\frac{1}{\lambda}.$$

Această ecuație diferențială de ordinul doi cu două necunoscute,  $x = x(t)$  și  $y = y(t)$  se completează cu o a doua ecuație care rezultă prin derivarea în raport cu parametrul  $t$  a relației (5.48), anume,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \Rightarrow \ddot{x}x + \ddot{y}y = 0.$$

În acest fel obținem un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul al doilea pentru  $x = x(t)$  și  $y = y(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y} = -\frac{1}{\lambda}, \\ \ddot{x}\ddot{x} + \ddot{y}\ddot{y} = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

Pentru a-l simplifica procedăm astfel: din a doua ecuație scoatem pe  $\ddot{x}$  și îl introducem în prima. Rezultă

$$\ddot{y} = \frac{1}{\lambda} \dot{x}. \quad (5.50)$$

Repetăm operația, scoțând acum din a doua ecuație din (5.49) pe  $\ddot{y}$  și introducându-l în prima ecuație a aceluiași sistem. Se găsește

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\lambda} \dot{y}. \quad (5.51)$$

În acest fel am obținut un sistem de două ecuații diferențiale, tot de ordinul doi, dar mai simplu:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\lambda^{-1} \dot{y}, \\ \ddot{y} = +\lambda^{-1} \dot{x}. \end{cases} \quad (5.52)$$

Integrând o dată, rezultă

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda^{-1} y + C_1, \\ \dot{y} = +\lambda^{-1} x + C_2. \end{cases}$$

Prin înlocuirea lui  $\dot{x}$  și  $\dot{y}$  astfel obținute în (5.48) găsim că

$$1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left( C_1 - \frac{y}{\lambda} \right)^2 + \left( C_2 + \frac{x}{\lambda} \right)^2,$$

sau,

$$(\lambda C_1 - y)^2 + (\lambda C_2 + x)^2 = \lambda^2,$$

sau încă,

$$(x + \lambda C_2)^2 + (y - \lambda C_1)^2 = \lambda^2, \quad (5.53)$$

care este ecuația unui cerc situat în planul  $xOy$ , cu centrul în punctul de coordonate  $C(x_c, y_c) = C(-\lambda C_2, \lambda C_1)$  și de rază  $R = \lambda$ . Evident, cele trei constante nedeterminate (dintre care  $\lambda$  trebuie în mod obligatoriu să fie nenulă) rămân în continuare astfel, problema nefurnizând date suplimentare care să le determine. De altfel, problema este rezolvată

complet, căci am aflat răspunsul căutat: curba plană de lungime dată (fixată) care închide suprafața de arie maximă este cercul (orice rază ar avea – deci, oricare<sup>9</sup> ar fi constanta  $\lambda \neq 0$  și oriunde s-ar afla în planul  $xOy$  – deci oricare<sup>10</sup> ar fi constantele  $C_1$  și  $C_2$ ). Evident, dându-se aria suprafeței închisă de curbă poate fi determinată constanta  $\lambda$ ,  $C_1$  și  $C_2$  rămânând în continuare nedeterminate.

#### 4. Problema suprafeței de revoluție de arie minimă

Fie două puncte date (fixate),  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  în planul  $xOy$  al unui triedru ortogonal. Să se determine forma curbei  $y = y(x)$  care, trecând prin cele două puncte, generează printr-o mișcare de revoluție în jurul unei axe (de exemplu, axa  $Ox$ ) suprafața de arie minimă.

#### Rezolvare

Suprafața corpului care rezultă prin mișcarea de revoluție a unei curbe plane în jurul axei  $Ox$  (vezi Fig. V.6) este compusă din trei părți: două suprafețe circulare (bazele „trunchiului de con”) și suprafața laterală a „trunchiului de con”. Cum ariile suprafețelor circulare sunt fixe, fiind determinate de coordonatele  $y_1$  și  $y_2$  (segmentele de lungime  $y_1$  și  $y_2$  joacă rol de raze ale cercurilor respective), problema revine la a determina forma curbei plane,  $y = y(x)$ , care, prin mișcare de revoluție în jurul axei  $Ox$  generează suprafața laterală a „trunchiului de con” de arie minimă.

După cum se poate observa din Fig. V.6, ariile celor două suprafețe ale „bazelor” circulare sunt  $S_1 = \pi y_1^2 = const.$  și  $S_2 = \pi y_2^2 = const.$ , iar aria suprafeței elementare a „benzii” de lățime<sup>11</sup>  $ds$  și lungime  $2\pi y$  (vezi Fig. V.7 în care este prezentată secțiunea din planul  $xOy$  a „corpului” din Fig. V.6) este

<sup>9</sup> Care rămâne astfel nedeterminată.

<sup>10</sup> Care rămân, și ele, nedeterminate.

<sup>11</sup> Această lățime este suficient de mică, astfel încât putem aproxima că toate punctele de pe arcul  $ds$  au aceeași ordonată  $y$ .

$$dS = 2\pi y ds, \tag{5.54}$$

unde

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

în care  $y' = dy/dx$ .

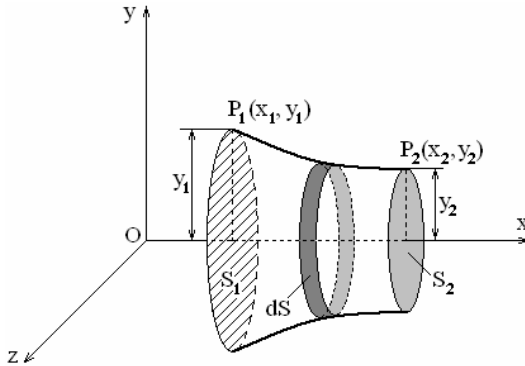


Fig. V.6

Atunci,

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

iar aria laterală a „trunchiului de con” este

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{5.55}$$

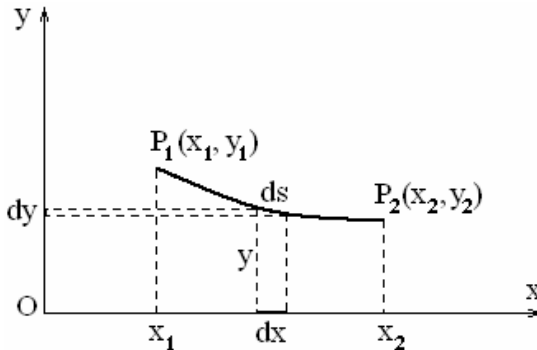


Fig. V.7

După cum se poate observa, această arie (lăsând la o parte constanta multiplicativă  $2\pi$ , care nu afectează extremele pe care le căutăm) este determinată de funcționala

$$S(y) = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y') dx. \quad (5.56)$$

Așadar, problema revine la a determina extremele libere ale funcționalei (5.56). Acestea pot fi aflate prin rezolvarea ecuației Euler a extremalelor,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5.57)$$

Întrucât funcția  $f(y, y')$  nu depinde explicit de variabila independentă  $x$ , o integrală primă a ecuației diferențiale de ordinul doi (5.57) este

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.} \equiv C. \quad (5.58)$$

Avem,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

care introdusă în (5.58) conduce la

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = C,$$

sau,

$$-y = C\sqrt{1+y'^2},$$

sau încă,

$$y^2 = C^2(1+y'^2),$$

de unde,

$$y'^2 = \frac{1}{C^2}(y^2 - C^2).$$

Oprindu-ne doar la soluția pozitivă, avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C}\sqrt{y^2 - C^2},$$

sau, separând variabilele,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \frac{dx}{C}.$$

Integrând nedefinit, obținem

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \frac{x}{C} + C_1. \quad (5.59)$$

Integrala din membrul stâng se poate calcula ușor cu schimbarea de variabilă

$$y = C \operatorname{ch} u. \quad (5.60)$$

Atunci,  $dy = C \operatorname{sh} u \, du$  și integrala devine

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{C \operatorname{sh} u}{\sqrt{C^2 (\operatorname{ch}^2 u - 1)}} du = \int \frac{C \operatorname{sh} u}{C \operatorname{sh} u} du = \int du = u.$$

Așadar, având în vedere și relația (5.59) am găsit că

$$u = \frac{x}{C} + C_1,$$

de unde, aplicând ambilor membri funcția cosinus hiperbolic și utilizând relația (5.60), rezultă

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} \left( \frac{x}{C} + C_1 \right) = \frac{y}{C},$$

adică

$$y = C \operatorname{ch} \left( \frac{x}{C} + C_1 \right),$$

care reprezintă funcțiile căutate. Valorile concrete ale constantelor arbitrare de integrare  $C$  și  $C_1$  determină o singură curbă cu proprietatea cerută în enunțul problemei, care trece prin punctele date,  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$ . Într-adevăr, impunând condiția de trecere a curbei  $y(x) = C \operatorname{ch}[(x/C) + C_1]$  prin cele două puncte, rezultă următorul sistem de două ecuații algebrice pentru cele două necunoscute  $C \neq 0$  și  $C_1$ :

$$\begin{cases} y_1 = C \operatorname{ch} \left( \frac{x_1}{C} + C_1 \right), \\ y_2 = C \operatorname{ch} \left( \frac{x_2}{C} + C_1 \right). \end{cases}$$

Deci, curba care, trecând prin două puncte date, generează printr-o mișcare de revoluție în jurul axei  $Ox$  o suprafață de arie minimă este „curba lăntșor”, adică un cosinus hiperbolic.

## 5. Problema geodezicelor unei varietăți riemanniene

Să se determine geodezicele unei varietăți riemanniene  $n$ -dimensionale,  $\mathcal{R}_n$ .

### Rezolvare

Cu toate că aceasta este o problemă specifică mai degrabă teoriei relativității generale decât mecanicii teoretice, am preferat să o includem în lucrarea de față, deoarece este un exemplu concludent și important de problemă de calcul variațional.

Înainte de a rezolva problema propriu-zis, să definim noțiunile care intervin în enunțul ei, anume, noțiunea de *geodezică* și cea de *varietate riemanniană*.

În termeni geometrici, *geodezica* este curba care unește două puncte dintr-un anumit spațiu pe drumul cel mai scurt. În termeni dinamici, după cum vom vedea, *geodezica* reprezintă traiectoria pe care se deplasează liber un punct material într-un anumit spațiu. Evident, forma curbei care reprezintă o geodezică depinde de structura spațiului pe care este definită. De exemplu, în spațiul euclidian tridimensional,  $E_3$ , după cum bine știm, distanța cea mai scurtă dintre oricare două puncte este cea măsurată de-a lungul liniei drepte care trece prin cele două puncte. Totodată, privind problema din punct de vedere dinamic, în acest spațiu un corp liber se va deplasa rectiliniu și uniform în raport cu un sistem de referință inerțial. Aceste rezultate pot fi obținute și pe cale variațională astfel:

În spațiul euclidian tridimensional, distanța dintre două puncte infinitezimal depărtate este dată de elementul de linie

$$ds \equiv |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{dx_i dx_i}, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (5.61)$$

unde,

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Pătratul elementului de linie,

$$ds^2 \equiv |d\vec{r}|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = dx_i dx_i, \quad (i = \overline{1,3}) \quad (5.62)$$

se numește *metrica* spațiului euclidian tridimensional  $E_3$ .

Dacă parametrizăm o curbă oarecare din acest spațiu prin

$$x_i = x_i(t), \quad (i = \overline{1,3}),$$

unde  $t$  este parametrul, distanța dintre două puncte,  $P'(x', y', z')$  și  $P''(x'', y'', z'')$  de pe această curbă, va fi dată de

$$\Delta s = \int_{P'}^{P''} ds = \int_{P'}^{P''} \sqrt{dx_i(t) dx_i(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} dt, \quad (5.63)$$

unde,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt},$$

iar

$$x'_i = x_i(t_1) \text{ și } x''_i = x_i(t_2).$$

Se observă că distanța  $\Delta s$  este dată de o funcțională de tipul

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x}) dt, \text{ cu } \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

în care funcția  $f$  este

$$f(\dot{x}) = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}.$$

Deoarece aceasta nu depinde explicit de variabila dependentă  $x(t)$ , rezultă că ecuația Euler a extremalelor,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad (j = \overline{1,3}),$$

admite integrala primă

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j} = (\text{const.})_j \equiv C_j, \quad (j = \overline{1,3}), \quad (5.64)$$

sau,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \left( \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} \right) = \frac{\dot{x}_j}{\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}} = C_j, \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5.65)$$

a) Considerând ca parametru  $t$  lungimea arcului de curbă  $s$ , avem,



$$\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} = \sqrt{\frac{dx_i}{ds} \frac{dx_i}{ds}} = \frac{\sqrt{dx_i dx_i}}{\sqrt{(ds)^2}} = \frac{\sqrt{(ds)^2}}{ds} = 1,$$

care, introdusă în (5.65), conduce la

$$\dot{x}_j = C_j, \quad (j = \overline{1,3}), \quad (5.66)$$

sau,

$$x_j = C_j s + C'_j, \quad (5.67)$$

unde  $C'_j$ , ( $j = \overline{1,3}$ ) sunt trei noi constante arbitrare de integrare. Cele șase constante de integrare  $C_j$  și  $C'_j$ , ( $j = \overline{1,3}$ ) pot fi determinate din condiția ca punctele  $P'$  și  $P''$  să se afle pe curbă.

Explicit, relațiile (5.67) se scriu astfel:

$$\begin{aligned} x &= C_1 s + C'_1, \\ y &= C_2 s + C'_2, \\ z &= C_3 s + C'_3. \end{aligned}$$

Eliminând parametrul  $s$  obținem,

$$y = C_2 \frac{x - C'_1}{C_1} + C'_2 = \frac{C_2}{C_1} x + \left( -\frac{C_2 C'_1}{C_1} + C'_2 \right) = k_1 x + k_2 \quad (5.68)$$

și

$$z = C_3 \frac{y - C'_2}{C_2} + C'_3 = \frac{C_3}{C_2} x + \left( -\frac{C_3 C'_2}{C_2} + C'_3 \right) = k_3 x + k_4, \quad (5.69)$$

unde  $k_i$ , ( $i = \overline{1,4}$ ) sunt noi constante, care se exprimă în funcție de constantele  $C_j$  și  $C'_j$ , ( $j = \overline{1,3}$ ) prin relații ce pot fi identificate din (5.68) și (5.69). Relațiile

$$\begin{cases} y = k_1 x + k_2, \\ z = k_3 x + k_4, \end{cases} \quad (5.70)$$

reprezintă ecuațiile unei drepte în spațiul euclidian tridimensional  $E_3$ . Cu alte cuvinte, geodezicele spațiului euclidian tridimensional sunt dreptele.

b) Considerând ca parametru  $t$  timpul, relația (5.65) devine

$$\frac{v_j}{\sqrt{|\vec{v}|^2}} = C_j, \quad (j = \overline{1,3}),$$

sau, înmulțind numărătorul și numitorul fracției cu masa  $m \neq 0$  a corpului,

$$\frac{p_j}{\sqrt{|\vec{p}|^2}} = C_j, \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5.71)$$

Corpul fiind liber, rezultanta forțelor care acționează asupra lui este zero, ceea ce, conform principiului fundamental al dinamicii,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

înseamnă că impulsul  $\vec{p}$  al corpului este constant, deci  $|\vec{p}|^2 = \text{const.}$ , iar din relația (5.71) va rezulta că

$$p_j = K_j, \quad (j = \overline{1,3}),$$

unde  $K_j$ ,  $(j = \overline{1,3})$  sunt trei constante. Deci,

$$m\dot{x}_j = K_j \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5.72)$$

Pe de altă parte, teorema variației energiei cinetice ne asigură faptul că energia cinetică a unui corp liber este constantă. Ținând cont și de faptul că  $|\vec{p}|^2 = \text{const.}$ , rezultă că masa corpului este constantă. Într-adevăr, din  $m|\vec{v}|^2 = C'$  și  $|\vec{p}|^2 = m^2|\vec{v}|^2 = C''$ , rezultă că  $m = C''/C' = \text{const.}$ , unde  $C'$  și  $C''$  sunt două constante. Atunci, relațiile (5.72) se vor scrie

$$\dot{x}_j = K'_j = (\text{const.})_j,$$

sau,

$$x_j = K'_j t + x_{0j}, \quad (j = \overline{1,3}), \quad (5.73)$$

unde  $x_{0j}$ ,  $(j = \overline{1,3})$  sunt trei constante arbitrare de integrare ce pot fi determinate din condițiile inițiale. Așadar, în spațiul euclidian tridimensional un corp liber se mișcă rectiliniu și uniform, conform legii (5.73) care, vectorial, se scrie sub forma

$$\vec{r} = \vec{K}'t + \vec{r}_0$$

și care reprezintă ecuația unei mișcări rectilinii și uniforme, cu viteza  $\vec{K}' = \overrightarrow{const.}$

Pentru a defini noțiunea de *varietate riemanniană*, trebuie să introducem mai întâi noțiunea de *metrică*, iar pentru a defini metrica unei varietăți trebuie să introducem noțiunea de *tensor metric fundamental*. După cum vom vedea, există o strânsă legătură între tensorul metric fundamental și noțiunea de *varianță* a tensorilor (componentele covariante ale tensorului metric fundamental nu sunt altceva decât produse scalare corespunzătoare ale versorilor bazei directe (covariante), iar componentele contravariante ale tensorului metric fundamental sunt produse scalare ale versorilor bazei duale (contravariante)). De aceea, în continuare ne vom referi pe scurt la noțiunea de varianță, și, din aproape în aproape vom defini toate noțiunile amintite mai sus. Varianța tensorilor este de două feluri: co-varianță și contra-varianță. Astfel, vorbim despre *tensori covarianți* și *tensori contravarianți*. Strict matematic, mărimile tensoriale covariante se pot defini, de exemplu, făcând apel la legea de transformare a derivatelor parțiale ale unei funcții scalare, iar mărimile tensoriale contravariante pot fi definite, de exemplu, utilizând legea de transformare a diferențialelor coordonatelor unui spațiu  $n$  dimensional. Această modalitate de a defini mărimile tensoriale co- și contra-varianțe nu oferă însă o imagine cât de cât intuitivă asupra necesității de a introduce aceste noțiuni și nici nu surprinde esența acestei necesități, fiind mult prea aridă din acest punct de vedere. De aceea, în continuare vom face apel la o altă modalitate de a introduce noțiunea de varianță a tensorilor.

Ca și alte noțiuni matematice întâlnite în fizică (de exemplu, distribuția  $\delta$  a lui Dirac – care a fost introdusă din necesitatea de ordin fizic de a extinde valabilitatea unor relații din mecanica cuantică a sistemelor cu spectru discret la sisteme cu spectru continuu și mai apoi pentru a defini densitatea de sarcină electrică a unor distribuții discrete de sarcină – sau funcția Heaviside (numită și funcția treaptă-unitate) – care a fost introdusă în fizică pentru a descrie efectul acționării unui comutator într-un circuit electric etc.) și noțiunea de varianță își are o justificare fizică (mai exact, geometrică, după cum vom vedea) concretă și „palpabilă”.

După cum se știe, gravitația este omniprezentă, iar efectul ei geometric este acela de curbare a spațiului (mai exact, a continuumului

spațio-temporal). Apare astfel necesitatea utilizării – pe astfel de spații – a coordonatelor curbilini (generale). Doar local (și acest „local” este foarte relativ, depinzând de intensitatea câmpului gravitațional) putem aproxima spațiul ca fiind plat și utiliza în consecință sisteme de coordonate corespunzătoare (carteziene).

Pentru a preciza cadrul și pentru o înțelegere mai ușoară, ne vom referi în continuare la un spațiu cu doar trei dimensiuni, generalizarea la spații cu mai multe dimensiuni putând fi făcută cu ușurință. Astfel, între cel mai simplu (și totodată particular) tip de reper – cel cartezian – și cel mai general, există două tipuri „intermediare” și anume: i) reperele care utilizează coordonate curbilini ortogonale (axele de coordonate sunt curbe, dar în orice punct din spațiu vectorii tangenți la axe formează un triedru ortogonal) și ii) reperele care utilizează coordonate „rectilini” dar neortogonale (axele de coordonate sunt linii drepte, dar în orice punct din spațiu versorii axelor formează unghiuri diferite de  $90^\circ$  – vezi Fig. V.8). Din acest punct de vedere, am putea considera cazul cel mai general (în care axele de coordonate sunt curbilini, iar versorii lor sunt neortogonali) ca rezultând dintr-o „suprapunere” a celor două cazuri intermediare.

Sistemele de coordonate curbilini ortogonale sunt tratate în multe lucrări (vezi, de exemplu, [1]), și se poate arăta că efectul „curbării” axelor de coordonate este apariția *coeficienților Lamé*. De aceea, în continuare nu ne vom opri asupra acestui caz, ci vom analiza cealaltă situație (cel de-al doilea caz „intermediar”, în care axele rămân rectilini, dar nu mai sunt ortogonale). După cum vom vedea, efectul neortogonalității axelor de coordonate este necesitatea de a introduce noțiunea de *varianță*.

Pentru a ușura reprezentările grafice vom considera – pentru moment – un spațiu cu doar două dimensiuni (generalizarea la trei dimensiuni este banală). Să considerăm în acest spațiu bidimensional un același vector  $\vec{a}$ , raportat însă la două sisteme de referință diferite: unul ortogonal și unul neortogonal (vezi Fig. V.9). În prima situație (vezi Fig. V.9 a) putem scrie

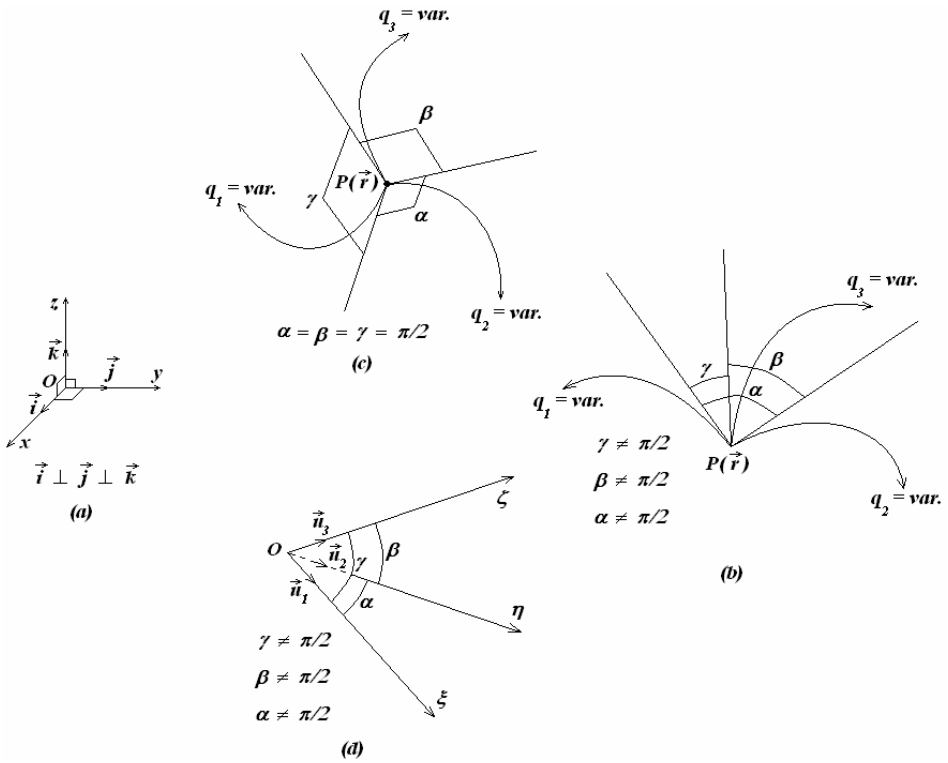


Fig. V.8

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2 \end{cases} \quad (5.74)$$

și dacă notăm  $\vec{a}_1 = a_1 \vec{u}_1$  și  $\vec{a}_2 = a_2 \vec{u}_2$ , atunci avem

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad (5.75)$$

unde  $\vec{u}_1$  și  $\vec{u}_2$  sunt versorii celor două axe, iar  $a_1$  și  $a_2$  sunt componentele vectorului  $\vec{a}$  (proiecțiile ortogonale ale vectorului  $\vec{a}$  pe cele două axe de coordonate).

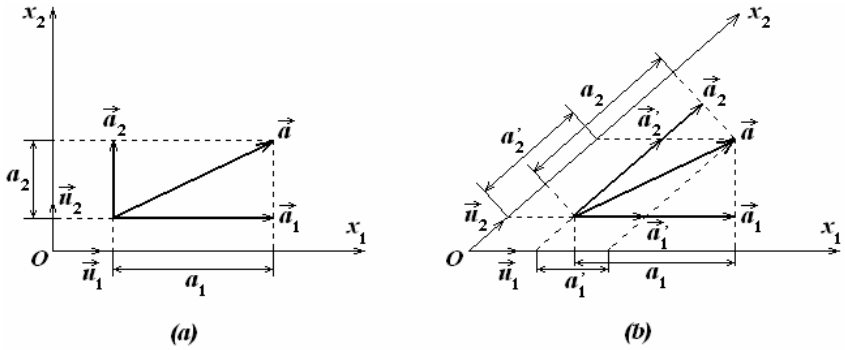


Fig. V.9

În cea de-a doua situație (vezi Fig. V.9 b) se observă că există două posibilități de a considera proiecțiile vectorului  $\vec{a}$  pe axe de coordonate și, în consecință, două moduri de a defini componentele vectorului  $\vec{a}$ : unul, coborând perpendiculare de la extremitățile vectorului pe cele două axe (ceea ce conduce la componentele notate cu  $a_1$  și  $a_2$ ), iar celălalt, ducând paralele la cele două axe din extremitățile vectorului  $\vec{a}$  (ceea ce conduce la componentele notate cu  $a'_1$  și  $a'_2$ ).

Constatăm astfel că în prima situație putem scrie

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2, \end{cases} \tag{5.76}$$

dar, dacă notăm  $\vec{a}_1 = a_1 \vec{u}_1$  și  $\vec{a}_2 = a_2 \vec{u}_2$ , atunci nu mai rămâne valabilă relația (5.75), adică acum

$$\vec{a} \neq \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \tag{5.77}$$

În celălalt caz, al componentelor  $a'_1$  și  $a'_2$ , dacă notăm

$$\begin{cases} \vec{a}'_1 = a'_1 \vec{u}'_1, \\ \vec{a}'_2 = a'_2 \vec{u}'_2, \end{cases} \tag{5.78}$$

atunci se păstrează valabilitatea relației (5.75), în sensul că

$$\vec{a} = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2, \tag{5.79}$$

dar nu mai putem scrie o relație de tipul (5.74) deoarece, în acest caz

$$\begin{cases} a'_1 \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a'_2 \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_2. \end{cases} \tag{5.80}$$

Cu alte cuvinte, componentele  $a_1$  și  $a_2$  nu mai rezultă ca produse scalare ale vectorului cu versorii axelor de proiecție.

Constatăm așadar, că în cazul sistemului de referință cu axele de coordonate rectilinii și neortogonale, ori este valabilă o relație (de exemplu (5.76)) și nu este valabilă cealaltă (adică (5.77)), cum e cazul componentelor fără „prim”, ori are loc situația inversă, ca în cazul componentelor cu „prim”. „Împăcarea” celor două tipuri de relații poate fi făcută, în ambele cazuri, prin introducerea așa-numitei *baze duale*.

Fie în acest sens  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  și  $\vec{w}$  un triplet de vectori necoplanari (liniar independenți), deci care pot constitui o bază în spațiul euclidian tridimensional  $E_3$ . Atunci, orice vector  $\vec{a}$  din  $E_3$  poate fi scris sub forma

$$\vec{a} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}, \quad (5.81)$$

unde  $\lambda$ ,  $\mu$  și  $\nu$  sunt trei scalari (nu toți nuli, dacă vectorul  $\vec{a}$  nu este vectorul nul) care se numesc *componentele vectorului  $\vec{a}$  în baza dată*  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ .

Să introducem acum alți trei vectori, pe care îi vom nota cu  $\vec{u}^*$ ,  $\vec{v}^*$  și  $\vec{w}^*$ , prin intermediul următoarelor relații (de definiție):

$$\begin{cases} \vec{u}^* \cdot \vec{u} = 1, \\ \vec{u}^* \cdot \vec{v} = 0, \\ \vec{u}^* \cdot \vec{w} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}^* \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{v}^* \cdot \vec{v} = 1, \\ \vec{v}^* \cdot \vec{w} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{w}^* \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{w}^* \cdot \vec{v} = 0, \\ \vec{w}^* \cdot \vec{w} = 1. \end{cases} \quad (5.82)$$

Un exemplu de astfel de triplet de vectori  $\vec{u}^*$ ,  $\vec{v}^*$  și  $\vec{w}^*$  este următorul:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}; \quad \vec{v}^* = \frac{\vec{w} \times \vec{u}}{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}; \quad \vec{w}^* = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}, \quad (5.83)$$

unde  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  este produsul mixt al celor trei vectori. Într-adevăr, se poate arăta cu ușurință că vectorii dați de relațiile (5.83) satisfac relațiile de definiție (5.82). Lăsăm acest exercițiu simplu în seama cititorului.

Din modul în care au fost definiți, rezultă că, la rândul lor, vectorii  $\vec{u}^*$ ,  $\vec{v}^*$  și  $\vec{w}^*$  sunt liniar independenți, deci formează, de asemenea, o bază în  $E_3$ . Ei se numesc *vectori duali* vectorilor  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  și respectiv  $\vec{w}$ , iar baza

formată de ei se numește *baza duală* bazei directe, formată din vectorii  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  și  $\vec{w}$ . În plus, se poate verifica ușor faptul că dualul dualului unui vector este vectorul inițial, adică

$$\begin{cases} (\vec{u}^*)^* = \vec{u}, \\ (\vec{v}^*)^* = \vec{v}, \\ (\vec{w}^*)^* = \vec{w}. \end{cases} \quad (5.84)$$

Cu ajutorul vectorilor bazei duale se pot exprima componentele oricărui vector în baza directă (adică scalarii  $\lambda$ ,  $\mu$  și  $\nu$  din relația (5.81)) ca produse scalare ale vectorului respectiv cu vectorii corespunzători ai bazei duale, astfel:

$$\begin{cases} \lambda = \vec{a} \cdot \vec{u}^*, \\ \mu = \vec{a} \cdot \vec{v}^*, \\ \nu = \vec{a} \cdot \vec{w}^*, \end{cases} \quad (5.85)$$

relații ce pot fi cu ușurință verificate folosind (5.81) și (5.82).

Revenind acum la problema noastră, observăm că, utilizând vectorii bazei duale  $\{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\}$  (bază duală bazei directe  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ), în cazul reperelor cu axele de coordonate rectilinii, dar neortogonale putem scrie atât o relație de tipul (5.75) pentru componentele fără „prim”, adică

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

dar în care,

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = a_1 \vec{u}_1^*, \\ \vec{a}_2 = a_2 \vec{u}_2^*, \end{cases} \quad (5.86)$$

cât și o relație de tipul (5.74) pentru componentele cu „prim”, adică

$$\begin{cases} a_1' = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2' = \vec{a} \cdot \vec{u}_2, \end{cases}$$

dar în care  $\vec{u}_1$  și  $\vec{u}_2$  trebuiesc înlocuiți cu  $\vec{u}_1^*$  și respectiv  $\vec{u}_2^*$ , adică,

$$\begin{cases} a_1' = \vec{a} \cdot \vec{u}_1^*, \\ a_2' = \vec{a} \cdot \vec{u}_2^*. \end{cases} \quad (5.87)$$



Într-adevăr, în primul caz aveam  $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1$ ,  $a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2$  și  $\vec{a} \neq \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ . Dar, dacă  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  sunt dați de (5.86), putem scrie o relație de tipul (5.75) și în acest caz:

$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1^* + a_2 \vec{u}_2^* = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

căci, ținând cont de (5.85) și (5.84) avem

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot (\vec{u}_1^*)^* = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot (\vec{u}_2^*)^* = \vec{a} \cdot \vec{u}_2, \end{cases}$$

adică exact relațiile (5.76) și astfel cele două tipuri de relații „au fost puse de acord” (în sensul că sunt valabile simultan).

În cazul al doilea aveam  $\vec{a} = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2$ , dar  $a'_1 \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_1$  și  $a'_2 \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_2$ . În schimb, dacă aici punem  $\vec{u}_1^*$  și  $\vec{u}_2^*$  în locul versorilor  $\vec{u}_1$  și respectiv  $\vec{u}_2$ , atunci ultimele două relații pot deveni egalități, adică  $a'_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1^*$  și  $a'_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2^*$ , deci, și în acest caz este valabilă o relație de tipul (5.76), deoarece, conform cu (5.81) și (5.85) avem

$$\vec{a} = a'_1 \vec{u}_1 + a'_2 \vec{u}_2 = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2,$$

în acord cu (5.78) și (5.79), deci problema este rezolvată.

De obicei se utilizează alte notații, anume

$$\begin{cases} a'_1 = a^1, & \text{și} & \vec{u}_1^* = \vec{u}^1, \\ a'_2 = a^2 & & \vec{u}_2^* = \vec{u}^2. \end{cases} \quad (5.88)$$

În acest fel, într-un reper neortogonal orice vector  $\vec{a}$  are două seturi de componente: unul cu indicii *jos*,

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2 \end{cases} \quad (5.89)$$

și altul cu indicii *sus*,

$$\begin{cases} a^1 = \vec{a} \cdot \vec{u}^1, \\ a^2 = \vec{a} \cdot \vec{u}^2. \end{cases} \quad (5.90)$$

Componentele cu indicii jos se numesc *covariante*, iar cele cu indicii sus se numesc *contravariante*. Baza directă este formată din versorii

covarianți, iar cea duală din versorii contravarianți<sup>12</sup>. În plus, din Fig. V.9 b se observă că, dacă unghiul dintre axe devine de  $90^\circ$ , atunci cele două tipuri de componente coincid, căci proiecția perpendiculară pe axe devine totodată și proiecție paralelă cu axele de coordonate (de exemplu, perpendiculara din  $A$  pe axa  $Ox_1$  devine în același timp paralela la axa  $Ox_2$  și invers). De aceea, în cazul sistemului de coordonate *ortogonale*, componentele covariante și contravariante *coincid*.

Așadar, orice vector are pe un spațiu neortogonal două seturi de componente: unul de componente covariante (dacă vectorul este exprimat în baza duală sau contravariantă,  $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3\}$ ) și unul de componente contravariante (dacă vectorul este exprimat în baza directă sau covariantă,  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ ). De exemplu, pentru vectorul de poziție  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ , într-un spațiu tridimensional neortogonal putem scrie

$$\vec{r} = x_1 \bar{u}^1 + x_2 \bar{u}^2 + x_3 \bar{u}^3,$$

unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt componentele covariante ale vectorului de poziție scris în baza duală (contravariantă) și, de asemenea,

$$\vec{r} = x^1 \bar{u}_1 + x^2 \bar{u}_2 + x^3 \bar{u}_3,$$

unde  $x^1, x^2$  și  $x^3$  sunt componentele contravariante ale vectorului de poziție  $\vec{r}$ , de data aceasta, în baza directă (covariantă).

Atunci, și diferențiala vectorului de poziție poate fi scrisă în două moduri:

$$d\vec{r} = dx_1 \bar{u}^1 + dx_2 \bar{u}^2 + dx_3 \bar{u}^3$$

și

$$d\vec{r} = dx^1 \bar{u}_1 + dx^2 \bar{u}_2 + dx^3 \bar{u}_3,$$

iar metrica spațiului va fi

<sup>12</sup> De fapt, în virtutea relațiilor (5.84) denumirea de bază directă (respectiv duală) este relativă, cele două baze,  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$  și  $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2\}$ , fiind una duala celeilalte.

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= |d\vec{r}|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \\
 &\nearrow (dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3) \cdot (dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3), \\
 &= \rightarrow (dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3) \cdot (dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3), \\
 &\searrow (dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3) \cdot (dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3).
 \end{aligned}$$

Cu noile notații, relațiile (5.82) se pot scrie „condensat” astfel:

$$\vec{u}^i \cdot \vec{u}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (5.91)$$

și atunci avem

$$\nearrow (dx_i\vec{u}^i) \cdot (dx_j\vec{u}^j) = (\vec{u}^i \cdot \vec{u}^j) dx_i dx_j,$$

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = \rightarrow (dx^i\vec{u}_i) \cdot (dx^j\vec{u}_j) = (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j) dx^i dx^j, \quad (5.92)$$

$$\searrow (dx_i\vec{u}^i) \cdot (dx^j\vec{u}_j) = (\vec{u}^i \cdot \vec{u}_j) dx_i dx^j.$$

Dacă utilizăm pentru produsele scalare dintre versorii contravarianți și respectiv covarianți notațiile

$$\begin{cases} (\vec{u}^i \cdot \vec{u}^j) \stackrel{not}{=} g^{ij}, \\ (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j) \stackrel{not}{=} g_{ij}, \end{cases} \quad (5.93)$$

și dacă ținem cont de (5.91), atunci metrica (relația (5.92)) poate fi scrisă sub următoarele trei forme:

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx^i dx^j = dx_i dx^i, \quad (5.94)$$

putând identifica astfel *tensorul metric fundamental contravariant*,  $g^{ij}$  și respectiv *covariant*,  $g_{ij}$ . Din perspectiva prezentată aici putem da și o interpretare geometrică componentelor tensorului metric fundamental. Astfel, se observă din (5.93) că acestea nu sunt altceva decât produsele scalare ale vectorilor bazei duale (contravariante) pentru tensorul metric

fundamental contravariant și respectiv produsele scalare ale vectorilor bazei directe (covariante) pentru tensorul metric fundamental covariant.

Din ultima egalitate a relației (5.94) rezultă că

$$dx_i = g_{ij} dx^j, \quad (5.95)$$

adică *proprietatea de coborâre a indicilor* cu ajutorul tensorului metric fundamental covariant, iar din  $g^{ij} dx_i dx_j = dx_i dx^i$  (vezi, de asemenea, relația (5.94)) rezultă

$$dx^i = g^{ij} dx_j, \quad (5.96)$$

adică *proprietatea de ridicare a indicilor* cu ajutorul tensorului metric fundamental contravariant.

Cu aceste lucruri precizate, fie în continuare un spațiu euclidian  $m$ -dimensional,  $E_m$  și  $y_1, y_2, \dots, y_m$  coordonatele carteziene ale unui punct  $P$  din acest spațiu. Pătratul distanței dintre punctul  $P$  și unul vecin  $P'$  (cu alte cuvinte, elementul de linie) este

$$ds^2 = dy_j dy_j, \quad (j = \overline{1, m}). \quad (5.97)$$

Să considerăm acum în  $E_m$  o varietate (subspațiu)  $n$ -dimensională,  $\mathcal{R}_n$ , ( $n < m$ ) și fie  $x^1, x^2, \dots, x^n$  coordonatele unui punct din  $\mathcal{R}_n$ . Întrucât  $y_j = y_j(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , ( $j = \overline{1, m}$ ), avem

$$ds^2 = \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^k} dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (j = \overline{1, m}; i, k = \overline{1, n}), \quad (5.98)$$

unde am utilizat notația

$$g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) = g_{ki} = \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \frac{\partial y_j}{\partial x^k}, \quad (j = \overline{1, m}; i, k = \overline{1, n})$$

pentru mărimea care nu este alta decât *tensorul metric fundamental*. Acesta este un tensor covariant, simetric, de ordinul doi. Dacă  $g_{ik} = \delta_{ik}$ , adică dacă varietatea  $\mathcal{R}_n$  este euclidiană, regăsim metrica (5.97).

Dacă metrica (5.98) este invariantă la transformarea generală de coordonate

$$x^i = x^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (i = \overline{1, n}),$$

atunci *varietatea*  $\mathcal{R}_n$  se numește *riemanniană*.

Să determinăm în cele ce urmează ecuațiile diferențiale ale geodezicelor unei varietăți riemanniene  $\mathcal{R}_n$ . Fie pentru aceasta  $x^i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) coordonatele ce definesc poziția unei particule care se deplasează în  $\mathcal{R}_n$  și fie, de asemenea,

$$x^i = x^i(s), \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5.99)$$

ecuațiile parametrice ale unei curbe care trece prin două puncte date,  $P_1$  și  $P_2$ . Lungimea arcului de curbă dintre cele două puncte este

$$L(x) = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} ds, \quad (5.100)$$

unde  $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds}$ . Curba (5.99) reprezintă o geodezică dacă funcționala  $L(x)$  dată de relația (5.100) este extremă (cu alte cuvinte, dacă distanța dintre punctele  $P_1$  și  $P_2$ , măsurată de-a lungul curbei, este extremă<sup>13</sup>). Pentru aceasta trebuie ca funcția

$$f(x, \dot{x}, s) = \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}, \quad (i, k = \overline{1, n}) \quad (5.101)$$

să satisfacă ecuațiile Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (5.102)$$

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left( \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} \right) = 2 \frac{1}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} (g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} g_{ik} \delta_j^i \dot{x}^k = \frac{1}{\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} g_{jk} \dot{x}^k = g_{jk} \dot{x}^k, \end{aligned}$$

deoarece

$$\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} = \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}} = \frac{1}{ds} \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} = \frac{ds}{ds} = 1. \quad (5.103)$$

Apoi,

<sup>13</sup> În general, acest extremum este un minim.

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^j} \right) = \frac{d}{ds} \left( g_{jk} \dot{x}^k \right) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \dot{x}^k + g_{jk} \ddot{x}^k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_{jk} \ddot{x}^k$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k, \end{aligned}$$

unde am avut în vedere din nou că  $\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} = 1$  (vezi (5.103)).

Înlocuind toate aceste rezultate în ecuațiile (5.102) obținem

$$g_{jk} \ddot{x}^k + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0,$$

sau,

$$\begin{aligned} &g_{jk} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k = \\ &= g_{jk} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^i + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k = \\ &= g_{jk} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^i + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^k \right) = \\ &= g_{jk} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^i \dot{x}^k = 0. \end{aligned}$$

Dacă introducem notația

$$\Gamma_{ik,j}^{\text{not}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right), \quad (5.104)$$

ultima ecuație se va scrie

$$g_{jk} \ddot{x}^k + \Gamma_{ik,j} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0. \quad (5.105)$$

Cantitățile (5.104) se numesc *simbolurile Christoffel de speța I*.

Înmulțind relația (5.105) cu  $g^{jl}$  și sumând după  $j$  obținem forma finală a ecuațiilor diferențiale ale geodezicilor,

$$g^{jl} g_{jk} \ddot{x}^k + g^{jl} \Gamma_{ik,j} \dot{x}^i \dot{x}^k = \delta_k^l \ddot{x}^k + \Gamma_{ik}^l \dot{x}^i \dot{x}^k = \ddot{x}^l + \Gamma_{ik}^l \dot{x}^i \dot{x}^k = 0, \quad (5.106)$$

unde am utilizat o nouă notație,

$$g^{jl} \Gamma_{ik,j}^{\text{not}} = \Gamma_{ik}^l,$$

cantitățile  $\Gamma_{ik}^l$  numindu-se *simbolurile Christoffel de speța a II-a*. Se poate arăta faptul că, în general, simbolurile Christoffel (atât cele de speța I, cât și cele de speța a II-a) nu sunt mărimi tensoriale<sup>14</sup> (la o transformare generală de coordonate aceste mărimi nu se transformă ca și tensorii). Excepție face cazul particular al transformărilor liniare de coordonate.

Așadar, ecuațiile diferențiale ale *geodezicelor* unei varietăți riemanniene  $n$ -dimensionale  $\mathcal{R}_n$  sunt

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ik}^l \dot{x}^i \dot{x}^k = 0, \quad (i, k, l = \overline{1, n}). \quad (5.107)$$

Acestea reprezintă totodată ecuațiile de mișcare ale unei particule libere în câmpul gravitațional. De altfel, cantitățile  $a^l = \ddot{x}^l + \Gamma_{ik}^l \dot{x}^i \dot{x}^k$  nu reprezintă altceva decât componentele contravariante ale vectorului  $n$ -dimensional al *acceleerației* particulei în  $\mathcal{R}_n$ . Spre deosebire de  $a^l$ , ( $l = \overline{1, n}$ ), cantitățile  $\ddot{x}^l$ , ( $l = \overline{1, n}$ ) nu sunt vectori  $n$ -dimensionali (nu se transformă ca și vectorii  $n$ -dimensionali la o transformare generală de coordonate).

**Observație:** Dacă notăm cu

$$\phi = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k,$$

atunci ecuațiile Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^j} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} = 0, \quad (j = \overline{1, n})$$

conduc la același rezultat (5.107). În consecință, principiile variaționale

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} ds = 0$$

și

<sup>14</sup> Pentru demonstrație vezi, de exemplu, lucrarea autorilor Ioan Mercheș și Daniel Radu, „Electrodinamică”, Ed. Univ. „Al.I. Cuza”, Iași, 2002, pag. 429.

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k ds = 0$$

sunt echivalente.

**Aplicație:** Să se determine geodezicele unei sfere de rază unitate.

Pentru o sferă de rază  $r$ , elementul de arc este

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.108)$$

Dacă raza sferei este  $r=1$ , atunci relația de mai sus devine

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.109)$$

iar principiul variațional care ne conduce la rezultatul dorit,

$$\delta \int ds = 0$$

poate fi scris astfel:

$$\delta \int ds = \delta \int \frac{ds^2}{ds^2} ds = \delta \int \frac{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}{ds^2} ds = \delta \int (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) ds = 0,$$

unde  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}$  și  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}$ . Funcționala căreia trebuie să-i determinăm extremalele este deci

$$F(\theta, \varphi) = \int_{P_1}^{P_2} f(\theta, \dot{\theta}, \varphi) ds = \int_{P_1}^{P_2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) ds, \quad (5.110)$$

unde  $P_1$  și  $P_2$  sunt două puncte fixe (date) pe suprafața sferei, iar funcția  $f$  este dată de

$$f(\theta, \dot{\theta}, \varphi) = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = 1. \quad (5.111)$$

Ecuatia Euler-Lagrange pentru variabila  $\varphi$  este

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.112)$$

Efectuând derivatele necesare,

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 4 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{și}$$

înlocuindu-le în (5.112) obținem

$$\ddot{\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0. \quad (5.113)$$



Pentru a găsi ecuația explicită a geodezicei,  $\varphi = \varphi(\theta)$ , trebuie să eliminăm parametrul  $s$  între ecuațiile (5.111) și (5.113). Înainte de a realiza acest lucru să observăm că ecuația (5.113) mai poate fi scrisă astfel:

$$d\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi} \operatorname{ctg}\theta d\theta = 0,$$

de unde, separând variabilele:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2\operatorname{ctg}\theta d\theta = -2\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = -2\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

și integrând, găsim

$$\ln \dot{\varphi} = -2\ln(\sin\theta) + \ln C = \ln\left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right),$$

adică

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{\sin^2\theta},$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară de integrare. Apoi, deoarece

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\theta}{d\varphi} \dot{\varphi}, \text{ deci } \dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 \dot{\varphi}^2, \text{ utilizând (5.111) și faptul că}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{\sin^2\theta}, \text{ obținem}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 &= \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 \dot{\varphi}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^2 \left[ \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta \right] = \\ &= \frac{C^2}{\sin^4\theta} \left[ \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta \right] = 1, \end{aligned}$$

sau,

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta}{C^2} (\sin^2\theta - C^2),$$

de unde, prin separarea variabilelor, avem

$$d\varphi = \frac{C}{\sin\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}}. \quad (5.114)$$

Integrând,

$$\int d\varphi = \int \frac{C}{\sin \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - C^2}},$$

avem:

$$\int \frac{C}{\sin \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - C^2}} = \varphi - \varphi_0, \quad (5.115)$$

unde  $(-\varphi_0)$  este o constantă arbitrară de integrare. Pentru a efectua integrala din relația (5.115) facem schimbarea de variabilă

$$\sin^2 \theta - C^2 = \zeta^2.$$

Cu aceasta, integrala devine

$$\int \frac{C}{\sin \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - C^2}} = C \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + C^2)\sqrt{1 - C^2 - \zeta^2}}. \quad (5.116)$$

Aceasta este o integrală de tipul

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{b^2 - x^2}},$$

în care  $a = C$  și  $b = \sqrt{1 - C^2}$ , pentru care avem<sup>15</sup>

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2 - x^2}} \right).$$

Atunci, integrala din membrul drept al relației (5.116) va fi egală cu

$$C \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + C^2)\sqrt{1 - C^2 - \zeta^2}} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\zeta}{C\sqrt{1 - C^2 - \zeta^2}} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}{C \cos \theta} \right),$$

iar (5.115) devine

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}{C \cos \theta} \right) = \varphi - \varphi_0,$$

sau,

---

<sup>15</sup> Vezi tabelele cu integrale din lucrarea autorului M.L. Smoleanski, „Tabele de integrale nedefinite”, Ed. Tehnică, București, 1972, pag. 86, al. 28.5 b (în care există o greșeală de tipar, anume, în cazul b, în loc de  $\gamma a > \alpha c$ , trebuie considerată inegalitatea inversă. În scrierea inegalității am folosit notațiile din cartea citată; deci, nu trebuie să se confunde constanta  $a$  din această inegalitate cu cea din text).

$$\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}{C \cos \theta} = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0),$$

sau încă,

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi - \varphi_0)}} = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \operatorname{ctg} \theta. \quad (5.117)$$

Aceasta este ecuația unui plan care trece prin originea sistemului de coordonate, care este totodată centrul sferei. Așadar, geodezicele pe care le căutăm sunt *cercurile mari ale sferei*, obținute ca intersecție a planului determinat mai sus cu sfera (vezi Fig. V.10).

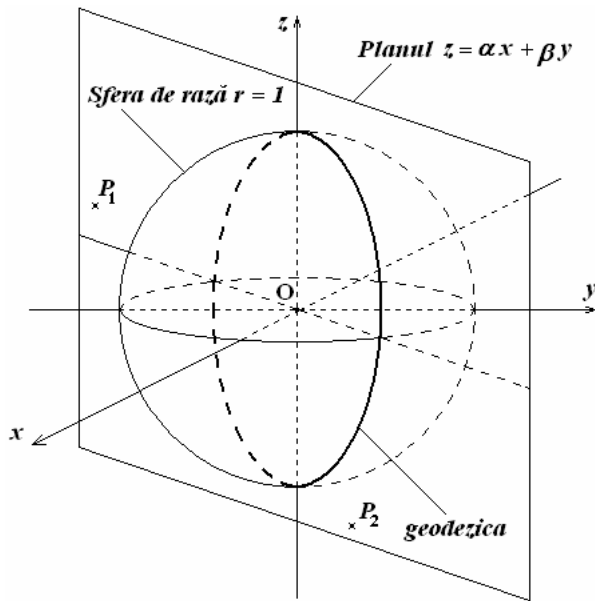


Fig. V.10

Pentru a scoate mai clar în evidență faptul că (5.117) reprezintă ecuația unui plan care trece prin originea sistemului de coordonate, să transcriem această ecuație în coordonate carteziene. Pentru aceasta vom utiliza relațiile de transformare cunoscute:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

în care trebuie să punem  $r = 1$ .

Avem,

$$\begin{aligned} \cos(\varphi - \varphi_0) &= \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0 = \frac{x}{\sin \theta} \cos \varphi_0 + \frac{y}{\sin \theta} \sin \varphi_0 = \\ &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{ctg} \theta = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \frac{z}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

sau,

$$z = \alpha x + \beta y, \quad (5.118)$$

care este în mod evident ecuația unui plan în spațiu, ce trece prin originea sistemului de coordonate carteziene  $Oxyz$ . În relația (5.118)

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-C^2} \cos \varphi_0}{C}$$

și

$$\beta = \frac{\sqrt{1-C^2} \sin \varphi_0}{C}$$

sunt două constante care, la rândul lor depind de constantele arbitrare de integrare  $C$  și  $\varphi_0$ , care pot fi determinate impunând condiția ca planul să treacă prin cele două<sup>16</sup> puncte fixe (date),  $P_1$  și  $P_2$ .

---

<sup>16</sup> Evident, un plan este determinat univoc de trei puncte necoliniare. În cazul acesta, al treilea punct este originea sistemului de coordonate.

## Capitolul VI

### Probleme rezolvate cu ajutorul formalismului lagrangean

#### 1. Mașina Atwood

Sistemul mecanic numit *mașina Atwood* constă – în esență – din două corpuri de mase  $m_1$  și  $m_2$  legate printr-un fir inextensibil, de lungime  $l$ , trecut peste un scripete de rază  $r$  și moment de inerție  $I$  (vezi Fig. VI.1). Să se scrie ecuația diferențială a mișcării sistemului utilizând formalismul lagrangean. Se vor neglija frecările.

#### Rezolvare

Sistemul este unul natural, întrucât singurele forțe aplicate sunt forțele de greutate ale corpurilor și, după cum știm, acestea sunt forțe potențiale (chiar conservative).

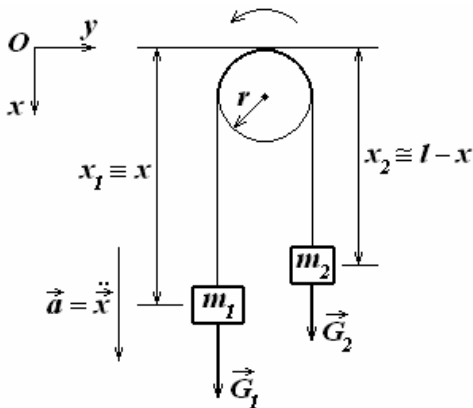


Fig. VI.1

Considerând și scripetele ca un al treilea corp ce aparține sistemului și ținând cont de Fig. VI.1, ecuațiile legăturilor care restricționează mișcarea corpurilor sunt

- $f_1(z_1) = z_1 = 0$ , (fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei, putem considera că mișcarea corpurilor are loc în planul  $z = 0$ );

- $f_2(z_2) = z_2 = 0$ , (idem),

- $f_3(z_3) = z_3 = 0$ , (scripetele nu are mișcare de translație);
- $f_4(y_1) = y_1 = C_1 (= \text{const.})$ , (corpul de masă  $m_1$  se mișcă doar de-a lungul axei  $Ox$ );
- $f_5(y_2) = y_2 = C_2 (= \text{const.})$ , (corpul de masă  $m_2$  se mișcă, de asemenea, doar de-a lungul axei  $Ox$ );
- $f_6(y_3) = y_3 = C_3 (= \text{const.})$ , (scripetele nu are mișcare de translație);
- $f_7(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l = 0$ , (firul este inextensibil<sup>1</sup>);
- $f_8(x_3) = x_3 = 0$ .

În concluzie, sistemul are  $3 \cdot 3 - 8 = 1$  grad de libertate, căruia îi vom asocia coordonata generalizată  $x$  ( $\equiv x_1$ ). Pentru a scrie funcția Lagrange a sistemului trebuie să determinăm energia cinetică a acestuia și potențialul.

Deoarece scripetele are raza de dimensiuni finite și un moment de inerție care nu poate fi neglijat, trebuie să luăm în considerare și energia cinetică a mișcării de rotație (în jurul propriei axe) a scripetelui. De aceea,

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

unde  $\omega$  este viteza unghiulară de rotație a scripetelui în jurul axei proprii. Întrucât firul nu alunecă pe scripete, viteza liniară a unui punct oarecare de la periferia discului scripetelui coincide cu viteza mișcării de translație a corpurilor de mase  $m_1$  și respectiv  $m_2$ , anume  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \dot{x}$ . Atunci,

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{r^2}.$$

În ceea ce privește potențialul (în fapt, energia potențială a) sistemului, considerând că scripetele – fiind fix – are energia potențială  $V_s$  constantă, putem scrie

$$V = V_c + V_s,$$

---

<sup>1</sup> Facem observația că am presupus raza discului scripetelui mică în comparație cu lungimea firului,  $\frac{r}{l} \ll \frac{1}{\pi-2}$ . În caz contrar, ar trebui să modificăm ecuația lui  $f_7$  în  $f_7(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + (\pi-2)r - l = 0$ . Chiar cu această „corecție” rezultatele finale rămân corecte, deoarece efectul acestei „corecții” este apariția în expresia energiei potențiale  $V_c$  a termenului constant,  $(\pi-2)m_2gr$ , care, în expresia lagrangeanului poate fi omis.

unde  $V_c$  este energia potențială a celorlalte două corpuri (de mase  $m_1$  și  $m_2$ ). Conform „rețetei”, pentru aceasta avem

$$dV_c = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dx_1 - m_2 g dx_2,$$

de unde,

$$V_c = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + V_{c0},$$

constanta arbitrară de integrare  $V_{c0}$  putând fi considerată nulă prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială.

Într-adevăr, considerând  $V_c(x_1 = 0, x_2 = 0) = 0$ , rezultă  $V_{c0} = 0$ . Atunci,

$$\begin{aligned} V = V_c + V_s &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + V_s = -m_1 g x - m_2 g (l - x) + V_s = \\ &= -(m_1 - m_2) g x - m_2 g l + V_s, \end{aligned}$$

cu  $V_s = \text{const}$ . Funcția Lagrange a sistemului va fi deci

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{r^2} + (m_1 - m_2) g x + m_2 g l - V_s,$$

care, lăsând la o parte termenii constanți ( $m_2 g l - V_s$ ), este echivalentă cu lagrangeanul

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x.$$

Ecuția Lagrange de speța a II-a pentru coordonata generalizată  $x$  este

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (6.1)$$

Efectuând derivatele,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \dot{x}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= (m_1 - m_2) g, \end{aligned}$$

ecuația (6.1) devine

$$\left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} - (m_1 - m_2) g = 0, \quad (6.2)$$

de unde rezultă accelerația (constantă) a sistemului:

$$a \equiv \ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} = const. \quad (6.3)$$

## 2. Mașina Atwood dublă

Se consideră sistemul prezentat schematic în Fig. VI.2, numit *mașina Atwood dublă*. Masele scripetilor sunt neglijabile și nu există frecare. Să se scrie ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului și să se determine accelerațiile celor trei corpuri utilizând formalismul lagrangean.

### Rezolvare

Sistemul este natural, deoarece singurele forțe aplicate sistemului sunt forțele de greutate.

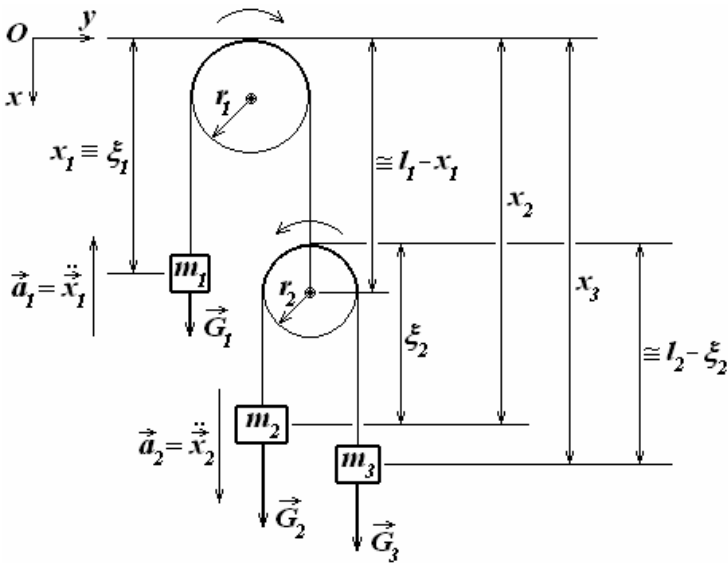


Fig. VI.2



Ecuatiile legăturilor care limitează posibilitățile de mișcare ale celor trei corpuri sunt (vezi Fig. VI.2):

- $f_1(z_1) = z_1 = 0$ , (fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei, putem considera că mișcarea corpurilor are loc în planul  $z = 0$ );
- $f_2(z_2) = z_2 = 0$ , (idem);
- $f_3(z_3) = z_3 = 0$ , (idem);
- $f_4(y_1) = y_1 = C_1 (= \text{const.})$ , (corpul de masă  $m_1$  se mișcă doar de-a lungul axei  $Ox$ );
- $f_5(y_2) = y_2 = C_2 (= \text{const.})$ , (corpul de masă  $m_2$  se mișcă, de asemenea, doar de-a lungul axei  $Ox$ );
- $f_6(y_3) = y_3 = C_3 (= \text{const.})$ , (corpul de masă  $m_3$  se deplasează doar în lungul axei  $Ox$ );
- $f_7(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2l_1 - l_2 = 0$ , (firele de lungime  $l_1$  și respectiv  $l_2$  sunt inextensibile<sup>2</sup>).

În concluzie, sistemul are  $3 \cdot 3 - 7 = 2$  grade de libertate, cărora le vom asocia coordonatele generalizate  $\xi_1$  ( $\equiv x_1$ ) și  $\xi_2$  (vezi Fig. VI.2). Pentru a scrie funcția Lagrange a sistemului trebuie să determinăm energia cinetică a acestuia și potențialul (în fapt, energia potențială).

Deoarece vom neglija razele scripeților în comparație cu lungimile celor două fire, ca și momentele de inerție ale scripeților, energia cinetică a sistemului va fi dată de suma energiilor cinetice ale mișcării de translație de-a lungul axei  $Ox$  a celor trei corpuri de mase  $m_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ). Avem,

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2} m_3 |\vec{v}_3|^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2, \end{aligned}$$

<sup>2</sup> În scrierea ecuației pentru această legătură am neglijat razele discurilor celor doi scripeți. Ca și în problema mașinii Atwood simple, efectul acestei aproximații se răsfrânge doar asupra energiei potențiale a sistemului, care va diferi de cea „reală” printr-o mărime constantă, ce poate fi lăsată la o parte în expresia funcției Lagrange. Dacă ținem cont de razele finite ale discurilor scripeților, atunci expresia legăturii  $f_7$  devine  $f_7(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2l_1 - l_2 + 2(\pi - 2)r_1 + \pi r_2 = 0$ .

unde trebuie să ținem cont de ecuațiile legăturilor pentru a exprima pe  $\dot{x}_2^2$  și  $\dot{x}_3^2$  în funcție de  $\dot{\xi}_1$  și  $\dot{\xi}_2$ . Din Fig. VI.2 se observă că (în ipoteza neglijării razelor celor două discuri ale scripetilor<sup>3</sup>),

$$x_2 = l_1 + \xi_2 - x_1 = l_1 + \xi_2 - \xi_1,$$

de unde,

$$\dot{x}_2^2 = (\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1)^2.$$

Tot din Fig. VI.2, în cadrul aceeași aproximații<sup>4</sup>, se observă că

$$x_3 = l_2 + x_2 - 2\xi_2,$$

de unde,

$$\dot{x}_3^2 = (\dot{x}_2 - 2\dot{\xi}_2)^2 = (\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1 - 2\dot{\xi}_2)^2 = (-\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)^2 = (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)^2.$$

În concluzie, energia cinetică totală a sistemului va fi

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)^2. \quad (6.4)$$

Pentru a determina expresia potențialului (energiei potențiale a) sistemului vom utiliza „rețeta standard”:

$$dV = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 - \vec{G}_3 \cdot d\vec{r}_3 = -m_1 g dx_1 - m_2 g dx_2 - m_3 g dx_3,$$

de unde,

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3 + V_0,$$

constanta arbitrară de integrare  $V_0$  putând fi luată zero prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială. Într-adevăr, considerând  $V(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0) = 0$  rezultă  $V_0 = 0$ . Atunci, în aceeași

<sup>3</sup> Același rezultat final (în ceea ce privește expresia energiei cinetice totale a sistemului) se obține și dacă vom considera expresia „exactă” a lui  $x_2$ , adică  $x_2 = l_1 + \xi_2 - \xi_1 - (\pi - 2)r_1 - r_2$ , deoarece la derivare mărimile constante „dispar”.

<sup>4</sup> Și aici, dacă dorim să lucrăm „exact”, va trebui să considerăm pentru  $x_3$  expresia  $x_3 = x_2 + l_2 - 2\xi_2 - (\pi - 2)r_2$ , care conduce la aceeași energie cinetică totală. Motivul este același cu cel menționat în nota de subsol precedentă.

aproximație<sup>5</sup> (razele discurilor scripetilor sunt negliabile în raport cu lungimile celor două fire inextensibile),

$$\begin{aligned} V = & -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3 = -m_1 g \xi_1 - m_2 g (l_1 + \xi_2 - \xi_1) - \\ & -m_3 g (l_2 + x_2 - 2\xi_2) = -m_1 g \xi_1 - m_2 g (l_1 + \xi_2 - \xi_1) - m_3 g (l_2 + \\ & + l_1 + \xi_2 - \xi_1 - 2\xi_2) = -g (m_1 - m_2 - m_3) \xi_1 - g (m_2 - m_3) \xi_2 - \\ & -g l_1 (m_2 + m_3) - m_3 g l_2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ținând cont de expresiile obținute pentru energia cinetică  $T$  și energia potențială  $V$ , funcția Lagrange a sistemului va fi

$$\begin{aligned} L = T - V = & \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)^2 + \\ & + g (m_1 - m_2 - m_3) \xi_1 + g (m_2 - m_3) \xi_2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

unde termenul  $[g l_1 (m_2 + m_3) + m_3 g l_2]$  fiind constant, a fost lăsat la o parte.

Cele două ecuații Lagrange de speța a II-a (corespunzătoare celor două grade de libertate și respectiv celor două coordonate generalizate  $\xi_1$  și  $\xi_2$ ) sunt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0 \quad (6.7)$$

și

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = 0. \quad (6.8)$$

Efectuând derivatele,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = & m_1 \dot{\xi}_1 - m_2 (\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) + m_3 (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} \right) = & \ddot{\xi}_1 (m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{\xi}_2 (m_3 - m_2), \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Dacă lucrăm „exact”, atunci la expresia deja obținută a energiei potențiale trebuie să adăugăm termenul  $g(\pi - 2)(m_2 r_1 + m_3 r_2) + g m_2 r_2$ , care va apărea cu semn schimbat în expresia lagrangeanului și care, fiind constant, poate fi omis (cei doi lagrangeeni sunt echivalenți).

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \xi_1} &= g(m_1 - m_2 - m_3), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} &= m_2(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) + m_3(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} \right) &= \ddot{\xi}_1(m_3 - m_2) + \ddot{\xi}_2(m_2 + m_3), \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_2} &= g(m_2 - m_3),\end{aligned}$$

ecuațiile (6.7) și (6.8) devin

$$\ddot{\xi}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{\xi}_2(m_3 - m_2) - g(m_1 - m_2 - m_3) = 0 \quad (6.9)$$

și respectiv,

$$\ddot{\xi}_1(m_3 - m_2) + \ddot{\xi}_2(m_2 + m_3) - g(m_2 - m_3) = 0. \quad (6.10)$$

Ecuațiile (6.9) și (6.10) formează un sistem algebric în necunoscutele  $\ddot{\xi}_1$  și  $\ddot{\xi}_2$  (cele două accelerații; vezi Fig. VI.2):

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{\xi}_2(m_3 - m_2) - g(m_1 - m_2 - m_3) = 0, \\ \ddot{\xi}_1(m_3 - m_2) + \ddot{\xi}_2(m_2 + m_3) - g(m_2 - m_3) = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Substituind  $\ddot{\xi}_2$  din ecuația a doua a sistemului,

$$\ddot{\xi}_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} (g + \ddot{\xi}_1),$$

în prima ecuație a aceluiași sistem, obținem

$$\ddot{\xi}_1(m_1 + m_2 + m_3) - \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_2 + m_3} (g + \ddot{\xi}_1) - g(m_1 - m_2 - m_3) = 0,$$

sau,

$$\ddot{\xi}_1 \left( m_1 + m_2 + m_3 - \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_2 + m_3} \right) - g \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_2 + m_3} - g(m_1 - m_2 - m_3) = 0,$$

de unde,

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi}_1 &= \frac{g \left[ \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_2 + m_3} + (m_1 - m_2 - m_3) \right]}{m_1 + m_2 + m_3 - \frac{(m_2 - m_3)^2}{m_2 + m_3}} = \\
 &= g \frac{(m_2 - m_3)^2 + (m_2 + m_3)(m_1 - m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_2 + m_3) - (m_2 - m_3)^2} = \\
 &= g \frac{(m_2 - m_3)^2 + (m_2 + m_3)(m_1 - m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_2 + m_3) - (m_2 - m_3)^2} = \\
 &= g \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3},
 \end{aligned}$$

iar pentru  $\ddot{\xi}_2$  obținem

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi}_2 &= \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} (g + \ddot{\xi}_1) = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} \left( g + g \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \right) = \\
 &= g \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} \left( 1 + \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \right) = \\
 &= g \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} \left( \frac{2m_1(m_2 + m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \right) = g \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}.
 \end{aligned}$$

Așadar, cele trei accelerații ale corpurilor ( $a_1 \equiv \ddot{\xi}_1$ , a corpului de masă  $m_1$ , față de reperul inerțial  $xOy$ ,  $a_2 \equiv \ddot{\xi}_2$ , pentru corpul de masă  $m_2$  și respectiv  $a_3 = -a_2 = -\ddot{\xi}_2$ , pentru corpul de masă  $m_3$ , în raport cu scripetele de rază  $r_2$ , care este un reper neinerțial) sunt

$$\begin{cases} a_1 = \ddot{\xi}_1 = g \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}, \\ a_2 = \ddot{\xi}_2 = g \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}, \\ a_3 = -a_2 = g \frac{2m_1(m_3 - m_2)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}. \end{cases} \quad (6.12)$$

### 3. Pendulul cu punct oscilant de suspensie

Punctul de suspensie al unui pendul gravitațional, de lungime  $l$  și masă  $m$ , se mișcă pe direcție orizontală oscilatoriu liniar armonic, după legea  $X = a \cos \omega_0 t$  (vezi Fig. VI.3). Să se scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului utilizând atât un sistem de referință inerțial, cât și unul neinerțial.

#### Rezolvare

##### Cazul I – Sistem de referință inerțial (SRI)

Vom nota cu  $\theta$  unghiul format de tija ideală a pendulului cu verticala. Alegem sistemul de referință inerțial („fix” în raport cu sistemul de referință al laboratorului) cu originea în punctul „de echilibru” al oscilatorului,  $O$ , a cărui lege de mișcare este  $x_o \equiv X = a \cos \omega_0 t$ , având axa

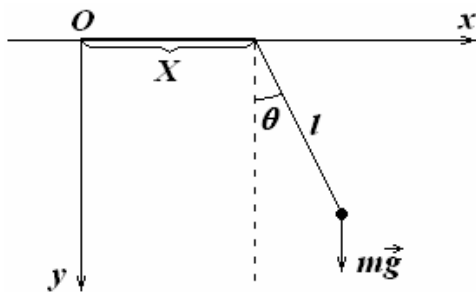


Fig. VI.3

$Ox$  după orizontală și  $Oy$  după verticala descendentă (vezi Fig. VI.3).

Ecuațiile legăturilor sunt:

- 1)  $f_1(x, y) = (x - X)^2 + y^2 - l^2 = 0$ ;
- 2)  $f_2(z) = z = const. (= 0)$ ,

astfel că sistemul are  $3 - 2 = 1$  grad de libertate, căruia îi vom asocia drept coordonată generalizată un -

ghiul  $\theta$ . Față de reperul inerțial considerat, putem scrie

$$\begin{cases} x = X + l \sin \theta = a \cos \omega_0 t + l \sin \theta, \\ y = l \cos \theta \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\omega_0 \sin \omega_0 t + l\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta. \end{cases}$$

Energia cinetică a sistemului este

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}^2| = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (a^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t - 2al\omega_0 \dot{\theta} \sin \omega_0 t \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2).$$

Deoarece sistemul este unul conservativ, pentru energia potențială (gravitațională) avem

$$dV = -dA = -\vec{G} \cdot d\vec{r} = -mgdy,$$

de unde

$$V = -mgy = -mgl \cos \theta,$$

astfel că funcția Lagrange este

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (a^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t - 2al\omega_0 \dot{\theta} \sin \omega_0 t \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta.$$

Având în vedere faptul că termenul  $\frac{1}{2} ma^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$  poate fi scris sub forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ma^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t &= \frac{1}{2} ma^2 \omega_0^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega_0 t}{4\omega_0} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{8} ma^2 \omega_0 (2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t) \right] = \frac{dF(t)}{dt}, \end{aligned}$$

unde  $F(t) = \frac{1}{8} ma^2 \omega_0 (2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t)$  este o funcție care depinde doar de timp, acesta poate fi omis din expresia funcției Lagrange, obținând lagrangeanul echivalent

$$L = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 - 2al\omega_0 \dot{\theta} \sin \omega_0 t \cos \theta) + mgl \cos \theta. \quad (6.13)$$

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} - mal\omega_0 \sin \omega_0 t \cos \theta,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} - mal\omega_0^2 \cos \omega_0 t \cos \theta + mal\omega_0 \dot{\theta} \sin \omega_0 t \sin \theta$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mal\omega_0 \dot{\theta} \sin \omega_0 t \sin \theta - mgl \sin \theta,$$

ecuația Lagrange de speța a II-a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (6.14)$$

devine

$$ml^2 \ddot{\theta} - mal\omega_0^2 \cos \omega_0 t \cos \theta + mgl \sin \theta = 0,$$

sau,

$$l\ddot{\theta} - a\omega_0^2 \cos \omega_0 t \cos \theta + g \sin \theta = 0. \quad (6.15)$$

### Cazul II – Sistem de referință neinertial (SRNI)

În această situație, va trebui mai întâi să arătăm că, în cazul general, într-un SRNI funcția Lagrange se scrie astfel:

$$L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{v}}_r|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 + m \vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m \vec{a}_0 \cdot \vec{r}' - V(\vec{r}'), \quad (6.16)$$

semnificația mărimilor  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}'$ ,  $\vec{a}_0$  și  $V(\vec{r}')$  fiind dată în cele ce urmează.

Pentru a demonstra relația (6.16) trebuie să studiem mișcarea „compusă” a unei particule de masă  $m$ . Pentru a înțelege ce înseamnă o astfel de mișcare, să raportăm simultan mișcarea acestei particule față de două sisteme de referință, unul „presupus”<sup>6</sup> inertial (fix),  $S (Oxyz)$  și cel

<sup>6</sup> Am utilizat termenul „presupus” între ghilimele deoarece, în realitate, în Univers nu există nici un sistem de referință absolut inertial (în acest Univers, orice corp se află în mișcare relativă față de un altul, astfel că nu există noțiunea de *repaus absolut*, și, în consecință, nici cea de *reper absolut inertial*). Totuși, pentru necesități de ordin practic, cu o foarte bună aproximație, anumite sisteme de referință pot fi considerate ca fiind inertiiale (de exemplu, orice corp aflat în repaus față de suprafața Pământului poate fi considerat originea unui sistem de referință inertial, în care să se studieze mișcarea altor corpuri de pe Pământ; același corp însă nu mai poate juca acest rol, dacă dorim să studiem – față de el – mișcarea altor corpuri cerești).



de-al doilea,  $S'$  ( $O'x'y'z'$ ), având o mișcare accelerată față de primul (fiind deci neinertțial) (vezi Fig. VI.4).

Pentru a ilustra în mod concret o astfel de situație putem considera, de exemplu, mișcarea unei mașini pe o stradă de pe suprafața Pământului, Pământ care, la rândul lui se mișcă față de Soare. Evident, în acest caz mașina este „particula”, reperul inertțial  $S$  este Soarele, iar reperul neinertțial  $S'$  este Pământul.

Pentru a distinge cu ușurință cele două mișcări ale particulei (față de cele două repere,  $S$  și  $S'$ ) vom numi *mișcare absolută* mișcarea particulei față de reperul  $S$  (cel inertțial) și *mișcare relativă* cea față de reperul neinertțial  $S'$ . Mișcarea reperului  $S'$  (ca un întreg) față de reperul inertțial  $S$  o vom numi *mișcare de transport*. O astfel de mișcare (referindu-ne la particula de masă  $m$ ) este ceea ce se numește *mișcare compusă*.

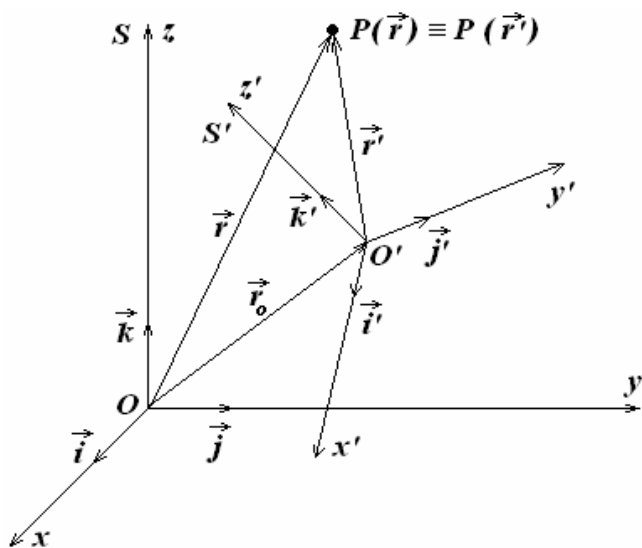


Fig. VI.4

În Univers, orice mișcare, a oricărui corp, poate fi studiată ca o mișcare compusă. Din Fig. VI.4 se observă că putem scrie

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

De aici, situându-ne în cadrul mecanicii clasice, newtoniene<sup>7</sup>, prin derivare totală în raport cu timpul obținem

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}', \quad (6.17)$$

<sup>7</sup> În care este valabil principiul simultaneității absolute (timpul se scurge la fel în toate sistemele de referință inerțiale; deci, sincronizând ceasornicele din toate sistemele de referință inerțiale, acestea vor avea – toate – aceeași indicație).

unde  $\vec{v}$  este viteza particulei față de reperul inerțial  $S$ , numită *viteză absolută* (viteza mișcării absolute). Utilizând convenția de sumare a lui Einstein după indicii „muți” și notațiile  $\vec{i}' = \vec{u}'_1$ ,  $\vec{j}' = \vec{u}'_2$ ,  $\vec{k}' = \vec{u}'_3$ , putem scrie

$$\vec{r}' = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' = x'_k \vec{u}'_k, \quad (6.18)$$

unde  $x'_1 = x'$ ,  $x'_2 = y'$  și  $x'_3 = z'$ . Având în vedere faptul că versorii  $\vec{u}'_k$ , ( $k = \overline{1,3}$ ) variază în timp (evident, doar ca direcție și sens) avem

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}'_k \vec{u}'_k + x'_k \dot{\vec{u}}'_k \stackrel{not.}{=} \vec{v}'_r + x'_k \dot{\vec{u}}'_k, \quad (6.19)$$

unde  $\vec{v}'_r \stackrel{not.}{=} \dot{x}'_k \vec{u}'_k$  este numită *viteză relativă* (viteza mișcării relative, adică viteza particulei în raport cu referențialul neinerțial  $S'$ ).

Pentru a analiza semnificația celui de-al doilea termen din relația (6.19) să notăm cu  $\omega'_k$ , ( $k = \overline{1,3}$ ) componentele vectorilor  $\dot{\vec{u}}'_k$  în raport cu baza ortonormată  $\vec{u}'_k$ ; cu alte cuvinte, fie

$$\dot{\vec{u}}'_k \stackrel{not.}{=} \omega'_{ks} \vec{u}'_s. \quad (6.20)$$

Din condiția de ortonormalitate a bazei  $\{\vec{u}'_k\}_{k=\overline{1,3}}$ , adică din relația

$$\vec{u}'_k \cdot \vec{u}'_s = \delta_{ks},$$

prin derivare totală în raport cu timpul obținem

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}'_k \cdot \vec{u}'_s) = \dot{\vec{u}}'_k \cdot \vec{u}'_s + \vec{u}'_k \cdot \dot{\vec{u}}'_s = \omega'_{kr} \vec{u}'_r \cdot \vec{u}'_s + \omega'_{sr} \vec{u}'_r \cdot \vec{u}'_k = \omega'_{ks} + \omega'_{sk} = 0,$$

ceea ce arată faptul că mărimile  $\omega'_{ks}$ , ( $k, s = \overline{1,3}$ ) sunt componentele unui tensor antisimetric de ordinul al doilea, definit pe spațiul tridimensional al vectorilor  $\vec{v}' = v'_k \vec{u}'_k$ . Fie  $\vec{\omega}$  pseudovectorul (vectorul axial) corespunzător (prin izomorfismul dintre cele două mulțimi – cea a tensorilor antisimetrice de ordinul doi și cea a vectorilor  $\vec{v}'$ , definiți pe același spațiu tridimensional) acestui tensor (vezi Anexa #). Atunci,

$$\omega'_{ks} = \varepsilon_{ksl} \omega'_l, \quad (i, k, s = \overline{1,3}). \quad (6.21)$$

Substituind  $\omega'_{ks}$  dat de relația (6.21) în (6.20) găsim

$$\dot{\vec{u}}'_k = \omega'_{ks} \vec{u}'_s = \varepsilon_{kxi} \omega'_i \vec{u}'_s = \omega'_i \varepsilon_{iks} \vec{u}'_s = \omega'_i \vec{u}'_i \times \vec{u}'_k = \vec{\omega} \times \vec{u}'_k, \quad (6.22)$$

relație numită *formula lui Poisson*. Cu ajutorul relațiilor (6.19) și (6.22), viteza absolută dată de formula (6.17) poate fi scrisă astfel

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_r + x'_k \dot{\vec{u}}'_k = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + x'_k \vec{\omega} \times \vec{u}'_k = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times x'_k \vec{u}'_k = \\ &= \vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}', \end{aligned} \quad (6.23)$$

unde  $\vec{v}_0 \stackrel{not.}{=} \dot{\vec{r}}_0$  este viteza originii  $O'$  față de reperul inerțial  $S$ .

Accelerația absolută poate fi determinată prin derivarea totală în raport cu timpul a vitezei absolute,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}_0 + \frac{d}{dt} (x'_k \vec{u}'_k) + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \dot{\vec{v}}_0 + \ddot{x}'_k \vec{u}'_k + \dot{x}'_k \dot{\vec{u}}'_k + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}',$$

sau, ținând cont de relațiile (6.19) și (6.22),

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\vec{v}}_0 + \dot{x}'_k \vec{u}'_k + \dot{x}'_k \dot{\vec{u}}'_k + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{v}}_0 + \vec{a}_r + \dot{x}'_k \dot{\vec{u}}'_k + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + (\dot{x}'_k \dot{\vec{u}}'_k + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \left[ \dot{x}'_k \vec{\omega} \times \vec{u}'_k + \vec{\omega} \times \right. \\ &\times (\vec{v}_r + x'_k \dot{\vec{u}}'_k) \left. \right] = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + (\vec{\omega} \times \dot{x}'_k \vec{u}'_k + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times x'_k \dot{\vec{u}}'_k) = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \\ &+ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \left[ \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times x'_k (\vec{\omega} \times \vec{u}'_k) \right] = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \\ &+ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times x'_k \vec{u}'_k) = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \end{aligned} \quad (6.24)$$

unde am notat  $\dot{\vec{v}}_0 \stackrel{not.}{=} \vec{a}_0$  – accelerația originii  $O'$  a reperului neinerțial  $S'$  față de sistemul de referință inerțial  $S$  și  $\ddot{x}'_k \vec{u}'_k \stackrel{not.}{=} \vec{a}_r$  – *accelerația relativă* (accelerația mișcării relative, adică accelerația particulei față de referențialul neinerțial  $S'$ ). Termenul  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \stackrel{not.}{=} \vec{a}_{cp}$  este numit *accelerație centripetă*,

iar termenul  $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \stackrel{not.}{=} \vec{a}_c$  – *accelerație Coriolis*.

Dacă particula însăși joacă rol de referențial neinerțial (cu alte cuvinte, dacă presupunem particula legată solidar de referențialul  $S'$ ), atunci nu mai există mișcare relativă – ceea ce înseamnă că  $\vec{v}_r = 0$  și  $\vec{a}_r = 0$  – iar relațiile (6.23) și (6.24) devin

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \stackrel{not.}{=} \vec{v}_{tr} \quad (6.25)$$

și

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \stackrel{\text{not.}}{=} \vec{a}_{tr}. \quad (6.26)$$

Dacă, în plus, originile celor două repere coincid (nu există mișcare de translație), atunci  $\vec{r}_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 = 0$ ,  $\vec{a}_0 = 0$  și avem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6.27)$$

și respectiv,

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (6.28)$$

căci în acest caz  $\vec{r}' \equiv \vec{r}$ .

Mărimile  $\vec{v}_{tr}$  și  $\vec{a}_{tr}$  sunt numite *viteza* și respectiv *acelerația de transport*. Atunci, mărimile<sup>8</sup> caracteristice mișcării absolute se vor scrie sub forma

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{tr} \quad (6.29)$$

și

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_c. \quad (6.30)$$

Pentru a determina semnificația fizică a pseudovectorului  $\vec{\omega}$  vom considera cazul particular în care  $O \equiv O'$  și  $Oz \equiv O'z'$  – axă fixă de rotație. Atunci, relația (6.22) particularizată pentru valoarea  $k=3$  a indicelui, devine

$$\vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{k} = 0,$$

ceea ce ne arată că vectorul axial  $\vec{\omega}$  este coliniar cu axa de rotație,  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ , unde  $\omega = |\vec{\omega}|$ . Pe de altă parte, relația (6.29) ne conduce la concluzia că vectorul viteză,  $\vec{v}$ , al particulei  $P$  este perpendicular pe planul definit de vectorii  $\vec{\omega}$  și  $\vec{r}$ , și are modulul (vezi Fig. VI.5):

---

<sup>8</sup> Viteza și respectiv, accelerația.



Pentru a scrie ecuația de mișcare a particulei în referențialul neinertial  $S'$  trebuie să exprimăm lagrangeanul ca o funcție de noile coordonate,  $x'_i$ , și noile viteze,  $\dot{x}'_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ), ale particulei (față de noul reper  $S'$ ). Pentru aceasta ținem cont că (vezi relația (6.23),

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= (\vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}') = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_r|^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 + \\ &+ 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_r + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \end{aligned}$$

Deci, în referențialul  $S'$  funcția Lagrange a particulei se va scrie astfel:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left[ |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_r|^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_r + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] - \\ &- V(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Termenii care conțin pe  $\vec{v}_0$  pot fi transformați după cum urmează:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_0|^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_r + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') &= |\vec{v}_0|^2 + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}') = |\vec{v}_0|^2 + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0) = \\ &= 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v} - |\vec{v}_0|^2 = \vec{v}_0 \cdot (2\vec{v} - \vec{v}_0) = \vec{v}_0 \cdot \frac{d}{dt} (2\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_0 \cdot \frac{d}{dt} [2(\vec{r}_0 + \vec{r}') - \vec{r}_0] = \\ &= \vec{v}_0 \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r}_0 + 2\vec{r}') = \frac{d}{dt} [\vec{v}_0 \cdot (\vec{r}_0 + 2\vec{r}')] - \vec{a}_0 \cdot (\vec{r}_0 + 2\vec{r}') = \frac{d}{dt} [\vec{v}_0 \cdot (\vec{r}_0 + 2\vec{r}')] - \\ &- \vec{a}_0 \cdot \vec{r}_0 - 2\vec{a}_0 \cdot \vec{r}'. \end{aligned}$$

Întrucât expresia  $\vec{v}_0 \cdot (\vec{r}_0 + 2\vec{r}')$  depinde doar de coordonate și, eventual, de timp (nu poate depinde de viteze), iar cantitatea  $\vec{a}_0 \cdot \vec{r}_0$  este și ea o funcție doar de timp (ce poate fi exprimată ca o derivată totală în raport cu timpul a unei alte funcții ce depinde, de asemenea, doar de timp), termenii  $\frac{d}{dt} [\vec{v}_0 \cdot (\vec{r}_0 + 2\vec{r}')] și  $(-\vec{a}_0 \cdot \vec{r}_0)$  pot fi omiși din expresia lagrangeanului (lagrangeeni echivalenți), și atunci rămânem cu$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left[ |\vec{v}_r|^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 + 2\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{a}_0 \cdot \vec{r}' \right] - V(\vec{r}') = \\ &= \frac{1}{2} m |\vec{v}_r|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 + m\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\vec{a}_0 \cdot \vec{r}' - V(\vec{r}'), \end{aligned} \tag{6.33}$$

adică exact relația (6.16), care trebuia demonstrată.

**Observație:** Pentru a scrie ecuația fundamentală a mișcării particulei în noul referențial (neinerțial) e mai convenabil să exprimăm produsele scalare din expresia funcției Lagrange pe componente,

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} m |\vec{v}_r|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 + m \vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m \vec{a}_{0i} \cdot \vec{r}' - V(\vec{r}') = \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i + \frac{1}{2} m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{inl} \dot{\omega}_j \dot{\omega}_n x'_k x'_l + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j x'_k - m a'_{0i} x'_i - V(x'_k) = \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i + \frac{1}{2} m (\delta_{jn} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{kn}) \dot{\omega}_j \dot{\omega}_n x'_k x'_l + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j x'_k - m a'_{0i} x'_i - V(x'_k) = \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i + \frac{1}{2} m \dot{\omega}_j \dot{\omega}_j x'_k x'_k - \frac{1}{2} m \dot{\omega}_j \dot{\omega}_k x'_k x'_j + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j x'_k - m a'_{0i} x'_i - V(x'_k) = \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i + \frac{1}{2} m \dot{\omega}_k \dot{\omega}_k x'_i x'_i - \frac{1}{2} m (x'_i \dot{\omega}_i) (x'_k \dot{\omega}_k) + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j x'_k - m a'_{0i} x'_i - V(x'_k),
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

unde  $x'_i$ ,  $\dot{x}'_i$ ,  $\dot{\omega}'_i$  și  $a'_{0i}$  sunt componentele pe axa  $Ox'_i$  a mărimilor vectoriale  $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{\omega}$  și respectiv  $\vec{a}_0$  în referențialul neinerțial  $S'$ .

Ținând cont că

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_s} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}'_s} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j x'_k \right) = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{x}'_s} (\dot{x}_i \dot{x}_i) + m \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_j x'_k \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}'_s} = \\
 &= \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial \dot{x}'_i}{\partial \dot{x}'_s} \dot{x}_i + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}'_i}{\partial \dot{x}'_s} \right) + m \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_j x'_k \delta_{is} = \frac{1}{2} m 2 \dot{x}'_i \frac{\partial \dot{x}'_i}{\partial \dot{x}'_s} + m \varepsilon_{sjk} \dot{\omega}_j x'_k = \\
 &= m \dot{x}'_i \delta_{is} + m \varepsilon_{sjk} \dot{\omega}_j x'_k = m \dot{x}'_s + m \varepsilon_{sjk} \dot{\omega}_j x'_k, \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_s} \right) &= m \ddot{x}'_s + m \varepsilon_{sjk} \dot{\omega}'_j x'_k + m \varepsilon_{sjk} \dot{\omega}_j \dot{x}'_k,
 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x'_s} &= \frac{\partial}{\partial x'_s} \left( \frac{1}{2} m \dot{\omega}_k \dot{\omega}_k x'_i x'_i - \frac{1}{2} m (x'_i \dot{\omega}_i) (x'_k \dot{\omega}_k) + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j x'_k - m a'_{0i} x'_i - V(x'_k) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{\omega}_k \dot{\omega}_k \frac{\partial}{\partial x'_s} (x'_i x'_i) - \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial x'_s} [(x'_i \dot{\omega}_i) (x'_k \dot{\omega}_k)] + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}_i \dot{\omega}_j \frac{\partial x'_k}{\partial x'_s} - m a'_{0i} \frac{\partial x'_i}{\partial x'_s} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = \frac{1}{2} m \omega'_k \omega'_k \left( \frac{\partial x'_i}{\partial \dot{x}_s} \dot{x}'_i + \dot{x}'_i \frac{\partial x'_i}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{1}{2} m \frac{\partial (x'_i \omega'_i)}{\partial \dot{x}_s} (x'_i \omega'_i) - \frac{1}{2} m (x'_i \omega'_i) \times \\
& \times \frac{\partial (x'_k \omega'_k)}{\partial \dot{x}_s} + m \varepsilon_{ijk} \dot{x}'_i \omega'_j \delta_{ks} - m a'_{0i} \delta_{is} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = \frac{1}{2} m \omega'_k \omega'_k 2x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial \dot{x}_s} - \frac{1}{2} m \omega'_i \frac{\partial x'_i}{\partial \dot{x}_s} \times \\
& \times (x'_k \omega'_k) - \frac{1}{2} m (x'_i \omega'_i) \omega'_k \frac{\partial x'_k}{\partial \dot{x}_s} + m \varepsilon_{ijs} \dot{x}'_i \omega'_j - m a'_{0s} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \omega'_k \omega'_k x'_i \delta_{is} - \\
& - \frac{1}{2} m \omega'_i \delta_{is} (x'_k \omega'_k) - \frac{1}{2} m (x'_i \omega'_i) \omega'_k \delta_{ks} + m \varepsilon_{ijs} \dot{x}'_i \omega'_j - m a'_{0s} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \omega'_k \omega'_k x'_s - \\
& - m (x'_i \omega'_i) \omega'_s + m \varepsilon_{sij} \dot{x}'_i \omega'_j - m a'_{0s} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s},
\end{aligned}$$

ecuațiile Lagrange de speța a II-a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_s} = 0, \quad (s = \overline{1,3}), \quad (6.35)$$

devin

$$\begin{aligned}
& m \ddot{x}'_s + m \varepsilon_{sjk} \dot{\omega}'_j \dot{x}'_k + m \varepsilon_{sjk} \omega'_j \dot{x}'_k - m \omega'_k \omega'_k \dot{x}'_s + m (x'_i \omega'_i) \dot{\omega}'_s - m \varepsilon_{sij} \dot{x}'_i \dot{\omega}'_j + m a'_{0s} + \\
& + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \ddot{x}'_s + m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')_s + m \varepsilon_{sjk} \omega'_j \dot{x}'_k - m \omega'_k \omega'_k \dot{x}'_s + m (x'_i \omega'_i) \dot{\omega}'_s - m \varepsilon_{skj} \dot{x}'_k \dot{\omega}'_j + \\
& + m a'_{0s} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \ddot{x}'_s + m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')_s + m \varepsilon_{sjk} \omega'_j \dot{x}'_k - m \omega'_k \omega'_k \dot{x}'_s + m (x'_i \omega'_i) \dot{\omega}'_s + \\
& + m \varepsilon_{sjk} \omega'_j \dot{x}'_k + m a'_{0s} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \ddot{x}'_s + m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')_s + 2m \varepsilon_{sjk} \omega'_j \dot{x}'_k - m \omega'_k \omega'_k \dot{x}'_s + \\
& + m (x'_i \omega'_i) \dot{\omega}'_s + m a'_{0s} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \ddot{x}'_s + m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')_s + 2m (\vec{\omega} \times \vec{v}_r)_s - m \omega'_k \omega'_k \dot{x}'_s + \\
& + m (x'_i \omega'_i) \dot{\omega}'_s + m a'_{0s} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = m \ddot{x}'_s + m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')_s + 2m (\vec{\omega} \times \vec{v}_r)_s + \\
& + m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')]_s + m a'_{0s} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_s} = 0,
\end{aligned}$$

(6.36)



deoarece

$$\begin{aligned} \left[ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right]_s &= \varepsilon_{sij} \omega_i (\vec{\omega} \times \vec{r}')_j = \varepsilon_{sij} \varepsilon_{jml} \omega_i \dot{\omega}_n \dot{x}_l = \varepsilon_{jsi} \varepsilon_{jml} \omega_i \dot{\omega}_n \dot{x}_l = \\ &= (\delta_{sn} \delta_{il} - \delta_{sl} \delta_{in}) \omega_i \dot{\omega}_n \dot{x}_l = \dot{\omega}_i \dot{\omega}_s \dot{x}_i - \dot{\omega}_i \dot{\omega}_i \dot{x}_s. \end{aligned}$$

Ecuatia (6.36) reprezintă proiecția pe axa  $Ox_s$  a ecuației vectoriale

$$m\vec{a}_r + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\vec{a}_0 - \vec{F} = 0,$$

care mai poate fi scrisă astfel:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (6.37)$$

Ținând cont de relația (6.26), ecuația de mai sus devine

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_{rr} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{F} - m\vec{a}_{rr} - m\vec{a}_c, \quad (6.38)$$

sau, dacă introducem notațiile

$$\vec{F}_{rr} = -m\vec{a}_{rr} \text{ și } \vec{F}_c = -m\vec{a}_c, \quad (6.39)$$

aceasta se scrie

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{rr} + \vec{F}_c \quad (6.40)$$

și reprezintă ecuația mișcării particulei de masă  $m$  în referențialul neinertial  $S'$ .

După cum putem observa, ecuația fundamentală a mișcării particulei nu își păstrează forma la trecerea de la reperul inertial  $S$ , la cel neinertial  $S'$ . Pe lângă forța newtoniană  $\vec{F}$  mai apar în reperul  $S'$  încă două forțe,  $\vec{F}_{rr} = -m\vec{a}_{rr}$  și  $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ . Forța  $\vec{F}$  este numită *forță aplicată*, iar forțele  $\vec{F}_{rr}$  și  $\vec{F}_c$  sunt numite *forțe de inerție*<sup>10</sup>. Se mai observă faptul că forța centripetă  $\vec{F}_{cp} = -m\vec{a}_{cp} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  intervine doar ca o „componentă”/parte a forței de transport  $\vec{F}_{rr} = -m\vec{a}_{rr}$ . Dacă  $\vec{a}_0 = 0$  și  $\dot{\vec{\omega}} = 0$  (cu alte cuvinte, dacă referențialul  $S'$  devine la rândul său unul inertial) atunci  $\vec{F}_{rr} = 0$  și  $\vec{F}_c = 0$ , iar ecuația fundamentală a mișcării își recapătă forma cunoscută din reperul inertial  $S$ :

$$m\vec{a}_r \equiv m\vec{a} = \vec{F}.$$

<sup>10</sup> Care, în reperul inerția  $S$  nu există, dar în reperul neinertial  $S'$  sunt, în fapt, tot forțe aplicate.

Deci, într-un referențial neinertțial, pe lângă forța aplicată (efectivă),  $\vec{F}$ , mai acționează (tot ca forțe efective, aplicate) și forțele de inerție,  $\vec{F}_r$  și  $\vec{F}_c$ . Cu toate că aceste forțe nu există pentru un observator dintr-un reper inertțial, ele joacă rol de (și chiar sunt) *forțe reale* pentru un observator dintr-un reper neinertțial. Într-un astfel de reper (neinertțial) se poate considera că forțele de inerție sunt datorate (la fel ca, de exemplu, forța de greutate dintr-un reper inertțial, în care aceasta apare ca „efect” al câmpului gravitațional, care este un câmp de forțe potențiale<sup>11</sup>) unor câmpuri de forțe pe care le-am putea numi (prin analogie cu câmpul gravitațional) *câmpuri de forțe inerțiale*. De altfel, această idee se regăsește și în teoria relativității generalizate a lui Einstein, unde „echivalența” (locală) dintre un câmp gravitațional și un câmp de forțe inerțiale este ridicată la rang de principiu (*principiul echivalenței locale*).

Să revenim acum la problema noastră. Drept sistem de referință neinertțial,  $S'$ , vom considera un reper care este solidar legat de punctul de suspensie al tijeii pendulului,  $O'$  (vezi Fig. VI.6), punct care oscilează (față de originea  $O$  a reperului inertțial considerat inițial) conform legii

$$X = a \cos \omega_0 t,$$

deci, care are o mișcare accelerată, cu

$$a_0 = |\vec{a}_0| = \ddot{X} = -a\omega_0^2 \cos \omega_0 t.$$

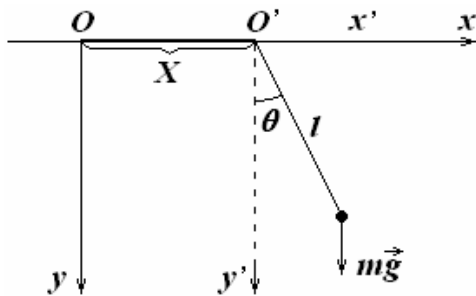


Fig. VI.6

Deoarece în cazul nostru

$$\vec{\omega} = 0,$$

$$\vec{v}_0 = (-a\omega_0 \sin \omega_0 t, 0, 0),$$

$$\vec{a}_0 = (-a\omega_0^2 \cos \omega_0 t, 0, 0)$$

și

$$\vec{r}' = (l \sin \theta, l \cos \theta, 0),$$

relația (6.33) se scrie astfel:

<sup>11</sup> Chiar conservative.

$$L_{SRNI} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_r|^2 - m \vec{a}_0 \cdot \vec{r}' - V(\vec{r}') = \frac{1}{2} m |\vec{v} - \vec{v}_0|^2 - m \vec{a}_0 \cdot \vec{r}' - V(\vec{r}'), \quad (6.41)$$

sau,

$$L_{SRNI} \equiv L' = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m a l \omega_0^2 \cos \omega_0 t \sin \theta + m g l \cos \theta, \quad (6.42)$$

deoarece

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = (\dot{x} - v_{0x}, \dot{y} - 0, 0 - 0) = (\dot{x} - v_0, \dot{y}, 0) = (l\dot{\theta} \cos \theta, -l\dot{\theta} \sin \theta, 0)$$

și

$$V(\vec{r}') = V(y') \equiv V(y) = -m g l \cos \theta,$$

căci  $y' = y$ .

Ecuția Lagrange de speța a II-a pentru lagrangeanul  $L'$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0, \quad (6.43)$$

este

$$m l^2 \ddot{\theta} - m a l \omega_0^2 \cos \omega_0 t \cos \theta + m g l \sin \theta = 0,$$

sau,

$$l \ddot{\theta} - a \omega_0^2 \cos \omega_0 t \cos \theta + g \sin \theta = 0, \quad (6.44)$$

adică aceeași ecuație cu cea obținută lucrând într-un sistem de referință inerțial.

Într-adevăr, avem

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

și

$$\frac{\partial L'}{\partial \theta} = m a l \omega_0^2 \cos \omega_0 t \cos \theta - m g l \sin \theta,$$

care înlocuite în (6.43) dau (6.44).

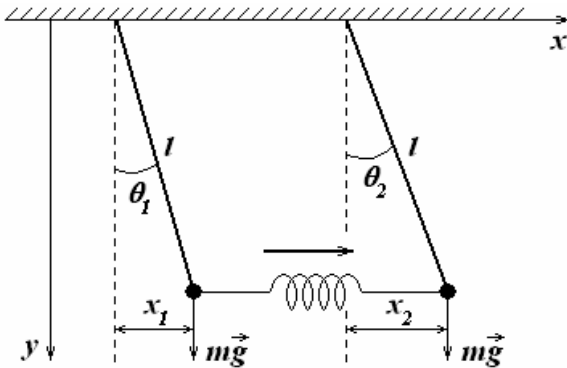
#### 4. Problema a două pendule identice cuplate

Se consideră două pendule simple identice (vezi Fig. VI.7), fiecare având lungimea  $l$  și masa  $m$ . Pendulele sunt legate printr-un resort de masă neglijabilă, netensionat când pendulele sunt în echilibru ( $x_1 = x_2 = 0$ ).

- să se determine pulsațiile proprii ale sistemului;
- să se scrie soluțiile ecuațiilor de mișcare, dacă la momentul inițial  $t_0 = 0$ ,  $x_1(t_0) = a$ ,  $x_2(t_0) = 0$ , iar vitezele inițiale ale pendulelor sunt nule,  $\dot{x}_1(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(t_0) = 0$ .

#### Rezolvare

a) Sistemul este unul natural, întrucât, atât câmpul gravitațional, cât și câmpul forțelor elastice sunt câmpuri de forțe potențiale.



Cu datele din Fig. VI.7, ecuațiile legăturilor satisfăcute de corpurile sistemului sunt

$$f_1(z_1) = z_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l^2 = 0,$$

$$f_3(z_2) = z_2 = 0,$$

$$f_4(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - l^2 = 0,$$

Fig. VI.7

unde, am considerat câte un sistem de referință pentru fiecare pendul în parte, cu axa  $Ox$  comună, dar cu originile în puncte diferite (în cele două puncte de suspensie). Fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic am considerat că mișcarea corpurilor se face în planul  $z = 0$ . Presupunând că oscilațiile sunt suficient de mici, putem neglija variația coordonatei verticale  $y$  a celor două corpuri și putem considera că deplasarea acestora are loc numai de-a lungul axei  $Ox$  (mișcare unidimensională). Rezultă că sistemul are  $3 \cdot 2 - 4 = 2$  grade de libertate, căroră, ținând cont de ecuațiile

legăturilor, le vom asocia ca și coordonate generalizate, coordonatele lor carteziene  $x_1$  și  $x_2$ . Atunci, energia cinetică a sistemului va fi

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2,$$

iar energia potențială are două „componente”, una gravitațională și una elastică,  $V = V_g + V_e$ . În ceea ce privește partea de origine gravitațională, conform „rețetei standard”, putem scrie

$$dV_g = -dA_g = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -mgdy_1 - mgdy_2,$$

deci,

$$V_g = -mgy_1 - mgy_2 + V_{g0},$$

unde, constanta arbitrară de integrare  $V_{g0}$  poate fi luată zero, dacă alegem ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională planul  $xOz$ . Într-adevăr,

$$V_g(y_1 = 0, y_2 = 0) = 0 \Rightarrow V_{g0} = 0.$$

Rezultă astfel că

$$\begin{aligned} V_g &= -mgy_1 - mgy_2 = -mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2 = \\ &= -mgl\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} - mgl\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = -mgl\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{l}\right)^2} - \\ &- mgl\sqrt{1 - \left(\frac{x_2}{l}\right)^2} \cong -mgl\left(1 - \frac{x_1^2}{2l^2}\right) - mgl\left(1 - \frac{x_2^2}{2l^2}\right) = -2mgl + \\ &+ mg\frac{x_1^2}{2l} + mg\frac{x_2^2}{2l}. \end{aligned}$$

Pentru partea de origine elastică avem

$$dV_e = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -(-k\vec{x} \cdot d\vec{x}) = kx dx,$$

de unde,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 + V_{e0},$$

în care, constanta arbitrară de integrare  $V_{e0}$  poate fi considerată nulă, dacă se alege ca „nivel” de referință pentru energia potențială elastică starea inițială, în care deformația resortului este zero:

$$V_e(x=0) = 0 \Rightarrow V_{e0} = 0.$$

Atunci, ținând cont și de Fig. VI.7,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2,$$

deoarece, alegând nivelul de referință pentru energia potențială elastică starea inițială, atunci variabila  $x$  din expresia lui  $V_e$  va reprezenta chiar deformarea  $\Delta x$  a resortului (cu cât s-a alungit sau s-a comprimat resortul). Energia potențială totală a sistemului va fi atunci

$$V = -2mgl + mg \frac{x_1^2}{2l} + mg \frac{x_2^2}{2l} + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2.$$

Lăsând la o parte constanta<sup>12</sup> ( $-2mgl$ ) din expresia energiei potențiale, funcția Lagrange a sistemului este

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - mg \frac{x_1^2}{2l} - mg \frac{x_2^2}{2l} - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2,$$

iar ecuațiile Lagrange de speța a II-a,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

și

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,$$

având în vedere că

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m\ddot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = m\dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m\ddot{x}_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -mg \frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1) \quad \text{și} \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -mg \frac{x_2}{l} - k(x_2 - x_1),$$

devin:

$$m\ddot{x}_1 + mg \frac{x_1}{l} - k(x_2 - x_1) = 0$$

și respectiv,

<sup>12</sup> Acest lucru este posibil, întrucât, după cum știm, doi lagrangeeni care diferă printr-o constantă sunt echivalenți.

$$m\ddot{x}_2 + mg \frac{x_2}{l} + k(x_2 - x_1) = 0,$$

sau,

$$m\ddot{x}_1 = -mg \frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1) \quad (6.45)$$

și respectiv,

$$m\ddot{x}_2 = -mg \frac{x_2}{l} - k(x_2 - x_1). \quad (6.46)$$

Considerând că sistemul efectuează oscilații mici, vom căuta soluții de forma

$$x_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t, \quad (6.47)$$

și respectiv,

$$x_2 = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \quad (6.48)$$

Impunând ca aceste soluții să verifice ecuațiile diferențiale (6.45) și (6.46) ale mișcării sistemului, obținem:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_1 \sin \omega t - m\omega^2 B_1 \cos \omega t &= -mg \frac{A_1}{l} \sin \omega t - mg \frac{B_1}{l} \cos \omega t + \\ &+ kA_2 \sin \omega t + kB_2 \cos \omega t - kA_1 \sin \omega t - kB_1 \cos \omega t \end{aligned}$$

respectiv,

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_2 \sin \omega t - m\omega^2 B_2 \cos \omega t &= -mg \frac{A_2}{l} \sin \omega t - mg \frac{B_2}{l} \cos \omega t - \\ &- kA_2 \sin \omega t - kB_2 \cos \omega t + kA_1 \sin \omega t + kB_1 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Identificând coeficienții funcțiilor trigonometrice  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$  din cei doi membri ai relațiilor de mai sus obținem,

$$-m\omega^2 A_1 = -mg \frac{A_1}{l} + kA_2 - kA_1, \quad (6.49)$$

și

$$-m\omega^2 B_1 = -mg \frac{B_1}{l} + kB_2 - kB_1 \quad (6.50)$$

respectiv,

$$-m\omega^2 A_2 = -mg \frac{A_2}{l} - kA_2 + kA_1 \quad (6.51)$$

și

$$-m\omega^2 B_2 = -mg \frac{B_2}{l} - kB_2 + kB_1. \quad (6.52)$$

Pentru ca sistemul

$$\begin{cases} \left( -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k \right) A_1 - kA_2 = 0, \\ -kA_1 + \left( -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k \right) A_2 = 0, \end{cases}$$

format din ecuațiile (6.49) și (6.51) să fie compatibil trebuie ca

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k \end{vmatrix} = 0,$$

adică,

$$\left( -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k \right)^2 - k^2 = 0,$$

sau,

$$\left( -m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k \right)^2 = k^2,$$

de unde,

$$-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k = \pm k,$$

ceea ce conduce la următoarele soluții pentru  $\omega^2$ :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}, \quad (6.53)$$

adică,

$$\omega_1^2 \equiv \omega_M^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \quad (6.54)$$

și

$$\omega_2^2 \equiv \omega_m^2 = \frac{g}{l}. \quad (6.55)$$



Aceleași valori ale frecvențelor se obțin folosind ecuațiile rămase, (6.50) și (6.52) în necunoscutele  $B_1$  și  $B_2$ . Lăsăm cititorul să se convingă singur de aceasta.

Înlocuind pe  $\omega_M^2$  din (6.54) în ecuația (6.49) obținem

$$-m\omega_M^2 A_1 = -m \left( \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \right) A_1 = -mg \frac{A_1}{l} + kA_2 - kA_1,$$

sau,

$$-m \frac{g}{l} A_1 - 2kA_1 = -mg \frac{A_1}{l} + kA_2 - kA_1,$$

de unde,

$$A_2 = -A_1. \quad (6.56)$$

Substituind acum pe  $\omega_M^2$  din (6.54) în ecuația (6.50) obținem

$$-m\omega_M^2 B_1 = -m \left( \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \right) B_1 = -mg \frac{B_1}{l} + kB_2 - kB_1,$$

sau,

$$-m \frac{g}{l} B_1 - 2kB_1 = -mg \frac{B_1}{l} + kB_2 - kB_1,$$

de unde,

$$B_2 = -B_1. \quad (6.57)$$

Reluând aceleași calcule cu  $\omega_m^2$  în locul lui  $\omega_M^2$ , avem (utilizând (6.55) în (6.49)):

$$-m\omega_m^2 A_1 = -m \frac{g}{l} A_1 = -mg \frac{A_1}{l} + kA_2 - kA_1,$$

de unde,

$$A_2 = A_1. \quad (6.58)$$

Apoi, cu  $\omega_m^2$  din (6.55) în (6.50) găsim:

$$-m\omega_m^2 B_1 = -m \frac{g}{l} B_1 = -mg \frac{B_1}{l} + kB_2 - kB_1,$$

adică

$$B_2 = B_1. \quad (6.59)$$

Ținând cont că sistemul are două frecvențe de oscilație, soluțiile (6.47) și (6.48) ale ecuațiilor diferențiale ale mișcării celor două pendule

cuplate se vor scrie ca o superpoziție a celor două moduri de oscilație. Având în vedere relațiile (6.56) ÷ (6.59), pentru  $x_1$  și  $x_2$  putem scrie atunci:

$$x_1 = C_1 \sin \omega_M t + C_2 \cos \omega_M t + C_3 \sin \omega_m t + C_4 \cos \omega_m t \quad (6.60)$$

și

$$x_2 = -C_1 \sin \omega_M t - C_2 \cos \omega_M t + C_3 \sin \omega_m t + C_4 \cos \omega_m t, \quad (6.61)$$

unde constantele arbitrare de integrare  $C_i$ , ( $i = \overline{1,4}$ ) se determină din condițiile inițiale.

b) Din enunțul problemei cunoaștem că la  $t=0$ ,  $x_1 = a$  și  $x_2 = 0$ . Atunci, pentru vitezele inițiale obținem imediat  $\dot{x}_1(t=0) = \dot{a} = 0$  și  $\dot{x}_2(t=0) = 0$ . Din relațiile (6.60) și (6.61) rezultă următoarele expresii generale pentru viteze:

$$\dot{x}_1 = \omega_M C_1 \cos \omega_M t - \omega_M C_2 \sin \omega_M t + \omega_m C_3 \cos \omega_m t - \omega_m C_4 \sin \omega_m t$$

și

$$\dot{x}_2 = -\omega_M C_1 \cos \omega_M t + \omega_M C_2 \sin \omega_M t + \omega_m C_3 \cos \omega_m t - \omega_m C_4 \sin \omega_m t.$$

Impunând acum condițiile inițiale obținem:

$$x_1(t=0) = a = C_2 + C_4, \quad (6.62)$$

$$x_2(t=0) = 0 = -C_2 + C_4, \quad (6.63)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0 = \omega_M C_1 + \omega_m C_3 \quad (6.64)$$

și

$$\dot{x}_2(t=0) = 0 = -\omega_M C_1 + \omega_m C_3. \quad (6.65)$$

Din relațiile (6.62) și (6.63) rezultă imediat că  $C_2 = C_4 = a/2$ , iar din relațiile (6.64) și (6.65) rezultă că  $C_1 = C_3 = 0$ .

Așadar, condițiile inițiale impuse de enunțul problemei determină următoarele soluții pentru ecuațiile de mișcare:

$$x_1 = \frac{a}{2} \cos \omega_M t + \frac{a}{2} \cos \omega_m t = \frac{a}{2} (\cos \omega_M t + \cos \omega_m t) \quad (6.66)$$

și

$$x_2 = -\frac{a}{2} \cos \omega_M t + \frac{a}{2} \cos \omega_m t = \frac{a}{2} (\cos \omega_m t - \cos \omega_M t), \quad (6.67)$$

sau,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{a}{2} 2 \cos\left(\frac{\omega_M + \omega_m}{2}\right)t \cos\left(\frac{\omega_M - \omega_m}{2}\right)t = \\
 &= a \cos\left(\frac{\omega_M + \omega_m}{2}\right)t \cos\left(\frac{\omega_M - \omega_m}{2}\right)t \stackrel{\text{not.}}{=} A_{\text{mod}}(t) \cos\left(\frac{\omega_M + \omega_m}{2}\right)t
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

și

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{a}{2} 2 \sin\left(\frac{\omega_M + \omega_m}{2}\right)t \sin\left(\frac{\omega_M - \omega_m}{2}\right)t = \\
 &= a \sin\left(\frac{\omega_M + \omega_m}{2}\right)t \sin\left(\frac{\omega_M - \omega_m}{2}\right)t \stackrel{\text{not.}}{=} B_{\text{mod}}(t) \sin\left(\frac{\omega_M + \omega_m}{2}\right)t,
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

adică apare *fenomenul de bătăi*, pulsația bătăilor fiind

$$\omega_{\text{bat.}} = 2\omega_{\text{mod}} = \omega_M - \omega_m. \tag{6.70}$$

## 5. Problema a două pendule diferite cuplate

Două pendule simple de mase  $m_1$  și  $m_2$  și lungimi  $l_1$ , respectiv  $l_2$  sunt cuplate printr-un resort de constantă elastică  $k$  montat la distanța  $h$  de punctele lor de suspensie (vezi Fig. VI.8). Presupunând resortul netensionat când pendulele sunt în echilibru ( $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ), să se scrie

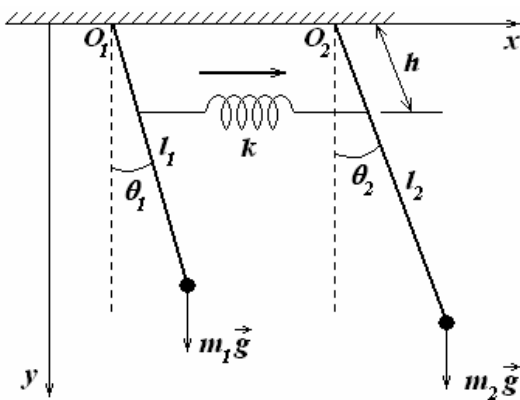


Fig. VI.8

ecuațiile de mișcare ale sistemului și să se determine soluțiile acestora în cazul micilor oscilații, în ipoteza că mișcarea are loc doar în plan vertical.

### Rezolvare

Deoarece atât câmpul gravitațional, cât și câmpul forțelor elastice sunt câmpuri potențiale de forță, sistemul este

unul natural. Pentru a determina numărul gradelor de libertate ale sistemului vom scrie mai întâi ecuațiile legăturilor. Acestea sunt:

$$f_1(z_1) = z_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0,$$

$$f_3(z_2) = z_2 = 0$$

și

$$f_4(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - l_2^2 = 0,$$

unde, am considerat câte un sistem de referință pentru fiecare pendul în parte, cu axa  $Ox$  comună, dar cu originile în puncte diferite (în cele două puncte de suspensie,  $O_1$  și  $O_2$  – vezi Fig. VI.8). Așadar, sistemul are  $3 \cdot 2 - 4 = 2$  grade de libertate, cărora le vom asocia ca și coordonate generalizate unghiurile  $\theta_1$  și  $\theta_2$  făcute de cele două tije ideale (rigide și de masă neglijabilă) cu verticala. Întrucât

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1, \\ y_1 = l_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} x_2 = l_2 \sin \theta_2, \\ y_2 = l_2 \cos \theta_2, \end{cases}$$

energia cinetică a sistemului este

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 &= \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2), \end{aligned}$$

iar pentru energia potențială avem,

$$V = V_g + V_e,$$

unde  $V_g$  este „componenta” gravitațională, iar  $V_e$  – cea elastică (datorată câmpului forțelor elastice din resort). Pentru  $V_g$  putem scrie

$$dV_g = -dA_g = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dy_1 - m_2 g dy_2,$$

deci,

$$V_g = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + V_{g0},$$

unde constanta arbitrară de integrare  $V_{g_0}$  poate fi luată zero, dacă alegem ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională planul  $xOz$ . Într-adevăr,

$$V_g(y_1 = 0, y_2 = 0) = 0 \Rightarrow V_{g_0} = 0.$$

Deci,

$$\begin{aligned} V_g &= -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 = \\ &= -g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2). \end{aligned}$$

Pentru partea de origine elastică avem

$$dV_e = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -(-k\vec{x} \cdot d\vec{x}) = kx dx,$$

de unde,

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2 + V_{e_0},$$

în care, constanta arbitrară de integrare  $V_{e_0}$  poate fi considerată nulă, dacă se alege ca „nivel” de referință pentru energia potențială elastică starea inițială, în care deformația resortului este zero:

$$V_e(x = 0) = 0 \Rightarrow V_{e_0} = 0.$$

Atunci, energia potențială elastică  $V_e$  va fi

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2 \equiv \frac{1}{2} k(\Delta x)^2,$$

deoarece, alegând „nivelul de referință” pentru energia potențială elastică a resortului chiar starea inițială, variabila generică  $x$  din expresia lui  $V_e$  va reprezenta chiar deformarea  $\Delta x$  a resortului (cu cât s-a alungit, ori s-a comprimat resortul). Din Fig. VI.8 se observă că

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| = h |\sin \theta_2 - \sin \theta_1|$$

și, ținând cont de identitatea trigonometrică

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \left( \frac{a-b}{2} \right) \cos \left( \frac{a+b}{2} \right),$$

$V_e$  devine

$$V_e = \frac{1}{2} kh^2 \left[ 4 \sin^2 \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right].$$

Deoarece au apărut deja termeni de ordinul doi, vom utiliza ipoteza micilor oscilații, în care

$$\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)^3 \cong \frac{\theta_2 - \theta_1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^4 \cong 1,$$

și atunci  $V_e$  devine

$$V_e = \frac{1}{2}kh^2(\theta_2 - \theta_1)^2.$$

Așadar, energia potențială totală a sistemului este

$$V = V_g + V_e = -g(m_1l_1 \cos \theta_1 + m_2l_2 \cos \theta_2) + \frac{1}{2}kh^2(\theta_2 - \theta_1)^2,$$

iar funcția Lagrange a sistemului este

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2) + g(m_1l_1 \cos \theta_1 + m_2l_2 \cos \theta_2) - \frac{1}{2}kh^2(\theta_2 - \theta_1)^2,$$

care, în ipoteza micilor oscilații (ipoteză deja folosită în deducerea lui  $V_e$ ), adică, atunci când putem utiliza aproximațiile

$$\cos \theta_1 \cong 1 - \frac{1}{2}\theta_1^2 \quad \text{și} \quad \cos \theta_2 \cong 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2,$$

se va scrie

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}g(m_1l_1\theta_1^2 + m_2l_2\theta_2^2) - \frac{1}{2}kh^2(\theta_2 - \theta_1)^2,$$

unde am lăsat la o parte termenul constant  $g(m_1l_1 + m_2l_2)$  (lagrangeeni echivalenți).

Având în vedere că

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = m_i l_i^2 \dot{\theta}_i, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = m_i l_i^2 \ddot{\theta}_i, \quad (i=1, 2)$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -gm_1l_1\theta_1 + kh^2(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -gm_2 l_2 \theta_2 - kh^2 (\theta_2 - \theta_1)$$

ecuațiile Lagrange de speța a II-a,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i=1, 2)$$

devin

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + gm_1 l_1 \theta_1 - kh^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (6.71)$$

și

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + gm_2 l_2 \theta_2 + kh^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (6.72)$$

Să revenim acum la funcția lui Lagrange pentru micile oscilații,

$$L = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} g (m_1 l_1 \theta_1^2 + m_2 l_2 \theta_2^2) - \frac{1}{2} kh^2 (\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (6.73)$$

Punând  $x_1 = \sqrt{m_1} l_1 \theta_1$  și  $x_2 = \sqrt{m_2} l_2 \theta_2$ , avem  $\dot{x}_1 = \sqrt{m_1} l_1 \dot{\theta}_1$  și  $\dot{x}_2 = \sqrt{m_2} l_2 \dot{\theta}_2$ , de unde,

$$\theta_1 = \frac{x_1}{l_1 \sqrt{m_1}}, \quad \theta_2 = \frac{x_2}{l_2 \sqrt{m_2}}$$

și

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{l_1 \sqrt{m_1}}, \text{ respectiv } \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{x}_2}{l_2 \sqrt{m_2}},$$

iar lagrangeanul (6.73) devine

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} g (m_1 l_1 \theta_1^2 + m_2 l_2 \theta_2^2) - \frac{1}{2} kh^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{l_1} x_1^2 + \frac{g}{l_2} x_2^2 \right) - \frac{1}{2} kh^2 \left( \frac{x_2}{l_2 \sqrt{m_2}} - \frac{x_1}{l_1 \sqrt{m_1}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) x_1^2 + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) x_2^2 \right] + \frac{kh^2}{l_1 l_2 \sqrt{m_1 m_2}} x_1 x_2 = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} (\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) + \kappa x_1 x_2, \end{aligned}$$

unde am utilizat notațiile

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l_{1,2}} + \frac{kh^2}{m_{1,2}l_{1,2}^2} \quad (6.74)$$

și

$$\kappa = \frac{kh^2}{l_1 l_2 \sqrt{m_1 m_2}}. \quad (6.75)$$

Așadar, problema revine la a studia micile oscilații ale unui sistem fizic descris de lagrangeanul

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) + \kappa x_1 x_2, \quad (6.76)$$

cu  $\omega_{1,2}$  și  $\kappa$  date de relațiile (6.74) și respectiv (6.75).

În cele ce urmează vom face „o mică paranteză” și ne vom opri atenția asupra acestei probleme mai generale anume, studiul mișcării unui sistem fizic al cărui lagrangean este dat de relația (6.76).

O modalitate elegantă de a introduce/determina coordonatele normale este de a face o schimbare de coordonate generalizate,

$$(x_1, x_2) \rightarrow (\eta_1, \eta_2), \quad (6.77)$$

care să lase lagrangeanul pătratic în noile viteze generalizate, dar care, în plus, să devină pătratic și în noile coordonate generalizate (cu alte cuvinte, în noile coordonate – cele normale – coeficientul termenului mixt să se anuleze). Deoarece avem doar două coordonate generalizate, această schimbare de coordonate se poate face considerând formal transformarea (6.77) ca o rotație în plan, adică dată de

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi, \\ x_2 = \eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi, \end{cases} \quad (6.78)$$

cu  $\varphi$  o mărime constantă. Într-adevăr, deoarece

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\eta}_1 \cos \varphi - \dot{\eta}_2 \sin \varphi, \\ \dot{x}_2 = \dot{\eta}_1 \sin \varphi + \dot{\eta}_2 \cos \varphi, \end{cases}$$

în noile coordonate avem

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2,$$



adică lagrangeanul rămâne pătratic în vitezele generalizate, iar termenul mixt  $\kappa x_1 x_2$  devine

$$\begin{aligned}\kappa x_1 x_2 &= \kappa (\eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi) (\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi) = \\ &= \kappa \eta_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - \kappa \eta_2^2 \sin \varphi \cos \varphi + \kappa \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \\ &= \kappa \sin \varphi \cos \varphi (\eta_1^2 - \eta_2^2) + \kappa \eta_1 \eta_2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).\end{aligned}$$

Pe de altă parte, termenul  $-\frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2)$  se va scrie

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) &= -\frac{1}{2} \left[ \omega_1^2 (\eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi)^2 + \omega_2^2 (\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi)^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \eta_1^2 (\omega_1^2 \cos^2 \varphi + \omega_2^2 \sin^2 \varphi) + \eta_2^2 (\omega_1^2 \sin^2 \varphi + \omega_2^2 \cos^2 \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \eta_1 \eta_2 \sin \varphi \cos \varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2) \right],\end{aligned}$$

astfel încât, pentru ca lagrangeanul să fie pătratic și în noile coordonate<sup>13</sup>, trebuie ca termenul mixt (cel în  $\eta_1 \eta_2$ ) să se anuleze:

$$\eta_1 \eta_2 \left[ \kappa (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \sin \varphi \cos \varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2) \right] = 0,$$

ceea ce implică

$$\kappa (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \sin \varphi \cos \varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

adică,

$$\kappa \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

de unde,

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}. \quad (6.79)$$

Deci, alegând pentru constanta  $\varphi$  din transformarea de coordonate (6.78) valoarea dată de relația (6.79), noile coordonate vor fi chiar

<sup>13</sup> Adică, pentru ca noile coordonate să reprezinte chiar coordonatele normale.

coordonatele normale. Atunci, în noile coordonate,  $\eta_1$  și  $\eta_2$ , lagrangeanul problemei va avea forma

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) + \kappa x_1 x_2 = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \\ - \frac{1}{2} \left[ \eta_1^2 (\omega_1^2 \cos^2 \varphi + \omega_2^2 \sin^2 \varphi - 2\kappa \sin \varphi \cos \varphi) + \right. \\ \left. + \eta_2^2 (\omega_1^2 \sin^2 \varphi + \omega_2^2 \cos^2 \varphi + 2\kappa \sin \varphi \cos \varphi) \right],$$

sau, dacă notăm

$$\varpi_1^2 = \omega_1^2 \cos^2 \varphi + \omega_2^2 \sin^2 \varphi - 2\kappa \sin \varphi \cos \varphi$$

și

$$\varpi_2^2 = \omega_1^2 \sin^2 \varphi + \omega_2^2 \cos^2 \varphi + 2\kappa \sin \varphi \cos \varphi,$$

adică,

$$\varpi_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)/4} \quad (6.80)$$

și

$$\varpi_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)/4}, \quad (6.81)$$

atunci, noul lagrangean devine

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}(\varpi_1^2 \eta_1^2 + \varpi_2^2 \eta_2^2), \quad (6.82)$$

care reprezintă lagrangeanul unui sistem format din doi oscilatori liniar armonici, având pulsațiile proprii (pulsațiile normale)  $\varpi_1$  și  $\varpi_2$  date de relațiile (6.80) și (6.81),  $\eta_1$  și  $\eta_2$  jucând rol de coordonate normale.

În deducerea relațiilor (6.80) și (6.81) am ținut cont de faptul că

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \stackrel{\text{not.}}{=} a, \quad (6.83)$$

sau,

$$\frac{1 - 2\sin^2 \varphi}{2\sin \varphi \cos \varphi} = a \Leftrightarrow 1 + 4\sin^4 \varphi - 4\sin^2 \varphi = 4a^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi),$$

cu soluția acceptabilă fizic

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right). \quad (6.84)$$

Atunci,

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$$

și

$$\begin{aligned} -2\kappa \sin \varphi \cos \varphi &= -\kappa \sin 2\varphi = -\kappa \frac{\cos 2\varphi}{\operatorname{ctg} 2\varphi} = -\kappa \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{a} = \\ &= -\kappa \frac{a}{a\sqrt{1+a^2}} = -\frac{\kappa}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

Restul calculelor pot fi realizate cu ușurință, rezultând astfel relațiile (6.80) și (6.81).

Să vedem în continuare cum depinde  $\varphi$  de valorile pulsațiilor  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . În Fig. VI.9 este reprezentat  $\varphi$  în funcție de  $\omega_1 \equiv x$  pentru  $\omega_2$  fixat. Acesta ia valori între zero<sup>14</sup> și  $\frac{\pi}{2}$ , intervalul  $\Delta\omega_1$  în care are loc tranziția de

<sup>14</sup> De fapt, aceasta este o valoare aproximativă, deoarece, de exemplu, pentru  $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$  și  $\kappa = 0.01 \text{ (rad/s)}^2$  avem

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \varphi &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \right)^2}} \right) \right] = \arcsin \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega_2^2}{\sqrt{4\kappa^2 + \omega_2^4}} \right) \right] = \\ &= \arcsin \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{16}{\sqrt{4 \cdot 10^{-4} + 4^4}} \right) \right] = 0.000625, \text{ care poate fi doar aproximată cu zero.} \end{aligned}$$

În cazul general (pentru orice valori ale lui  $\omega_2$  și  $\kappa$ , dar astfel încât  $\kappa$  să poată fi neglijat în raport cu  $\omega_2^2/2$ , adică pentru  $\frac{4\kappa^2}{\omega_2^4} \rightarrow 0$ ) avem

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \varphi &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}} \right] = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\sqrt{4\kappa^2 + \omega_2^4}}\right)} = \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 \sqrt{1 + \frac{4\kappa^2}{\omega_2^4}}}\right)} \stackrel{\frac{4\kappa^2}{\omega_2^4} \rightarrow 0}{\cong} \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2}\right)} = \arcsin 0 = 0. \end{aligned}$$

În ceea ce privește  $\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \varphi$ , calcule simple efectuate pentru aceleași valori ale lui  $\omega_2$  și  $\kappa$  arată că valoarea acestei limite este  $\frac{\pi}{2} = 1,5708$ . Într-adevăr, după cum simplu se poate verifica, deja

pentru  $\omega_1 = 87$  expresia  $\arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}\right)}$  capătă exact valoarea  $1,5708 = \frac{\pi}{2}$ ,

care se menține apoi, oricât de mult ar crește  $\omega_1$ . Așadar,  $\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \varphi = \pi/2$ . Acest lucru rezultă și prin calcul direct:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \varphi &= \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}} \right] = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa}\right)^2}} \right] = \\ &= \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa}\right)^2}} \right] = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}(1+1)} = \arcsin \sqrt{1} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

la valoarea  $\varphi \cong 0$  la  $\varphi \cong \pi/2$  fiind de ordinul lui  $\kappa/\omega_2$ ; deci, cu atât mai îngust, cu cât  $\kappa$  este mai mic. Acest lucru poate fi observat cu ușurință din Fig. VI.9, în care  $\varphi$  este reprezentat ca funcție de  $\omega_1 \equiv x$  pentru trei valori ale lui  $\kappa$ , respectiv,  $\kappa_1 = 0,2$ ;  $\kappa_2 = 1,2$  și  $\kappa_3 = 3,2$ . Acest lucru a fost făcut cu ajutorul următoarelor instrucțiuni din cadrul soft-ului specializat în calcule analitice și numerice Mathematica 4.0:

```

Off[General::spell]
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k1 := 0.2;
k2 := 1.2;
k3 := 3.2;

Omega2 := 4;

f1 = Plot[Pi/4, {x, 0, 2.5*Pi}];
f2 = Plot[ArcSin[
  Sqrt[(1*(1 - (Omega2^2 - x^2)/(2*k1*Sqrt[1 + ((Omega2^2 -
  x^2)/(2*k1)^2)))/2]],
  {x, 0, 2.5*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
f3 = Plot[ArcSin[
  Sqrt[(1*(1 - (Omega2^2 - x^2)/(2*k2*Sqrt[1 + ((Omega2^2 -
  x^2)/(2*k2)^2)))/2]],
  {x, 0, 2.5*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
f4 = Plot[ArcSin[
  Sqrt[(1*(1 - (Omega2^2 - x^2)/(2*k3*Sqrt[1 + ((Omega2^2 -
  x^2)/(2*k3)^2)))/2]],
  {x, 0, 2.5*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];

Show[f1, f2, f3, f4];

```

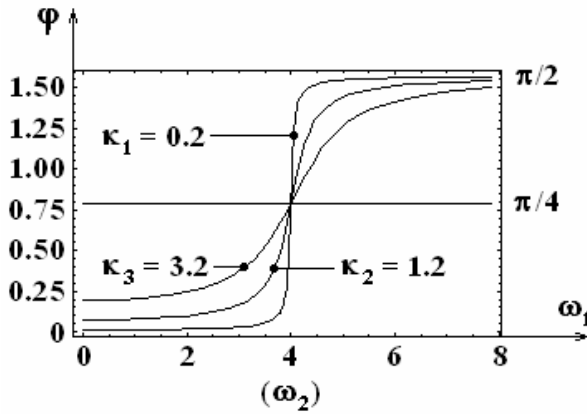


Fig. VI.9

Dacă avem un cuplaj slab ( $\kappa \ll |\omega_2^2 - \omega_1^2|$ ), oscilațiile normale sunt „localizate”, adică, pentru  $\omega_1 < \omega_2$  din (6.84) avem

$$\varphi \stackrel{\omega_2^2 - \omega_1^2 \gg \kappa}{=} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}} \right] \stackrel{\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\kappa} \gg 1}{\cong}$$

$$\stackrel{\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\kappa} \gg 1}{\cong} \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}} \right] = \arcsin 0 = 0$$

și deci, din (6.78) obținem

$$\begin{cases} x_1 \cong \eta_1, \\ x_2 \cong \eta_2, \end{cases} \quad (6.85)$$

iar pentru  $\omega_1 > \omega_2$  avem

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \arcsin \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \right)^2}} \right)} \right] = \\
 &= \arcsin \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa} \right)^2}} \right)} \right] \Bigg|_{\substack{|\omega_2^2 - \omega_1^2| \gg \kappa, \\ \omega_1 > \omega_2}} \cong \\
 &\Bigg|_{\substack{|\omega_2^2 - \omega_1^2| \gg \kappa, \\ \omega_1 > \omega_2}} \cong \arcsin \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa}}{\sqrt{\left( \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\kappa} \right)^2}} \right)} \right] = \arcsin \sqrt{1} = \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

astfel că din (6.78) obținem

$$\begin{cases} x_1 \cong -\eta_2, \\ x_2 \cong \eta_1. \end{cases} \quad (6.86)$$

În cazul cuplajului tare,  $\kappa \gg |\omega_2^2 - \omega_1^2|$ , oscilațiile nu mai sunt localizate. Într-adevăr, în acest caz

$$\varphi \Bigg|_{\substack{|\omega_2^2 - \omega_1^2| \ll \kappa \\ \kappa =}} = \arcsin \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \right)^2}} \right)} \right] \Bigg|_{\substack{|\omega_2^2 - \omega_1^2| \ll \kappa \\ \kappa =}}$$

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_2^2 - \omega_1^2|}{\kappa} \ll 1 &= \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}} \right] \\ \frac{|\omega_2^2 - \omega_1^2|}{\kappa} \rightarrow 0 &= \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}} \right] = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

iar din relațiile (6.78) obținem

$$\begin{cases} x_1 \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2), \\ x_2 \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2). \end{cases} \quad (6.87)$$

Relațiile (6.80) și (6.81) ne dau dependența pulsațiilor normale de parametrii  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  și  $\kappa$ . Aceasta este reprezentată grafic în Fig. VI.10, unde sunt redată  $\varpi_1$  și  $\varpi_2$  în funcție de  $\omega_1$  la  $\omega_2$  fixat (mai exact, am considerat  $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$ ) și cuplaj relativ slab (pentru ilustrare am considerat valoarea  $\kappa = 8 \text{ (rad/s)}^2$ ). Acest lucru a fost realizat cu ajutorul următorului set de instrucțiuni din cadrul soft-ului amintit mai sus:

```
Off[General::spell]
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k := 8;
Omega2 := 4;
```



```

g1 = Sqrt[(Omega2^2 + x^2)/2 - Sqrt[k^2 + (Omega2^2 - x^2)^2/4]];
g2 = Sqrt[(Omega2^2 + x^2)/2 + Sqrt[k^2 + (Omega2^2 - x^2)^2/4]];
g3 = Sqrt[Abs[(Omega2^2 + x^2)/2 - Sqrt[k^2 + (Omega2^2 -
x^2)^2/4]]];

```

```
h1 = Plot[g1, {x, k/Omega2, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
```

```
h2 = Plot[g2, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
```

```
h3 = Plot[a, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
```

```
h4 = Plot[x, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
```

```
h5 = Plot[g3, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
```

```
Show[h1, h2, h3, h4];
```

```
Show[h1, h2, h3, h4, h5];
```

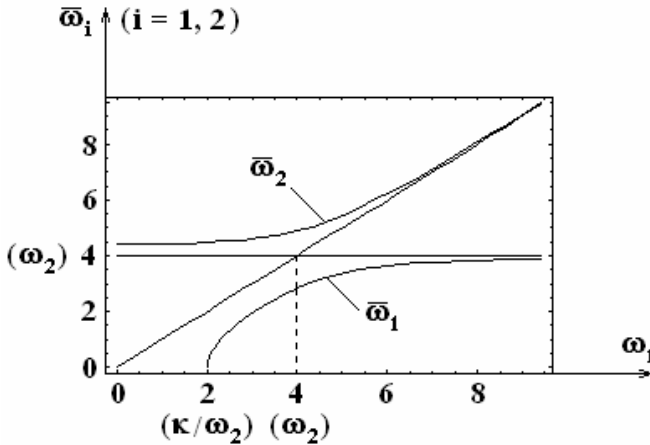


Fig. VI.10

Se observă că  $\varpi_1 < \min(\omega_1, \omega_2)$  și  $\varpi_2 > \max(\omega_1, \omega_2)$ . Dacă cuplajul este slab ( $\kappa$  suficient de mic), atunci, cu excepția domeniului de degenerare  $|\omega_2^2 - \omega_1^2| \approx \kappa$ , pulsațiile normale coincid practic cu  $\omega_1$  și respectiv  $\omega_2$ . Într-adevăr, dacă  $\kappa$  poate fi neglijat în comparație cu  $\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}$  (aceasta arătând ce înseamnă  $\kappa$  „suficient de mic”) atunci

$$\sqrt{\kappa^2 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4}} \cong \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}$$

și din relațiile (6.80) și (6.81) rezultă

$$\varpi_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} \mp \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \right),$$

adică  $\varpi_1 = \omega_1$  și  $\varpi_2 = \omega_2$ .

În fine, pentru pulsații  $\omega_1$  foarte mici, una din pulsațiile normale (mai exact,  $\varpi_1$ ) devine imaginară, ceea ce înseamnă că sistemul nu mai este stabil. Într-adevăr, pentru ca  $\varpi_1$  să fie imaginară, adică

$$\varpi_1^2 = \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} - \sqrt{\kappa^2 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4}} < 0,$$

trebuie ca

$$\sqrt{\kappa^2 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4}} > \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2},$$

sau,

$$\left( \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \right)^2 < \kappa^2 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4},$$

adică,

$$\omega_1 < \frac{\kappa}{\omega_2},$$

relație care arată totodată și ce înseamnă „pulsații  $\omega_1$  foarte mici”. Acest lucru poate fi văzut cu ușurință din Fig. VI.11 în care, pentru  $\varpi_1$  a fost reprezentată grafic dependența lui  $\sqrt{|\varpi_1^2|}$ , mărime notată cu  $\bar{\omega}_1$ . După cum se poate observa, graficul lui  $\bar{\omega} = \sqrt{|\varpi^2|}$  prezintă două „ramuri”, cea mai scurtă, din stânga valorii  $\omega_1 = \frac{\kappa}{\omega_2}$ , apărând ca imaginea într-o oglindă plasată orizontal pe axa  $O\omega_1$ , cu fața în jos (efectul considerării valorii

absolute (în modúl) a lui  $\varpi_1^2$ ), a graficului funcției  $\varpi_1^2 = \varpi_1^2(\omega_1)$  „afectat de radical”<sup>15</sup>, pe intervalul  $\left[0, \frac{\kappa}{\omega_2}\right]$ .

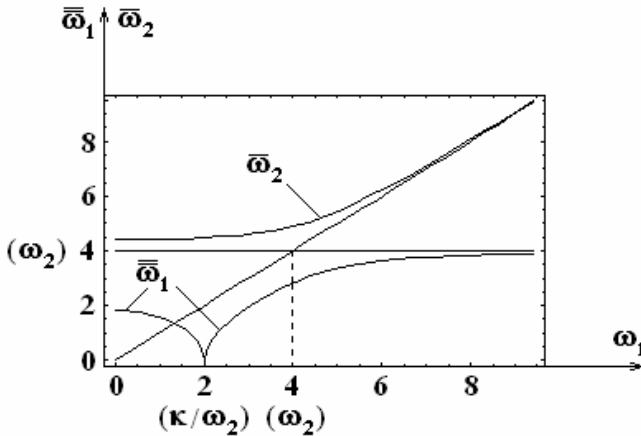


Fig. VI.11

Legea de mișcare este dată de

$$\begin{cases} \eta_1 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1), \\ \eta_2 = A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases} \quad (6.88)$$

<sup>15</sup> Acest „afectat de radical” ține cont de faptul că funcția  $\varpi_1 = \varpi_1(\omega_1)$  nu poate fi reprezentată grafic pe intervalul  $[0, \kappa/\omega_2]$  ca o funcție reală, deoarece pe acest interval  $\varpi_1 = \sqrt{\varpi_1^2}$  nu există. De aceea, pentru a da sens celor amintite mai sus, pe intervalul precizat putem reprezenta grafic doar  $\varpi_1^2$ . Dar imaginea în oglindă (ca efect a operației de luare în modúl) a funcției  $\varpi_1^2 = \varpi_1^2(\omega_1)$  nu este exact ramura din stânga valorii  $\kappa/\omega_2$  a graficului lui  $\bar{\omega}_1 = \sqrt{|\varpi_1^2|}$  ca funcție de  $\omega_1$ . Diferența se datorează funcției radical. Aceste precizări sunt susținute de graficele din Fig. VI.12, în care se observă clar diferența amintită aici. Într-adevăr, după cum se poate sesiza, cele două ramuri din stânga valorii  $\kappa/\omega_2$  ale funcțiilor  $\varpi_1^2 = \varpi_1^2(\omega_1)$  și  $\bar{\omega}_1 = \sqrt{|\varpi_1^2|} = \bar{\omega}_1(\omega_1)$  nu sunt una imaginea celeilalte într-o oglindă orizontală, situată pe axa  $O\omega_1$ .

unde constantele arbitrare  $A_1, A_2, \psi_1$  și  $\psi_2$  se determină din condițiile inițiale. În planul coordonatelor normale (care este rotit cu unghiul  $\varphi$  față de planul coordonatelor inițiale) traiectoria umple dens dreptunghiul delimitat de  $-A_1 \leq \eta_1 \leq A_1$  și  $-A_2 \leq \eta_2 \leq A_2$  (vezi Fig. VI.13).

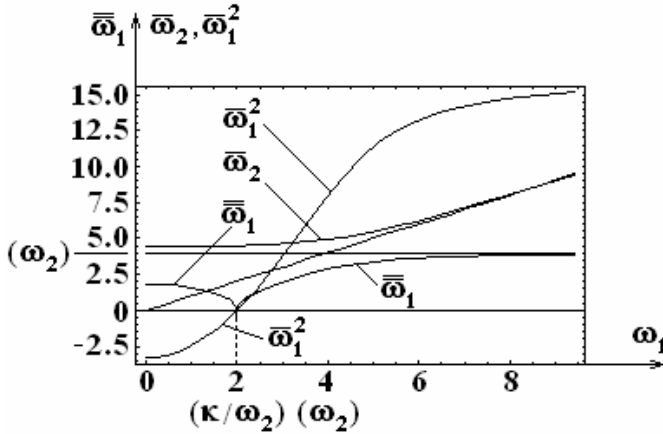


Fig. VI.12

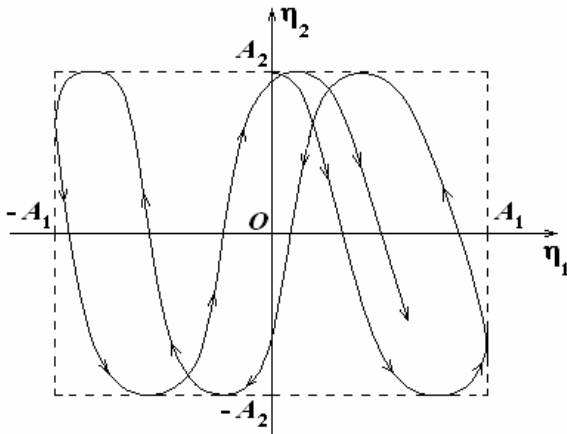


Fig. VI.13

Dacă  $\varpi_1$  și  $\varpi_2$  nu sunt comensurabile, traiectoria nu este închisă, ceea ce înseamnă că mișcarea nu este una periodică. Cu toate acestea,

mişcarea proiecției punctului reprezentativ pe fiecare din cele două axe este periodică. Dacă pulsațiile normale sunt însă comensurabile,

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{N}),$$

trajectoriile se închid, apărând așa-numitele *figuri Lissajous*, iar mișcarea este periodică, perioada fiind

$$\tau = 2\pi \frac{n_1}{\varpi_1} = 2\pi \frac{n_2}{\varpi_2}. \quad (6.89)$$

Pentru  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  avem

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) \cos \varphi - A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2) \sin \varphi, \\ x_2(t) = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) \sin \varphi + A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2) \cos \varphi. \end{cases} \quad (6.90)$$

Traectoria în planul  $x_1 O x_2$  este aceeași, însă axa  $(-A_1, A_1)$  a dreptunghiului este rotită cu unghiul  $\varphi$  față de axa  $Ox_1$  (vezi Fig. VI.14).

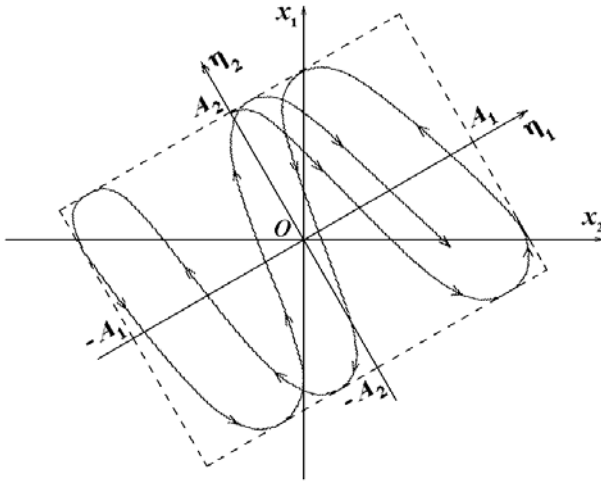


Fig. VI.14

Să revenim acum la problema noastră și să studiem mai întâi cazul

a)  $l_1 = l_2 = l$ . În această situație, relațiile (6.74) și (6.75) devin

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{k}{m_{1,2}} \quad (6.74')$$

și respectiv

$$\kappa = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}}, \quad (6.75')$$

sau, utilizând notațiile  $\omega_0^2 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{g}{l}$  și  $\omega_{e,1,2}^2 \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{k}{m_{1,2}}$ ,

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e,1,2}^2 \quad (6.74'')$$

și respectiv,

$$\kappa = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e1} \omega_{e2}. \quad (6.75'')$$

Cu aceste notații pulsațiile normale vor fi

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \sqrt{\kappa^2 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4}} = \frac{2\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2)}{2} - \\ &\quad - \frac{\left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2)}{2} = \omega_0^2 \end{aligned}$$

și

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \sqrt{\kappa^2 + \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4}} = \omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2),$$

iar relația (6.79) devine

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} = \frac{\left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e2}^2 - \omega_{e1}^2)}{2\left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e1} \omega_{e2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{e2}}{\omega_{e1}} - \frac{\omega_{e1}}{\omega_{e2}} \right).$$

Condiția de cuplaj slab,  $\kappa \ll |\omega_2^2 - \omega_1^2|$ , se va scrie în acest caz astfel:

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e_1} \omega_{e_2} \ll \left|\left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e_2}^2 - \omega_{e_1}^2)\right|,$$

adică,

$$\omega_{e_1} \omega_{e_2} \ll |\omega_{e_2}^2 - \omega_{e_1}^2|. \quad (6.91)$$

După cum am văzut în analiza generală, în cazul cuplajului slab sunt posibile două situații:

i)  $\omega_1 < \omega_2$ , care, pentru problema noastră înseamnă  $\omega_{e_1} < \omega_{e_2}$ , adică  $m_1 > m_2$ . Atunci, relația (6.91) devine

$$\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1},$$

sau,

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1},$$

de unde,

$$m_1 \gg m_2 \left(3 - \frac{m_2}{m_1}\right),$$

ceea ce, ținând cont că în acest caz  $m_1 > m_2$ , deci  $0 < \frac{m_2}{m_1} < 1$ , se mai poate

scrie  $m_1 \gg m_2$ , adică este în acord cu  $m_1 > m_2$  și chiar o întărește. Deci, dacă între cele două pendule există un cuplaj slab și  $m_1 \gg m_2$ , atunci, conform analizei generale  $\varphi \cong 0$  și oscilațiile sunt localizate;

ii)  $\omega_1 > \omega_2$ , care, pentru problema noastră înseamnă  $\omega_{e_1} > \omega_{e_2}$ , adică  $m_1 < m_2$ . Atunci, relația (6.91) devine

$$\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{k}{m_1} - \frac{k}{m_2},$$

sau,

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2},$$

de unde,

$$m_2 \gg m_1 \left( 3 - \frac{m_1}{m_2} \right),$$

ceea ce, ținând cont că în acest caz  $m_1 < m_2$ , deci  $0 < \frac{m_1}{m_2} < 1$ , se mai poate scrie  $m_2 \gg m_1$ , adică este în acord cu  $m_1 < m_2$  și chiar o întărește. Deci, dacă între cele două pendule există un cuplaj slab și  $m_1 \ll m_2$ , atunci, conform analizei generale  $\varphi \cong \pi/2$  și oscilațiile sunt, de asemenea, localizate.

Și într-un caz ( $\varphi \cong 0$ ), și în celălalt ( $\varphi \cong \pi/2$ ), pendulul de masă  $m_1$  oscilează cu pulsația normală  $\varpi_1 = \omega_0$ , iar celălalt, după caz, cu pulsația normală

$$\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2)} \cong \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e2}\right)^2}, \text{ dacă } m_1 \gg m_2,$$



$$\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 (\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2)} \cong \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e1}\right)^2}, \text{ dacă } m_1 \ll m_2,$$

și atunci, conform rezultatelor obținute în cadrul analizei generale, avem

$$\theta_1 \cong \bar{\theta}_1 = \bar{A}_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) = \bar{A}_1 \cos(\omega_0 t + \psi_1) \tag{6.92}$$

și

$$\theta_2 \cong \bar{\theta}_2 = \bar{A}_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2) = \bar{A}_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e2}\right)^2} t + \psi_2\right), \text{ dacă } m_1 \gg m_2,$$



$$= \bar{A}_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e1}\right)^2} t + \psi_2\right), \text{ dacă } m_1 \ll m_2. \tag{6.93}$$



Dacă  $m_1 = m_2 = m$  atunci  $\omega_{e1} = \omega_{e2} = \omega_e$  și relația  $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}$ , din cadrul analizei generale, devine

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{e2}}{\omega_{e1}} - \frac{\omega_{e1}}{\omega_{e2}} \right) = 0,$$

adică  $\varphi = \pi/4$ , ceea ce, conform rezultatelor găsite în cadrul aceleiași analize generale, înseamnă că oscilațiile nu mai sunt localizate și avem

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) - A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \\ \theta_2 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases} \quad (6.94)$$

unde  $\varpi_1 = \omega_0$  și  $\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \frac{h}{l} \omega_e \right)^2}$  cu  $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Într-adevăr, celor două moduri normale de oscilație le corespund coordonatele normale

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \bar{A}_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1), \\ \bar{\theta}_2 = \bar{A}_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases}$$

iar  $\theta_1$  și  $\theta_2$  sunt dați (vezi relația (6.78)) de

$$\begin{cases} \theta_1 = \bar{\theta}_1 \cos \varphi - \bar{\theta}_2 \sin \varphi, \\ \theta_2 = \bar{\theta}_1 \sin \varphi + \bar{\theta}_2 \cos \varphi, \end{cases}$$

cu  $\varphi = \pi/4$ , de unde rezultă relațiile (6.94) în care  $A_1 = \frac{\bar{A}_1}{\sqrt{2}}$  și  $A_2 = \frac{\bar{A}_2}{\sqrt{2}}$ ,

constantele arbitrare  $A_1, A_2, \psi_1$  și  $\psi_2$  determinându-se și în acest caz din condițiile inițiale. În continuare, vom analiza trei situații particulare mai importante care aparțin acestui caz, și anume:

1) Dacă inițial deplasăm pendulele de aceeași parte a verticalei,  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$  și le lășăm să oscileze fără viteză inițială, adică  $\dot{\theta}_1(0) = 0$  și  $\dot{\theta}_2(0) = 0$ , ținând cont că

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\varpi_1 A_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) + \varpi_2 A_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2), \\ \dot{\theta}_2 = -\varpi_1 A_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) - \varpi_2 A_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases}$$

avem

$$\begin{cases} \theta_0 = A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2, \\ \theta_0 = A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 + \varpi_2 A_2 \sin \psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 - \varpi_2 A_2 \sin \psi_2. \end{cases}$$

Adunând ultimele două relații ale acestui sistem rezultă  $\psi_1 = 0$ , și atunci, și  $\psi_2 = 0$ . Cu aceste valori în primele două ecuații ale sistemului, prin adunarea lor, rezultă  $A_1 = \theta_0$ . E banal de constatat apoi că  $A_2 = 0$ . Cu aceste valori ale constantelor arbitrare  $A_1, A_2, \psi_1$  și  $\psi_2$  în (6.94) obținem

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos(\varpi_1 t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \\ \theta_2 = \theta_0 \cos(\varpi_1 t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \end{cases} \quad (6.95)$$

ceea ce arată că cele două pendule oscilează în fază, cu pulsația  $\omega_0$ .

2) Dacă deplasăm cele două pendule de-o parte și respectiv de cealaltă, adică  $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$  și le lăsăm din nou să oscileze fără viteză inițială,  $\dot{\theta}_1(0) = 0$  și  $\dot{\theta}_2(0) = 0$ , obținem

$$\begin{cases} +\theta_0 = A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2, \\ -\theta_0 = A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 + \varpi_2 A_2 \sin \psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 - \varpi_2 A_2 \sin \psi_2. \end{cases}$$

Adunând din nou ultimele două relații ale acestui sistem rezultă că fazele inițiale sunt nule,  $\psi_1 = 0$  și  $\psi_2 = 0$ , iar pentru amplitudinile de oscilație, din primele două ecuații rezultă  $A_1 = 0$  și  $A_2 = -\theta_0$ . În acest caz, relațiile (6.94) devin

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos(\varpi_2 t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2} t\right), \\ \theta_2 = -\theta_0 \cos(\varpi_2 t) = \theta_0 \cos(\varpi_2 t + \pi) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2} t + \pi\right), \end{cases} \quad (6.96)$$

ceea ce arată că în cazul acestor condiții inițiale pendulele oscilează cu aceeași pulsație,  $\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\left(\frac{h}{l}\right)^2}$ , dar în opoziție de fază.

3) În fine, dacă deplasăm doar unul dintre pendule (de exemplu, primul), celălalt păstrându-l în poziție de echilibru,  $\theta_1(0) = \theta_0$ ,  $\theta_2(0) = 0$  și le lăsăm să oscileze fără viteză inițială,  $\dot{\theta}_1(0) = 0$  și  $\dot{\theta}_2(0) = 0$  obținem:

$$\begin{cases} \theta_0 = A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2, \\ 0 = A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 + \varpi_2 A_2 \sin \psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 - \varpi_2 A_2 \sin \psi_2. \end{cases}$$

Din nou rezultă  $\psi_1 = 0$  și  $\psi_2 = 0$ , iar pentru amplitudini se găsește  $A_1 = -A_2 = \theta_0 / 2$ . Cu aceste valori în (6.94) obținem:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\theta_0}{2} [\cos(\varpi_1 t) + \cos(\varpi_2 t)] = \frac{\theta_0}{2} \left[ \cos(\omega_0 t) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2} t\right) \right], \\ \theta_2 = \frac{\theta_0}{2} [\cos(\varpi_1 t) - \cos(\varpi_2 t)] = \frac{\theta_0}{2} \left[ \cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2} t\right) \right]. \end{cases} \quad (6.97)$$

Utilizând identitățile din trigonometrie,

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= +2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \end{aligned}$$

relațiile de mai sus devin

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos \frac{\left( \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \omega_e \frac{h}{l} \right)^2} \right) t}{2} \cos \frac{\left( \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \omega_e \frac{h}{l} \right)^2} \right) t}{2}, \\ \theta_2(t) = -\theta_0 \sin \frac{\left( \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \omega_e \frac{h}{l} \right)^2} \right) t}{2} \sin \frac{\left( \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \omega_e \frac{h}{l} \right)^2} \right) t}{2}. \end{cases} \quad (6.98)$$

Apoi, deoarece  $h < l$  avem:

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \omega_e \frac{h}{l} \right)^2} &= \omega_0 \sqrt{1 + 2 \left( \frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \left( \frac{h}{l} \right)^2} = \\ &= \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \left( \frac{h}{l} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\omega_e}{\omega_0} \frac{h}{l} \right)^4 \right] \stackrel{\omega_e < \omega_0}{\cong} \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Deci, în condițiile în care  $\omega_e < \omega_0$ , ceea ce este echivalent cu  $k < \frac{mg}{l}$  (cuplaj relativ slab), pulsația  $\varpi_2$  devine

$$\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2 \left( \omega_e \frac{h}{l} \right)^2} \cong \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right] = \omega_0 + 2\gamma,$$

unde  $\gamma = \frac{1}{2} \frac{\omega_e^2}{\omega_0} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \ll \omega_0$ . Atunci,  $\theta_1$  și  $\theta_2$  vor fi dați de

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos \gamma t \cos(\omega_0 + \gamma)t \cong \theta_0 \cos \omega_0 t \cos \gamma t \stackrel{not.}{=} \theta_{1 \text{ mod}}(t) \cos \omega_0 t, \\ \theta_2(t) = \theta_0 \sin \gamma t \sin(\omega_0 + \gamma)t \cong \theta_0 \sin \omega_0 t \sin \gamma t \stackrel{not.}{=} \theta_{2 \text{ mod}}(t) \sin \omega_0 t, \end{cases} \quad (6.99)$$

adică apare fenomenul de bătaie, ilustrat în Fig. VI.15. Graficele prezentate în figură corespund valorilor (convențional alese)  $\theta_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 12$  și  $\gamma = 1$ .

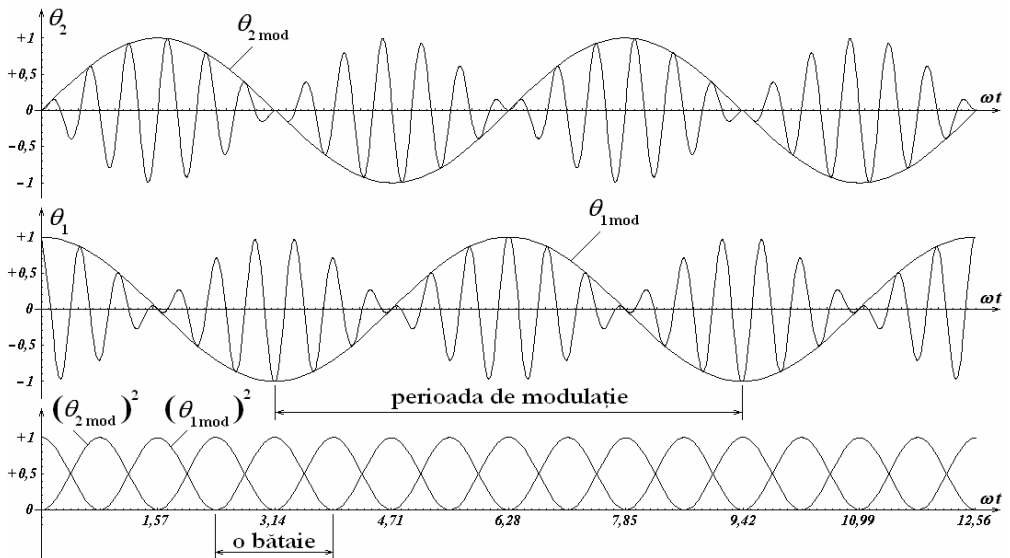


Fig. VI.15

b) În cazul  $l_1 \neq l_2$  (pentru a preciza lucrurile, să admitem că  $l_1 > l_2$ ) este mai comod să utilizăm ecuația caracteristică

$$\left[ \varpi^2 - \frac{g}{l_1} - \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{k}{m_1} \right] \left[ \varpi^2 - \frac{g}{l_2} - \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{k}{m_2} \right] - \left( \frac{h^2}{l_1 l_2} \right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0, \quad (6.100)$$

care poate fi găsită pornind de la ecuațiile diferențiale ale mișcării (6.71) și (6.72) (ecuațiile Lagrange de speța a II-a) deduse anterior și care mai pot fi scrise sub forma:

$$\ddot{\theta}_1 + \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) \theta_1 - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \theta_2 = 0 \quad (6.71')$$

și

$$\ddot{\theta}_2 + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) \theta_2 - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \theta_1 = 0. \quad (6.72')$$

Pentru a realiza acest lucru vom căuta soluții de forma  $\theta_i = A_i \sin \varpi t + B_i \cos \varpi t$ , ( $i=1, 2$ ), în vederea determinării pulsațiilor celor două moduri normale de oscilație ale sistemului (pulsații notate aici cu  $\varpi$ ). Avem,

$$\ddot{\theta}_i = -\omega^2 A_i \sin \omega t - \omega^2 B_i \cos \omega t, \quad (i=1, 2),$$

astfel că ecuațiile (6.71') și (6.72') devin

$$-\omega^2 A_1 \sin \omega t - \omega^2 B_1 \cos \omega t + \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) (A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t) - \\ - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} (A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t) = 0$$

și respectiv

$$-\omega^2 A_2 \sin \omega t - \omega^2 B_2 \cos \omega t + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) (A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t) - \\ - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} (A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t) = 0.$$

Identificând coeficienții funcțiilor trigonometrice  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$  din cei doi membri ai ecuațiilor de mai sus obținem:

$$\left[ -\omega^2 + \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) \right] A_1 - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} A_2 = 0, \\ \left[ -\omega^2 + \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) \right] B_1 - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} B_2 = 0$$

și respectiv

$$\left[ -\omega^2 + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) \right] A_2 - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} A_1 = 0, \\ \left[ -\omega^2 + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) \right] B_2 - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} B_1 = 0.$$

Pentru ca sistemul alcătuit din cele două ecuații algebrice de mai sus în necunoscutele  $A_1$  și  $A_2$  să aibă soluție netrivială, trebuie ca determinantul caracteristic al acestui sistem să se anuleze:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) & -\frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \\ -\frac{kh^2}{m_2 l_2^2} & -\omega^2 + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

adică,

$$\left[ -\bar{\omega}^2 + \left( \frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \right) \right] \left[ -\bar{\omega}^2 + \left( \frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} \right) \right] - \frac{k^2 h^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} = 0,$$

care este chiar ecuația caracteristică (6.100). În planul  $(k, \bar{\omega}^2)$  aceasta reprezintă o hiperbolă ale cărei ramuri, ce corespund valorilor cu semnificație fizică a celor două mărimi (având în vedere că  $k \in [0, \infty)$ ), sunt reprezentate în Fig. VI.16. Pentru a realiza această reprezentare grafică am utilizat soft-ul Mathematica 4.0 și următoarele valori numerice pentru mărimile care intervin:  $l_1 = 0,5$ ;  $l_2 = 0,3$ ;  $m_1 = 0,2$ ;  $m_2 = 0,3$ ;  $h = 0,1$ ;  $g = 10$ .

După cum foarte simplu se poate constata, cu notațiile deja utilizate (vezi relațiile (6.74) și (6.75)),

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l_{1,2}} + \frac{kh^2}{m_{1,2} l_{1,2}^2}$$

și

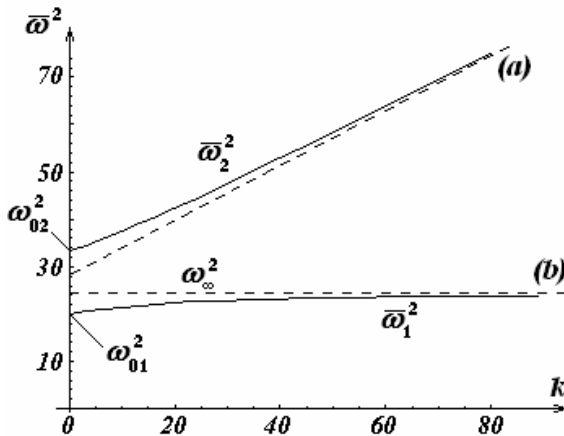


Fig. VI.16

$$\kappa = \frac{kh^2}{l_1 l_2 \sqrt{m_1 m_2}},$$

ecuația (6.100) capătă forma

$$(\varpi^2 - \omega_1^2)(\varpi^2 - \omega_2^2) - \kappa^2 = 0$$

și are soluțiile (determinate deja pe altă cale; vezi relațiile (6.80) și (6.81)):

$$\varpi_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 / 4}$$

și

$$\varpi_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 / 4}.$$

Pentru  $k$  mic și/sau foarte mic (resort slab,  $k \rightarrow 0$ ), pulsațiile normale  $\varpi_1^2$  și  $\varpi_2^2$  tind către pulsațiile pendulelor libere,  $\omega_{01}^2 = \frac{g}{l_1}$  și

$\omega_{02}^2 = \frac{g}{l_2}$ . Într-adevăr, trecând la limita  $k \rightarrow 0$  în ecuația (6.100), aceasta devine

$$(\varpi^2 - \omega_{01}^2)(\varpi^2 - \omega_{02}^2) = 0,$$

cu soluțiile evidente  $\varpi_1^2 = \omega_{01}^2$  și  $\varpi_2^2 = \omega_{02}^2$ .

Pentru  $k$  mare și/sau foarte mare (resort puternic,  $k \rightarrow \infty$ ), pulsația normală  $\varpi_2^2$  tinde la infinit ca

$$\left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \omega_{e1}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \omega_{e2}^2, \tag{6.101}$$

(„asimptota” (a) din Fig. VI.16). Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varpi_2^2}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 / 4}}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega_{01}^2 + \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} + \omega_{02}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2}}{2k} + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} + \frac{1}{4} \left[ \omega_{02}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2} - \omega_{01}^2 - \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} \right]^2}}{k} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{1}{2m_1} + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{1}{2m_2} + \sqrt{\left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{1}{m_1 m_2} + \left[\left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{1}{2m_2} - \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{1}{2m_1}\right]^2} = \\
&= \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{1}{2m_1} + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{1}{2m_2} + \sqrt{\left[\left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{1}{2m_2} + \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{1}{2m_1}\right]^2} = \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{1}{m_1} + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{1}{m_2},
\end{aligned}$$

de unde,

$$\varpi_2^2 \stackrel{k \rightarrow \infty}{=} k\alpha = \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2} = \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \omega_{e1}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \omega_{e2}^2,$$

adică relația (6.101), iar cealaltă pulsație,  $\varpi_1^2$ , tinde la pulsația unui pendul care are două mase,  $m_1$  și  $m_2$ , pe aceeași tijă ideală, la distanțele  $l_1$  și  $l_2 < l_1$  (conform presupunerii de mai sus) de punctul de susținere (vezi Fig. VI.17), („asimptota” (b) din Fig. VI.16):

$$\varpi_1^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \omega_\infty^2 = g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}. \quad (6.102)$$

Într-adevăr, împărțind la  $k$  ecuația (6.100) și trecând apoi la limita  $k \rightarrow \infty$  obținem succesiv

$$\frac{1}{k} \left\{ \left[ \varpi^2 - \frac{g}{l_1} - \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} \right] \left[ \varpi^2 - \frac{g}{l_2} - \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2} \right] - \left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} \right\} = 0,$$

sau,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k} \left\{ \varpi^4 - \varpi^2 \left[ \frac{g}{l_1} + \frac{g}{l_2} + \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2} \right] + \frac{g}{l_1} \left[ \frac{g}{l_2} + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{g}{l_2} \left[ \frac{g}{l_1} + \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} \right] + \left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} - \left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

sau,

$$\frac{1}{k} \left\{ \varpi^4 - \varpi^2 \left( \frac{g}{l_1} + \frac{g}{l_2} \right) - \varpi^2 \left[ \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{k}{m_1} + \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{k}{m_2} \right] + \frac{g}{l_1} \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{k}{m_2} + 2 \frac{g^2}{l_1 l_2} + \frac{g}{l_2} \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{k}{m_1} \right\} = 0,$$

sau încă,

$$\frac{\varpi^4}{k} - \frac{\varpi^2}{k} \left( \frac{g}{l_1} + \frac{g}{l_2} \right) - \varpi^2 \left[ \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{1}{m_1} + \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{1}{m_2} \right] + \frac{g}{l_1} \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{1}{m_2} + \frac{2}{k} \frac{g^2}{l_1 l_2} + \frac{g}{l_2} \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{1}{m_1} = 0,$$

care, atunci când  $k \rightarrow \infty$  devine

$$-\varpi_\infty^2 \left[ \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{1}{m_1} + \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{1}{m_2} \right] + \frac{g}{l_1} \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{1}{m_2} + \frac{g}{l_2} \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{1}{m_1} = 0, \quad (6.103)$$

de unde,

$$\varpi_\infty^2 = \frac{\frac{g}{l_1} \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{1}{m_2} + \frac{g}{l_2} \left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{1}{m_1}}{\left( \frac{h}{l_1} \right)^2 \frac{1}{m_1} + \left( \frac{h}{l_2} \right)^2 \frac{1}{m_2}} = g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \equiv \omega_\infty^2,$$

adică exact relația (6.102). Faptul că relația (6.102) exprimă pulsația pendulului din Fig. VI.17 rezultă simplu astfel<sup>16</sup>:

Deoarece ambele corpuri se află pe aceeași tijă rigidă și de masă nulă, acestea au aceeași coordonată unghiulară  $\theta$ . Deci, sistemul are un singur grad de libertate, căruia îi asociem coordonata generalizată  $\theta$ . Să deducem funcția lui Lagrange a sistemului din Fig. VI.17.

Întrucât

<sup>16</sup> Nu vom mai parcurge toate etapele algoritmului de rezolvare a unei probleme prin intermediul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, multe etape fiind subînțelese aici.

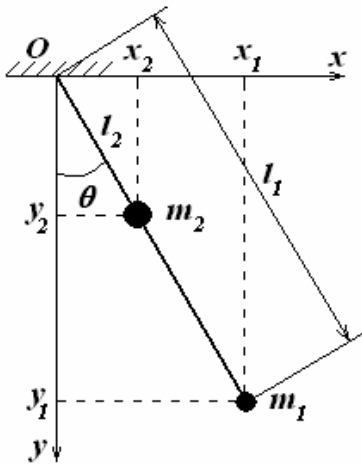


Fig. VI.17

$$\begin{cases} x_i = l_i \sin \theta, \\ y_i = l_i \cos \theta, \end{cases} \quad (i=1, 2),$$

și

$$\begin{cases} \dot{x}_i = l_i \dot{\theta} \cos \theta, \\ y_i = -l_i \dot{\theta} \sin \theta, \end{cases} \quad (i=1, 2),$$

pentru energia cinetică avem

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \end{aligned} \quad (6.104)$$

iar în ceea ce privește energia potențială avem,

$$dV = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dy_1 - m_2 g dy_2,$$

de unde, alegând ca nivel de referință pentru energia potențială planul  $xOz$  (adică  $y_1 = 0, y_2 = 0$ ), obținem

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos \theta - m_2 g l_2 \cos \theta = -g \cos \theta (m_1 l_1 + m_2 l_2), \quad (6.105)$$

constanta arbitrară de integrare fiind determinată de alegerea nivelului de referință pentru energia potențială:  $V(y_1 = 0, y_2 = 0) = 0$ . Atunci, funcția lui Lagrange va fi

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) + g (m_1 l_1 + m_2 l_2) \cos \theta, \quad (6.106)$$

iar ecuația Lagrange de speța a II-a,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (6.107)$$

ținând cont că

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \ddot{\theta} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g (m_1 l_1 + m_2 l_2) \sin \theta,$$

se scrie

$$\ddot{\theta} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) + g (m_1 l_1 + m_2 l_2) \sin \theta = 0 \quad (6.108)$$

și reprezintă ecuația diferențială a mișcării sistemului. Se observă că, în limita micilor oscilații ( $\sin \theta \cong \theta$ ) (când ecuația se mai scrie

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0, \quad (6.109)$$

unde am utilizat notația

$$\Omega^2 = g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \equiv \omega_\infty^2),$$

acest sistem se comportă ca un pendul simplu a cărui pulsație este

$$\Omega = \sqrt{g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} = \omega_\infty. \quad (6.110)$$

## 6. Problema a trei pendule identice cuplate

Se consideră trei pendule simple identice (vezi Fig. VI.18), fiecare având lungimea  $l$  și masa  $m$ . Pendulele sunt legate prin două resorturi identice de masă neglijabilă, netensionate când pendulele sunt în echilibru ( $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ ) și aflate la distanța  $h$  față de articulațiile tijelor, ca în Fig. VI.18. Să se scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului și să se determine soluțiile acestora în cazul micilor oscilații.

### Rezolvare

Și în acest caz sistemul este unul natural, deoarece, atât câmpul gravitațional, cât și câmpul forțelor elastice sunt câmpuri potențiale de forță.

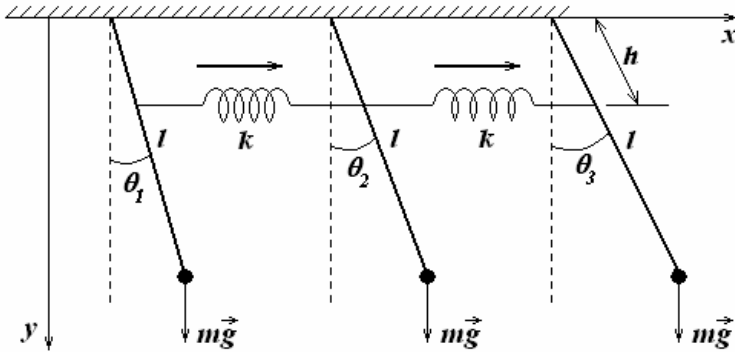


Fig. VI.18

Presupunând că mișcarea corpurilor are loc în planul  $xOy$  ( $z=0$ ), ecuațiile legăturilor care „afectează” această mișcare sunt:

$$f_1(z_1) = z_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l^2 = 0,$$

$$f_3(z_2) = z_2 = 0,$$

$$f_4(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - l^2 = 0,$$

$$f_5(z_3) = z_3 = 0,$$

$$f_6(x_3, y_3) = x_3^2 + y_3^2 - l^2 = 0,$$

unde, am considerat câte un sistem de referință pentru fiecare pendul în parte, cu axa  $Ox$  comună, dar cu originile în puncte diferite (în cele trei puncte de suspensie).

Rezultă că sistemul are  $3 \cdot 3 - 6 = 3$  grade de libertate, cărora le vom asocia ca și coordonate generalizate, unghiurile  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  și  $\theta_3$  făcute de cele trei tije ideale (rigide și de masă neglijabilă) cu verticala.

Energia cinetică a sistemului va fi

$$\begin{aligned}
 T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_3|^2 = \\
 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2).
 \end{aligned}$$

Deoarece

$$x_i = l \sin \theta_i, \quad y_i = l \cos \theta_i, \quad (i = \overline{1,3}),$$

expresia energiei cinetice devine

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) = \\
 &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2).
 \end{aligned}$$

Energia potențială are două „componente”, una gravitațională și una elastică,  $V = V_g + V_e$ . În ceea ce privește partea de origine gravitațională, putem scrie

$$dV_g = -dA_g = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 - \vec{G}_3 \cdot d\vec{r}_3 = -mgdy_1 - mgdy_2 - mgdy_3,$$

deci,

$$V_g = -mgy_1 - mgy_2 - mgy_3 + V_{g0},$$

unde constanta arbitrară de integrare  $V_{g0}$  poate fi luată zero, dacă alegem ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională planul  $xOz$ . Într-adevăr,

$$V_g(y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0) = 0 \Rightarrow V_{g0} = 0.$$

Rezultă astfel că

$$\begin{aligned}
 V_g &= -mgy_1 - mgy_2 - mgy_3 = -mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2 - mgl \cos \theta_3 = \\
 &= -mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3).
 \end{aligned}$$

Pentru partea de origine elastică avem

$$dV_e = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -(-k\vec{x} \cdot d\vec{x}) = kx dx,$$

de unde,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 + V_{e0},$$

în care constanta arbitrară de integrare  $V_{e0}$  poate fi considerată nulă dacă se alege ca „nivel” de referință pentru energia potențială elastică starea inițială, în care deformația resorturilor este zero:

$$V_e(x=0) = 0 \Rightarrow V_{e0} = 0.$$

Atunci, energia potențială elastică totală (a celor două resorturi) va fi

$$V_e = V_{e1} + V_{e2} = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 \equiv \frac{1}{2} k(\Delta x_1)^2 + \frac{1}{2} k(\Delta x_2)^2,$$

deoarece, alegând „nivelurile de referință” pentru energia potențială elastică a celor două resorturi chiar stările inițiale, variabila generică  $x$  din expresia lui  $V_e$  va reprezenta chiar deformările  $\Delta x_i$ , ( $i=1, 2$ ) ale celor două resorturi (cu cât s-au alungit, ori s-au comprimat resorturile). Din Fig. VI.18 se observă că

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = h(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

și

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 = h(\sin \theta_3 - \sin \theta_2).$$

Ținând cont de formula trigonometrică

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$V_e$  devine

$$V_e = \frac{1}{2} kh^2 \left[ 4 \sin^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right] + \\ + \frac{1}{2} kh^2 \left[ 4 \sin^2\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right) \right].$$

Deoarece au apărut deja termeni de ordinul doi, vom utiliza ipoteza micilor oscilații, în care

$$\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)^3 \cong \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \\ \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^4 \cong 1,$$

$$\sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) = \frac{\theta_3 - \theta_2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right)^3 \cong \frac{\theta_3 - \theta_2}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right)^4 \cong 1$$

și atunci  $V_e$  devine

$$V_e = \frac{1}{2}kh^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2}kh^2(\theta_3 - \theta_2)^2 = \frac{1}{2}kh^2\left[(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2\right].$$

Energia potențială totală a sistemului este

$$V = V_g + V_e = -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3) + \frac{1}{2}kh^2\left[(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2\right],$$

iar funcția Lagrange a sistemului se scrie astfel:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3) - \frac{1}{2}kh^2\left[(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2\right].$$

Având în vedere că

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = ml^2\dot{\theta}_i, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) = ml^2\ddot{\theta}_i, \quad (i = \overline{1,3})$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -mgl \sin \theta_1 + kh^2(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -mgl \sin \theta_2 - kh^2(\theta_2 - \theta_1) + kh^2(\theta_3 - \theta_2) = \\ &= -mgl \sin \theta_2 - 2kh^2\theta_2 + kh^2(\theta_1 + \theta_3), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -mgl \sin \theta_3 - kh^2(\theta_3 - \theta_2),$$

ecuațiile Lagrange de speța a II-a,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = \overline{1,3})$$

devin



$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl \sin \theta_1 - kh^2(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl \sin \theta_2 + 2kh^2\theta_2 - kh^2(\theta_1 + \theta_3) = 0$$

și

$$ml^2\ddot{\theta}_3 + mgl \sin \theta_3 + kh^2(\theta_3 - \theta_2) = 0,$$

sau, în ipoteza micilor oscilații ( $\sin \theta_i \cong \theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ),

$$\ddot{\theta}_1 + \left( \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \theta_1 - \frac{kh^2}{ml^2} \theta_2 = 0, \quad (6.111)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \left( \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) \theta_2 - \frac{kh^2}{ml^2} (\theta_1 + \theta_3) = 0 \quad (6.112)$$

și

$$\ddot{\theta}_3 + \left( \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \theta_3 - \frac{kh^2}{ml^2} \theta_2 = 0. \quad (6.113)$$

Întrucât sistemul efectuează oscilații mici, vom căuta soluții de forma

$$\theta_i = A_i \sin \omega t + B_i \cos \omega t. \quad (6.114)$$

Impunând ca aceste soluții să verifice ecuațiile diferențiale (6.111) ÷ (6.113) ale mișcării sistemului, obținem

$$-\omega^2 A_1 \sin \omega t - \omega^2 B_1 \cos \omega t + \left( \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_1 \sin \omega t + \left( \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_1 \cos \omega t - \\ - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 \sin \omega t - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 \cos \omega t = 0,$$

$$-\omega^2 A_2 \sin \omega t - \omega^2 B_2 \cos \omega t + \left( \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) A_2 \sin \omega t + \left( \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_2 \cos \omega t - \\ - \frac{kh^2}{ml^2} A_1 \sin \omega t - \frac{kh^2}{ml^2} B_1 \cos \omega t - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 \sin \omega t - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 \cos \omega t = 0$$

și

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 A_3 \sin \omega t - \omega^2 B_3 \cos \omega t + \left( \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_3 \sin \omega t + \left( \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_3 \cos \omega t - \\
 & \quad - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 \sin \omega t - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 \cos \omega t = 0.
 \end{aligned}$$

Identificând coeficienții funcțiilor trigonometrice  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$  din cei doi membri ai relațiilor de mai sus obținem,

$$\left( -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 = 0, \quad (6.115)$$

$$\left( -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 = 0, \quad (6.116)$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2} A_1 + \left( -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) A_2 - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 = 0, \quad (6.117)$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2} B_1 + \left( -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_2 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = 0, \quad (6.118)$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2} A_2 + \left( -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_3 = 0 \quad (6.119)$$

și

$$-\frac{kh^2}{ml^2} B_2 + \left( -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_3 = 0. \quad (6.120)$$

Pentru ca sistemul format din relațiile (6.115), (6.117) și (6.119) să fie compatibil trebuie ca

$$\begin{vmatrix}
 -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} & -\frac{kh^2}{ml^2} & 0 \\
 -\frac{kh^2}{ml^2} & -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} & -\frac{kh^2}{ml^2} \\
 0 & -\frac{kh^2}{ml^2} & -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}
 \end{vmatrix} = 0,$$

adică,

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) - 2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) = 0,$$

sau,

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)\left[\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) - 2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2\right] = 0.$$

Această ecuație este satisfăcută dacă

$$-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} = 0,$$

cu soluția

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \quad (6.121)$$

sau dacă

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right) = 2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2,$$

adică,

$$\omega^4 - 2\omega^2\left(\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{2ml^2}\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right) - 2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2 = 0,$$

care este o ecuație de gradul doi în  $\omega^2$ . Soluțiile ei sunt

$$\begin{aligned} \omega_{2,3}^2 &= \frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{2ml^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{2ml^2}\right)^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right) + 2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2} = \\ &= \frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{2ml^2} \pm \sqrt{\frac{9k^2h^4}{4m^2l^4}} = \frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{2ml^2} \pm \frac{3kh^2}{2ml^2}, \end{aligned}$$

adică,

$$\omega_2^2 \equiv \omega_M^2 = \frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2} \quad (6.122)$$

și

$$\omega_3^2 \equiv \omega_m^2 = \frac{g}{l}. \quad (6.123)$$

Aceleași valori ale frecvențelor se obțin folosind sistemul ecuațiilor rămase, (6.116), (6.118) și (6.120) în necunoscutele  $B_1$ ,  $B_2$  și  $B_3$ . Lăsăm cititorul să se convingă singur de aceasta.

Așadar, schimbând numerotarea (arbitrară) făcută mai sus, cele trei frecvențe normale ale sistemului de trei pendule identice cuplate, în cazul analizat, sunt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}} \quad \text{și} \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}}. \quad (6.124)$$

Înlocuind pe  $\omega_1^2$  din (6.124) în ecuația (6.115) obținem:

$$\left(-\omega_1^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1 - \frac{kh^2}{ml^2}A_2 = \left(-\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1 - \frac{kh^2}{ml^2}A_2 = 0,$$

sau,

$$\frac{kh^2}{ml^2}A_1 = \frac{kh^2}{ml^2}A_2,$$

de unde,

$$A_2 = A_1. \quad (6.125)$$

Substituind acum pe  $\omega_1^2$  din (6.124) în ecuația (6.116), obținem

$$B_2 = B_1. \quad (6.126)$$

Într-o manieră asemănătoare, cu  $\omega_1^2$  din (6.124) în ecuația (6.117) avem

$$\begin{aligned} & -\frac{kh^2}{ml^2}A_1 + \left(-\omega_1^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2 - \frac{kh^2}{ml^2}A_3 = \\ & = -\frac{kh^2}{ml^2}A_1 + \left(-\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2 - \frac{kh^2}{ml^2}A_3 = 0, \end{aligned}$$

de unde, utilizând (6.125), rezultă că

$$A_3 = A_2 = A_1. \quad (6.127)$$

În fine, înlocuind pe  $\omega_1^2$  din (6.124) în relația (6.118) și utilizând (6.126), se obține

$$\begin{aligned}
 & -\frac{kh^2}{ml^2} B_1 + \left( -\omega_1^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_2 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = \\
 & = -\frac{kh^2}{ml^2} B_1 + \left( -\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_2 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = 0,
 \end{aligned}$$

adică,

$$B_3 = B_2 = B_1. \quad (6.128)$$

Reluând aceleași calcule cu  $\omega_2^2$  dat de (6.124) în locul lui  $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$  din aceeași relație, avem (utilizând relația (6.115)):

$$\left( -\omega_2^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 = \left( -\frac{g}{l} - \frac{kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 = 0,$$

de unde,

$$A_2 = 0. \quad (6.129)$$

Apoi, cu  $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}$  din (6.124) în (6.116) găsim

$$\left( -\omega_2^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 = \left( -\frac{g}{l} - \frac{kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 = 0,$$

adică

$$B_2 = 0. \quad (6.130)$$

La fel, cu  $\omega_2^2$  din relația (6.124) în (6.117) și utilizând (6.129) obținem

$$\begin{aligned}
 & -\frac{kh^2}{ml^2} A_1 + \left( -\omega_2^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) A_2 - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 = \\
 & = -\frac{kh^2}{ml^2} A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 = 0,
 \end{aligned}$$

de unde,

$$A_3 = -A_1. \quad (6.131)$$

În mod asemănător, cu  $\omega_2^2$  din relația (6.124) în relația (6.118) și făcând uz de relația (6.130) găsim că

$$\begin{aligned}
 & -\frac{kh^2}{ml^2} B_1 + \left( -\omega_2^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_2 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = \\
 & = -\frac{kh^2}{ml^2} B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = 0,
 \end{aligned}$$

adică,

$$B_3 = -B_1. \quad (6.132)$$

În sfârșit, reluând calculele pentru cea de-a treia frecvență din relația (6.124),  $\omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}$  obținem succesiv:

- din relația (6.115):

$$\left( -\omega_3^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 = \left( -\frac{g}{l} - \frac{3kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 = 0,$$

adică,

$$A_2 = -2A_1; \quad (6.133)$$

- din relația (6.116):

$$\left( -\omega_3^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 = \left( -\frac{g}{l} - \frac{3kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 = 0,$$

adică,

$$B_2 = -2B_1; \quad (6.134)$$

- din relația (6.117), utilizând și rezultatul (6.133):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{kh^2}{ml^2} A_1 + \left( -\omega_3^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) A_2 - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 = \\
 & = -\frac{kh^2}{ml^2} A_1 - 2 \left( -\frac{g}{l} - \frac{3kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 = 0,
 \end{aligned}$$

adică,

$$A_3 = A_1; \quad (6.135)$$

- din relația (6.118), făcând apel și la rezultatul (6.134):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{kh^2}{ml^2} B_1 + \left( -\omega_3^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_2 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = \\
 & = -\frac{kh^2}{ml^2} B_1 - 2 \left( -\frac{g}{l} - \frac{3kh^2}{ml^2} + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} \right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = 0,
 \end{aligned}$$

de unde,

$$B_3 = B_1. \quad (6.136)$$

Relațiile (6.119) și (6.120) se verifică în mod identic în toate cele trei cazuri, fiind compatibile cu rezultatele găsite în fiecare situație în parte. Verificarea acestui lucru o lăsăm în seama cititorului.

Ținând cont că sistemul are trei frecvențe de oscilație, soluțiile ecuațiilor diferențiale ale mișcării celor trei pendule cuplate se vor scrie ca o superpoziție a celor trei moduri de oscilație. Având în vedere relațiile (6.114) și (6.125) ÷ (6.136), pentru  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  și  $\theta_3$  putem scrie atunci,

$$\begin{cases}
 \theta_1 = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t + C \sin \omega_2 t + D \cos \omega_2 t + E \sin \omega_3 t + F \cos \omega_3 t, \\
 \theta_2 = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t - 2E \sin \omega_3 t - 2F \cos \omega_3 t, \\
 \theta_3 = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t - C \sin \omega_2 t - D \cos \omega_2 t + E \sin \omega_3 t + F \cos \omega_3 t,
 \end{cases} \quad (6.137)$$

sau,

$$\begin{cases}
 \theta_1 = K_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + K_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + K_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3), \\
 \theta_2 = K_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - 2K_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3), \\
 \theta_3 = K_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - K_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + K_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3),
 \end{cases} \quad (6.138)$$

sau încă, sub formă matricială,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} &= K_1 \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha_1 \right) + K_2 \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}} t + \alpha_2 \right) + \\
 &+ K_3 \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +1 \end{pmatrix} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}} t + \alpha_3 \right),
 \end{aligned} \quad (6.139)$$

unde constantele arbitrare de integrare  $A, B, C, D, E, F$ , respectiv  $K_i$  și  $\alpha_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) se determină din cele șase condiții inițiale,

$$\theta_i(t=0) = \theta_{0i}, \dot{\theta}_i(t=0) = \dot{\theta}_{0i}, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (6.140)$$

## 7. Problema pendulului gravitațional dublu

Să se studieze mișcarea unui pendul gravitațional dublu format din două corpuri (puncte materiale) de mase  $m_1$  și  $m_2$ , lungimile tijelor ideale (de masă nulă și cu articulații fără frecare) fiind  $l_1$  și respectiv  $l_2$ .

### Rezolvare

Să identificăm mai întâi legăturile la care este supus sistemul.

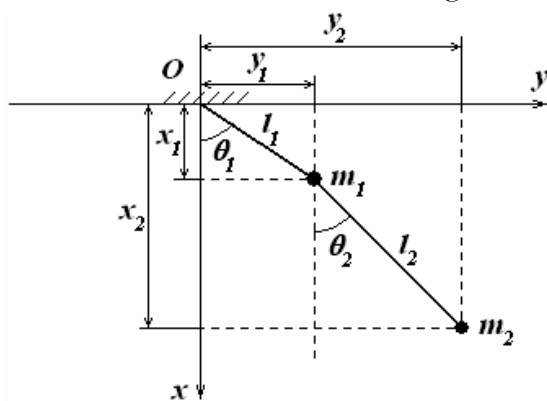


Fig. VI.19

Întrucât presupunem mișcarea plană (considerând doar condiții inițiale corespunzătoare) și ținând cont de Fig. VI.19, putem scrie:

$$f_1(z_1) = z_1 = \text{const.}_1 (= 0),$$

$$f_2(z_2) = z_2 = \text{const.}_2 (= 0),$$

$$f_3(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

și

$$f_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0.$$

În concluzie, sistemul este supus la patru legături olonome (bilaterale, scleronome și finite) și are  $3 \cdot 2 - 4 = 2$  grade de libertate. Asociem acestor două grade de libertate coordonatele generalizate  $\theta_1$  și  $\theta_2$  – unghiurile făcute de cele două tije cu verticala descendentă. Singurele forțe aplicate sistemului sunt cele două forțe de greutate ale corpurilor. Câmpul gravitațional fiind unul potențial (chiar conservativ) rezultă că



sistemul este unul natural. Pentru a determina funcția Lagrange a sistemului trebuie să aflăm potențialul (energia potențială a) sistemului și energia lui cinetică.

Conform celor discutate în cadrul problemei pendulului simplu, avem

$$dV = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dx_1 - m_2 g dx_2,$$

de unde,

$$V = -g(m_1 x_1 + m_2 x_2) + V_0,$$

constanta arbitrară de integrare  $V_0$  determinându-se prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială. Evident, cel mai convenabil este ca  $V_0 = 0$ . Acest lucru este cu puțință, dacă alegem nivelul de referință pentru  $V$  ca fiind planul  $yOz$ . Într-adevăr,

$$V(x_1 = 0, x_2 = 0) = 0 \Rightarrow V_0 = 0.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} V &= -g(m_1 x_1 + m_2 x_2) = -g[m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)] = \\ &= -gl_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Deoarece, din Fig. VI.19 avem,

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1, \\ y_1 = l_1 \sin \theta_1, \end{cases} \text{ deci, } \begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \\ \dot{y}_1 = +l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \end{cases} \text{ deci, } \begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2, \\ \dot{y}_2 = +l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \end{cases}$$

energia cinetică a sistemului este

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)] = \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] = \\ &= \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (6.142)$$

Funcția Lagrange a sistemului va fi atunci:

$$L = T - V = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + gl_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (6.143)$$

și, deoarece nu depinde explicit de timp, rezultă că ecuațiile Lagrange de speța a II-a admit integrala primă a energiei (energia totală a sistemului se conservă),

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \dot{\theta}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - L = const. \quad (6.144)$$

Ecuațiile Lagrange de speța a II-a corespunzătoare celor două coordonate generalizate sunt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (6.145)$$

și

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \quad (6.145')$$

Efectuând derivatele corespunzătoare,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \\ &- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \\ &+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g l_2 \sin \theta_2,$$

ecuațiile Lagrange (6.145, 6.145') se scriu astfel:

$$l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (6.146)$$

și

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (6.146')$$

Ecuațiile (6.146) și (6.146') reprezintă totodată și ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului. Rezolvarea analitică a acestora în cazul cel mai general nu este posibilă. De aceea, de obicei se recurge la abordarea cazurilor limită mai importante. În primul rând, cel mai adesea se studiază cazul oscilațiilor mici, când, ținând cont de aproximațiile

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1 \quad \text{și} \quad \cos \theta_i \cong 1 - \frac{\theta_i^2}{2}, \quad (i = 1, 2),$$

funcția Lagrange (6.143) devine

$$L = T - V = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} g l_1 (m_1 + m_2) \theta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2, \quad (6.147)$$

unde am omis termenii constanți  $g l_1 (m_1 + m_2)$  și  $g m_2 l_2$  (lagrangeeni echivalenți).

În cele ce urmează ne vom restrânge atenția asupra cazului particular  $l_1 = l_2 = l$ . Luând drept coordonate ale micilor oscilații

$$\xi_1 = \sqrt{m_1} l \theta_1 \quad \text{și} \quad \xi_2 = \sqrt{m_2} l (\theta_1 + \theta_2),$$

ceea ce înseamnă că  $\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}}$  și

$$\theta_2 = \frac{\xi_2}{l\sqrt{m_2}} - \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}},$$

lagrangeanul micilor oscilații (6.147) devine

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{1}{2} \frac{g}{l} \left[ \left( 1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \right) \xi_1^2 + \xi_2^2 \right] + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \frac{g}{l} \xi_1 \xi_2, \quad (6.148)$$

adică lagrangeanul (6.76) din problema cinci, cu

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \left( 1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} \quad (6.149)$$

și

$$\kappa = \frac{g}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (6.150)$$

Pulsațiile normale (ale modurilor normale) se obțin făcând înlocuirile corespunzătoare în relațiile (6.80) și (6.81) din aceeași problemă. Rezultă:

$$\varpi_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)/4} = \frac{g}{l} \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) \right] \quad (6.151)$$

și

$$\varpi_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{\kappa^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)/4} = \frac{g}{l} \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) \right]. \quad (6.152)$$

Analizei generale în raport cu  $\omega_1$  și  $\kappa$  la  $\omega_2$  fixat din problema amintită îi corespunde acum dependența de raportul  $\frac{m_2}{m_1}$ . Vom considera

în cele ce urmează doar cazurile limită mai importante:  $\frac{m_2}{m_1} \ll 1$ ,  $\frac{m_2}{m_1} \gg 1$  și

$m_1 = m_2$ . Într-adevăr, după cum am văzut în problema cinci, condiția de „cuplaj slab” (când oscilațiile sunt localizate),  $\kappa \ll |\omega_2^2 - \omega_1^2|$ , înseamnă acum:

$$\frac{g}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ll \left| 2 \frac{g}{l} \frac{m_2}{m_1} \right| \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg 1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} \gg 1,$$

iar condiția de „cuplaj tare” (când oscilațiile nu mai sunt localizate),  $\kappa \gg |\omega_2^2 - \omega_1^2|$ , devine acum:

$$\frac{g}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg \left| 2 \frac{g}{l} \frac{m_2}{m_1} \right| \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} \ll 1.$$

- 1) În cazul  $\frac{m_2}{m_1} \ll 1$ , oscilațiile fiind nelocalizate, conform analizei generale efectuate în problema cinci, avem

$$\xi_1 \cong \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad \xi_2 \cong \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}}, \quad (6.153)$$

$\eta_i$ , ( $i=1, 2$ ) fiind coordonatele normale, deci pentru care putem scrie

$$\eta_i = A_i \cos(\varpi_i t + \psi_i), \quad (i=1, 2), \quad (6.154)$$

unde  $A_i$  și  $\psi_i$ , ( $i=1, 2$ ) sunt constante arbitrare, determinabile din condițiile inițiale. Într-adevăr, pentru  $\text{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}$  avem:

$$\text{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} = \frac{-2 \frac{g}{l} \frac{m_2}{m_1}}{2 \frac{g}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}} = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (\rightarrow 0 \text{ prin valori negative),}$$

ceea ce înseamnă că  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}$  (prin valori mai mari ca  $\frac{\pi}{4}$ ), deci relațiile (6.78) din problema cinci cu notațiile de aici, adică

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi, \\ \xi_2 = \eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi, \end{cases}$$

conduc imediat la (6.153). Până la termeni de ordinul întâi în  $\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ ,  $\varpi_i$ , ( $i=1, 2$ ) din relațiile (6.154), sunt date de

$$\varpi_{1,2} = \omega_0 \left( 1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) = \omega_0 \mp \gamma, \quad (6.155)$$

cu  $\gamma = \omega_0 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ll \omega_0$  și  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ . Într-adevăr, cu notația  $z = \overset{\text{not.}}{\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}$ ,

paranteza pătrată din expresia lui  $\varpi_1^2$ ,  $\left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) \right]$ , se scrie

$\left[ 1 + z^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right) \right]$  și atunci

$$\varpi_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + z^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right)} = \omega_0 \sqrt{1 + z^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right)}.$$

Ținând cont de aproximația  $\sqrt{1 \pm \zeta} \cong 1 \pm \frac{\zeta}{2}$  (ne oprim doar la termenii de ordinul întâi în  $z$ ) avem

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + z^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right)} &= \sqrt{1 + z^2 - \sqrt{z^4 + z^2}} = \sqrt{1 + z^2 - z\sqrt{z^2 + 1}} \cong \\ &\cong \sqrt{1 + z^2 - z \left( 1 + \frac{z^2}{2} \right)} = \sqrt{1 + z^2 - z - \frac{z^3}{2}} \cong \sqrt{1 - z} \cong 1 - \frac{z}{2} \end{aligned}$$

și atunci

$$\varpi_1 \cong \omega_0 \left( 1 - \frac{z}{2} \right) = \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right). \quad (6.156)$$

În mod cu totul asemănător se arată faptul că

$$\varpi_2 \cong \omega_0 \left( 1 + \frac{z}{2} \right) = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right). \quad (6.157)$$

Presupunând că în momentul inițial pendulele sunt în repaus ( $\dot{\theta}_1(t_0=0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_2(t_0=0) = 0$ ) și doar pendulul de masă  $m_2$  este scos din poziția de echilibru ( $\theta_1(t_0=0) = 0$ ,  $\theta_2(t_0=0) = \theta_0$ ), avem:

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1 - \eta_2}{l\sqrt{2m_1}} = \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \left[ A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) - A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2) \right] \quad (6.158)$$

și

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \frac{\xi_2}{l\sqrt{m_2}} - \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1 + \eta_2}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{\eta_1 - \eta_2}{l\sqrt{2m_1}} = \left( \frac{1}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \right) \eta_1 + \\ & + \left( \frac{1}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \right) \eta_2 = \left( \frac{1}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \right) A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) + \\ & + \left( \frac{1}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \right) A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{aligned} \quad (6.159)$$

unde constantele arbitrare  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\psi_1$  și  $\psi_2$  se determină din condițiile inițiale. Având în vedere că

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} [\varpi_2 A_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2) - \varpi_1 A_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1)]$$

și

$$\dot{\theta}_2 = \left( \frac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_1}} - \frac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_2}} \right) A_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) - \left( \frac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_1}} \right) A_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2)$$

impunerea condițiilor inițiale conduce la următorul sistem algebric de ecuații în constantele arbitrare amintite mai sus:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} (A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2), \\ \theta_0 &= \left( \frac{1}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \right) A_1 \cos \psi_1 + \left( \frac{1}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} \right) A_2 \cos \psi_2, \\ 0 &= \frac{1}{l\sqrt{2m_1}} (\varpi_2 A_2 \sin \psi_2 - \varpi_1 A_1 \sin \psi_1), \\ 0 &= \left( \frac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_1}} - \frac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_2}} \right) A_1 \sin \psi_1 - \left( \frac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_1}} \right) A_2 \sin \psi_2. \end{aligned} \right.$$

Din ecuația a treia a acestui sistem rezultă că  $\varpi_1 A_1 \sin \psi_1 = \varpi_2 A_2 \sin \psi_2$ . Utilizând această egalitate în ultima ecuație a sistemului obținem că  $\psi_1 = 0$  și  $\psi_2 = 0$ . Cu acest rezultat în prima ecuație a sistemului găsim că  $A_1 = A_2$  care, utilizată în ecuația a doua a sistemului conduce la  $A_1 = A_2 = \frac{l \theta_0 \sqrt{m_2}}{\sqrt{2}}$ .

Atunci,

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1 - \eta_2}{l\sqrt{2m_1}} = \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} (\cos \varpi_1 t - \cos \varpi_2 t)$$

și

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \left( \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \cos \varpi_1 t + \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \cos \varpi_2 t = \\ &= \frac{\theta_0}{2} (\cos \varpi_1 t + \cos \varpi_2 t) + \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} (\cos \varpi_2 t - \cos \varpi_1 t). \end{aligned}$$

Utilizând cunoscutele identități trigonometrice

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}, \end{aligned} \tag{6.160}$$

expresiile coordonatelor unghiulare  $\theta_1$  și  $\theta_2$  devin

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} (\cos \varpi_1 t - \cos \varpi_2 t) = \theta_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin \frac{(\varpi_2 - \varpi_1)t}{2} \sin \frac{(\varpi_1 + \varpi_2)t}{2} = \\ &= \theta_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \sin \omega_0 t = \theta_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin \omega_0 t \sin \gamma t \end{aligned}$$

și



$$\begin{aligned}\theta_2 &= \frac{\theta_0}{2}(\cos \varpi_1 t + \cos \varpi_2 t) + \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} (\cos \varpi_2 t - \cos \varpi_1 t) = \\ &= \theta_0 \cos \omega_0 t \cos \gamma t + \theta_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cos \omega_0 t \cos \gamma t = \theta_0 \left(1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right) \cos \omega_0 t \cos \gamma t \cong \\ &\cong \theta_0 \cos \omega_0 t \cos \gamma t.\end{aligned}$$

Relațiile obținute,

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin \omega_0 t \sin \gamma t, \\ \theta_2 = \theta_0 \cos \omega_0 t \cos \gamma t, \end{cases} \quad (6.161)$$

ne arată că pendulele oscilează „alternativ” (fiecare își atinge amplitudinea când celălalt se află în poziția de echilibru). Totodată, se observă că amplitudinea pendulului de masă  $m_1$  este mult mai mică (de  $\sqrt{m_1/m_2}$  ori) decât cea a pendulului de masă  $m_2$ . De asemenea, acest rezultat poate fi interpretat ca fiind de tipul „bătăilor”: oscilații cu pulsația  $\omega_0$  și amplitudinea mult mai lent variabilă în timp,  $\theta_{\text{mod}(1)}(t) = \theta_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sin \gamma t$  și, respectiv,  $\theta_{\text{mod}(2)}(t) = \theta_0 \cos \gamma t$ .

2) În cazul  $\frac{m_2}{m_1} \gg 1$  oscilațiile sunt localizate și, deoarece  $\omega_1 > \omega_2$ ,

conform analizei generale din problema cinci, avem  $\varphi \cong \frac{\pi}{2}$ , astfel că

$$\xi_1 \cong -\eta_2 \text{ și } \xi_2 \cong \eta_1.$$

Într-adevăr, în acest caz

$$\text{ctg } 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} = \frac{-2 \frac{g}{l} \frac{m_2}{m_1}}{2 \frac{g}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}} = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (\rightarrow -\infty), \text{ căci } m_2 \gg m_1,$$

ceea ce înseamnă că  $\varphi \cong \frac{\pi}{2}$ , iar din

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi, \\ \xi_2 = \eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi, \end{cases}$$

rezultă imediat  $\xi_1 \cong -\eta_2 = -A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2)$  și  $\xi_2 \cong \eta_1 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1)$ .

Lucrând și acum în aproximația de ordinul întâi în  $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \ll 1$  obținem:

$$\varpi_1 \cong \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \text{ și } \varpi_2 \cong \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} \text{ cu } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Într-adevăr, până la termeni de ordinul întâi în  $z = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ , paranteza

pătrată din expresia lui  $\varpi_1^2$ , adică  $\left[1 + \frac{m_2}{m_1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)\right]$ , se scrie

$\left[1 + \frac{1}{z^2} \left(1 - \sqrt{1 + z^2}\right)\right]$  și atunci,

$$\varpi_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(1 - \sqrt{1 + z^2}\right)}.$$

Ținând cont de aproximația  $\sqrt{1 \pm \zeta} \cong 1 \pm \frac{\zeta}{2}$  (ne oprim doar la termenii de ordinul întâi în  $z$ ) avem

$$\sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(1 - \sqrt{1 + z^2}\right)} \cong \sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(1 - 1 - \frac{z^2}{2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

și atunci,

$$\varpi_1 \cong \frac{\omega_0}{\sqrt{2}},$$

iar pentru

$$\varpi_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(1 + \sqrt{1 + z^2}\right)},$$

utilizând aceeași aproximație,  $\sqrt{1 \pm \zeta} \cong 1 \pm \frac{\zeta}{2}$ , avem

$$\varpi_2 \cong \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{z} = \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}},$$

căci

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(1 + \sqrt{1 + z^2}\right)} &\cong \sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(1 + 1 + \frac{z^2}{2}\right)} = \sqrt{1 + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{2}{z^2}} \cong \sqrt{\frac{2}{z^2}} = \frac{\sqrt{2}}{z}. \end{aligned}$$

Presupunând și în acest caz că la momentul inițial pendulele sunt în repaus ( $\dot{\theta}_1(t_0 = 0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_2(t_0 = 0) = 0$ ) și doar pendulul de masă  $m_1$  este scos din poziția de echilibru ( $\theta_1(t_0 = 0) = \theta_0$ ,  $\theta_2(t_0 = 0) = 0$ ), avem

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong -\frac{\eta_2}{l\sqrt{m_1}} = -\frac{A_2}{l\sqrt{m_1}} \cos(\varpi_2 t + \psi_2)$$

și

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\xi_2}{l\sqrt{m_2}} - \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1}{l\sqrt{m_2}} + \frac{\eta_2}{l\sqrt{m_1}} = \\ &= \frac{A_1}{l\sqrt{m_2}} \cos(\varpi_1 t + \psi_1) + \frac{A_2}{l\sqrt{m_1}} \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{aligned}$$

unde  $A_1, A_2, \psi_1$  și  $\psi_2$  sunt constante arbitrare, determinabile din condițiile inițiale. Cum

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}} \sin(\varpi_2 t + \psi_2)$$

și

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{\varpi_1 A_1}{l\sqrt{m_2}} \sin(\varpi_1 t + \psi_1) - \frac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}} \sin(\varpi_2 t + \psi_2),$$

condițiile inițiale considerate conduc la următorul sistem algebric de patru ecuații în necunoscutele  $A_1, A_2, \psi_1$  și  $\psi_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = -\frac{A_2}{l\sqrt{m_1}} \cos \psi_2, \\ 0 = \frac{A_1}{l\sqrt{m_2}} \cos \psi_1 + \frac{A_2}{l\sqrt{m_1}} \cos \psi_2, \\ 0 = \frac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}} \sin \psi_2, \\ 0 = -\frac{\varpi_1 A_1}{l\sqrt{m_2}} \sin \psi_1 - \frac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}} \sin \psi_2. \end{array} \right.$$

Din ecuația a treia rezultă imediat  $\psi_2 = 0$ , și atunci, din ultima ecuație a sistemului obținem că și  $\psi_1 = 0$ . Cu aceste valori în primele două ecuații ale sistemului rezultă  $A_2 = -l \theta_0 \sqrt{m_1}$  și  $A_1 = l \theta_0 \sqrt{m_2}$ . Așadar,

$$\theta_1 = \theta_0 \cos \varpi_2 t = \theta_0 \cos \left( \omega_0 \sqrt{2m_2 / m_1} t \right) \quad (6.162)$$

și

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_0 \cos \varpi_1 t - \theta_0 \cos \varpi_2 t = \theta_0 \cos \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t - \theta_0 \cos \left( \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} t \right) = \\ &= \theta_0 \left[ \cos \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t - \cos \left( \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} t \right) \right] = \\ &= 2\theta_0 \sin \frac{\omega_0 \left( \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{2} t \sin \frac{\omega_0 \left( \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{2} t \cong \\ &\cong 2\theta_0 \sin^2 \left( \omega_0 \sqrt{\frac{m_2}{2m_1}} t \right) = \theta_0 \left[ 1 - \cos \left( \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.163)$$

3) În cazul  $m_1 = m_2 = m$ , din  $\text{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \stackrel{\text{not.}}{=} a = \frac{\omega_0^2 - 3\omega_0^2}{2\omega_0^2} = -1$  găsim că

$$\begin{aligned}\sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Atunci, din

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi, \\ \xi_2 = \eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi, \end{cases}$$

rezultă

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \eta_1 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \eta_2, \\ \xi_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \eta_1 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \eta_2, \end{cases}$$

iar pentru  $\theta_1$  și  $\theta_2$  obținem:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\xi_1}{l\sqrt{m}} = \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \eta_1 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \eta_2 \right) = \\ &= \frac{1}{l\sqrt{m}} \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2) \right]\end{aligned}\tag{6.164}$$

și

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \frac{1}{l\sqrt{m}}(\xi_2 - \xi_1) = \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \eta_1 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \eta_2 \right) - \\
&- \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \eta_1 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \eta_2 \right) = \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \right) \eta_1 + \\
&+ \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) \eta_2 = \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \right) \times \\
&\times A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) + \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2).
\end{aligned} \tag{6.165}$$

Având în vedere că

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{l\sqrt{m}} \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} A_2 \varpi_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2) - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} A_1 \varpi_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) \right]$$

și

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_2 &= \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) A_1 \varpi_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) - \\
&- \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) A_2 \varpi_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2),
\end{aligned}$$

condițiile inițiale  $\theta_1(t_0 = 0) = 0$ ,  $\theta_2(t_0 = 0) = \theta_0$  și  $\dot{\theta}_1(t_0 = 0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_2(t_0 = 0) = 0$  conduc la următorul sistem algebric de patru ecuații cu cele patru necunoscute  $A_1, A_2, \psi_1$  și  $\psi_2$  (până aici constante arbitrare, determinabile din condițiile inițiale):

$$\begin{cases} 0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} A_1 \cos \psi_1 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} A_2 \cos \psi_2, \\ l \theta_0 \sqrt{m} = \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \right) A_1 \cos \psi_1 + \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) A_2 \cos \psi_2, \\ 0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} A_2 \varpi_2 \sin \psi_2 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} A_1 \varpi_1 \sin \psi_1, \\ 0 = \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) A_1 \varpi_1 \sin \psi_1 - \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) A_2 \varpi_2 \sin \psi_2. \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații ale acestui sistem rezultă simplu  $\psi_1 = 0$  și  $\psi_2 = 0$ . Cu aceste valori în prima ecuație a sistemului obținem

$$A_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} A_1,$$

care, introdusă în a doua ecuație a sistemului furnizează pentru constanta  $A_1$  valoarea

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{l \theta_0 \sqrt{m}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}} = \\ &= \frac{l \theta_0 \sqrt{m}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}} = \frac{l \theta_0 \sqrt{m}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}, \end{aligned}$$

deci,

$$A_2 = \frac{l \theta_0 \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}} = \frac{l \theta_0 \sqrt{m}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}.$$

Atunci, relația (6.164) devine

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{l\sqrt{m}} \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \left( \frac{l\theta_0\sqrt{m}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}} \right) \cos \varpi_1 t - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \left( \frac{l\theta_0\sqrt{m}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}} \right) \cos \varpi_2 t \right] = \\ &= \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}} (\cos \varpi_1 t - \cos \varpi_2 t), \end{aligned}$$

iar relația (6.165) conduce la

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \right) \left( \frac{l\theta_0\sqrt{m}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}} \right) \cos \varpi_1 t + \\ &\quad + \frac{1}{l\sqrt{m}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \right) \left( \frac{l\theta_0\sqrt{m}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}} \right) \cos \varpi_2 t = \\ &= \frac{\theta_0}{2} (\cos \varpi_1 t + \cos \varpi_2 t). \end{aligned}$$

Deoarece în acest caz ( $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ),

$$\varpi_1^2 = \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2})$$

și

$$\varpi_2^2 = \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2}),$$



cele două variabile unghiulare devin

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \omega_0 t\right) - \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \omega_0 t\right) \right] \quad (6.166)$$

și

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \left[ \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \omega_0 t\right) + \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \omega_0 t\right) \right]. \quad (6.167)$$

**Observație:** În acest ultim caz particular ( $m_1 = m_2 = m$  și  $l_1 = l_2 = l$ ) problema poate fi abordată și independent de considerațiile generale din problema cinci. Astfel, ecuațiile (6.146) și (6.146') devin

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2\frac{g}{l} \sin \theta_1 = 0 \quad (6.168)$$

și respectiv,

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{g}{l} \sin \theta_2 = 0. \quad (6.168')$$

Dacă, în plus, oscilațiile sunt și mici [ $\cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1$ ,  $\sin(\theta_2 - \theta_1) \cong 0$ ,  $\sin \theta_1 \cong \theta_1$ ,  $\sin \theta_2 \cong \theta_2$ ], atunci ecuațiile se scriu și mai simplu,

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\frac{g}{l} \theta_1 = 0 \quad (6.169)$$

și respectiv,

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \theta_2 = 0. \quad (6.169')$$

Căutăm soluții de forma  $\theta_1 = A_1 e^{i\omega t}$  și  $\theta_2 = A_2 e^{i\omega t}$ . Obținem:

$$-2\omega^2 A_1 e^{i\omega t} - \omega^2 A_2 e^{i\omega t} + 2\frac{g}{l} A_1 e^{i\omega t} = 0$$

și respectiv,

$$-\omega^2 A_2 e^{i\omega t} - \omega^2 A_1 e^{i\omega t} + \frac{g}{l} A_2 e^{i\omega t} = 0,$$

sau, simplificând exponențiala nenulă,

$$\begin{cases} 2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)A_1 - \omega^2 A_2 = 0, \\ -\omega^2 A_1 + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)A_2 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are soluții netriviiale pentru amplitudinile  $A_1$  și  $A_2$  doar dacă determinantul lui este nul:

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (6.170)$$

adică,

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)^2 = 0,$$

Notând  $\omega^2 = z$  și  $\frac{g}{l} = \omega_0^2$ , rezultă următoarea ecuație de gradul doi în  $z$ :

$$z^2 - 2(\omega_0^2 - z)^2 = 0,$$

sau,

$$z^2 - 4\omega_0^2 z + 2\omega_0^4 = 0,$$

ale cărei soluții sunt

$$z_{1,2} = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 2\omega_0^4} = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{2\omega_0^4} = \omega_0^2 (2 \pm \sqrt{2}).$$

Revenind la vechea variabilă, avem,

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{și} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}}. \quad (6.171)$$

Acestea sunt cele două *frecvențe normale* de oscilație ale sistemului. Rezultă deci că sistemul posedă două *moduri normale* de oscilație (corespunzător celor două grade de libertate ale sale).

După cum știm, alegerea coordonatelor generalizate este (într-o mare măsură) arbitrară. Acest fapt ne permite să reprezentăm sistemul printr-un ansamblu de oscilatori liniar armonici, câte unul pentru fiecare grad de libertate al sistemului. Cu alte cuvinte, fiecărei frecvențe normale îi asociem o coordonată generalizată care variază periodic în timp, cu frecvența respectivă. Aceste *coordonate* sunt numite *normale*.

Să presupunem că sistemul oscilează cu una din frecvențele normale, de exemplu,  $\omega_1$ . Atunci, cum  $\theta_1 = A_1 e^{i\omega_1 t}$  și  $\theta_2 = A_2 e^{i\omega_1 t}$ , ecuația (6.169) devine

$$-2\omega_1^2 A_1 e^{i\omega_1 t} - \omega_1^2 A_2 e^{i\omega_1 t} + 2\omega_0^2 A_1 e^{i\omega_1 t} = 0,$$

sau,

$$(-2\omega_1^2 + 2\omega_0^2)\theta_1 = \omega_1^2 \theta_2.$$

Ținând cont că  $\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2$ , ecuația de mai sus devine

$$\left[-2(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 + 2\omega_0^2\right]\theta_1 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \theta_2,$$

adică,

$$(-2 + 2\sqrt{2})\theta_1 = (2 - \sqrt{2})\theta_2,$$

de unde,

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(-2 + 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}. \quad (6.172)$$

Considerând acum cea de-a doua frecvență normală și reluând aceleași calcule, vom obține

$$(-2\omega_2^2 + 2\omega_0^2)\theta_1 = \omega_2^2 \theta_2.$$

Cum  $\omega_2^2 = \omega_0^2(2 + \sqrt{2})$ , găsim

$$\left[-2(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 + 2\omega_0^2\right]\theta_1 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2 \theta_2,$$

adică

$$(-2 - 2\sqrt{2})\theta_1 = (2 + \sqrt{2})\theta_2,$$

de unde,

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(-2 - 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}. \quad (6.172')$$

Așadar, pentru cele două moduri normale de oscilație, relațiile dintre cele două coordonate generalizate sunt:

$\theta_2 = \theta_1 \sqrt{2}$  (pentru  $\omega = \omega_1$  – în acest caz modurile se numesc *simetrice*) și

$\theta_2 = -\theta_1 \sqrt{2}$  (pentru  $\omega = \omega_2$  – în acest caz modurile se numesc *antisimetrice*).

Dacă alegem ca și coordonate normale mărimile  $\eta_s = \theta_2 + \sqrt{2} \theta_1$  și  $\eta_{as} = \theta_2 - \sqrt{2} \theta_1$ , funcția Lagrange (6.143), în cazul particular  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$  și pentru mici oscilații ( $\cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1$ ,  $\cos \theta_i \cong 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$ , ( $i = 1, 2$ )), devine:

$$\begin{aligned}
 L &= ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - mgl\theta_1^2 - \frac{1}{2} mgl\theta_2^2 = ml^2 \left( \frac{\dot{\eta}_s - \dot{\eta}_{as}}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} ml^2 \left( \frac{\dot{\eta}_s + \dot{\eta}_{as}}{2} \right)^2 + ml^2 \left( \frac{\dot{\eta}_s - \dot{\eta}_{as}}{2\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\dot{\eta}_s + \dot{\eta}_{as}}{2} \right) - mgl \left( \frac{\eta_s - \eta_{as}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \\
 &- \frac{1}{2} mgl \left( \frac{\eta_s + \eta_{as}}{2} \right)^2 = ml^2 \left[ \frac{\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 - 2\dot{\eta}_s \dot{\eta}_{as}}{8} + \frac{\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 + 2\dot{\eta}_s \dot{\eta}_{as}}{8} + \frac{\dot{\eta}_s^2 - \dot{\eta}_{as}^2}{4\sqrt{2}} \right] - \\
 &- \frac{mgl}{8} (\eta_s^2 + \eta_{as}^2 - 2\eta_s \eta_{as}) - \frac{mgl}{8} (\eta_s^2 + \eta_{as}^2 + 2\eta_s \eta_{as}) = \\
 &= ml^2 \left[ \frac{\sqrt{2}(\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 - 2\dot{\eta}_s \dot{\eta}_{as})}{8\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}(\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 + 2\dot{\eta}_s \dot{\eta}_{as})}{8\sqrt{2}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{2(\dot{\eta}_s^2 - \dot{\eta}_{as}^2)}{8\sqrt{2}} \right] - \frac{mgl}{4} (\eta_s^2 + \eta_{as}^2) = \frac{ml^2}{8\sqrt{2}} \left[ (2\sqrt{2} + 2)\dot{\eta}_s^2 + (2\sqrt{2} - 2)\dot{\eta}_{as}^2 \right] - \\
 &- \frac{mgl}{4} (\eta_s^2 + \eta_{as}^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} ml^2 \left[ \dot{\eta}_s^2 (\sqrt{2} + 1) + \dot{\eta}_{as}^2 (\sqrt{2} - 1) \right] - \frac{mgl}{4} (\eta_s^2 + \eta_{as}^2),
 \end{aligned}$$

sau, dacă alegem noi coordonate normale,

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \eta_s \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}} ml^2, \\
 \eta_2 &= \eta_{as} \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}} ml^2,
 \end{aligned}$$

atunci lagrangeanul devine:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{g}{l} \left( \frac{\eta_1^2}{2 + \sqrt{2}} + \frac{\eta_2^2}{2 - \sqrt{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2 \left[ (2 - \sqrt{2})\eta_1^2 + (2 + \sqrt{2})\eta_2^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2\eta_1^2 + \omega_2^2\eta_2^2) \equiv \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}(\varpi_1^2\eta_1^2 + \varpi_2^2\eta_2^2),
 \end{aligned}$$

adică am regăsit forma normală a lagrangeanului (6.147) în cazul al treilea ( $m_1 = m_2 = m$  și  $l_1 = l_2 = l$ ). Legea de mișcare poate fi și ea dedusă ușor ținând cont că

$$\eta_1 = l\eta_s \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = l\sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} (\theta_2 + \sqrt{2} \theta_1) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \quad (6.173)$$

și

$$\eta_2 = l\eta_{as} \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = l\sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} (\theta_2 - \sqrt{2} \theta_1) = A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \quad (6.174)$$

Considerând aceleași condiții inițiale, anume,  $\theta_1(t_0 = 0) = 0$ ,  $\theta_2(t_0 = 0) = \theta_0$  și  $\dot{\theta}_1(t_0 = 0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_2(t_0 = 0) = 0$ , constantele arbitrare (determinabile din aceste condiții inițiale)  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\psi_1$  și  $\psi_2$  rezultă ca soluții ale următorului sistem algebric:

$$\begin{cases}
 l \theta_0 \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = A_1 \cos \psi_1, \\
 l \theta_0 \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = A_2 \cos \psi_2, \\
 0 = -\omega_1 A_1 \sin \psi_1, \\
 0 = -\omega_2 A_2 \sin \psi_2.
 \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații ale acestui sistem rezultă imediat  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ , valori care, introduse în primele două ecuații ale sistemului dau

$A_1 = l \theta_0 \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$  și  $A_2 = l \theta_0 \sqrt{m} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$ . Cu acestea în relațiile (6.173) și (6.174) rezultă ușor

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \omega_0 t\right) - \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \omega_0 t\right) \right]$$

și

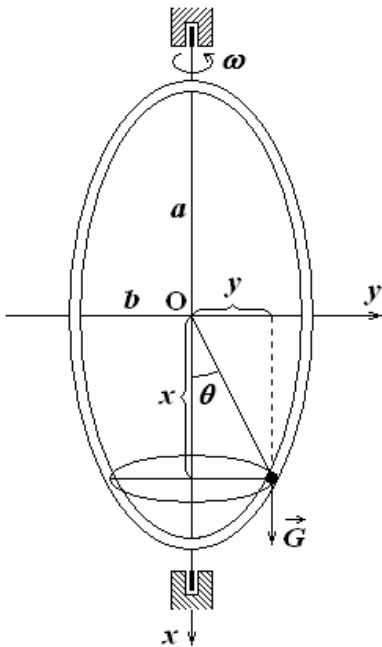
$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \left[ \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \omega_0 t\right) + \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \omega_0 t\right) \right],$$

adică exact relațiile (6.166) și (6.167) deduse prin prima metodă.

## Capitolul VII

### Probleme de echilibru și mici oscilații

1. Un corp asimilabil unui punct material se poate mișca fără frecare în interiorul unui tub îndoit sub formă de elipsă, care se rotește în jurul axei mari cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ , ca în Fig. VII.1. Cunoscând masa  $m$  a corpului, accelerația gravitațională  $g$  și semiaxele  $a > b$  ale elipsei, să se determine:



- pozițiile de echilibru ale corpului;
- stabilitatea acestor poziții de echilibru și
- perioada micilor oscilații efectuate de punctul material în jurul pozițiilor de echilibru stabil.

Fig. VII.1

#### Rezolvare

Întrucât în această problemă este implicată forța centrifugă (care este o forță de inerție) o vom rezolva în două moduri, anume, studiind mișcarea corpului atât într-un sistem de referință inerțial, cât și într-unul neinerțial.

## A) Cazul sistemului de referință inerțial (SRI)

a) După cum știm, într-un sistem de referință inerțial forțele de inerție nu există. Așadar, în cazul de față, pentru a rezolva problema nu trebuie să ne referim în nici un fel la forța centrifugă. Din punctul de vedere al unui SRI, singura forță aplicată corpului este forța de greutate  $\vec{G}$  a corpului.

Chiar fără a face nici un calcul, putem sesiza că, dacă elipsa nu s-ar roti, poziția dată de  $\theta = 0$  este o poziție de echilibru stabil, iar cea dată de  $\theta = \pi$  este una de echilibru instabil. Dacă elipsa se rotește, atunci, în funcție de valoarea vitezei unghiulare de rotație a elipsei, poziția de echilibru  $\theta = 0$  poate deveni o poziție de echilibru instabil (când efectul forței centrifuge<sup>1</sup> – care are tendința de a îndepărta și mai mult corpul față de această poziție de echilibru – întrece pe cel al forței de greutate – care va tinde să readucă punctul material în poziția de echilibru). Acest lucru se poate petrece dacă valoarea vitezei unghiulare de rotație a elipsei depășește o anumită valoare critică,  $\omega_{cr}$ , specifică sistemului. În schimb, dacă  $\omega < \omega_{cr}$ , atunci poziția  $\theta = 0$  rămâne o poziție de echilibru stabil. Spre deosebire de aceasta, poziția dată de  $\theta = \pi$  este tot timpul (cu alte cuvinte, indiferent de valoarea lui  $\omega$ ) o poziție de echilibru instabil, la o mică „perturbație” dată corpului, atât forța de greutate, cât și forța centrifugă având tendința de a îndepărta și mai mult corpul față de această poziție de echilibru. În plus, atunci când elipsa se rotește, este posibil (și acest lucru nu îl putem determina cu exactitate decât efectuând calculele) să apară una sau mai multe poziții de echilibru intermediare (cu  $\theta$  cuprins între 0 și  $\pi$ ). Cu siguranță însă, dacă  $\omega \rightarrow \infty$  atunci poziția dată de  $\theta = \pi/2$  este o poziție de echilibru stabil (în acest caz mișcarea corpului este determinată de forța centrifugă, care întrece cu mult în efect pe cea de greutate).

Dacă aceste considerații sunt corecte, ar trebui să regăsim toate concluziile lor prin calcul. Să realizăm în continuare acest lucru în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a.

<sup>1</sup> Această analiză calitativă preliminară nu ține cont de tipul sistemului de referință (inerțial sau neinertial) considerat, ci are un caracter general.



Pentru a determina pozițiile de echilibru ale corpului, să observăm că sistemul este unul natural, deci, pentru care putem defini un potențial. Fiind vorba despre câmpul forțelor de greutate (câmpul gravitațional uniform și omogen), potențialul nu depinde explicit de timp, deci el reprezintă chiar energia potențială a sistemului. Corpul este în echilibru în punctele în care energia lui potențială este extremă. Deci, pentru a afla pozițiile de echilibru ale corpului trebuie să anulăm prima derivată a energiei lui potențiale.

Avem,

$$dV = -dA,$$

unde

$$dA = \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

este lucrul mecanic elementar al forței câmpului gravitațional. Având în vedere alegerea sensului axelor de coordonate (vezi Fig. VII.1), putem scrie

$$dV = -mg \, dx,$$

de unde,

$$V = -mgx + V_0,$$

cu  $V_0$  o constantă arbitrară de integrare. Aceasta se determină de obicei astfel încât expresia finală a potențialului (aici a energiei potențiale  $V$ ) să fie cea mai simplă cu putință. În cazul nostru cel mai simplu ar fi ca  $V_0 = 0$ . Pentru a obține acest lucru trebuie să alegem nivelul de referință pentru energia potențială în planul  $x = 0$ , adică în planul  $yOz$ . Acest lucru este cu putință<sup>2</sup> și avem,

$$V(x = 0) = 0 \Rightarrow V_0 = 0.$$

Ecuția elipsei raportată la sistemul de axe din Fig. VII.1,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

permite parametrizarea

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = b \sin \theta, \end{cases}$$

<sup>2</sup> Precizăm că, în mod normal se procedează invers. Adică, mai întâi se alege un nivel de referință pentru energia potențială și apoi se determină constanta de integrare  $V_0$ .

ceea ce conduce la următoarea formă pentru energia potențială a corpului:

$$V = -mga \cos \theta . \quad (7.1)$$

Anulând prima derivată a lui  $V = V(\theta)$  obținem

$$\sin \theta = 0 ,$$

cu soluțiile „fizice”

$$\theta_1 = 0 \text{ și } \theta_2 = \pi . \quad (7.2)$$

Stabilitatea acestor poziții de echilibru se poate determina studiind semnul derivatei a doua a energiei potențiale în aceste puncte. Cum

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mga \cos \theta ,$$

rezultă că poziția de echilibru  $\theta_1 = 0$  este una de echilibru stabil

$\left( \frac{d^2V}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} > 0 \right)$ , iar cea dată de  $\theta_2 = \pi$  este de echilibru instabil

$\left( \frac{d^2V}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\pi} < 0 \right)$ . Aceste rezultate au fost deja anticipate în analiza calitativă

succintă realizată la început, pentru cazul în care elipsa nu se rotește. Totuși, elipsa este în mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ , fapt care nu reiese în nici un fel din modul de abordare de până acum al problemei. De ce? Sau, mai bine spus, unde este greșeala? Primul mijloc la care ar apela cei mai mulți pentru a lua în considerație faptul că elipsa se rotește este forța centrifugă. Ori, acest lucru nu este permis în cazul de față, deoarece lucrăm într-un referențial inerțial, în care această forță pur și simplu nu există. De aceea va trebui să utilizăm altă cale. Întrucât în cazul calculului de mai sus nu se poate pune problema că am greșit, singura posibilitate este aceea de a gândi că raționamentul la care am apelat nu este corect, sau cel puțin, este incomplet. Cu alte cuvinte, suntem conduși la a concluziona că „adevărata” energie potențială a corpului (sau energia potențială „efectivă” – cum i se mai spune) nu este cea dată de relația (7.1). Într-adevăr, după cum vom vedea în cele ce urmează, aceasta este „greșeala”.

Pentru a determina energia potențială efectivă a corpului, să aflăm mai întâi lagrangeanul problemei. După cum simplu se poate constata, corpul are un singur grad de libertate, căruia îi vom asocia coordonata

generalizată  $q \equiv \theta$ . Funcția Lagrange este dată de  $L = T - V$ , unde  $T$  este energia cinetică a corpului, iar potențialul  $V(\theta)$  este deja determinat. Deoarece corpul are o mișcare compusă (o mișcare de translație de-a lungul elipsei, în planul  $xOy$  și o mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  în jurul axei  $Ox$ ), energia lui cinetică are două componente:

$$\begin{aligned} T &= T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{tr}^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_{rot}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Atunci, lagrangeanul problemei este

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta + m g a \cos \theta, \quad (7.3)$$

și se observă că nu depinde explicit de timp. Acest lucru înseamnă că ecuațiile Lagrange de speța a II-a admit integrala primă

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = const.,$$

această constantă fiind chiar energia totală a corpului, care se conservă. Avem deci,

$$\begin{aligned} const. &= E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta - m g a \cos \theta. \end{aligned}$$

De aici, prin identificare<sup>3</sup>, rezultă

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)$$

și

$$E_{pot} = -\frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta - m g a \cos \theta. \quad (7.4)$$

Observăm așadar că, pe lângă termenul  $(-m g a \cos \theta)$ , care reprezintă chiar  $V(\theta)$ , am obținut un termen suplimentar,  $-\frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta$ , care

---

<sup>3</sup> Termenii care conțin o viteză generalizată (care este derivata totală în raport cu timpul a unei coordonate generalizate) la pătrat sunt termeni de energie cinetică „veritabilă”, toți ceilalți termeni reprezentând energia potențială „efectivă” a sistemului.

„ține cont” de faptul că elipsa se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . În legătură cu o eventuală observație conform căreia termenul  $-\frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \sin^2 \theta$  ar reprezenta tot un termen de energie cinetică (căci, pe de o parte el a apărut ca urmare a considerării în  $T$  a energiei cinetice a mișcării de rotație, iar pe de altă parte  $\omega^2$  este tot o derivată totală în raport cu timpul, a unei coordonate unghiulare, la pătrat), precizăm faptul că, în cadrul formalismului lagrangean termenii de energie cinetică „veritabilă” sunt cei pătratici în vitezele generalizate. În cazul problemei de față singura coordonată generalizată fiind  $\theta$ , rezultă că avem doar o singură viteză generalizată, anume,  $\dot{\theta}$ . Singurul termen care conține pe  $\dot{\theta}^2$  este:  $\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)$ , ceea ce conduce la relația (7.4) pentru „adevărată” energie potențială a sistemului (*energia potențială efectivă*).

Anulând derivata întâi a acestei energii potențiale, obținem următoarea ecuație trigonometrică în  $\theta$ :

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta} = -m\omega^2 b^2 \sin \theta \cos \theta + mga \sin \theta = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații dau pozițiile de echilibru ale corpului. Avem:

$$\sin \theta (ga - \omega^2 b^2 \cos \theta) = 0,$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} \sin \theta = 0, \\ ga - \omega^2 b^2 \cos \theta = 0. \end{cases}$$

Din prima ecuație a acestui sistem rezultă aceleași poziții de echilibru pe care le-am determinat la început,

$$\theta_1 = 0 \text{ și } \theta_2 = \pi,$$

iar a doua ecuație a sistemului conduce la o nouă poziție de echilibru, dată de

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{ga}{\omega^2 b^2}\right). \quad (7.5)$$

Dacă introducem notația

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{ga}{b^2}} = \frac{\sqrt{ga}}{b}, \quad (7.6)$$

atunci cea de a treia poziție de echilibru va fi dată de

$$\theta_3 = \arccos(\omega_{cr} / \omega)^2. \quad (7.6')$$

b) Pentru a determina stabilitatea pozițiilor de echilibru aflate mai sus trebuie să studiem semnul derivatei a doua a energiei potențiale efective în aceste puncte. Avem,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} &= -m\omega^2 b^2 \cos^2 \theta + m\omega^2 b^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta = \\ &= m\omega^2 b^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + mga \cos \theta, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la:

i)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} &= -m\omega^2 b^2 + mga = mga \left( 1 - \frac{\omega^2 b^2}{ga} \right) = \\ &= mga \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 \right] \begin{cases} \nearrow > 0, \quad \omega < \omega_{cr}, \quad (\text{echilibru stabil}); \\ \searrow < 0, \quad \omega > \omega_{cr}, \quad (\text{echilibru instabil}); \end{cases} \end{aligned}$$

ii)

$$\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi} = -m\omega^2 b^2 - mga < 0, \quad \forall \omega \quad (\text{echilibru instabil});$$

iii)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2} &= m\omega^2 b^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{ag}{\omega^2 b^2} \right)^2 \right) + mga \frac{ga}{\omega^2 b^2} = \\ &= m\omega^2 b^2 - 2m \left( \frac{ga}{\omega b} \right)^2 + m \left( \frac{ga}{\omega b} \right)^2 = m\omega^2 b^2 - m \left( \frac{ga}{\omega b} \right)^2 = \\ &= m\omega^2 b^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega} \right)^4 \right] \begin{cases} \nearrow > 0, \quad \omega > \omega_{cr}, \quad (\text{echilibru stabil}); \\ \searrow < 0, \quad \omega < \omega_{cr}, \quad (\text{echilibru instabil}). \end{cases} \end{aligned}$$

Așadar, poziția de echilibru  $\theta_1 = 0$  poate fi atât de echilibru stabil (dacă  $\omega < \omega_{cr}$ ), cât și instabil (dacă  $\omega > \omega_{cr}$ ), poziția  $\theta_2 = \pi$  este totdeauna de echilibru instabil, iar poziția intermediară de echilibru,  $\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$  poate fi, și ea, atât de echilibru stabil (dacă  $\omega > \omega_{cr}$ ), cât și instabil (dacă  $\omega < \omega_{cr}$ ).

Dacă  $\omega = \omega_{cr}$ , adică  $\omega^2 b^2 = ga$ , atunci  $\theta_3 = \arccos 1 = 0 = \theta_1$ , iar

$$\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^2} = m\omega^2 b^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})} \right)^4 \right] = 0.$$

Pentru a determina stabilitatea echilibrului dat de poziția  $\theta_3 = \theta_1 = 0$  în acest caz ( $\omega = \omega_{cr}$ ) trebuie „să mergem mai departe” cu derivatele. Avem,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left[ m\omega^2 b^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + mga \cos \theta \right] = \\ &= 4m\omega^2 b^2 \sin \theta \cos \theta - mga \sin \theta = mga \sin \theta \left( \frac{4\omega^2 b^2}{ga} \cos \theta - 1 \right) = \\ &= mga \sin \theta \left[ \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 \cos \theta - 1 \right] \end{aligned}$$

și atunci

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} \right|_{\theta = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^2} &= \left\{ mga \sin \theta \left[ \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 \cos \theta - 1 \right] \right\}_{\omega = \omega_{cr}} = \\ &= mga \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})} \right)^4} \left[ \left( 2 \frac{\omega(=\omega_{cr})}{\omega_{cr}} \right)^2 \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})} \right)^2 - 1 \right] = 0, \end{aligned}$$

ceea ce arată că trebuie să calculăm și derivata a patra. Obținem:

$$\frac{d^4 E_{pot}}{d\theta^4} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} \right) = \frac{d}{d\theta} \left\{ mga \sin \theta \left[ \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 \cos \theta - 1 \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= mga \cos \theta \left[ \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 \cos \theta - 1 \right] - mga \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 \sin^2 \theta = \\
 &= mga \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 (2 \cos^2 \theta - 1) - mga \cos \theta,
 \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^4 E_{pot}}{d\theta^4} \right|_{\theta = \arccos \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega (= \omega_{cr})} \right)^2} &= \left[ mga \left( \frac{2\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 (2 \cos^2 \theta - 1) - mga \cos \theta \right]_{\omega = \omega_{cr}} = \\
 &= 3mga > 0.
 \end{aligned}$$

Întrucât în acest caz special, ( $\omega = \omega_{cr}$ ), derivata a patra a energiei potențiale efective în punctul  $\theta_3 (= \theta_1) = 0$  este strict pozitivă, rezultă că poziția de echilibru dată de  $\theta_3 = 0$  este tot de echilibru stabil, însă micile oscilații în jurul ei *nu mai sunt armonice*.

c) Evident, mici oscilații pot avea loc doar în jurul pozițiilor de echilibru stabil. După cum am văzut la punctele precedente ale problemei, pentru sistemul analizat, există două astfel de poziții de echilibru:  $\theta_1 = 0$ , (dacă  $\omega < \omega_{cr}$ ) și  $\theta_3 = \arccos \left( \frac{\omega_{cr}}{\omega} \right)^2$ , (dacă  $\omega > \omega_{cr}$ ). Principala chestiune care se pune în legătură cu o problemă de mici oscilații este determinarea perioadelor de oscilație ale modurilor normale de oscilație. Întrucât sistemul analizat are doar un singur grad de libertate, problema se simplifică foarte mult.

Pentru a determina perioada/periodele de oscilație a/ale unui sistem fizic ce efectuează mici oscilații putem proceda în mai multe moduri. În general, dacă sistemul are mai multe grade de libertate, metoda bazată pe formalismul clasic newtonian este deosebit de greoaie, adesea chiar inaplicabilă. În acest caz soluția problemei se poate obține mult mai ușor și elegant în cadrul formalismului lagrangean, prin „simplă” rezolvare a ecuației caracteristice a sistemului (care este o ecuație de ordinul  $n$  în  $\omega^2$ , cu soluții reale și pozitive,  $n$  reprezentând numărul gradelor de libertate ale sistemului).

În cazul sistemelor cu un singur grad de libertate (la care ne vom referi în continuare), din punct de vedere clasic, newtonian, problema poate fi rezolvată în cel puțin două moduri. Această rezolvare are la bază analogia cu cel mai simplu sistem care efectuează oscilații armonice liniare (unidimensionale), anume, un corp de masă  $m$  legat de un resort având constanta elastică  $k$ , ce poate oscila pe o singură direcție. După cum se știe, perioada micilor oscilații ale acestui sistem simplu este

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.7)$$

De fapt, acesta este unul dintre cele mai simple sisteme mecanice care se mișcă sub acțiunea unei forțe de tip elastic,  $\vec{F} = -k \vec{x}$ . Câmpul forțelor elastice este un câmp potențial. Pentru potențialul acestui câmp avem

$$dV = -dA = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = k\vec{x} \cdot d\vec{x} = kx dx,$$

de unde,

$$V = k \int x dx = \frac{kx^2}{2} + V_0.$$

Dacă alegem și aici ca „nivel” de referință pentru energia potențială punctul  $x = 0$  (care corespunde sistemului (resortului) nedeformat), putem scrie

$$V = \frac{kx^2}{2}. \quad (7.8)$$

O primă metodă simplă, care poate fi utilizată în cadrul formalismului newtonian pentru a determina perioada micilor oscilații armonice, liniare, ale unui sistem fizic oarecare este aceea pe care am putea-o numi „dinamică” și ea presupune aflarea – pe de o parte – a forței rezultante care acționează asupra sistemului, și, dacă aceasta este una „de tip elastic”, adică de forma  $\vec{F} = -K\vec{\xi}$ , unde  $\vec{\xi}$  este „elongația” mișcării, atunci ea permite determinarea „constantei elastice”  $K$  (mărime specifică sistemului, analoagă/corespunzătoare lui  $k$  din expresia  $\vec{F} = -k \vec{x}$ ) și – pe de altă parte – a accelerației rezultante a sistemului care, pe baza relației fundamentale a dinamicii,  $\vec{F} = M\vec{a} = M\ddot{\xi}$ , permite determinarea „masei”



$M$  (mărimă specifică sistemului, analoagă/corespunzătoare masei  $m$  a corpului legat de resortul de constantă elastică  $k$ ).

Atunci, prin analogie cu relația (7.7), perioada micilor oscilații efectuate de sistem va fi

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (7.9)$$

O a doua metodă newtoniană, simplă, de determinare a perioadei de oscilație a unui sistem fizic (pe care am putea-o numi „energetică”) implică determinarea energiilor cinetică și potențială ale sistemului care efectuează mici oscilații. Dacă aceste mărimi au forma

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2$$

și respectiv

$$E_p = \frac{1}{2}K\xi^2,$$

unde  $\xi$  are aceeași semnificație ca mai sus, atunci, prin analogie cu relația (7.7), perioada micilor oscilații ale sistemului va fi dată, de asemenea, de relația (7.9).

În cele ce urmează vom expune o metodă – pe cât de simplă, pe atât de eficientă – de determinare a perioadei de oscilație a unui sistem fizic oarecare (care efectuează mici oscilații armonice liniare) și care are un singur grad de libertate, în cadrul formalismului lagrangean. Pentru a înțelege cât mai ușor esența metodei ne vom referi la același sistem simplu, utilizat mai sus în cadrul formalismului newtonian. Potențialul sistemului a fost deja determinat (vezi relația (7.8)), iar energia cinetică a sistemului este

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

coordonata carteziană  $x$  fiind chiar coordonata generalizată asociată singurului grad de libertate al sistemului. Atunci, lagrangeanul sistemului va fi

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Ecuția Lagrange de speța a II-a corespunzătoare sistemului este

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

care, efectuând derivatele, devine

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

sau, dacă introducem notația  $\omega_0^2 = k/m$ ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

care este binecunoscuta ecuație a oscilatorului liniar armonic. După cum se știe, soluția acestei ecuații poate fi scrisă cel puțin în patru moduri (vezi problema pendulului simplu), iar perioada mișcării oscilatorii este

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Fie acum un sistem fizic cu un singur grad de libertate, a cărui mișcare este, deocamdată, necunoscută. Dacă notăm cu  $\xi$  coordonata generalizată asociată singurului grad de libertate al sistemului, și dacă lagrangeanul sistemului are forma

$$L = A\dot{\xi}^2 - B\xi^2, \quad (7.10)$$

unde  $A$  și  $B$  sunt două constante reale, nenule, de același semn, atunci ecuația Lagrange de speța a II-a asociată se scrie

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0,$$

care, ținând cont de (7.10), devine

$$A\ddot{\xi} + B\xi = 0,$$

sau, dacă notăm raportul  $B/A$  cu  $\Omega_0^2$ ,

$$\ddot{\xi} + \Omega_0^2 \xi = 0.$$

După cum se poate constata, am obținut aceeași ecuație a oscilatorului liniar armonic, a cărui perioadă de oscilație este în acest caz

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{A}{B}}. \quad (7.11)$$

În concluzie, dacă un sistem fizic cu un singur grad de libertate are lagrangeanul de forma (7.10), atunci acesta va avea o mișcare oscilatorie armonică, cu perioada dată de relația (7.11). Un lagrangean de tipul (7.10)

se numește *lagrangean al micilor oscilații* pentru un sistem fizic cu un singur grad de libertate.

Așadar, pentru a determina perioada micilor oscilații ale sistemului nostru (corpul de masă  $m$  care se mișcă fără frecare pe elipsă) va trebui să aflăm mai întâi lagrangeanul micilor oscilații al sistemului. Lagrangeanul „general” al sistemului a fost deja determinat și este dat de relația (7.3):

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta + m g a \cos \theta.$$

Pentru a găsi lagrangeanul micilor oscilații al sistemului putem proceda în două feluri, pornind de la expresia generală de mai sus a acestuia.

Ca să realizăm acest lucru, să presupunem că sistemul (corpul de masă  $m$ ) efectuează mici oscilații în jurul unei poziții de echilibru stabil dată de  $\theta_{e.s.}$  (vezi Fig. VII.2). În Fig. VII.2, cu  $\xi$  am notat elongația mișcării oscilatorii,

$$\xi = \theta - \theta_{e.s.}, \quad (7.12)$$

(unde  $\theta_{e.s.} = \text{const.}$ ) care, ținând cont că oscilațiile sunt mici, satisface relația<sup>4</sup>

$$o(\xi^3) = 0.$$

Legea mișcării oscilatorii poate fi scrisă sub forma

$$\xi = \xi_{\max} \sin(\Omega_0 t + \varphi_0),$$

unde constantele  $\xi_{\max}$  (amplitudinea mișcării oscilatorii armonice) și  $\varphi_0$  (faza inițială a mișcării) pot fi determinate din

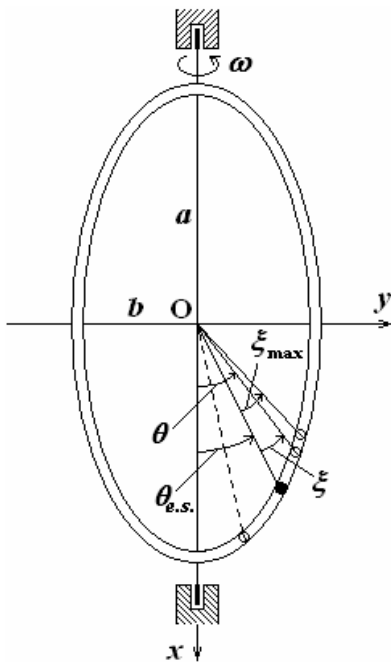


Fig. VII.2

<sup>4</sup> Observăm că, spre deosebire de situațiile obișnuite în care aproximația cere ca  $O(\xi^2) = 0$ , aici trebuie să luăm în considerație și termenii pătratici în variabila mică  $\xi$ , în acord cu expresia (7.10) a lagrangeanului micilor oscilații. De aceea, aproximația cerută în acest caz este  $O(\xi^3) = 0$ .

condițiile inițiale,  $\xi_o = \xi(t=0)$  și  $\dot{\xi}_o = \dot{\xi}(t=0)$ .

Cele două posibilități de a obține lagrangeanul micilor oscilații pentru sistemul analizat sunt următoarele:

1. se exprimă unghiul  $\theta$  din relația (7.12) în funcție de noua variabilă  $\xi$ ,

$$\theta = \theta_{e.s.} + \xi$$

și se introduce în expresia (7.3) a lagrangeanului problemei, după care se dezvoltă expresia obținută,  $L = L(\xi)$ , în serie Mac-Laurin după variabila  $\xi$  (în jurul valorii  $\xi = 0$ ), reținându-se doar termenii care conțin toate puterile lui  $\xi$ , până la puterea a doua inclusiv;

2. se dezvoltă direct expresia (7.3) a lagrangeanului în serie Taylor după variabila  $\theta$ , în jurul valorii  $\theta = \theta_{e.s.}$ , și se rețin doar termenii care conțin toate puterile lui  $(\theta - \theta_{e.s.}) = \xi$ , până la puterea a doua inclusiv.

Vom utiliza cea de a doua cale, nu înainte de a observa (lucru foarte important de altfel) că lagrangeanul general al sistemului poate fi scris sub forma

$$L = E_{cin} - E_{pot}.$$

Atunci, dezvoltarea în serie Taylor a lui  $L$  implică de fapt dezvoltarea după variabila  $\theta$ , în jurul valorii  $\theta = \theta_{e.s.}$ , a expresiilor energiei cinetice  $E_{cin}$  și energiei potențiale  $E_{pot}$ . Începând cu termenul al doilea, avem:

$$\begin{aligned} E_{pot}(\theta) &= E_{pot}(\theta_{e.s.}) + \frac{1}{1!} \frac{dE_{pot}}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.})^2 + \\ &+ \mathcal{O}[(\theta - \theta_{e.s.})^3] \cong E_{pot}(\theta_{e.s.}) + \frac{dE_{pot}}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.})^2 = E_{pot}(\theta_{e.s.}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} \xi^2, \end{aligned}$$

unde am ținut cont de faptul că derivata de ordinul întâi a energiei potențiale în punctul  $\theta = \theta_{e.s.}$  se anulează,

$$\left. \frac{dE_{pot}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{e.s.}} = 0,$$

conform definiției punctelor de echilibru (de orice fel – stabil sau instabil).

În ceea ce privește primul termen, avem:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) = \\ &= E_{cin}(\theta) = E_{cin}(\theta_{e.s.}) + \frac{1}{1!} \left. \frac{dE_{cin}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 E_{cin}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.})^2 + \\ &\quad + \mathcal{O}[(\theta - \theta_{e.s.})^3] \cong E_{cin}(\theta_{e.s.}), \end{aligned}$$

deoarece, deja termenul

$$\frac{1}{1!} \left. \frac{dE_{cin}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) = \frac{1}{1!} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \right] \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} \xi$$

conține un factor de ordinul trei în  $\xi$ , anume  $\dot{\xi}^2 \xi$ . Așadar, din expresia energiei cinetice rămâne doar primul termen din dezvoltarea în serie Taylor, adică,

$$E_{cin}(\theta) = E_{cin}(\theta_{e.s.}) = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 (a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}) \equiv E_{cin}(\dot{\xi}).$$

Deoarece termenul  $E_{pot}(\theta_{e.s.})$  poate fi omis în expresia lagrangeanului (fiind o constantă, ceea ce face ca cei doi lagrangeeni – cel care conține pe  $E_{pot}(\theta_{e.s.})$  și cel care nu conține acest termen – să fie echivalenți), pentru lagrangeanul micilor oscilații,  $L_{m.o.}$ , va rezulta următoarea expresie:

$$L_{m.o.} = E_{cin}(\theta) - E_{pot}(\theta) = \frac{1}{2}m(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.})\dot{\xi}^2 -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} \xi^2 \equiv L(\xi, \dot{\xi}) = A\xi^2 - B\dot{\xi}^2,$$

unde

$$A = \frac{1}{2}m(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}) = const. > 0$$

și

$$B = \frac{1}{2} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}} = const. > 0.$$

Conform relației (7.11), perioada micilor oscilații armonice ale sistemului va fi

$$\begin{aligned} \tau &= 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.})}{\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\theta_{e.s.}}}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.})}{\left[ m\omega^2 b^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + mga \cos \theta \right]_{\theta=\theta_{e.s.}}}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}}{\omega^2 b^2 (1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.}) + ga \cos \theta_{e.s.}}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{\omega^2} \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta_{e.s.} + \frac{1}{\omega^2} \cos^2 \theta_{e.s.}}{1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos \theta_{e.s.}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos^2 \theta_{e.s.} + \frac{a^2}{b^2}}{\omega \left[ 1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos \theta_{e.s.} \right]}} = \\ &= \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - e^2}} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \theta_{e.s.}}{1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos \theta_{e.s.}}}, \end{aligned}$$

(7.13)

unde

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

este excentricitatea elipsei.

Pentru cele două poziții de echilibru stabil determinate la punctele a) și b) ale problemei,  $\theta_1 = 0$ , (dacă  $\omega < \omega_{cr}$ ) și  $\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$ , (dacă  $\omega > \omega_{cr}$ ), avem,

$$\tau_1 = \tau|_{\theta_{e.s.}=0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{1-e^2}{\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{cr}^2 - \omega^2}}, \text{ cu } \omega < \omega_{cr} \quad (7.14)$$

și

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau|_{\theta_{e.s.} = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 \theta_{e.s.}}{1-2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos \theta_{e.s.}}} = \\ &= \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{1-e^2 \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}{1-2\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4 + \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{1-e^2 \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}{1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

cu  $\omega > \omega_{cr}$ .

În fine, dacă  $\omega \rightarrow \infty$ , din  $\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$  (ca poziție de echilibru stabil dacă  $\omega > \omega_{cr}$ ), obținem o nouă poziție de echilibru stabil, dată de

$$\theta_4 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \theta_3 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \right] = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad (7.16)$$

ceea ce este în concordanță cu analiza calitativă făcută la început.

Perioada micilor oscilații efectuate în jurul acestei poziții de echilibru stabil va fi

$$\tau_3 = \tau \Big|_{\theta_{e.s.} = \frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \tau_o \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \quad (7.17)$$

unde am utilizat notația evidentă:  $\tau_o \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{2\pi}{\omega}$ .

În cazul în care elipsa degenerază într-un cerc ( $e = 0$ ), obținem

$$\tau_3 = \tau \Big|_{\theta_{e.s.} = \frac{\pi}{2}} = \tau_o. \quad (7.18)$$

### B) Cazul sistemului de referință neinertial (SRNI)

a) Pentru a determina pozițiile de echilibru ale corpului de masă  $m$  vom utiliza aceeași condiție de anulare a derivatei întâi a energiei potențiale a corpului. Ca și sistem de referință neinertial putem considera un reper care este solidar legat de corpul aflat în mișcare. Spre deosebire de cazul sistemului de referință inertial, un observator aflat în sistemul de referință

neinertial considerat va sesiza că asupra corpului acționează, pe lângă forța de greutate și forța centrifugă, care este și trebuie să fie considerată o forță aplicată. Așadar, pentru a determina potențialul câmpului forței aplicate rezultante, va trebui să considerăm și contribuția forței centrifuge,  $\vec{F}_{cf}$ . Avem,

$$dV = -dA = -(\vec{G} \cdot d\vec{r} + \vec{F}_{cf} \cdot d\vec{r}), \quad (7.19)$$

unde  $\vec{F}_{cf}$  are direcția perpendiculară pe axa de rotație și sensul dinspre axa de rotație înspre „exterior” (vezi Fig. VII.3). Pentru a ușura efectuarea produselor scalare din relația (7.19) vom exprima pe componente vectorii care apar în ea.

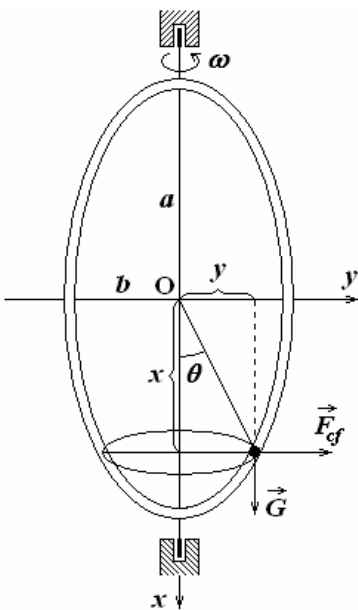


Fig. VII.3



Ținând cont de orientarea relativă a vectorilor  $\vec{G}$ ,  $\vec{F}_{cf}$  și  $d\vec{r}$  față de axele de coordonate din Fig. VII.3, putem scrie:

$$\vec{G} = (mg, 0, 0), \quad \vec{F}_{cf} = (0, m\omega^2 y, 0), \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

și atunci, relația (7.19) devine

$$dV = -mgdx - m\omega^2 y dy,$$

de unde, prin integrare nedefinită, obținem

$$V = -mgx - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + V_0. \quad (7.20)$$

Se observă că potențialul nu depinde explicit de timp, ceea ce înseamnă că el coincide chiar cu energia potențială a sistemului. Constanta arbitrară de integrare  $V_0$  din relația (7.20) se determină prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială. Evident, cel mai convenabil este ca  $V_0 = 0$ . Acest lucru are loc dacă

$$V(x=0, y=0) = 0.$$

Cu această alegere, energia potențială a corpului devine

$$\begin{aligned} V = V(x, y) &= -mgx - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = -mga \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \sin^2 \theta = \\ &= V(\theta) \equiv E_{pot}(\theta), \end{aligned}$$

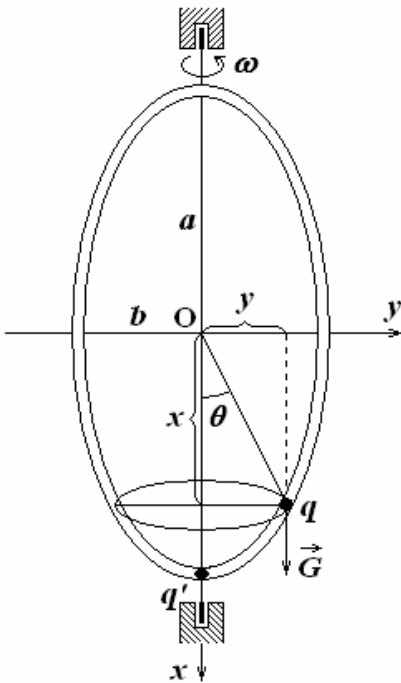
adică am obținut același rezultat ca și în cazul I (analiza într-un sistem de referință inerțial), însă mult mai direct și mai simplu. Așadar, lucrând într-un sistem de referință neinertial, rezolvarea problemei este mult ușurată<sup>5</sup>. De aici încolo raționamentele și calculele decurg exact ca și în cazul sistemului de referință inerțial.

---

<sup>5</sup> Atragem atenția cititorilor că aceasta nu este o regulă generală. De multe ori, în cazul unor probleme dificile (complicate) este mult mai convenabil să lucrăm într-un sistem de referință inerțial, deoarece aici lucrurile sunt clare (nu trebuie să luăm în considerare decât forțele newtoniene, aplicate în mod efectiv, nu și forțele de inerție, care, uneori sunt mai dificil de identificat și „mănuite”). Lucrul într-un referențial neinertial este, într-adevăr, de multe ori foarte util, căci, ca și în cazul de față, poate conduce mult mai rapid la rezultatul problemei, însă necesită din partea rezolvitorului o anumită experiență și o anumită „îndemânare” în lucrul cu forțele de inerție.

2. Un punct material greu  $P$  de masă  $m$ , încărcat electric cu sarcina  $q$  se poate mișca fără frecare în interiorul unui tub îndoit sub formă de elipsă, care se rotește în vid în jurul axei mari cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  (vezi Fig. VII.4). În punctul cel mai de jos al elipsei se află fixată o sarcină electrică  $q'$ . Să se determine:

- pozițiile de echilibru ale punctului material cu sarcina electrică  $q$ ;
- stabilitatea acestor poziții de echilibru și
- perioada micilor oscilații efectuate de punctul material în jurul pozițiilor de echilibru stabil.



### Rezolvare

Întrucât această problemă este asemănătoare celei precedente, nu vom relua aici întreaga discuție efectuată deja acolo, ci ne vom restrânge considerațiile doar asupra aspectelor specifice cazului de față. Astfel, principala deosebire între cele două probleme este apariția forței electrostatice, care acționează asupra particulei ale cărei poziții de echilibru trebuie să le determinăm. De asemenea, facem de la bun început precizarea că vom neglija eventualele efecte magnetice, care pot apărea în sistem ca urmare a mișcării particulei cu sarcina electrică<sup>6</sup>  $q$ .

Vom lucra doar în sistemul de referință inerțial al laboratorului. Forța electrostatică dintre cele două sarcini elec-

Fig. VII.4

<sup>6</sup> Este știut faptul că o sarcină electrică  $q$  în mișcare circulară uniformă cu viteza unghiulară  $\omega$  pe un cerc cu raza constantă  $r$  este echivalentă cu un curent electric  $i = q\omega/2\pi$ , ce produce o „foiță magnetică” cu un moment magnetic dipolar  $|\vec{\mu}| = qr^2\omega/2$ .

trice își va manifesta efectul doar asupra energiei potențiale. Deoarece câmpul forțelor electrostatice este tot un câmp potențial (chiar conservativ) de forțe, la fel ca și câmpul gravitațional, sistemul rămâne unul natural. Energia cinetică a punctului material cu sarcina electrică  $q$  este aceeași ca în problema precedentă,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta,$$

iar la energia potențială gravitațională

$$V_g = -mga \cos \theta$$

trebuie să adunăm contribuția de tip electrostatic

$$\begin{aligned} V_{el} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\sqrt{4a^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + b^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{qq'(4\pi\epsilon_0)^{-1}}{\sqrt{4a^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + 4b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{qq'(4\pi\epsilon_0)^{-1}}{\sqrt{4a^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + 4b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})}} = \\ &= \frac{qq'(4\pi\epsilon_0)^{-1}}{\sqrt{4a^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + 4b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4b^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} = \frac{qq'(4\pi\epsilon_0)^{-1}}{2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}} = \\ &= \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}} = \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}}, \end{aligned}$$

unde am ținut cont de faptul că pe intervalul  $\theta \in (0, \pi]$ ,  $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ .

Atunci, lagrangeanul problemei este

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta + \\ &\quad + mga \cos \theta - \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}} \end{aligned}$$

și se observă că nu depinde explicit de timp. Acest lucru înseamnă că ecuațiile Lagrange de speța a II-a admit integrala primă

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \text{const.},$$

această constantă fiind chiar energia totală a corpului, care se conservă. Avem deci,

$$\begin{aligned} \text{const.} = E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) - \\ - \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta - m g a \cos \theta + \frac{q q'}{8 \pi \epsilon_0} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}}. \end{aligned}$$

De aici, prin identificare<sup>7</sup>, rezultă

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)$$

și

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta - m g a \cos \theta + \frac{q q'}{8 \pi \epsilon_0} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}}. \quad (7.21)$$

Derivata întâi a energiei potențiale a sistemului,  $E_{\text{pot}}(\theta)$ , are următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{pot}}}{d\theta} = -m \omega^2 b^2 \sin \theta \cos \theta + m g a \sin \theta - \frac{q q'}{8 \pi \epsilon_0} \times \\ \times \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2} + \frac{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2}}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)} = -m \omega^2 b^2 \times \\ \times \sin \theta \cos \theta + m g a \sin \theta - \frac{q q'}{8 \pi \epsilon_0} \frac{2 c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + b^2 \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Soluțiile ecuației  $\frac{dE_{\text{pot}}}{d\theta} = 0$ , adică

<sup>7</sup> Termenii care conțin o viteză generalizată (care este derivata totală în raport cu timpul a unei coordonate generalizate) la pătrat sunt termeni de energie cinetică „veritabilă”, toți ceilalți termeni reprezentând energia potențială „efectivă” a sistemului.

$$m\omega^2 b^2 \sin \theta \cos \theta - mga \sin \theta + \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + b^2 \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2}} = 0,$$

dau pozițiile de echilibru ale corpului. Avem:

$$\begin{aligned} & m\omega^2 b^2 \sin \theta \cos \theta - mga \sin \theta + \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + b^2 \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2}} = \\ & = \sin \theta \left[ m\omega^2 b^2 \cos \theta - mga + \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{2c^2 \sin \frac{\theta}{2} + b^2 \csc \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2}} \right] = 0, \end{aligned}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} \sin \theta = 0, \\ m\omega^2 b^2 \cos \theta - mga + \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{2c^2 \sin \frac{\theta}{2} + b^2 \csc \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2}} = 0. \end{cases}$$

Din prima ecuație a acestui sistem rezultă pozițiile de echilibru

$$\theta_1^{(1)} = 0 \text{ și } \theta_2^{(1)} = \pi,$$

dintre care doar a doua este acceptabilă fizic, iar a doua ecuație a sistemului se mai scrie

$$8k m \sin^3 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2} (\omega^2 b^2 \cos \theta - ga) + qq' (2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2) = 0, \quad (7.22)$$

unde am folosit notația  $k \stackrel{\text{not.}}{=} 4\pi\epsilon_0$ . Ținând cont de egalitatea  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , ecuația (7.22) devine

$$\begin{aligned} & 8k m \sin^3 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^{3/2} \left[ \omega^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) - ga \right] + \\ & + qq' (2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2) = 0, \end{aligned}$$

sau,

$$\begin{aligned} & 64k^2 m^2 \sin^6 \frac{\theta}{2} (c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^3 \left[ ga - \omega^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \right]^2 - \\ & - (qq')^2 (2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2)^2 = 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

care este o ecuație trigonometrică în necunoscuta  $0 < \theta \leq \pi$ . Așadar, trebuie să determinăm soluțiile reale  $\theta_i^{(2)}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) cuprinse în intervalul  $(0, \pi]$  ale ecuației (7.23). Această ecuație nu poate fi rezolvată analitic, singura soluție fiind rezolvarea ei numerică. Chiar și în acest caz rezolvarea este extrem de dificilă, datorită multitudinii valorilor pe care le pot lua mărimile constante care intervin, anume,  $a, b, q, q', m$  și  $\omega$ .

Să observăm mai întâi faptul că soluțiile ecuației (7.23) nu sunt afectate de semnele celor două sarcini electrice. Deoarece discuția în cazul general este extrem de complicată, ne vom restrânge atenția doar asupra analizei după valorile pe care le pot lua masa  $m$  a particulei cu sarcina electrică  $q$  și viteza unghiulară de rotație a elipsei,  $\omega$ . În acest scop vom utiliza soft-ul specializat în calcule analitice și numerice Mathematica 4.0. Principala dificultate constă în a determina acele valori ale lui  $\omega$  pentru care ecuația (7.23) admite soluții reale  $\theta_i^{(2)}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) cuprinse în intervalul  $\theta_i^{(2)} \in (0, \pi]$ . Mathematica 4.0 oferă însă o modalitate simplă de a rezolva această problemă, utilizând reprezentarea grafică a dependenței dintre  $\omega$  (privită ca variabilă independentă sau, mai bine spus, ca parametru) și  $\theta$  (privită ca variabilă dependentă), dependență care este dată sub formă implicită, prin intermediul ecuației (7.23). Prezentăm mai jos rezultatele pentru o serie de valori semnificative ale masei  $m$  și vitezei unghiulare  $\omega$ . Pentru calculele concrete am considerat următoarele valori numerice pentru mărimile constante care intervin:  $k = 4\pi\epsilon_0 = 10^{-9}/9$ ;  $a = 0,2 \text{ m}$ ;  $b = 0,15 \text{ m}$ ;  $q = 10^{-3} \text{ C}$  și  $q' = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ .

$$1) m = 1 \mu\text{g} = 10^{-6} \text{ kg}$$

Liniiile de comandă care permit reprezentarea grafică a dependenței (date sub formă implicită) dintre  $\omega$  și  $\theta$  sunt următoarele:

```
Remove["Global*"];  
Unprotect[In, Out];  
Clear[In, Out];
```

```

k = 10^-9/9;
a = 0.2;
b = 0.15;
c = Sqrt[a^2-b^2];
g = 9.8;
m = 0.000001;
q = 10^-3;
q1 = 5*10^-3;

```

```

NSolve[64*k^2*m^2*(Sin[Theta/2]^2)^3*(c^2*(Sin[Theta/2]^2)+b^2)^3
*(g*a - ω^2*b^2*(1 - 2*(Sin[Theta/2]^2)))^2 - (q*q1)^2*(2*c^2*
(Sin[Theta/2]^2) + b^2)^2 == 0, Theta];

```

```

Plot[Evaluate[Theta /. %], {ω, 1000000, 30000000}]

```

iar dependența  $\theta = \theta(\omega)$  este reprezentată grafic în Fig. VII.5.

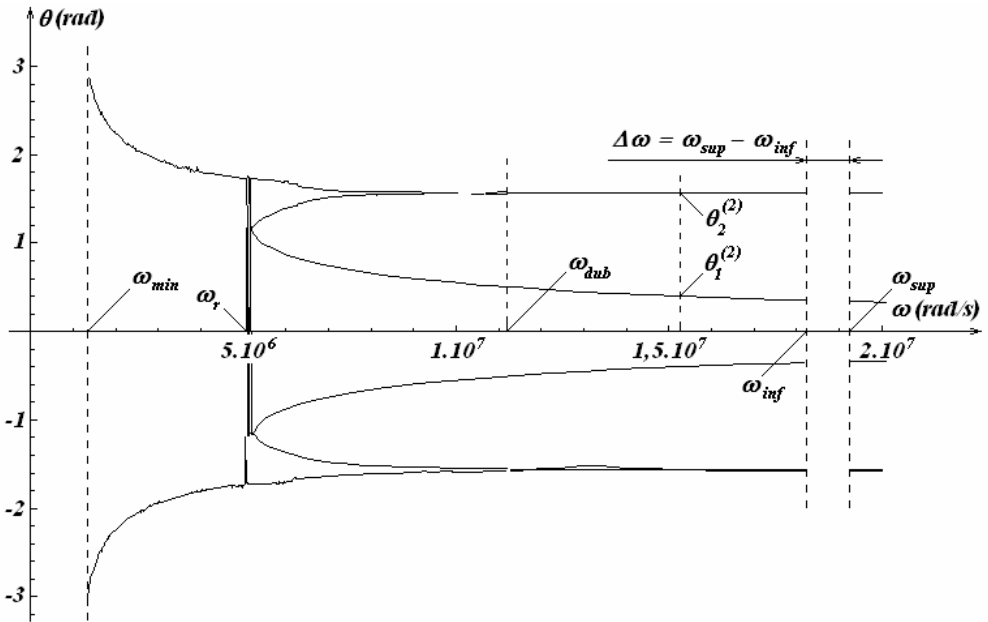


Fig. VII.5

După cum se poate observa din Fig. VII.5, există o valoare minimă a vitezei unghiulare  $\omega = \omega_{\min}$ , sub care ecuația nu are nici o soluție reală.

Această valoare poate fi determinată observând că pentru  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$ ,  $\theta^{(2)} \rightarrow \pi$ . Rezolvând atunci ecuația (7.23) pentru  $\theta = \pi$ , cu ajutorul liniilor de comandă de mai jos, se găsește valoarea  $\omega_{\min} = 1340475,662 \text{ rad/s}$ :

$$64 * k^2 * m^2 * (\sin[\pi/2]^2)^3 * (c^2 * (\sin[\pi/2]^2) + b^2)^3 * (g * a - \omega^2 * b^2 * (1 - 2 * (\sin[\pi/2]^2)))^2 - (q * q1)^2 * (2 * c^2 * (\sin[\pi/2]^2) + b^2)^2 // N$$

care furnizează ecuația

$$-8.265625000000007 \times 10^{-14} + 5.056790123456793 \times 10^{-35} \\ (1.9600000000000002 + 0.0225 \omega^2)^2 = 0$$

și care, rezolvată,

$$\text{Solve}[-8.265625000000007 * \wedge{-14} + 5.056790123456793 * \wedge{-35} \\ (1.9600000000000002 + 0.0225 * \omega^2)^2 == 0, \omega]$$

dă soluțiile

$$\{\{\omega \rightarrow -1.3404756618129585 * \wedge 6\}, \{\omega \rightarrow 0. -1.3404756618779437 * \wedge 6i\}, \\ \{\omega \rightarrow 0. +1.3404756618779437 * \wedge 6i\}, \{\omega \rightarrow +1.3404756618129585 * \wedge 6\}\}$$

singura soluție acceptabilă în cazul nostru fiind  $\omega_{\min} = 1340475,662$ .

Se mai observă că, începând cu o valoare situată aproximativ în jurul lui  $\omega_r \approx 5,067 \times 10^6 \text{ rad/s}$  (vezi Fig. VII.5 și, mai detaliat, Fig. VII.7) variația lui  $\theta$  cu  $\omega$  devine mult mai rapidă. De la această valoare în sus analiza trebuie făcută pe domenii de variație mult mai înguste ale lui  $\omega$ . De asemenea, se observă că apar și domenii aparent<sup>8</sup> „vide” de soluții numerice reale ca acela evidențiat în Fig. VII.5 și situat între valorile  $\omega_{\text{inf}}$  și  $\omega_{\text{sup}}$  ale vitezei unghiulare. În plus, observăm că de la valoarea  $\omega = \omega_{\text{dub}}$  în sus, în domeniul valorilor pozitive ale lui  $\theta$ , graficul „se regularizea-

<sup>8</sup> Apariția acestor domenii se datorează utilizării operației de inversare a funcțiilor în cadrul instrucțiunii „Solve”, ceea ce are ca efect posibilitatea nedeterminării (omiterii) unor soluții numerice. Pentru a vedea mai exact care este situația în aceste regiuni trebuie să studiem existența eventualelor poziții de echilibru nedeterminate (omise) ale sistemului, din aproape în aproape, pe domenii de variație ale lui  $\omega$  mult mai restrânse.



ză/stabilizează”, în afara domeniilor „vide” de soluții reale având câte două valori/soluții,  $\theta_1^{(2)}$  (care tinde asimptotic la zero pe măsură ce  $\omega$  crește) și  $\theta_2^{(2)}$  (care tinde asimptotic la  $\pi/2$  pe măsură ce  $\omega$  crește) (vezi Fig. VII.6) pentru fiecare valoare a lui  $\omega > \omega_{dub}$ . Deci, în acest domeniu există două poziții de echilibru ale particulei, date de  $\theta_1^{(2)}$  și  $\theta_2^{(2)}$ .

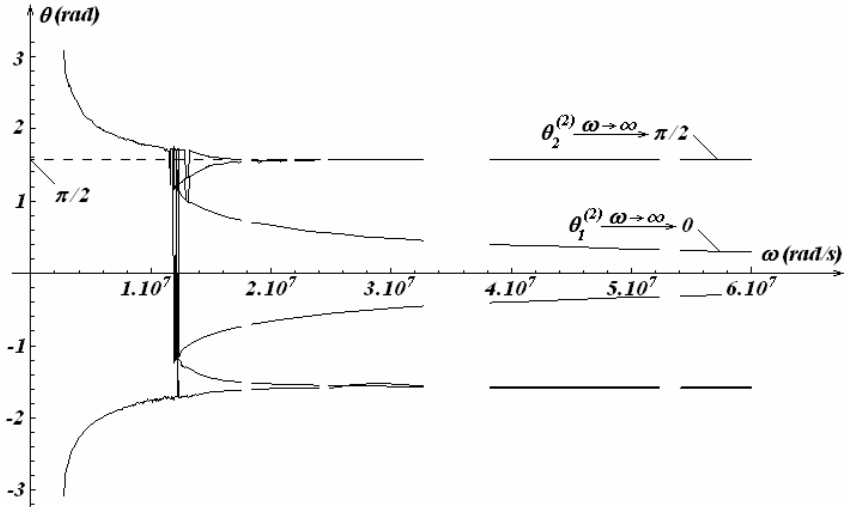


Fig. VII.6

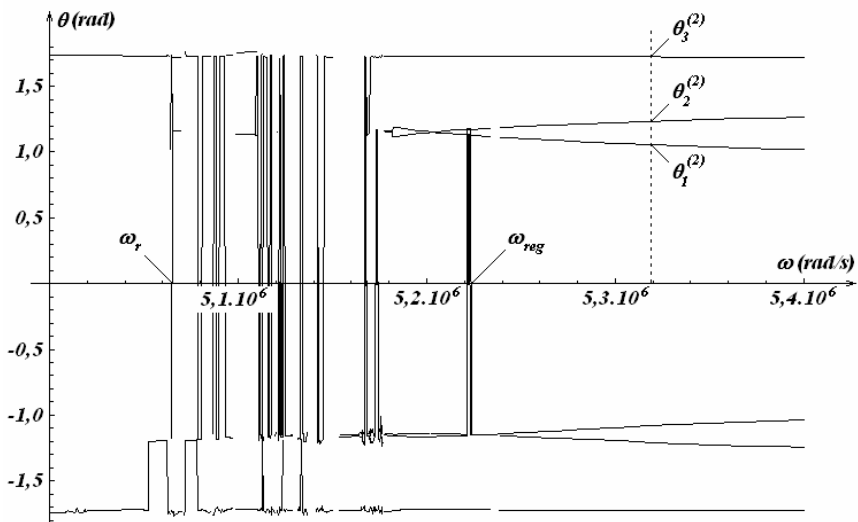


Fig. VII.7

În domeniul de variație foarte rapidă (situat între valorile  $\omega_r \approx 5,067 \times 10^6 \text{ rad/s}$  și  $\omega_{reg}$ ) (vezi Fig. VII.7, în care este reprezentată dependența  $\theta = \theta(\omega)$  pentru un interval „îngust” de variație a lui  $\omega$ , situat între valorile  $\omega_1 = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$  și  $\omega_2 = 5,4 \times 10^6 \text{ rad/s}$ ) studiul pozițiilor de echilibru ale sistemului trebuie făcut „punctual”. Acest „punctual” înseamnă de fapt că trebuie să analizăm dependența  $\theta = \theta(\omega)$  pe intervale și mai mici de variație ale vitezei unghiulare  $\omega$ . De exemplu, dacă vom considera intervalul

$$\omega \in [5,12225 \times 10^6, 5,12250 \times 10^6] \text{ rad/s},$$

se observă că graficul devine „curat”, evidențiind două soluții ale ecuației (7.23) și, în consecință, două poziții de echilibru pentru particulă (vezi Fig. VII.8). De asemenea, din Fig. VII.7 observăm că există intervale pe care avem trei poziții de echilibru,  $\theta_1^{(2)}$ ,  $\theta_2^{(2)}$  și  $\theta_3^{(2)}$  (pe lângă cea determinată prin calcul analitic și dată de  $\theta_2^{(1)} = \pi$ ).

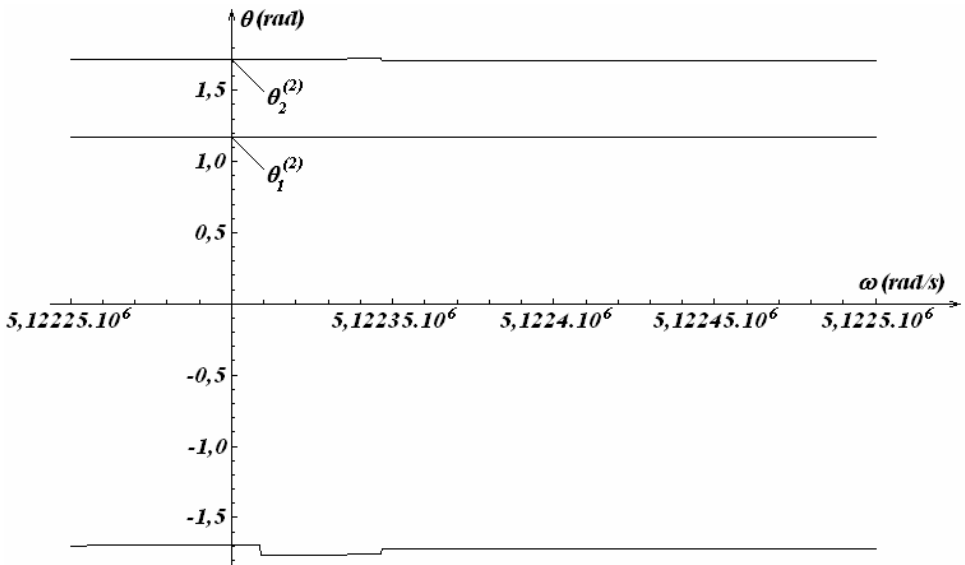


Fig. VII.8

$$2) m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$$

Urmând aceeași cale cu cea utilizată în cazul precedent, pentru  $\omega_{\min}$  se obține valoarea  $\omega_{\min} = 42389,561 \text{ rad/s}$ ; deci, dacă  $\omega < \omega_{\min}$  sistemul nu are nici o poziție de echilibru suplimentară (pe lângă cea determinată analitic,  $\theta_2^{(1)} = \pi$ ), acest lucru reieșind și din Fig. VII.10, în care este reprezentată grafic dependența  $\theta = \theta(\omega)$  pe un domeniu foarte larg de variație a vitezei unghiulare  $\omega$ . După cum se poate constata din această reprezentare grafică, nu există deosebiri majore (calitativ vorbind) între acest caz și cel precedent; și aici apare o viteză unghiulară limită,  $\omega_{\min}$ , intervale aparent „vide” de soluții reale, domenii cu două și respectiv trei valori ale lui  $\theta$  pentru o aceeași valoare a lui  $\omega$  etc. Așadar, întreaga analiză se face în aceeași manieră ca pentru  $m = 10^{-6} \text{ kg}$ . Ceea ce diferă totuși față de situația precedentă este ordinul de mărime al valorilor lui  $\omega$ , pentru care apar comportări net diferite în ceea ce privește numărul de poziții de echilibru ale sistemului. Acest lucru se poate observa cu ușurință comparând reprezentările grafice corespunzătoare (de exemplu, cea din Fig. VII.5 cu cea din Fig. VII.10, Fig. VII.7 cu Fig. VII.9 etc.)

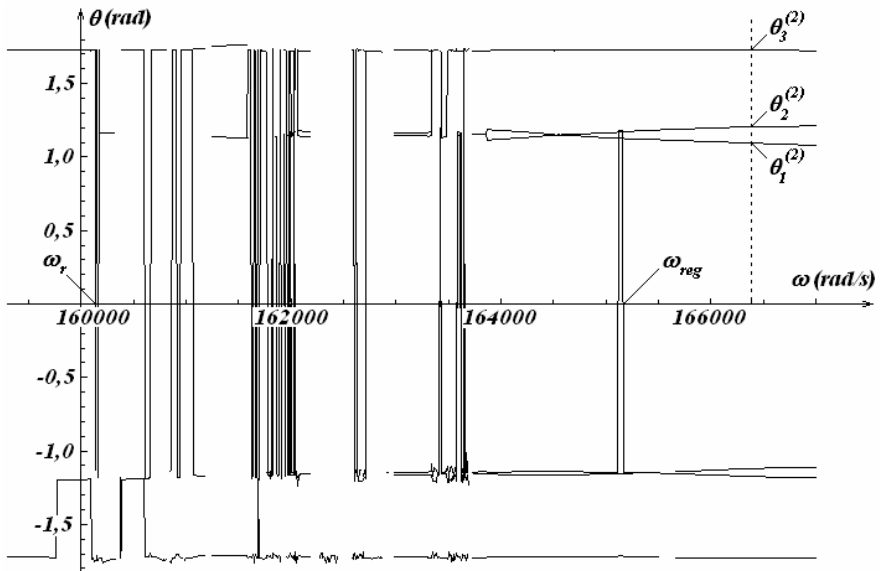


Fig. VII.9

Putem astfel constata că o creștere cu trei ordine de mărime a masei a produs o reducere corespunzătoare cu două ordine de mărime a vitezei unghiulare.

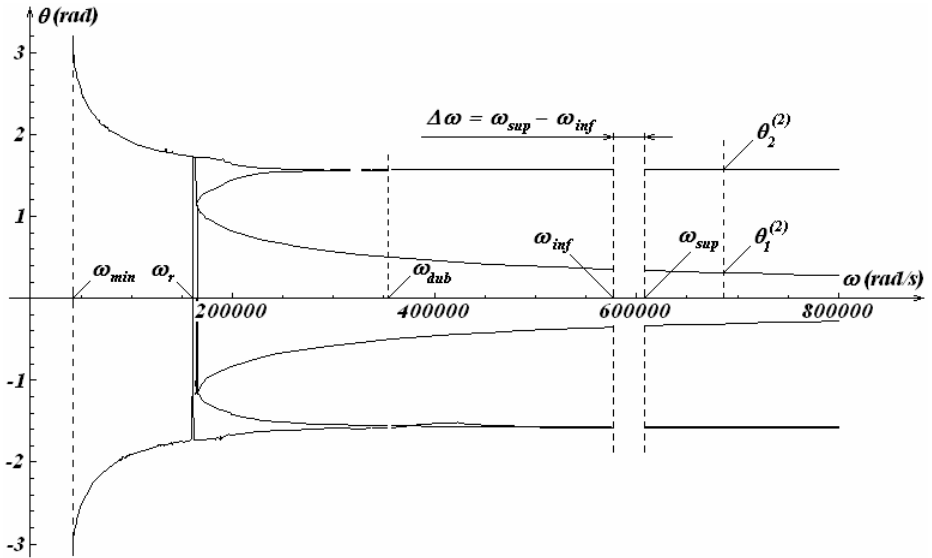


Fig. VII.10

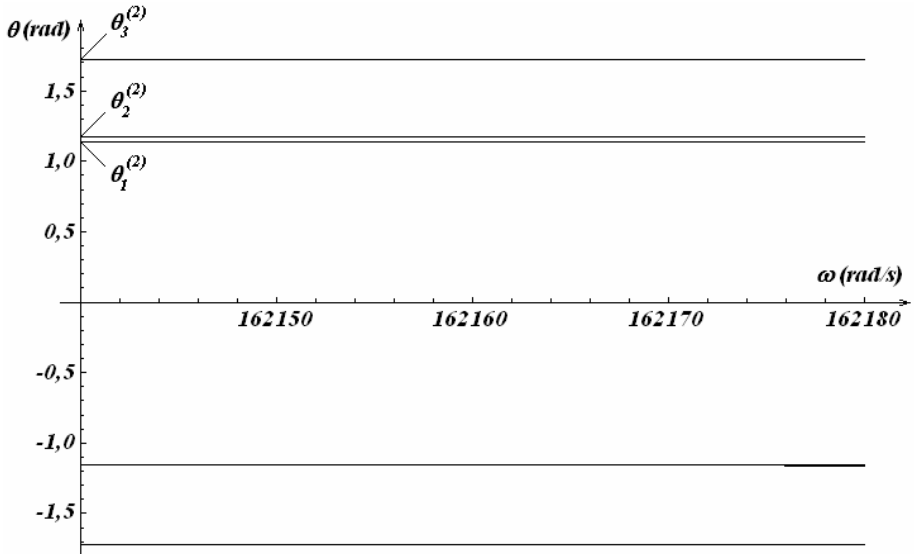


Fig. VII.11

$$3) m = 100g = 10^{-1} kg$$

În acest caz, reprezentările grafice corespunzătoare sunt date în următoarele trei figuri (Fig. VII.12, Fig. VII.13 și Fig. VII.14).

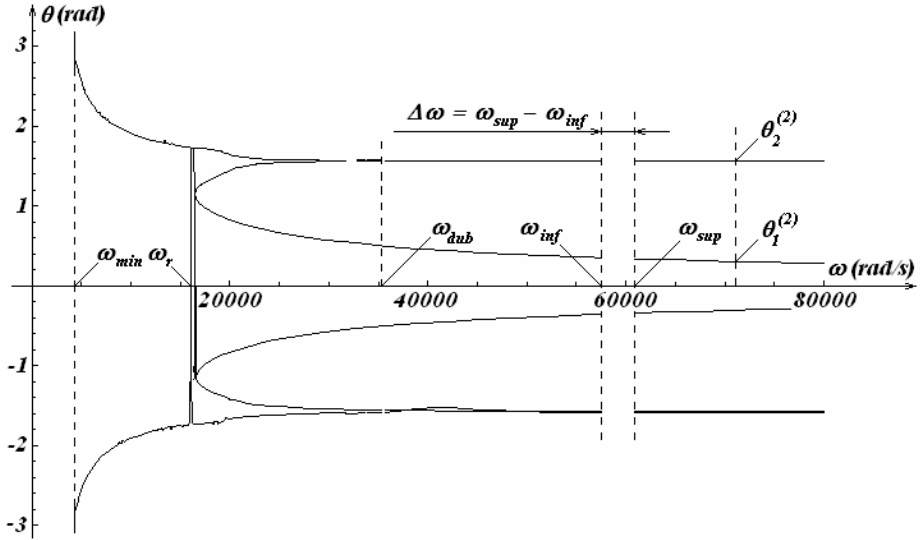


Fig. VII.12

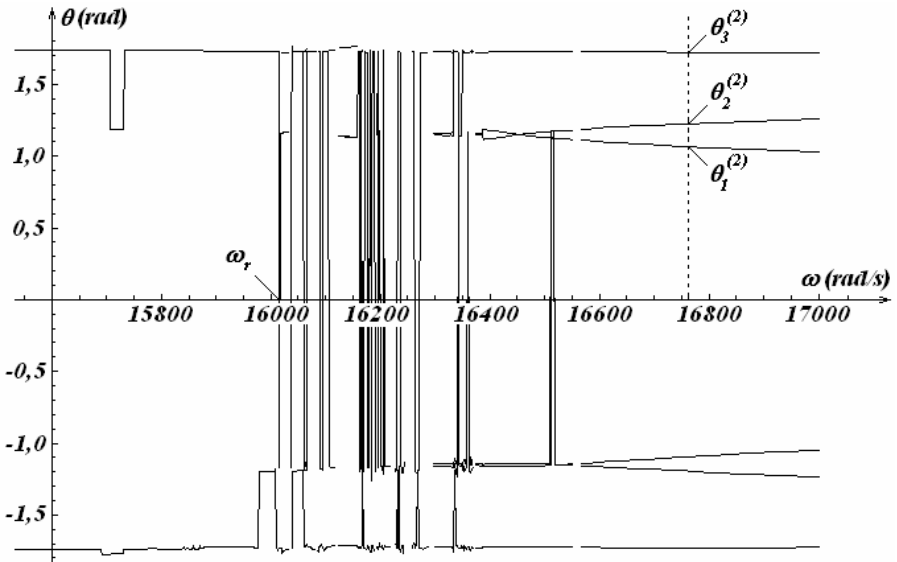


Fig. VII.13

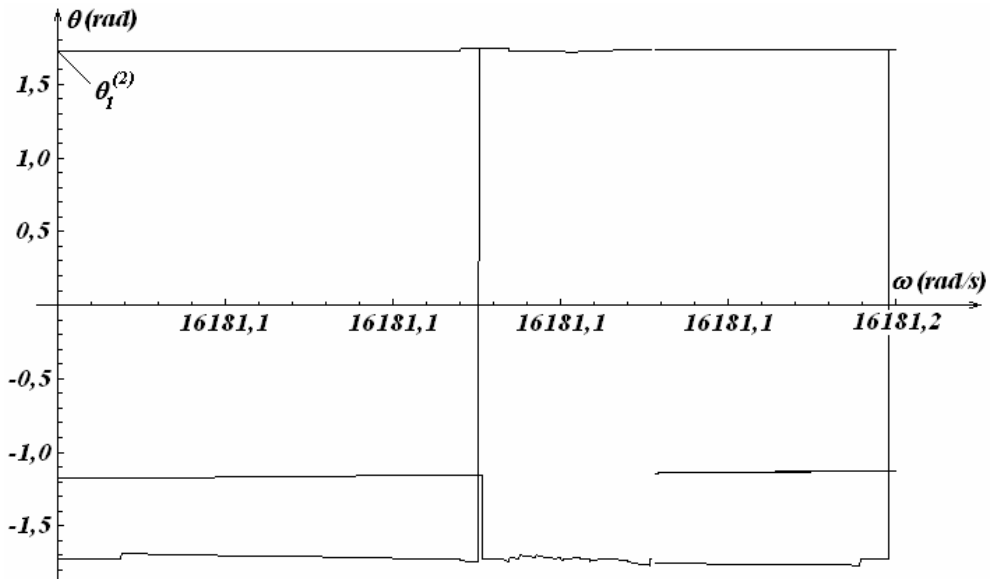


Fig. VII.14

La o analiză rapidă a acestor reprezentări grafice se constată faptul că dependența calitativă a lui  $\theta$  de viteza unghiulară  $\omega$  își păstrează și în acest caz aceleași caracteristici. Valoarea minimă a lui  $\omega$  este în acest caz  $\omega_{\min} = 4238,946 \text{ rad/s}$ . Și aici, ca și în cazul precedent, principala diferență față de primul caz constă în reducerea corespunzătoare a ordinului de mărime al lui  $\omega$ , la creșterea celui al masei. Astfel, unei creșteri cu cinci ordine de mărime (față de primul caz) și respectiv cu două ordine de mărime (față de al doilea caz) a masei, îi corespunde o micșorare a ordinului de mărime al vitezei unghiulare cu trei ordine de mărime (față de primul caz) și respectiv cu un ordin de mărime (față de cel de-al doilea caz).

b) Pentru a determina stabilitatea pozițiilor de echilibru aflate mai sus trebuie să studiem semnul derivatei a doua a energiei potențiale efective în aceste puncte. Avem,

$$\frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2} = -m\omega^2 b^2 \cos^2 \theta + m\omega^2 b^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta - \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{2\left(2c^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - c^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}b^2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^{3/2}}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^3} + \\
& + \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{2\left(2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + b^2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \left[\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^{3/2}\right]}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^3} + \\
& + \frac{qq'}{8\pi\epsilon_0} \frac{2\left(2c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + b^2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{3}{2}c^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^{1/2}\right]}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^3} = \\
& = -m\omega^2 b^2 \cos^2 \theta + m\omega^2 b^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin^{-3} \frac{\theta}{2}}{8 \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^{5/2}} \times \\
& \times \left[2c^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(3 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + c^2 b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(5 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + b^4 \left(2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Dacă notăm

$$\begin{aligned}
f(\theta) & \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{\sin^{-3} \frac{\theta}{2}}{8 \left(c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + b^2\right)^{5/2}} \times \\
& \times \left[2c^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(3 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + c^2 b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(5 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + b^4 \left(2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right],
\end{aligned}$$

atunci derivata a doua în raport cu  $\theta$  a energiei potențiale devine

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} & = -m\omega^2 b^2 \cos^2 \theta + m\omega^2 b^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} f(\theta) = \\
& = -m\omega^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) + mga \cos \theta + k^{-1} qq' f(\theta).
\end{aligned}$$

(7.24)

Pentru a studia semnul acestei expresii vom apela tot la soft-ul Mathematica 4.0. După cum se poate constata, semnul acestei expresii depinde semnificativ atât de valoarea masei, cât și de cea a vitezei unghiulare, pentru valori date ale celorlalte mărimi. Astfel, pentru  $m = 1g$ , dacă  $\omega_{\min} < \omega < \omega^* = 585310,223 \text{ rad/s}$  ecuația

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -m\omega^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) + mga \cos \theta + k^{-1} q q' f(\theta) = 0 \quad (7.25)$$

are o singură soluție reală pozitivă, deci funcția  $F(\theta) = \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$  schimbă o singură dată semnul în intervalul  $\theta \in (0, \pi]$ , iar graficul acesteia arată ca în Fig. VII.15. Soluția reală pozitivă a ecuației (7.25), corespunzătoare valorii  $\omega = 200000 \text{ rad/s}$  (valoare arbitrar aleasă, cuprinsă în intervalul sus-amintit de variație a vitezei unghiulare), se poate determina cu ajutorul liniei de comandă

```
NSolve[(q*q1/k)*(1/x^3)*(1/(8*(c^2*x^2+b^2)^(5/2)))*(2*c^4*x^4*(3-2*x^2)+c^2*b^2*x^2*(5-2*x^2)+b^4*(2-x^2))-m*omega^2*b^2*(1-8*x^2*(1-x^2))+m*g*a*(1-2*x^2)== 0, x]
```

Pentru a scurta timpul de rezolvare numerică a ecuației (7.25) am făcut schimbarea de variabilă  $\sin \frac{\theta}{2} = x$ . Soluția acceptabilă din punct de vedere fizic a ecuației în necunoscuta  $x$  este  $x = 0,9299087994345975$ , careia îi corespunde unghiul  $\theta_0$  dat de linia de comandă

```
2ArcSin[0.9299087994345975] //N
```

care dă

$$\theta_0 = 2,3883295953886625 \text{ rad} = 0,7602289216775441 \pi \text{ rad} \cong 0,76 \pi \text{ rad}$$

Următoarele linii de comandă permit reprezentarea grafică a funcției  $F(\theta)$  în intervalul  $\theta \in (0, \pi]$ :

```
Remove["Global`*"];  
Unprotect[In, Out];  
Clear[In, Out];
```

```
k = 10^-9/9;  
a = 0.2;  
b = 0.15;  
c = Sqrt[a^2-b^2];
```



$$\begin{aligned} g &= 9.8; \\ m &= 0.001; \\ q &= 10^{-3}; \\ q_1 &= 5 \cdot 10^{-3}; \\ \omega &= 2 \cdot 10^5; \end{aligned}$$

$$\text{Plot}[(q \cdot q_1 / k) \cdot (1 / \sin[\theta/2]^3) \cdot (1 / (8 \cdot (c^2 \cdot \sin[\theta/2]^2 + b^2)^{5/2})) \cdot (2 \cdot c^4 \cdot \sin[\theta/2]^4 \cdot (3 - 2 \cdot \sin[\theta/2]^2) + c^2 \cdot b^2 \cdot \sin[\theta/2]^2 \cdot (5 - 2 \cdot \sin[\theta/2]^2) + b^4 \cdot (2 - \sin[\theta/2]^2)) - m \cdot \omega^2 \cdot b^2 \cdot (1 - 2 \cdot \sin[\theta]^2) + m \cdot g \cdot a \cdot \cos[\theta], \{\theta, 0, \pi\}]$$

După cum rezultă din Fig. VII.15, pozițiile de echilibru (date de soluțiile acceptabile din punct de vedere fizic ale ecuației (7.23)) care aparțin intervalului  $\theta \in (0, \theta_0)$  sunt poziții de *echilibru stabil*, iar cele cuprinse în intervalul  $\theta \in (\theta_0, \pi]$  sunt poziții de *echilibru instabil*. Pentru  $\omega > \omega^*$  ecuația (7.25) admite trei soluții reale pozitive, toate acceptabile din punct de vedere fizic. Cu alte cuvinte, în acest caz, în intervalul  $\theta \in (0, \pi]$  funcția  $F(\theta)$  schimbă semnul de trei ori (vezi Fig. VII.16, în care este reprezentată funcția  $F(\theta)$  pentru valoarea arbitrar aleasă  $\omega = 6 \times 10^6 \text{ rad/s}$ ).

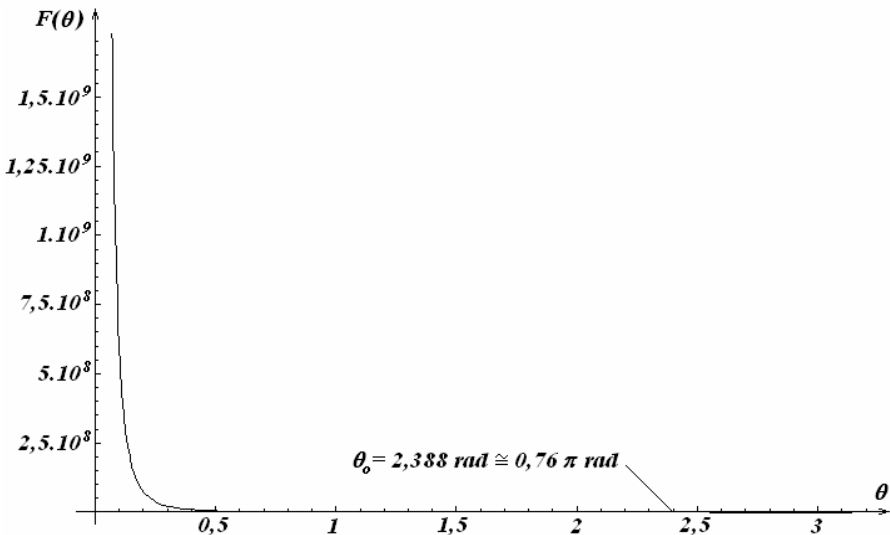


Fig. VII.15

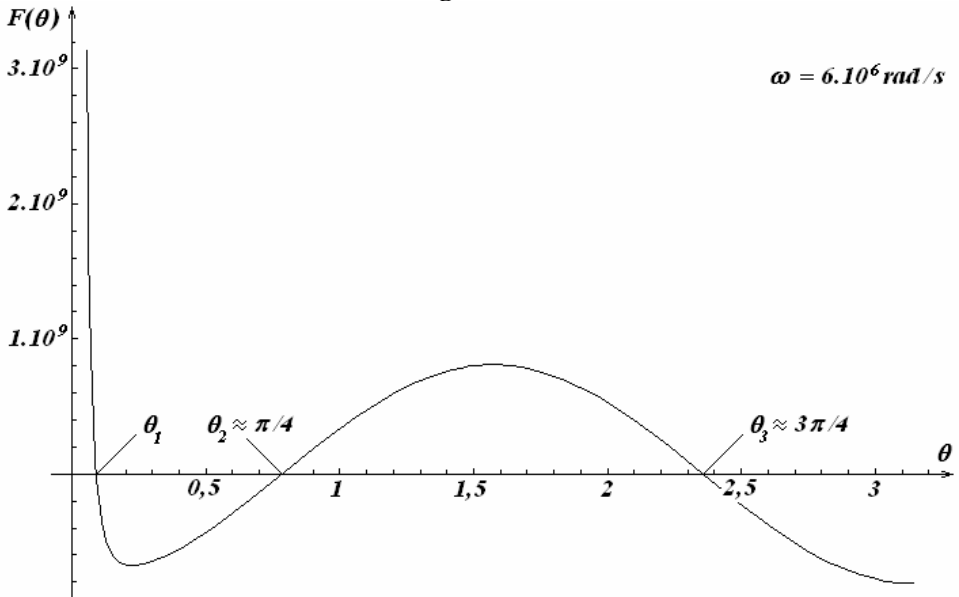


Fig. VII.16

În consecință, pozițiile de echilibru – soluții ale ecuației (7.23) – care satisfac relația  $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, \theta_3)$  sunt poziții de *echilibru stabil* (derivata a doua a energiei potențiale efective este pozitivă), iar cele care aparțin intervalului  $\theta \in (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_3, \pi]$  sunt poziții de *echilibru instabil*. Din analiza numerică rezultă faptul că pe măsură ce viteza unghiulară crește ( $\omega \rightarrow \infty$ ), valoarea cea mai mică a soluțiilor ecuației (7.25) se micșorează din ce în ce mai mult, tinzând la zero ( $\theta_1 \rightarrow 0$ ) (vezi Fig. VII.17); deci, la viteze unghiulare foarte mari avem poziții de *echilibru stabil* cuprinse doar în intervalul  $\theta \in (\theta_2, \theta_3) \approx \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ .

c) Evident, mici oscilații pot avea loc doar în jurul pozițiilor de echilibru stabil. Deoarece expresia energiei cinetice a sistemului este aceeași cu cea obținută în problema precedentă, pentru a determina perioada micilor oscilații, se utilizează formula dedusă acolo:

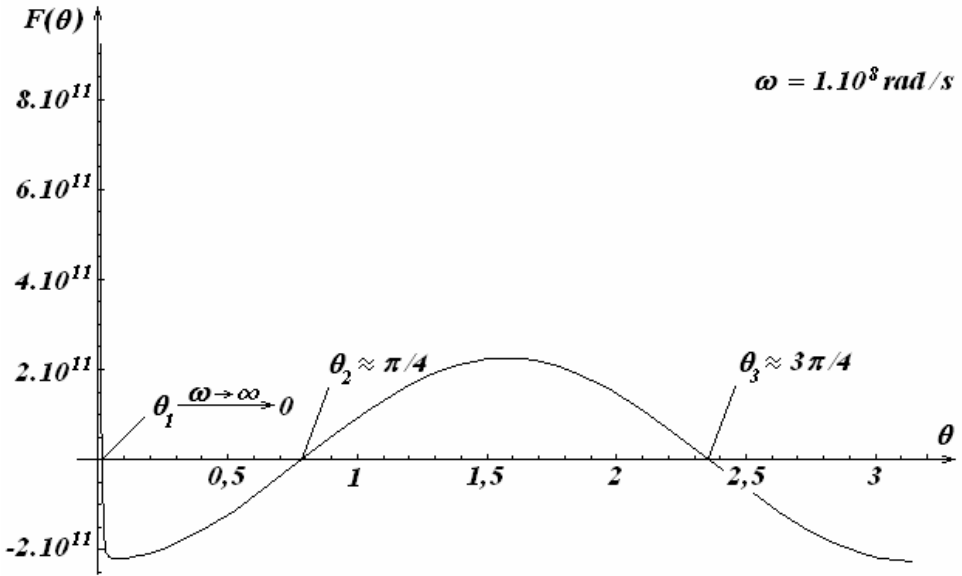


Fig. VII.17

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 \sin^2 \theta_{es} + b^2 \cos^2 \theta_{es})}{\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{es}}}},$$

în care se înlocuiesc valorile lui  $\theta$  corespunzătoare stărilor de echilibru stabil, determinate la punctele a) și b) ale problemei.

**Caz particular:**  $a = b = R$  (elipsa degerează într-un cerc de rază  $R$ ). În această situație, avem

$$V_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}},$$

iar funcția Lagrange devine

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}}.$$

În acest caz, energia potențială efectivă a sistemului va fi (vezi relația (7.21)):

$$E_{pot} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}},$$

pozițiile de echilibru ale sistemului obținându-se din ecuația

$$\begin{aligned} \frac{dE_{pot}}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left[ -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}} \right] = \\ &= -m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq' \cos \frac{\theta}{2}}{4R \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0, \end{aligned}$$

sau,

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{16\pi\epsilon_0 R \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[ -32\pi\epsilon_0 m\omega^2 R^3 \sin^3 \frac{\theta}{2} + 64\pi\epsilon_0 m\omega^2 R^3 \sin^5 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 32\pi\epsilon_0 mgR^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} - qq' \right] = 0, \end{aligned}$$

care este echivalentă cu sistemul de două ecuații

$$\begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = 0, \\ 32m\pi\epsilon_0 R^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} (g - \omega^2 R \cos \theta) - qq' = 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Soluția acceptabilă fizic a primei ecuații din acest sistem este  $\theta_1 = \pi$ , iar cea de-a doua ecuație nu are soluție analitică. Pentru a o rezolva vom apela din nou la soft-ul Mathematica 4.0. De această dată însă ne vom opri atenția doar asupra unui singur caz, anume pentru  $m = 1g$ ,  $R = 0,2m$ ,  $q = 10^{-3}C$  și  $q' = 5 \times 10^{-3}C$ . Următoarele linii de comandă permit reprezentarea grafică a dependenței  $\theta = \theta(\omega)$ , dată sub formă implicită de ecuația (7.26 – 2) și prezentată în Fig. VII.18:

```
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];
```

```
k = 10^-9/9;
R = 0.2;
g = 9.8;
m = 0.001;
q = 10^-3;
q1 = 5*10^-3;
```

```

NSolve[8*k*m*R^2*Sin[th/2]^3*(g-omega^2*R*Cos[th])-q*q1== 0, th];
g1=Plot[Evaluate[th /. %],{omega, 20000, 1000000}];
g2=Plot[Pi/2,{omega, 20000, 1000000}];
Show[g1,g2]

```

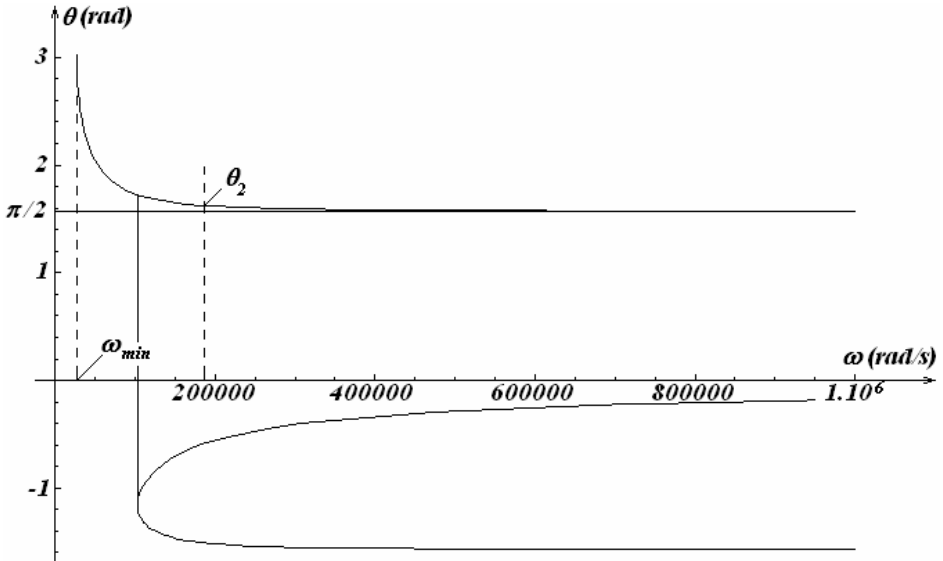


Fig. VII.18

Valoarea minimă a vitezei unghiulare,  $\omega_{\min} = 26516,503 \text{ rad/s}$  (sub care ecuația (7.26 – 2) nu are nici o soluție reală) poate fi determinată cu ajutorul liniilor de comandă:

```

8*k*m*R^2*Sin[Pi/2]^3*(g-omega^2*R*Cos[Pi])-q*q1 //N
-5.*10^-6+3.555556*10^-14*(9.8+0.2*omega^2)

```

```

NSolve[-5.*10^-6+3.5555555555555556*10^-14*(9.8+0.2*omega^2),omega]
{{omega -> -26516.503370542654}, {omega -> 26516.503370542654}}

```

După cum se poate observa din Fig. VII.18, pentru orice valoare  $\omega > \omega_{\min}$  a vitezei unghiulare, ecuația (7.26 – 2) are o singură soluție reală acceptabilă din punct de vedere fizic,  $\pi/2 < \theta_2 < \pi$ . În concluzie, în total, sistemul are două poziții de echilibru, date de soluția analitică  $\theta_1 = \pi$ , și

respectiv, de soluția numerică  $\pi/2 < \theta_2 < \pi$ . Stabilitatea acestor poziții de echilibru poate fi studiată cu ajutorul derivatei a doua în raport cu  $\theta$  a energiei potențiale,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left[ -m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq' \cos \frac{\theta}{2}}{4R \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] = \\ &= m\omega^2 R^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + mgR \cos \theta + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{8R \sin^3 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Pentru a studia semnul acestei expresii în intervalul  $0 < \theta \leq \pi$  vom apela (ca și în cazul elipsei) la reprezentarea grafică a funcției

$$D(\theta) \equiv \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} = m\omega^2 R^2 (1 - 2\cos^2 \theta) + mgR \cos \theta + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{8R \sin^3 \frac{\theta}{2}}.$$

Și în acest caz există o valoare a vitezei unghiulare,  $\omega^* = 379162,149 \text{ rad/s}$ , sub care ecuația  $D(\theta) = 0$  are o singură soluție acceptabilă din punct de vedere fizic; cu alte cuvinte, pentru  $\omega < \omega^*$  funcția  $D(\theta)$  își schimbă o singură dată semnul în intervalul  $0 < \theta \leq \pi$  (graficul funcției  $D(\theta)$  trece o singură dată prin zero). De exemplu, pentru  $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$  ecuația  $D(\theta) = 0$  are singura soluție acceptabilă din punct de vedere fizic (vezi Fig. VII.19),

$$\theta_0 = 2,4051723392579922 \text{ rad} = 0,7655901335616131 \pi \text{ rad} \cong 0,77 \pi \text{ rad}$$

Pentru a determina această soluție am utilizat următoarele linii de comandă în Mathematica 4.0:

```
NSolve[m*100000^2*R^2*(1-2*x^2)+m*g*R*x*q*q1*((3+x)/2)*(1/(8*k*  
R*((1-x)/2)^(3/2)))]==0,x]
```

care dă soluțiile

```
{{x -> 0.770893 + 0.394635i}, {x -> 0.770893 - 0.394635i}, {x -> -0.740878  
}}
```

doar ultima fiind acceptabilă din punct de vedere fizic. Cu ajutorul liniei de comandă

**ArcCos[-0.740877560929887] //N**

aceasta conduce la valoarea  $\theta_0 = 2,4051723392579922 \text{ rad}$ . Orice poziție de echilibru  $0 < \theta \leq \pi$  – soluție acceptabilă din punct de vedere fizic a ecuației (7.26 – 2) – este o poziție de *echilibru stabil* dacă  $\theta \in (0, \theta_0)$ , și respectiv, de *echilibru instabil*, dacă  $\theta \in (\theta_0, \pi]$ .

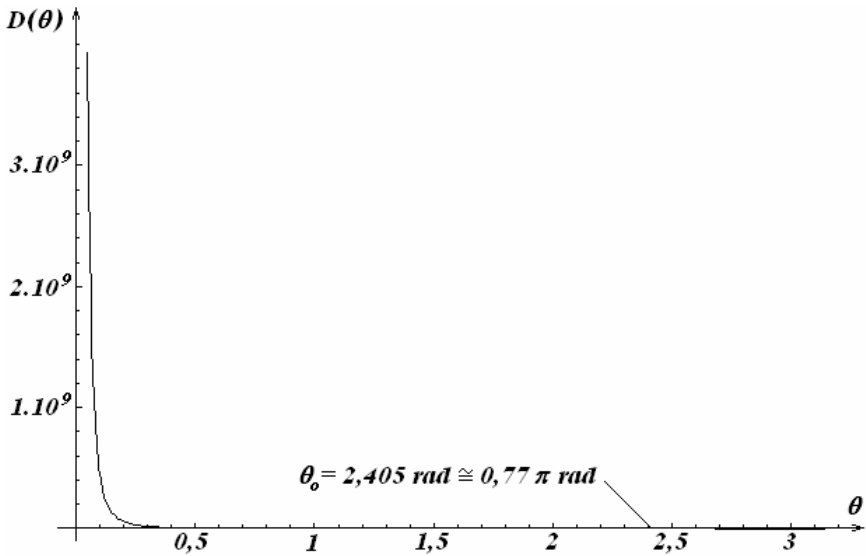


Fig. VII.19

Dacă  $\omega > \omega^*$ , atunci ecuația  $D(\theta) \equiv \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} = 0$  are trei soluții reale, toate cu semnificație fizică pentru problema de față. De exemplu, dacă  $\omega = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ , atunci graficul funcției  $D(\theta)$  arată ca în Fig. VII.20, care evidențiază câte două subintervale pentru valorile pozitive, respectiv negative, ale unghiului  $\theta$  – soluție a ecuației  $D(\theta) = 0$ . După cum se poate observa din Fig. VII.20, dacă  $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, \theta_3)$ , atunci poziția de

echilibru respectivă este o poziție de *echilibru stabil*, iar dacă  $\theta \in (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_3, \pi]$ , atunci respectiva poziție de echilibru este una de *echilibru instabil*.

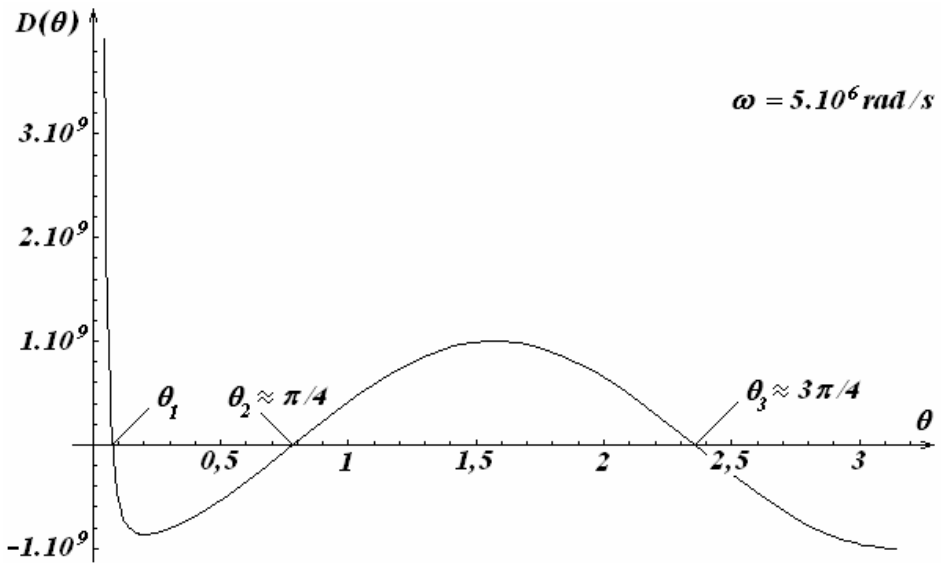


Fig. VII.20

Din analiza numerică rezultă faptul că la limita  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\theta_1 \rightarrow 0$  (vezi Fig. VII.21); deci, la viteze unghiulare foarte mari, la fel ca în cazul elipsei, avem poziții de *echilibru stabil* cuprinse doar în intervalul  $\theta \in (\theta_2, \theta_3) \approx \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ .

Pentru a determina perioada micilor oscilații, în acest caz se utilizează formula<sup>9</sup>:

$$\tau = 2\pi R \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{es}}}},$$

<sup>9</sup> Obținută din rezultatul corespunzător elipsei, în care se pune  $a = b = R$ .



în care se înlocuiesc valorile lui  $\theta$  corespunzătoare stărilor de echilibru stabil pentru această situație (cerc de rază  $R$ ).

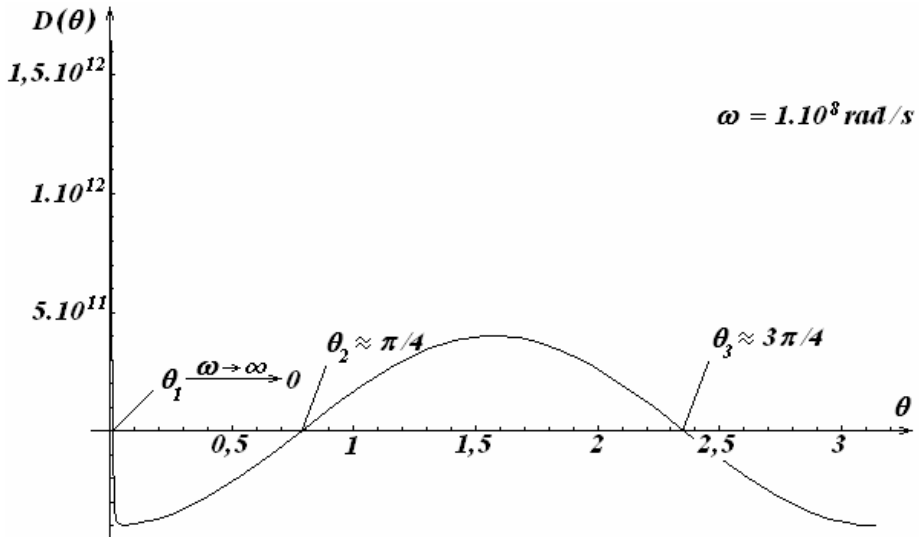


Fig. VII.21

**Observație:** Dacă, în plus, cercul este în repaus (nu se rotește) atunci problema se simplifică și mai mult și, punând în relațiile corespunzătoare cercului în rotație  $\omega = 0$ , pentru cazul considerat avem:

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}}.$$

În acest caz, energia potențială efectivă a sistemului va fi

$$E_{pot} = -mgR \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}},$$

pozițiile de echilibru ale sistemului obținându-se din ecuația

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[ -mgR \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin \frac{\theta}{2}} \right] = mgR \sin \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq' \cos \frac{\theta}{2}}{4R \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0,$$

sau,

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{16\pi\epsilon_0 R \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left( 32\pi\epsilon_0 mgR^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} - qq' \right) = 0,$$

care este echivalentă cu sistemul de două ecuații:

$$\begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = 0, \\ 32mg\pi\epsilon_0 R^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} - qq' = 0. \end{cases} \quad (7.27)$$

Din prima ecuație a acestui sistem rezultă  $\theta_1 = \pi$  (ca singură soluție acceptabilă din punct de vedere fizic), iar din ecuația (7.27 – 2) rezultă o a doua poziție de echilibru, dată de

$$\theta_2 = 2 \operatorname{arc} \sin \left( \frac{qq'}{32mg\pi\epsilon_0 R^2} \right)^{1/3},$$

cu condiția ca sarcinile să fie de același semn și  $qq' < 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ .

Semnul derivatei a doua a energiei potențiale în punctele  $\theta_1$  și  $\theta_2$  ne spune ce fel de echilibru are sistemul în cele două poziții (stabil, dacă semnul este plus, și respectiv instabil, dacă semnul este minus). Avem,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left[ mgR \sin \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq' \cos \frac{\theta}{2}}{4R \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] = mgR \cos \theta + \\ &+ \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} = mgR \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \frac{2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la

$$\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi} = -mgR + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \quad (7.28)$$

și

$$\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_2} = mgR \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \right) + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \frac{2 - \sin^2 \frac{\theta_2}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_2}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= mgR \left[ 1 - 2 \left( \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} \right)^{2/3} \right] + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \frac{2 - \left( \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} \right)^{2/3}}{\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2}} = \\
&= mgR \left[ 1 - 2 \left( \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} \right)^{2/3} \right] + mgR \left[ 2 - \left( \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} \right)^{2/3} \right] = \\
&= 3mgR - 3mgR \left( \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} \right)^{2/3} = 3mgR \cos^2 \frac{\theta_2}{2} > 0.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Din relația (7.28) rezultă că dacă sarcinile sunt de semne diferite, sau dacă sunt de același semn și  $qq' < 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ , atunci  $\theta_1 = \pi$  este o poziție de *echilibru instabil*, iar dacă sarcinile sunt de același semn și  $qq' > 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ , atunci  $\theta_1 = \pi$  este poziție de *echilibru stabil*. De asemenea, relația (7.29) ne arată că poziția de echilibru dată de  $\theta = \theta_2 = 2 \arcsin \left( \frac{qq'}{32mg\pi\epsilon_0 R^2} \right)^{1/3}$ , dacă există, este o poziție de echilibru stabil.

În ceea ce privește perioada micilor oscilații din jurul pozițiilor de echilibru stabil, aceasta este dată de

$$\tau = 2\pi R \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{es}}}}.$$

Conform rezultatelor obținute mai sus, dacă sarcinile sunt de același semn și  $qq' > 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ , atunci în jurul poziției de echilibru stabil  $\theta_1 = \pi$  au loc mici oscilații cu perioada

$$\begin{aligned}
 \tau &= 2\pi R \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi}}} \stackrel{(Px.8)}{=} 2\pi R \sqrt{\frac{m}{-mgR + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R}}} = \\
 &= 2\pi R \sqrt{\frac{32\pi\epsilon_0 mR}{qq' - 32\pi\epsilon_0 mgR^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{R}{g}}{\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} - 1}} = \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{1}{\sqrt{\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} - 1}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2} - 1}},
 \end{aligned}$$

unde

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

iar dacă sarcinile sunt de același semn și  $qq' < 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ , atunci în jurul poziției de echilibru stabil  $\theta_2 = 2 \arcsin\left(\frac{qq'}{32mg\pi\epsilon_0 R^2}\right)^{1/3}$  au loc mici oscilații cu perioada

$$\begin{aligned}
 \tau &= 2\pi R \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi}}} \stackrel{(Px.8)}{=} 2\pi R \sqrt{\frac{1}{3gR - 3gR \left(\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}}} = \\
 &= 2\pi R \sqrt{\frac{1}{3gR \left[1 - \left(\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{1}{\sqrt{3 \left[1 - \left(\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]}} = \\
 &= \tau_0 \frac{1}{\sqrt{3 \left[1 - \left(\frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]}}.
 \end{aligned}$$

**Observație:** În cazul particular când  $qq' = 32\pi\epsilon_0 mgR^2$  poziția de echilibru dată de  $\theta_2 = 2 \arcsin\left(\frac{qq'}{32mg\pi\epsilon_0 R^2}\right)^{1/3}$  va coincide cu cea dată de  $\theta_1 = \pi$ . În plus, în această situație avem:

$$\left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_2=\pi} = \left( 3mgR \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \right)_{\theta_2=\pi} = 0,$$

deci, pentru a determina stabilitatea poziției de echilibru  $\theta_2 = \theta_1 = \pi$  în acest caz special ( $qq' = 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ ) trebuie să calculăm derivatele de ordin superior ale energiei potențiale efective, mai exact, până la ordinul la care valoarea în punctul  $\theta = \pi$  a acestei derivate este diferită de zero. Avem,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left[ mgR \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \frac{2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \right] = \\ &= -2mgR \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \frac{-\sin^4 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( 2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^6 \frac{\theta}{2}} = \\ &= -mgR \sin \theta - \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{\cos \frac{\theta}{2} \left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la

$$\left. \frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} \right|_{\theta=\pi} = \left( -mgR \sin \theta - \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{\cos \frac{\theta}{2} \left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \right)_{\theta=\pi} = 0.$$

Aceasta înseamnă că trebuie să calculăm și

$$\begin{aligned} \frac{d^4 E_{pot}}{d\theta^4} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} \right) = -\frac{d}{d\theta} \left[ mgR \sin \theta + \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{\cos \frac{\theta}{2} \left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \right] = \\ &= -mgR \cos \theta - \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{\left( -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^8 \frac{\theta}{2}} + \\ &+ \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^8 \frac{\theta}{2}} = -mgR \cos \theta + \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \times \\ &\times \frac{\left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} + \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 6 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^5 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

care, în punctul  $\theta = \pi$  (și pentru  $qq' = 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ ) ia valoarea

$$\frac{d^4 E_{pot}}{d\theta^4} \Bigg|_{\substack{\theta=\pi, \\ qq'=32\pi\epsilon_0 mgR^2}} = \left( -mgR \cos \theta + \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \frac{(6 - \sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} + \frac{qq'}{64\pi\epsilon_0 R} \times \right. \\ \left. \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (6 - \sin^2 \frac{\theta}{2})}{\sin^5 \frac{\theta}{2}} \right)_{\substack{\theta=\pi, \\ qq'=32\pi\epsilon_0 mgR^2}} = mgR + \frac{5}{4} \left( \frac{qq'}{32\pi\epsilon_0 R} \right)_{qq'=32\pi\epsilon_0 mgR^2} = \frac{9}{4} mgR > 0,$$

adică, în acest caz special ( $qq' = 32\pi\epsilon_0 mgR^2$ ) poziția de echilibru dată de  $\theta = \pi$  este o poziție de *echilibru stabil*, însă micile oscilații în jurul ei *nu mai sunt armonice*.

## Capitolul VIII

### Probleme de mecanica fluidelor

1. Un lichid ideal incompresibil, de densitate  $\rho$ , se află într-un vas cilindric vertical, care se rotește în jurul axei cilindrului cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . În repaus, înălțimea la care se ridică lichidul în vas este  $h$ . Presupunând că lichidul se rotește odată cu vasul, ca un solid, să se determine

- forma suprafeței lichidului în rotație;
- presiunea în fiecare punct din interiorul lichidului;
- presiunea exercitată de lichid în orice punct de pe fundul vasului;
- forța și presiunea totală cu care lichidul acționează asupra fundului vasului.

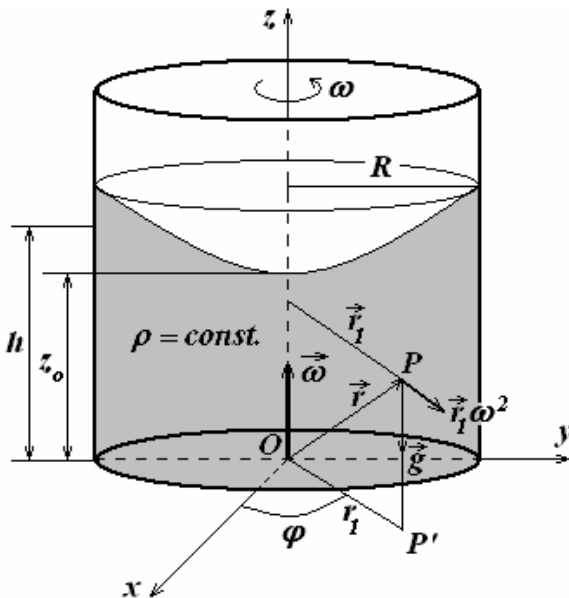


Fig. VIII.1

#### Rezolvare

a) Vom atașa un sistem de referință cilindrului în rotație, având axa  $Oz$  de-a lungul verticalei ascendente, ca în Fig. VIII.1. Față de acest reper, componentele vitezei unei particule din interiorul lichidului sunt

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0,$$

deoarece,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \stackrel{\text{formal}}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \omega x \vec{j} - \omega y \vec{i} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

Fiind un fluid ideal, acesta este descris de ecuația lui Euler,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (8.1)$$

unde  $\vec{F}$  este forța masică specifică; în cazul nostru,

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta m} = \frac{\vec{g} \Delta m}{\Delta m} = \vec{g} = -g \vec{k},$$

iar  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$  (nu există variație în timp a vitezei). În aceste condiții,

proiectând pe axe ecuația vectorială (8.1) obținem

$$Ox: (\vec{v} \cdot \nabla) v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8.2)$$

$$Oy: (\vec{v} \cdot \nabla) v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (8.3)$$

$$Oz: (\vec{v} \cdot \nabla) v_z = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Avem,

$$(\vec{v} \cdot \nabla) v_x = \left( -\omega y \frac{\partial}{\partial x} + \omega x \frac{\partial}{\partial y} \right) (-\omega y) = -\omega^2 x$$

și

$$(\vec{v} \cdot \nabla) v_y = \left( -\omega y \frac{\partial}{\partial x} + \omega x \frac{\partial}{\partial y} \right) (\omega x) = -\omega^2 y,$$

care, introduse în (8.2) și (8.3) conduc la următoarele ecuații:

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8.5)$$

$$\omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (8.6)$$



iar ecuația (8.4) – având în vedere că  $v_z = 0$  – se mai scrie astfel:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \quad (8.7)$$

Soluția generală a sistemului de ecuații (8.5) ÷ (8.7) este

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz + C, \quad (8.8)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară de integrare. Într-adevăr, din (8.5) obținem

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + f_1(y, z), \quad (8.9)$$

din ecuația (8.6) se găsește că

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 y^2 + f_2(x, z), \quad (8.10)$$

iar din ecuația (8.7) rezultă:

$$\frac{p}{\rho} = -gz + f_3(x, y). \quad (8.11)$$

Având în vedere relațiile (8.9) ÷ (8.11), în care  $f_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) sunt funcții arbitrare de argumentele lor, pentru  $\frac{p}{\rho}$  rezultă soluția (8.8).

Formula presiunii (8.8) poate fi dedusă și altfel, lucrând într-un sistem de referință neinertial. În acest sens vom considera un reper care se rotește odată cu lichidul, cu viteza unghiulară  $\omega$ , în jurul axei  $Oz$ . Deoarece față de acest referențial accelerația lichidului  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  este nulă (sistemul de referință se mișcă solidar cu lichidul) ecuația lui Euler se scrie

$$0 = \vec{F}_{\text{tot}} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (8.12)$$

unde  $\vec{F}_g = -g\vec{k}$  este forța masică specifică gravitațională, iar  $\vec{F}_{cf} = \omega^2 \vec{r}_1 = \omega^2 (x \vec{i} + y \vec{j})$  este forța masică specifică centrifugă (forța centrifugă este forță aplicată în reperul neinertial considerat). Înmulțind

scalar ecuația (8.12) cu deplasarea elementară  $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$  în punctul  $P$ , se găsește:

$$0 = \left( \vec{F}_g + \vec{F}_{cf} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot d\vec{r} = -gdz + \omega^2 (xdx + ydy) - \frac{1}{\rho} dp =$$

$$= d(-gz) + d\left(\frac{1}{2} \omega^2 r_1^2\right) + d\left(-\frac{1}{\rho} p\right), \quad (8.13)$$

unde am utilizat reprezentarea formală a gradientului,  $\nabla \bullet = \frac{d \bullet}{d\vec{r}}$  și am ținut cont că  $r_1^2 = x^2 + y^2$ . Am găsit deci că

$$d\left(\frac{1}{\rho} p\right) = d\left(\frac{1}{2} \omega^2 r_1^2\right) + d(-gz).$$

Integrând nedefinit această ecuație obținem

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz + C, \quad (8.14)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară de integrare. Evident, rezultatul obținut pe această cale coincide cu cel determinat anterior (vezi relația (8.8)). Întrucât presiunea lichidului pe suprafața lui liberă este nulă, rezultă că această suprafață este paraboloidul de rotație având drept axă chiar axa de simetrie  $Oz$  a vasului cilindric și ecuația

$$0 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz + C, \quad (8.15)$$

sau, altfel scris,

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C', \quad (8.15')$$

unde  $C' = \frac{C}{g}$  este o nouă constantă.

b) Constanta de integrare  $C$  din relația (8.15) se poate determina din condiția de egalitate a volumelor de lichid în repaus și în mișcare, știind că suprafața liberă este paraboloidul (8.15).

Pentru lichidul în repaus putem scrie:  $V = \pi R^2 h$ , iar pentru lichidul în mișcare avem

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{(V)} r_1 dr_1 d\varphi dz = \int_0^R r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + \frac{C}{g}} dz = \int_0^R r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\omega^2}{2g}r_1^2 + \frac{C}{g}} dz = \\
 &= 2\pi \int_0^R r_1 dr_1 \left( \frac{\omega^2}{2g} r_1^2 + \frac{C}{g} \right) = 2\pi \frac{\omega^2}{2g} \left( \frac{r_1^4}{4} \right)_0^R + 2\pi \frac{C}{g} \left( \frac{r_1^2}{2} \right)_0^R = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \frac{\pi CR^2}{g}.
 \end{aligned}$$

Egalitatea celor două volume,

$$\pi R^2 h = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \frac{\pi CR^2}{g},$$

furnizează pentru constanta  $C$  expresia

$$C = gh - \frac{\omega^2 R^2}{4}.$$

Așadar, presiunea în orice punct din interiorul lichidului în rotație este

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz + \rho C = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz + \rho \left( gh - \frac{\omega^2 R^2}{4} \right),$$

sau,

$$p = \rho g (h - z) + \frac{\rho\omega^2}{2} \left( x^2 + y^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (8.16)$$

c) Presiunea lichidului în orice punct de pe fundul vasului se obține imediat din relația (8.16), în care punem condiția  $z = 0$ . Rezultă:

$$p = p(x, y) = \rho gh + \frac{\rho\omega^2}{2} \left( x^2 + y^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (8.17)$$

d) Forța totală cu care lichidul acționează asupra fundului vasului este

$$\begin{aligned}
 F|_{z=0, S=\pi R^2} &= \iint_{(S)} dF = \iint_{(S)} p(x, y) dS = \iint_{(S)} p(x, y) dx dy = \iint_{(S)} p(r_1) r_1 dr_1 d\varphi = \\
 &= \int_0^R p(r_1) r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \left[ \rho gh + \frac{\rho\omega^2}{2} \left( r_1^2 - \frac{R^2}{2} \right) \right] r_1 dr_1 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\rho \left( \int_0^R ghr_1 dr_1 + \int_0^R \frac{\omega^2}{2} r_1^3 dr_1 - \int_0^R \frac{\omega^2 R^2}{4} r_1 dr_1 \right) = 2\pi\rho \left[ \left( \frac{ghr_1^2}{2} \right)_0^R + \left( \frac{\omega^2 r_1^4}{8} \right)_0^R - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\omega^2 R^2 r_1^2}{8} \right)_0^R \right] = 2\pi\rho \left( \frac{ghR^2}{2} + \frac{\omega^2 R^4}{8} - \frac{\omega^2 R^4}{8} \right) = \pi R^2 \rho gh = Mg,
\end{aligned} \tag{8.18}$$

unde  $M = \rho V = \rho Sh = \rho\pi R^2 h$  este masa totală a lichidului din vas. Așadar, forța totală cu care lichidul acționează asupra fundului vasului este egală cu greutatea lichidului din vas. Presiunea totală pe care lichidul o exercită asupra fundului vasului este

$$P = p|_{z=0, S=\pi R^2} = \frac{F|_{z=0, S=\pi R^2}}{S} = \frac{Mg}{\pi R^2} = \rho gh. \tag{8.19}$$

**2.** Utilizând expresia forței hidrodinamice de presiune a unui lichid ideal incompresibil pe suprafața laterală a unei conducte,

$$\vec{F}_p = - \left( \iint_{S_{\text{intrare}}} \vec{T} dS + \iint_{S_{\text{iesire}}} \vec{T} dS \right) + \iiint_V \rho \vec{F} d\tau, \tag{8.20}$$

unde  $\vec{T} = p\vec{n} + \rho\vec{v}v_n$ ,  $\vec{n}$  fiind versorul normalei exterioare, să se calculeze forța hidrodinamică de presiune,  $\vec{F}_p$ , asupra unui cot de conductă aflat în poziție orizontală (forța de smulgere), prin care curge în regim staționar un lichid ideal incompresibil.

## Rezolvare

Deoarece conducta este în poziție orizontală, forța masică specifică  $\vec{F} = \vec{g}$  are proiecție nulă pe această direcție, iar relația (8.20) se scrie

$$\vec{F}_p = - \iint_{S_{\text{intrare}}} \vec{T} dS - \iint_{S_{\text{iesire}}} \vec{T} dS. \tag{8.21}$$

În plus, ținând cont că parametrii lichidului se distribuie uniform într-o secțiune a conductei și că secțiunea conductei este constantă ( $S_{\text{intrare}} = S_{\text{iesire}} = S$ ), avem:

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= - \iint_{S_{\text{intrare}}} \vec{T} dS - \iint_{S_{\text{iesire}}} \vec{T} dS = -(p + \rho v^2) S \vec{n}_{\text{intrare}} - (p + \rho v^2) S \vec{n}_{\text{iesire}} = \\ &= - \left[ (p + \rho v^2) S \vec{n}_1 + (p + \rho v^2) S \vec{n}_2 \right] = -(p + \rho v^2) (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) S,\end{aligned}\quad (8.22)$$

unde am ținut cont că  $p_1 = p_2 = p$  și  $v_1 = v_2 = v$ , indicii 1 și 2 corespunzând secțiunilor de intrare și respectiv de ieșire a lichidului din cotul de conductă (vezi Fig. VIII.2). Faptul că  $v_1 = v_2 = v$  rezultă din ecuația de continuitate, scrisă pentru volumul de lichid cuprins între cele două secțiuni (de intrare și de ieșire) ale cotului de conductă:

$$S_1 v_{\text{intrare}} = S_2 v_{\text{iesire}} \Leftrightarrow S v_1 = S v_2 = S v \Leftrightarrow v_1 = v_2 = v. \quad (8.23)$$

Egalitatea celor două presiuni ( $p_1 = p_2 = p$ ) reiese din legea lui Bernoulli,

$$p + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 + \rho V^* = \text{const.}, \quad (8.24)$$

în care  $V^*$  este câmpul scalar din care derivă forța masică specifică,  $\vec{F} = -\text{grad } V^*(\vec{r}, t)$ . În cazul nostru, alegând axa  $Oz$  de-a lungul verticalei ascendente,  $V^* = gz$  și legea lui Bernoulli devine

$$p + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 + \rho gz = \text{const.} \quad (8.24')$$

Având în vedere poziția orizontală a conductei ( $z_1 = z_2$ ) și faptul că  $v_1 = v_2$  (vezi relația (8.23)), din relația (8.24'), scrisă pentru cele două puncte corespunzătoare secțiunilor de intrare și respectiv de ieșire a fluidului din cotul de conductă,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}_1|^2 + \rho gz_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}_2|^2 + \rho gz_2 = \text{const.}, \quad (8.25)$$

rezultă că  $p_1 = p_2 = p$ .

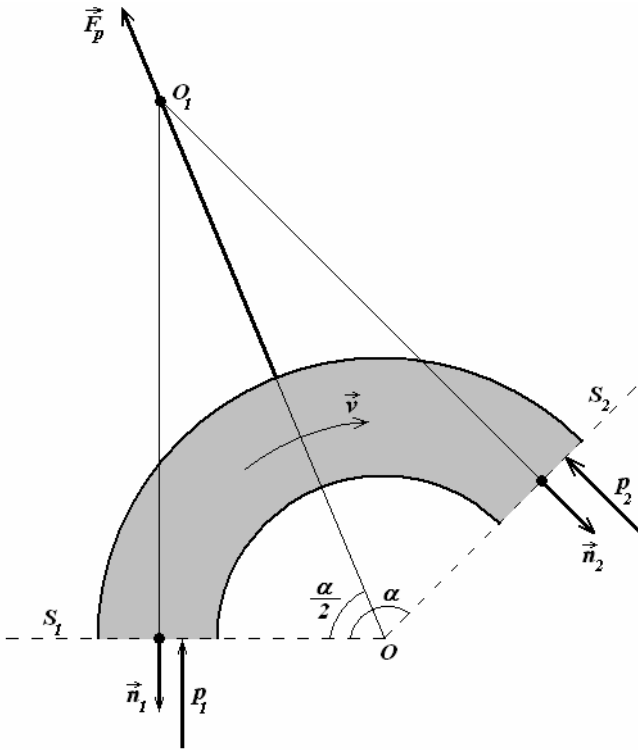


Fig. VIII.2

După cum se poate observa din Fig. VIII.2, cele două normale exterioare la secțiunile  $S_1$  și  $S_2$  se întâlnesc în punctul  $O_1$ . Rezultanta  $\vec{F}_p$  a forțelor hidrodinamice de presiune are ca suport direcția  $OO_1$ . Valoarea acesteia (proiecția ei pe direcția  $OO_1$ ) este

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_p| &= F_p = -(p + \rho v^2) \times \\
 &\times S \operatorname{pr}_{OO_1}(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) = \\
 &= -(p + \rho v^2) S \times \\
 &\times \left[ -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \right] = \\
 &= 2S(p + \rho v^2) \sin \frac{\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

3. Un strat de lichid vâscos de grosime  $h$  este mărginit superior de o suprafață liberă, iar inferior de un plan fix, care este înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de orizontală. Se cere:

- 1) să se determine viteza de mișcare a lichidului sub acțiunea propriei greutate;
- 2) să se calculeze debitul masic printr-o secțiune transversală a stratului de lichid.

## Rezolvare

1) Pentru a rezolva problema vom utiliza ecuația de continuitate și ecuațiile Stokes-Navier. Lichidul studiat are următoarele caracteristici:

- este omogen și vâscos;
- este incompresibil;
- mișcarea este plan-paralelă și unidimensională;
- curgerea este staționară.

Ecuația de continuitate se scrie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

iar ecuația Stokes-Navier sub formă vectorială este

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v},$$

unde  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$  este câmpul vitezelor,  $\vec{F}$  este forța masică specifică, iar  $\lambda$  și  $\mu$  sunt *coeficienții dinamici de vâscozitate*. În cazul lichidelor omogene și incompresibile ( $\rho = \rho(\vec{r}, t) = \text{const.}$ ), din ecuația de continuitate rezultă

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

iar ecuația Stokes-Navier devine

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v},$$

sau, dacă împărțim prin  $\rho \neq 0$ :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (8.26)$$

unde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  este *coeficientul de vâscozitate cinematică* al lichidului.

Deoarece lichidul curge doar în direcția axei  $Ox$  (vezi Fig. VIII.3) și mișcarea este staționară, rezultă că viteza lui are doar componenta  $v_x \equiv u$  diferită de zero și în plus

$$\vec{v}(x, y, z, t) \equiv \vec{i} v_x(x, y) = \vec{i} u(x, y).$$

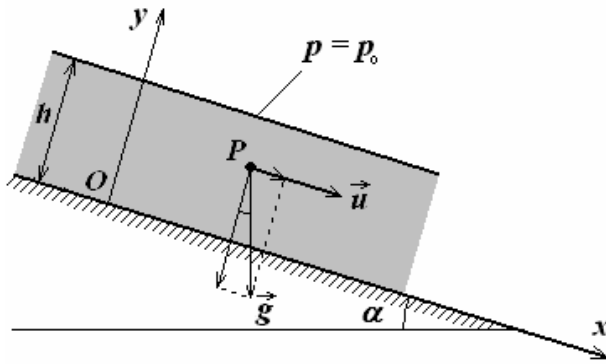


Fig. VIII.3

Atunci, din ecuația de continuitate scrisă pentru lichide omogene și incompresibile ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) rezultă:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

adică  $u = u(y)$ . Aceasta înseamnă că

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} (\vec{i} u(y)) = 0.$$

Ținând cont și de faptul că mișcarea este staționară ( $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ ), ecuația Stokes-Navier (8.26) devine:

$$0 = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v},$$

sau,

$$0 = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}. \tag{8.27}$$

Proiectând această ecuație vectorială pe cele două axe ale reperului  $xOy$  atașat lichidului (vezi Fig. VIII.3) obținem:

$$Ox: \quad 0 = \rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \tag{8.28}$$

și

$$Oy: \quad 0 = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{8.29}$$

În acest fel, problema noastră devine o problemă de ecuațiile fizicii matematice, și anume, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuații (8.28) + (8.29), în domeniul  $D = \{x, y | -\infty < x < +\infty, 0 < y < h\}$ , cu condițiile la limită:

- i)  $u(y) = 0$  pentru  $y = 0$ ;



$$\text{ii) } \frac{du}{dy} = 0 \text{ pentru } y = h;$$

$$\text{iii) } p(x, y) = p_0 = \text{const. pentru } y = h.$$

Integrând ecuația (8.29) obținem:

$$p = p(x, y) = -\rho g y \cos \alpha + p_1(x).$$

Funcția arbitrară  $p_1(x)$  poate fi determinată din cea de a treia condiție la limită. Impunând-o, găsim că

$$p_0 = -\rho g h \cos \alpha + p_1(x),$$

de unde,

$$p_1(x) = p_0 + \rho g h \cos \alpha = \text{const.}$$

Deci,

$$\begin{aligned} p = p(x, y) &= -\rho g y \cos \alpha + p_1(x) = -\rho g y \cos \alpha + p_0 + \\ &+ \rho g h \cos \alpha = p_0 + \rho g (h - y) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Cu aceasta în (8.28) obținem:

$$0 = \rho g \sin \alpha + \mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

adică,

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu}.$$

Integrând de două ori, găsim succesiv,

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} y + C_1,$$

și

$$u = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2, \quad (8.31)$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt două constante arbitrare de integrare, ce pot fi determinate din condițiile i) și ii). Astfel, avem:

$$\begin{cases} 0 = C_2, \\ 0 = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} h + C_1, \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} h.$$

Cu  $C_1$  și  $C_2$  astfel determinate în (8.31), rezultă:

$$u = u(y) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} hy = \frac{\rho g}{2\mu} (2h - y) y \sin \alpha. \quad (8.32)$$

2) Pentru a calcula debitul masic printr-o secțiune transversală a stratului de lichid (masa de lichid care străbate unitatea de suprafață transversală<sup>1</sup> în unitatea de timp) vom utiliza definiția acestei mărimi în cazul în care curgerea este staționară, iar lichidul este omogen și incompresibil:

$$Q_m = \frac{q_m}{L_z h} = \frac{1}{L_z h} \int_0^h dq_m,$$

unde

$$dq_m = \frac{dm}{\Delta t} = \frac{\rho dV}{\Delta t} = \frac{\rho u(y) \Delta t L_z dy}{\Delta t} = \rho u(y) L_z dy$$

este masa „elementară” de lichid care străbate suprafața transversală „elementară” de lățime oarecare (dimensiune de-a lungul axei  $Oz$ )  $L_z$  și înălțime (dimensiune de-a lungul axei  $Oy$ )  $dy$ , în unitatea de timp. Ținând cont de relația (8.32), pentru  $Q_m$  obținem:

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{q_m}{L_z h} = \frac{1}{L_z h} \int_0^h \rho u(y) L_z dy = \frac{1}{L_z h} \int_0^h \frac{\rho^2 g}{2\mu} L_z (2h - y) y \sin \alpha dy = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\rho^2 g}{2\mu} (2h - y) y \sin \alpha dy = \frac{\rho^2 g \sin \alpha}{h\mu} \left[ \left( \frac{h}{2} y^2 \right)_0^h - \left( \frac{1}{6} y^3 \right)_0^h \right] = \\ &= \frac{\rho^2 g \sin \alpha}{h\mu} \left( \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6} \right) = \frac{\rho^2 g h^2 \sin \alpha}{3\mu}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

**4.** Să se studieze mișcarea unui lichid vâscos și greu, care curge sub acțiunea propriei greutate, într-un canal de secțiune dreptunghiulară de

<sup>1</sup> Față de direcția de deplasare a lichidului; cu alte cuvinte, suprafața este orientată perpendicular pe axa  $Ox$ .

lățime  $2a$  și înălțime  $h$ , știind că acest canal este înclinat față de orizontală cu unghiul  $\alpha$  și că distribuția vitezelor la suprafața lichidului respectă o lege parabolică de tipul  $u(y, h) = u_m \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ , unde  $u_m$  este viteza maximă a lichidului la suprafață, în mijlocul canalului (vezi Fig. VIII.4).

## Rezolvare

Pentru a rezolva problema facem apel la ecuația de continuitate,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (8.34)$$

și ecuațiile Stokes-Navier,

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i \right] = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \Delta v_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (8.35)$$

În ceea ce privește forța masică specifică avem:

$$F_x = g \sin \alpha, \quad F_y = 0,$$

$$F_z = -g \cos \alpha,$$

iar pentru viteză (ținând cont că mișcarea lichidului are loc doar de-a lungul axei  $Ox$ ) putem scrie:

$$v_x^{\text{not.}} = u, \quad v_y = v_z = 0.$$

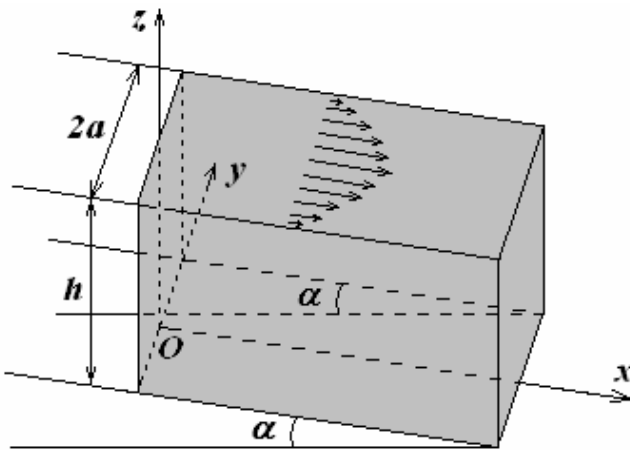


Fig. VIII.4

Întrucât lichidul este omogen și incompresibil,  $\rho = \rho(\vec{r}, t) = \text{const.}$ , iar din ecuația de continuitate rezultă:  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y, z)$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Dând valori indicelui  $i$  din relația (8.35)

succesiv, de la unu la trei, ținând cont că  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} =$   
 $= u \frac{\partial}{\partial x} (\vec{i} u(y, z)) = 0$  și că mișcarea este staționară  $\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \right)$ , obținem:

$$i = 1: \quad 0 = \rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (8.36)$$

$$i = 2: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (8.37)$$

și

$$i = 3: \quad 0 = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (8.38)$$

Din ecuația (8.37) rezultă că  $p = p(x, z)$ , iar din (8.38) avem:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha \Rightarrow p = -\rho g z \cos \alpha + p_1(x). \quad (8.39)$$

Cum pentru  $z = h$ ,  $p = p_0$ , din relația (8.39) rezultă:

$$p_0 = -\rho g h \cos \alpha + p_1(x),$$

de unde,

$$p_1(x) = p_0 + \rho g h \cos \alpha = \text{const.}$$

În aceste condiții, ecuația (Px.3) devine:

$$0 = \rho g \sin \alpha + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

sau, dacă introducem notația  $k \stackrel{\text{not.}}{=} -\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu}$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k, \quad -a < y < a, \quad 0 < z < h, \quad (8.40)$$

adică o ecuație de tip Poisson pentru funcția  $u = u(y, z)$ , cu condițiile la limită:

- i)  $u(y, 0) = 0, \quad -a \leq y \leq a;$
- ii)  $u(-a, z) = 0, \quad u(a, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq h;$
- iii)  $u(y, h) = u_m \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right), \quad -a \leq y \leq a,$

unde  $u_m$  este viteza maximă la suprafața lichidului (la mijlocul canalului, pe direcția  $Oy$ ).

Mișcarea lichidului fiind simetrică față de planul  $xOz$ , este suficient să fie studiată numai în domeniul  $0 < y < a$  al planului  $yOz$ . Pentru aceasta, vom introduce mai întâi noi coordonate, adimensionale, prin relațiile:

$$u = u_m U, \quad y = aY, \quad z = aZ, \quad \frac{h}{a} = l \quad \text{și} \quad k = \frac{u_m}{a^2} K.$$

Cu acestea, problema (8.40) cu condițiile la limită i) ÷ iii) devine:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = K, \quad 0 < Y < 1, \quad 0 < Z < l, \quad (8.41)$$

adică o ecuație de tip Poisson pentru funcția  $U = U(Y, Z)$ , cu condițiile la limită:

$$(i) \quad U(Y, 0) = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1;$$

$$(ii) \quad U(1, Z) = 0, \quad 0 \leq Z \leq l;$$

$$(iii) \quad U(Y, l) = 1 - Y^2, \quad 0 \leq Y \leq 1.$$

Avem deci de rezolvat o problemă de ecuațiile fizicii matematice, mai exact, o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, de tip Poisson, cu condiții la limită precizate. Deoarece condițiile la limită sunt de speța I, avem de rezolvat problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Poisson.

Pentru ecuația (8.41) cu condițiile la limită (i) ÷ (iii) vom căuta o soluție de forma:

$$U(Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \zeta_n(Z). \quad (8.42)$$

Întrucât

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \zeta_n(Z)$$

și

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \frac{d^2 \zeta_n(Z)}{dZ^2},$$

ecuația (8.41) ne dă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \left[ \frac{d^2 \zeta_n(Z)}{dZ^2} - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \zeta_n(Z) \right] = K. \quad (8.43)$$

Pentru a extrage de aici o ecuație diferențială pentru funcțiile  $\zeta_n(Z)$  vom scrie membrul drept al relației (8.43) sub următoarea formă:

$$K = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right). \quad (8.43')$$

Acest lucru este posibil deoarece avem:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos((2n-1)\xi)}{2n-1} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 0 \leq \xi < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{pentru } \xi = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (8.44)$$

Pentru a demonstra această relație vom utiliza următoarele serii uniform și absolut convergente pentru  $|z| < 1$ :

$$\frac{1}{1+iz} = 1 - iz - z^2 + iz^3 + \dots,$$

$$\frac{1}{1-iz} = 1 + iz - z^2 - iz^3 + \dots$$

și

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{2n-2},$$

unde  $z = \xi + i\eta$  este un număr complex, iar  $i = \sqrt{-1}$ . De aici, prin integrare, obținem:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{1+iz} dz \left[ = -i \ln(1+iz) \right] = \int (1 - iz - z^2 + iz^3 + z^4 - \dots) dz = \\ & = \int dz - i \int z dz - \int z^2 dz + i \int z^3 dz + \int z^4 dz - \dots = z - i \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + i \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-iz} dz [ = i \ln(1-iz) ] &= \int (1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 + \dots) dz = \\ &= \int dz + i \int z dz - \int z^2 dz - i \int z^3 dz + \int z^4 dz + \dots = z + i \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - i \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+z^2} dz [ = \operatorname{arctg} z ] &= \int (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots) dz = \\ &= \int dz - \int z^2 dz + \int z^4 dz - \int z^6 dz + \dots = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}. \end{aligned}$$

Adunând acum primele două integrale rezultă:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+iz} dz + \int \frac{1}{1-iz} dz &= -i \ln(1+iz) + i \ln(1-iz) = -i [ \ln(1+iz) - \ln(1-iz) ] = \\ &= -i \ln \frac{1+iz}{1-iz} = \left( z - i \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + i \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots \right) + \left( z + i \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - i \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) = \\ &= 2 \left( z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \right), \end{aligned}$$

de unde,

$$\frac{-i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} (= \operatorname{arctg} z). \quad (8.45)$$

Să alegem acum  $z = e^{i\xi}$ . Avem atunci:

$$\begin{aligned} \frac{1+iz}{1-iz} &= \frac{1+ie^{i\xi}}{1-ie^{i\xi}} = \frac{1+i(\cos \xi + i \sin \xi)}{1-i(\cos \xi + i \sin \xi)} = \frac{1-\sin \xi + i \cos \xi}{1+\sin \xi - i \cos \xi} = \\ &= \frac{(1-\sin \xi + i \cos \xi)(1+\sin \xi + i \cos \xi)}{(1+\sin \xi - i \cos \xi)(1+\sin \xi + i \cos \xi)} = \frac{1+2i \cos \xi - \sin^2 \xi - \cos^2 \xi}{(1+\sin \xi)^2 + \cos^2 \xi} = \\ &= \frac{2i \cos \xi}{2(1+\sin \xi)} = \frac{i \cos \xi}{1+\sin \xi} = \frac{\cos \xi}{1+\sin \xi} e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Dacă notăm

$$f(z) = \frac{1 + ie^{i\xi}}{1 - ie^{i\xi}} = \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} e^{i\frac{\pi}{2}},$$

având în vedere că

$$\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z),$$

unde,

$$\arg f(z) = \arctg \frac{\operatorname{Im}[f(z)]}{\operatorname{Re}[f(z)]} = \frac{\pi}{2},$$

relația (8.45) devine:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \ln f(z) &= -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} e^{i\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} \right) - \frac{i}{2} \ln e^{i\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{i}{4} \ln \left( \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} \right)^2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Atunci putem scrie:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4} \ln \left( \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} \right)^2 \pm \frac{\pi}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{i\xi(2n-1)}}{2n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ \frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1} + i \frac{\sin(2n-1)\xi}{2n-1} \right], \end{aligned} \tag{8.46}$$

semnul plus corespunzând cazului  $\xi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left( \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$ , iar semnul

minus intervalului  $\xi \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$ . Identificând în relația (8.46) părțile reale

și imaginare, obținem următoarele formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{pentru } 0 \leq \xi < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{pentru } \xi = \pm \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$



adică relația (8.44) și

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n-1)\xi}{2n-1} = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\cos \xi}{1 + \sin \xi} \right)^2.$$

Cu aceasta, demonstrația relației (8.44) este încheiată, iar formula (8.43') rezultă din (8.44) punând  $\xi = \frac{\pi}{2} Y$ . Înlocuind (8.43') în (8.43) obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( \frac{(2n-1)\pi Y}{2} \right) \left[ \frac{d^2 \zeta_n(Z)}{dZ^2} - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2 \zeta_n(Z) \right] = \\ = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \cos \left( \frac{(2n-1)\pi Y}{2} \right), \end{aligned}$$

de unde, egalând coeficienții lui  $\cos \left( \frac{(2n-1)\pi Y}{2} \right)$  din cei doi membri, rezultă pentru  $\zeta_n(Z)$  următoarele ecuații diferențiale ordinare:

$$A_n \zeta_n''(Z) - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} A_n \zeta_n(Z) = \frac{(-1)^{n-1} 4K}{(2n-1)\pi}, \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

sau,

$$\zeta_n''(Z) - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \zeta_n(Z) = \frac{(-1)^{n-1} 4K}{(2n-1)\pi A_n}, \quad (n \in \mathbb{N}^*), \quad (8.47)$$

cu condițiile la limită:  $\zeta_n(0) = 0$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( \frac{(2n-1)\pi Y}{2} \right) \zeta_n(l) = 1 - Y^2$ .

Pentru fiecare valoare a lui  $n \in \mathbb{N}^*$ , soluția generală a oricărei ecuații neomogene (8.47) se scrie ca suma dintre soluția generală ( $\zeta_n^{(o)}$ ) a ecuației omogene atașate,

$$\zeta_n''(Z) - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \zeta_n(Z) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (8.48)$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene corespunzătoare:

$$\zeta_n(Z) = \zeta_n^{(o)} + \zeta_n^{(p)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ecuațiile omogene (8.48) au soluții de forma

$$\zeta_n^{(o)} = B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} + C_n \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi Z}{2},$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene corespunzătoare trebuie aleasă de forma unei constante (termenul de neomogenitate fiind o constantă), pentru fiecare valoare a lui ( $n \in \mathbb{N}^*$ ):

$$\zeta_n^{(p)} = P_n = \operatorname{const}_n. \tag{8.49}$$

Constantele  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  se determină din condiția ca soluțiile (8.49) să verifice ecuațiile neomogene (8.47):

$$-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} P_n = \frac{(-1)^{n-1} 4K}{(2n-1)\pi A_n},$$

de unde,

$$P_n = \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}.$$

Deci, soluțiile generale ale ecuațiilor (8.47) sunt

$$\zeta_n(Z) = B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} + C_n \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}, \tag{8.50}$$

constantele arbitrare de integrare  $B_n$  și  $C_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  urmând a fi determinate din condițiile la limită:

$$\zeta_n(0) = 0$$

și

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \zeta_n(l) = 1 - Y^2.$$

Astfel, impunând condiția la limită  $\zeta_n(0) = 0$ , obținem:

$$\zeta_n(0) = C_n + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} = 0,$$

de unde,

$$C_n = -\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} = \frac{(-1)^{n-1} 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}, \tag{8.51}$$

iar  $\zeta_n(Z)$  devine:

$$\begin{aligned} \zeta_n(Z) &= B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} + \frac{(-1)^{n-1} 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} + \\ &+ \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} = B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi Z}{2} \right]. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Pentru a determina constantele arbitrare  $B_n$  vom utiliza condiția la limită:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \zeta_n(l) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \times \\ &\times \left\{ B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right] \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right] \right\} \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) = 1 - Y^2, \end{aligned} \quad (8.53)$$

în care îl vom exprima pe  $1 - Y^2$  ca o serie de același tip cu cea din membrul stâng. În acest scop, având în vedere faptul că seria (8.44), adică,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

este uniform și absolut convergentă, aceasta poate fi integrată termen cu termen și obținem:

$$\begin{aligned} \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1} \right] d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int \left[ (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1} \right] d\xi \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2} = \int \frac{\pi}{4} d\xi = \frac{\pi}{4} \xi + K_1, \end{aligned}$$

unde  $K_1$  este o constantă arbitrară de integrare, ce poate fi determinată din condiția ca relația de mai sus să fie valabilă pentru orice valoare a lui  $\xi$ , deci și pentru  $\xi = 0$ . Impunând această condiție în relația de mai sus obținem simplu  $K_1 = 0$  și atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4} \xi.$$

Integrând nedefinit încă o dată, găsim:

$$\begin{aligned} \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2} \right] d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int \left[ (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2} \right] d\xi \right\} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^3} = \int \frac{\pi}{4} \xi d\xi = \frac{\pi}{8} \xi^2 + K_2, \end{aligned}$$

sau,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^3} = -\frac{\pi}{8} \xi^2 + K_3, \quad (8.54)$$

unde  $K_3 = -K_2$  este o nouă constantă arbitrară de integrare, ce poate fi determinată la fel ca mai sus. Punând deci  $\xi = 0$  în relația (8.54) obținem:

$$K_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

și atunci,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^3} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{\pi^2}{4} - \xi^2 \right), \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (8.55)$$

Dacă aici luăm pe  $\xi$  de forma  $\xi = \frac{\pi}{2} Y$  obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} (1 - Y^2),$$

de unde,

$$1 - Y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right),$$

care, introdusă în (8.53) conduce la

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right] \right\} \times \\ & \times \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right). \end{aligned}$$

Identificând coeficienții lui  $\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)$  din cei doi membri ai relației de mai sus, avem:

$$A_n B_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right] = \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3},$$

de unde,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{\frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3} + \frac{(-1)^{n-1} 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right]}{A_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi l}{2}} = \\ &= \frac{\frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 2 + K \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right) \right]}{A_n \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi l}{2}}. \end{aligned}$$

Cu aceste constante în relația (8.52) găsim:

$$\begin{aligned} \zeta_n(Z) &= \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 2 + K \left( 1 - ch \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right) \right] \frac{sh \frac{(2n-1)\pi Z}{2}}{A_n sh \frac{(2n-1)\pi l}{2}} + \\ &+ \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} \left[ 1 - ch \frac{(2n-1)\pi Z}{2} \right] = \frac{1}{A_n} \frac{sh \frac{(2n-1)\pi Z}{2}}{sh \frac{(2n-1)\pi l}{2}} \times \\ &\times \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[ 2 + K \left( 1 - ch \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right) \right] + \frac{1}{A_n} \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \times \\ &\times \left[ 1 - ch \frac{(2n-1)\pi Z}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dacă introducem notațiile

$$\beta(Z) \stackrel{not.}{=} 1 - ch \frac{(2n-1)\pi Z}{2} \text{ și } \gamma(Z) \stackrel{not.}{=} sh \frac{(2n-1)\pi Z}{2},$$

$\zeta_n(Z)$  se va scrie mai simplu:

$$\zeta_n(Z) = \frac{1}{A_n} \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \left\{ \left[ 2 + K\beta(l) \right] \frac{\gamma(Z)}{\gamma(l)} - K\beta(Z) \right\}. \quad (8.56)$$

Înlocuind pe  $\zeta_n(Z)$  din relația (8.56) în relația (8.42) se obține în cele din urmă:

$$U(Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \left\{ \left[ 2 + K\beta(l) \right] \frac{\gamma(Z)}{\gamma(l)} - K\beta(Z) \right\} \cos \left( \frac{(2n-1)\pi Y}{2} \right),$$

sau, dacă introducem o nouă notație prin  $\delta(Y) \stackrel{not.}{=} \cos \left( \frac{(2n-1)\pi Y}{2} \right)$ ,

$$U(Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16 \delta(Y)}{(2n-1)^3 \pi^3} \left\{ [2 + K\beta(l)] \frac{\gamma(Z)}{\gamma(l)} - K\beta(Z) \right\}. \quad (8.57)$$

Pentru a determina pe  $u = u(y, z)$ , vom rescrie sub formă explicită relația (8.57) și vom reveni la mărimile dimensionale  $u = u_m U$ ,  $y = aY$ ,  $z = aZ$ ,  $\frac{h}{a} = l$  și  $k = \frac{u_m}{a^2} K$ . Avem,

$$U(Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) \times \\ \times \left\{ \left[ 2 + K \left( 1 - ch \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right) \right] \frac{sh \frac{(2n-1)\pi Z}{2}}{sh \frac{(2n-1)\pi l}{2}} - K \left( 1 - ch \frac{(2n-1)\pi Z}{2} \right) \right\},$$

de unde,

$$u(y, z) = u_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2a}\right) \times \\ \times \left\{ \left[ 2 + \frac{ka^2}{u_m} \left( 1 - ch \frac{(2n-1)\pi h}{2a} \right) \right] \frac{sh \frac{(2n-1)\pi z}{2a}}{sh \frac{(2n-1)\pi h}{2a}} - \frac{ka^2}{u_m} \left( 1 - ch \frac{(2n-1)\pi z}{2a} \right) \right\},$$

sau încă,

$$u(y, z) = u_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2a}\right) \times$$

$$\times \left\{ \left[ 2 - \frac{\rho g a^2 \sin \alpha}{\mu u_m} \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi h}{2a} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi z}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi h}{2a}} + \frac{\rho g a^2 \sin \alpha}{\mu u_m} \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi z}{2a} \right) \right\}. \quad (8.58)$$

Considerând cazul particular în care  $a = h = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = \rho \sin \alpha$ ,  $u_m = 1 \text{ m/s}$  și luând  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , relația (8.57) devine:

$$u(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos \left( \frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) \times \left\{ \left[ 1 - 5 \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi z}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi}{2}} + 5 \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi z}{2} \right) \right\},$$

iar în Fig. VIII.5 sunt redată curbele de egală viteză în acest caz. Acestea au fost obținute cu ajutorul soft-ului Mathematica 4.0 utilizând următoarele linii de comandă:

```
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];
```

```
k = (-1)^(n-1)*32/((2*n-1)^3*Pi^3);
e1 = Cos[((2*n-1)*Pi*y)/2];
e2 = 1-Cosh[((2*n-1)*Pi)/2];
e3 = Sinh[((2*n-1)*Pi*z)/2];
e4 = Sinh[((2*n-1)*Pi)/2];
e5 = 1-Cosh[((2*n-1)*Pi*z)/2];
```

```
NSolve[Sum[k * e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)] == 0.4, z];
```

```
G1 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
```



```

NSolve[ $\sum_{n=1}^{\infty} (k * e1 * ((1-5 * e2) * (e3/e4) + 5 * e5)) == 0.6, z]$ ;
G2 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[ $\sum_{n=1}^{\infty} (k * e1 * ((1-5 * e2) * (e3/e4) + 5 * e5)) == 0.8, z]$ ;
G3 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[ $\sum_{n=1}^{\infty} (k * e1 * ((1-5 * e2) * (e3/e4) + 5 * e5)) == 1., z]$ ;
G4 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[ $\sum_{n=1}^{\infty} (k * e1 * ((1-5 * e2) * (e3/e4) + 5 * e5)) == 1.2, z]$ ;
G5 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[ $\sum_{n=1}^{\infty} (k * e1 * ((1-5 * e2) * (e3/e4) + 5 * e5)) == 1.4, z]$ ;
G6 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[ $\sum_{n=1}^{\infty} (k * e1 * ((1-5 * e2) * (e3/e4) + 5 * e5)) == 1.6, z]$ ;
G7 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
Show[G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7]

```

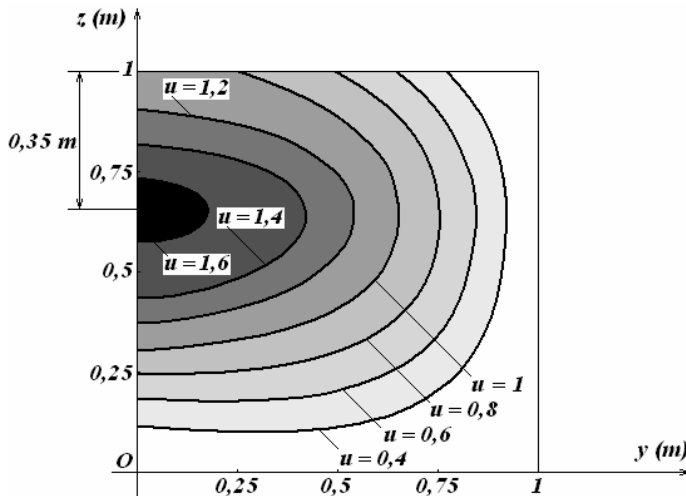


Fig. VIII.5

Din Fig. VIII.5 se poate observa că viteza de curgere sub acțiunea propriei greutate a lichidului vâscos are valoarea maximă la adâncimea de aproximativ  $0,35 m$ .

## Anexa A

## Alfabetul grec (vechi)

Nr.	Litera mare	Litera mică	Nume
1.	<i>A</i>	$\alpha$	alfa
2.	<i>B</i>	$\beta$	beta
3.	$\Gamma$	$\gamma$	gamma
4.	$\Delta$	$\delta$	delta
5.	<i>E</i>	$\varepsilon$	epsilon
6.	<i>Z</i>	$\zeta$ (variantă: $\varsigma$ )	dzeta
7.	<i>H</i>	$\eta$	eta
8.	$\Theta$	$\theta$ (variantă: $\vartheta$ )	theta
9.	<i>I</i>	$\iota$	iota
10.	<i>K</i>	$\kappa$	kappa
11.	$\Lambda$	$\lambda$	lambda
12.	<i>M</i>	$\mu$	miu
13.	<i>N</i>	$\nu$	niu
14.	$\Xi$	$\xi$	csi
15.	<i>O</i>	$o$	omicron
16.	$\Pi$	$\pi$	pi
17.	<i>P</i>	$\rho$	rho
18.	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
19.	<i>T</i>	$\tau$	tau
20.	$\Upsilon$	$\upsilon$	ipsilon
21.	$\Phi$	$\phi$ (variantă: $\phi$ )	fi
22.	<i>X</i>	$\chi$	hi
23.	$\Psi$	$\psi$	psi
24.	$\Omega$	$\omega$ (variantă: $\varpi$ )	omega

## Anexa B

### Elemente de analiză combinatorie, trigonometrie și analiză matematică. Formule utile

#### B.1. Permutări

**Definiție:** Se numesc *permutări* ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele  $n$  elemente ale lui  $A$ .

- Numărul permutărilor a  $n$  elemente,  $n \in \mathbb{N}^*$  este

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!. \quad (\text{B.1})$$

Prin definiție  $0! = 1$ . Numărul  $n!$  se citește „ $n$  factorial”.

**Exemplu:** Numărul permutărilor a trei elemente,  $a$ ,  $b$  și  $c$  ( $abc$ ,  $acb$ ,  $bac$ ,  $bca$ ,  $cab$ ,  $cba$ ) este  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

- Numărul permutărilor cu repetiție a  $n$  elemente, în care fiecare element se poate repeta până la  $n$  ori este

$$\overline{P}_n = n^n. \quad (\text{B.2})$$

**Exemplu:** Cu elementele  $a$ ,  $b$  și  $c$  putem forma permutările cu repetiție:

$aaa$ ,  $aab$ ,  $aac$ ,  $aba$ ,  $aca$ ,  $baa$ ,  $caa$ ,  $abc$ ,  $acb$ ,  
 $bbb$ ,  $bba$ ,  $bbc$ ,  $bab$ ,  $bcb$ ,  $abb$ ,  $cbb$ ,  $bac$ ,  $bca$ ,  
 $ccc$ ,  $cca$ ,  $ccb$ ,  $cac$ ,  $cbc$ ,  $acc$ ,  $bcc$ ,  $cab$ ,  $cba$ ,

adică  $\overline{P}_3 = 3^3 = 27$  permutări.

- Numărul permutărilor a  $n$  elemente, dintre care  $\alpha_1$  sunt egale între ele,  $\alpha_2$  sunt egale între ele, ...,  $\alpha_r$  sunt egale între ele, este egal cu

$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r!}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n). \quad (\text{B.3})$$

**Exemplu:** Pentru  $n = 5$  și  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 2$  avem

$aaabb$ ,  $aabab$ ,  $aabba$ ,  $abaab$ ,  $ababa$ ,  
 $abbaa$ ,  $baaab$ ,  $baaba$ ,  $babaa$ ,  $bbaaa$ ,

$$\text{adică } \widetilde{P}_5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

▪ Proprietăți ale factorialilor:

- $n! = (n-1)!n$  ;  $n! = (n-2)!(n-1)n$  ;
- $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$  ;  $n! = \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$ .

▪ Formulele lui Stirling:

- $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  ;
- $\ln n! \cong n \ln \left(\frac{n}{e}\right) = n \ln n - n$  .

Prima formulă a lui Stirling ne permite să calculăm o valoare aproximativă pentru  $n!$  la *valori mari* ale lui  $n$ . De exemplu, pentru  $n=10$  avem  $10! = 3\,628\,800$ , iar formula  $n! \cong (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$  ne dă  $10! \cong 3\,598\,696$ , adică ni-l dă pe  $10!$  cu eroarea relativă

$$\delta(10!) = \frac{\Delta(10!)}{10!} = \frac{3\,628\,800 - 3\,598\,696}{3\,628\,800} \cong 0,0083 = 0,8 \%,$$

deci, mai mică de 1 % .

## B.2. Aranjamente

**Definiție:** Se numesc *aranjamente* a  $n$  elemente luate câte  $m$ , ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente, toate submulțimile ordonate cu câte  $m$  elemente care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ .

Aranjamentele a  $n$  elemente luate câte  $m$  se notează cu  $A_n^m$ .

▪ Numărul aranjamentelor a celor  $n$  elemente luate câte  $m$  este

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (n \geq m). \quad (\text{B.4})$$

**Exemplu:** Numărul aranjamentelor a patru elemente  $a, b, c$  și  $d$  luate câte două este  $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12$ , adică

$ab, ac, ad,$   
 $bc, bd, ba,$   
 $cd, ca, cb,$   
 $da, db, dc.$

▪ Proprietăți:

- $A_n^n = P_n$  ;
- $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$  ;
- $A_n^{n-1} = A_n^n$  ;
- $A_n^0 = 1.$

▪ Numărul *aranjamentelor cu repetiție* a  $n$  elemente luate câte  $m$  este

$$\overline{A}_n^m = n^m. \quad (\text{B.5})$$

**Exemplu:** Pentru trei elemente  $a, b$  și  $c$ , aranjamentele lor cu repetiție, ce câte două elemente sunt în număr de  $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$ , adică:

$aa, ab, ac,$   
 $bb, bc, ba,$   
 $cc, ca, cb.$

▪ Numărul funcțiilor injective definite pe o mulțime cu  $m$  elemente cu valori într-o altă mulțime cu  $n$  elemente ( $n \geq m$ ) este egal cu  $A_n^m$ .

▪ Numărul funcțiilor bijective  $n$  elemente cu valori într-o altă mulțime cu  $n$  elemente este egal cu  $A_n^n = n!$ .

### B.3. Combinări

**Definiție:** Se numesc combinări a  $n$  elemente luate câte  $m$ , ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate submulțimile cu câte  $m$  elemente, care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ .

Combinările a  $n$  elemente luate câte  $m$  se notează cu  $C_n^m$ .

- Numărul combinărilor a  $n$  elemente luate câte  $m$  este

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}. \quad (\text{B.6})$$

**Exemplu:** Numărul combinărilor a patru elemente  $a$ ,  $b$ ,  $c$  și  $d$  luate

câte trei este  $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$ , adică

$abc \quad abd \quad bcd \quad cda$ .

- Proprietăți. Pentru  $0 \leq m \leq n$  avem:

- $C_n^1 = n$  ;
- $C_n^m = C_n^{n-m}$  ;
- $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$  ;
- $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$  ;
- $C_n^m = C_{n+1}^{m-1} + C_{n+2}^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$ .

- Numărul submulțimilor unei mulțimi cu  $n$  elemente este  $2^n$ .

- Numărul combinărilor cu repetiție a  $n$  elemente luate câte  $m$  este

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{m!}. \quad (\text{B.7})$$

**Exemplu:** Cu trei elemente  $a$ ,  $b$  și  $c$  se pot forma următoarele combinări cu repetiție de câte două elemente:  $aa$ ,  $bb$ ,  $cc$ ,  $ab$ ,  $ac$ ,  $bc$ . Deci

$n=3$ ,  $m=2$  și  $\overline{C}_3^2 = C_4^2 = 6$  combinări cu repetiție.

## B.4. Elemente de trigonometrie. Formule utile

### Unități de măsură pentru unghiuri. Transformarea gradelor sexazecimale în radiani

Unitățile de măsură pentru unghiuri și arce sunt:

- *gradul sexagesimal* ( $^{\circ}$ ), cu submultipli săi: *minutul sexagesimal* ( $'$ ) și *secunda sexagesimală* ( $''$ );
- *radianul* (rad);
- *unghiul drept* (dr) și
- *gradul centesimal* ( $^{\text{g}}$ ), cu submultipli săi: *minutul centesimal* ( $^{\text{c}}$ ) și *secunda centesimală* ( $^{\text{cc}}$ ):

$$1^{\circ} = 60' = 3600''; \quad 1' = 60'';$$

$$1^{\text{g}} = 100^{\text{c}} = 10\,000^{\text{cc}}; \quad 1^{\text{c}} = 100^{\text{cc}};$$

$$90^{\circ} = \pi/2 \text{ rad} = 100^{\text{g}} = 1 \text{ dr}.$$

Relații importante între aceste unități pentru unghiuri:

$$1^{\circ} = 0,017453 \text{ rad}; \quad 1' = 0,000291 \text{ rad}; \quad 1'' = 0,000005 \text{ rad};$$

$$1 \text{ rad} = 57^{\circ}17'45'' = 0,6366198 \text{ dr} = 63,66198^{\text{g}};$$

$$30^{\circ} = \pi/6 \text{ rad}; \quad 45^{\circ} = \pi/4 \text{ rad}; \quad 60^{\circ} = \pi/3 \text{ rad}; \quad 90^{\circ} = \pi/2 \text{ rad};$$

$$180^{\circ} = \pi \text{ rad}; \quad 270^{\circ} = 3\pi/2 \text{ rad}; \quad 360^{\circ} = 2\pi \text{ rad};$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626434\dots$$

### Definiția funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic

Dacă  $ABC$  este un triunghi dreptunghic în  $A$ ,  $b$  și  $c$  sunt lungimile catetelor și  $a$  lungimea ipotenuzei, atunci:

$\sin B = b/a; \cos B = c/a$	$\sec B = 1/\cos B = a/c$
$\text{tg } B = b/c; \text{cotg } B = c/b$	$\text{cosec } B = 1/\sin B = a/b$
$\sin C = c/a; \cos C = b/a$	$\sec C = 1/\cos C = a/b$
$\text{tg } C = c/b; \text{cotg } C = b/c$	$\text{cosec } C = 1/\sin C = a/c$



### Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului $tg(u/2) = t$

$$\sin u = 2t(1+t^2); \quad \cos u = (1-t^2)/(1+t^2); \quad tg u = 2t/(1-t^2);$$

$$\cotg u = (1-t^2)/(2t); \quad \sec u = (1+t^2)/(1-t^2); \quad \operatorname{cosec} u = (1+t^2)/(2t).$$

### Liniazarea unor puteri ale sinusului și cosinusului

$$\sin^2 u = (1 - \cos 2u) / 2;$$

$$\sin^3 u = (3 \sin u - \sin 3u) / 4;$$

$$\sin^4 u = (3 - 4 \cos 2u + \cos 4u) / 8;$$

$$\sin^5 u = (10 \sin u - 5 \sin 3u + \sin 5u) / 16;$$

$$\cos^2 u = (1 + \cos 2u) / 2;$$

$$\cos^3 u = (3 \cos u + \cos 3u) / 4;$$

$$\cos^4 u = (3 + 4 \cos 2u + \cos 4u) / 8;$$

$$\cos^5 u = (10 \cos u + 5 \cos 3u + \cos 5u) / 16;$$

$$\sin^7 u = (35 \sin u - 21 \sin 3u + 7 \sin 5u - \sin 7u) / 64;$$

$$\cos^7 u = (35 \cos u - 21 \cos 3u + 7 \cos 5u - \cos 7u) / 64;$$

$$\sin^8 u = (35 - 56 \cos 2u + 28 \cos 4u - 8 \cos 6u + \cos 8u) / 128;$$

$$\cos^8 u = (35 + 56 \cos 2u + 28 \cos 4u + 8 \cos 6u + \cos 8u) / 128.$$

### Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice fundamentale

Cadranul \ Funcția	$\sin u$	$\cos u$	$tg u$	$ctg u$
I ( $0 < u < \pi/2$ )	+	+	+	+
II ( $\pi/2 < u < \pi$ )	+	-	-	-
III ( $\pi < u < 3\pi/2$ )	-	-	+	+
IV ( $3\pi/2 < u < 2\pi$ )	-	+	-	-

### Formule de reducere la un unghi ascuțit

Fucția\Argumentul	$v = \frac{\pi}{2} \pm u$	$v = \pi \pm u$	$v = \frac{3\pi}{2} \pm u$	$v = 2\pi - u$	$v = -u$
$\sin v$	$\cos u$	$\mp \sin u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$-\sin u$
$\cos v$	$\mp \sin u$	$-\cos u$	$\pm \sin u$	$\cos u$	$\cos u$
$\operatorname{tg} v$	$\mp \cotgu$	$\pm \operatorname{tgu}$	$\mp \cotgu$	$-\operatorname{tgu}$	$-\operatorname{tgu}$
$\operatorname{ctg} v$	$\mp \operatorname{tgu}$	$\pm \cotgu$	$\mp \operatorname{tgu}$	$-\cotgu$	$-\cotgu$

### Expresiile funcțiilor $\sin^2 u$ , $\cos^2 u$ , $\operatorname{tg}^2 u$ și $\operatorname{ctg}^2 u$ în funcție de pătratul unei funcții trigonometrice fundamentale

	$\sin^2 u$	$\cos^2 u$	$\operatorname{tg}^2 u$	$\operatorname{ctg}^2 u$
$\sin^2 u$		$1 - \cos^2 u$	$\frac{\operatorname{tg}^2 u}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$	$(1 + \operatorname{ctg}^2 u)^{-1}$
$\cos^2 u$	$1 - \sin^2 u$		$(1 + \operatorname{tg}^2 u)^{-1}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 u}{1 + \operatorname{ctg}^2 u}$
$\operatorname{tg}^2 u$	$\frac{\sin^2 u}{1 - \sin^2 u}$	$\frac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u}$		$1/\operatorname{ctg}^2 u$
$\operatorname{ctg}^2 u$	$\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}$	$\frac{\cos^2 u}{1 - \cos^2 u}$	$1/\operatorname{tg}^2 u$	

### Valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale ale câtorva unghiuri importante

Cadran	Unghiul $u$	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$
I	$0^\circ$	0	1	0	nu e definită
	$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
	$18^\circ = \frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

I	$36^\circ = \frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	Unghiul $u$	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cot} g u$
	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$72^\circ = \frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	nu e definită	0
II	$108^\circ = \frac{3\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1
	$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$162^\circ = \frac{9\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-4}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$180^\circ = \pi$	0	-1	0	nu e definită
III	$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1

III	$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	Unghiul $u$	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tgu}$	$\operatorname{cotgu}$
	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$-1$	$0$	nu e definită	$0$
IV	$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$	$-1$
	$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$360^\circ = 2\pi$	$0$	$1$	$0$	nu e definită

### Funcțiile trigonometrice exprimate cu ajutorul uneia dintre ele

		Funcția necunoscută					
		$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tgu}$	$\operatorname{cotgu}$	$\frac{\sec u}{1} = \frac{1}{\cos u}$	$\frac{\operatorname{cosec} u}{1} = \frac{1}{\sin u}$
Funcția cunoscută	$\sin u$	$\sin u$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\pm 1}$	$\frac{\pm \sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\pm \sin u}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\frac{1}{\sin u}$
	$\cos u$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\pm 1}$	$\cos u$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\pm \cos u}$	$\frac{\pm \cos u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$	$\frac{1}{\cos u}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$
	$\operatorname{tg} u$	$\frac{\pm \operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$	$\operatorname{tgu}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} u}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\pm 1}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\pm \operatorname{tg} u}$
	$\operatorname{cotg} u$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}$	$\frac{\pm \operatorname{cotg} u}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} u}$	$\operatorname{cotgu}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}{\pm \operatorname{cotg} u}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 u}}{\pm 1}$
	$\sec u$	$\frac{\sqrt{\sec^2 u - 1}}{\pm \sec u}$	$\frac{1}{\sec u}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 u - 1}}{\pm 1}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{\sec^2 u - 1}}$	$\sec u$	$\frac{\pm \sec u}{\sqrt{\sec^2 u - 1}}$

<b>COSEC <math>u</math></b>	$\frac{1}{\operatorname{cosec} u}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}{\pm \operatorname{cosec} u}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}{\pm 1}$	$\frac{\pm \operatorname{cosec} u}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}$	<b>COSEC <math>u</math></b>

### Funcțiile trigonometrice fundamentale ale unor sume și diferențe de unghiuri

$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tgu} \pm \operatorname{tgv}}{1 \mp \operatorname{tgu} \operatorname{tgv}}$	$\operatorname{cotg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v \mp 1}{\operatorname{cotg} v \pm \operatorname{cotg} u}$
$\sin(u + v + w) = \sin u \cos v \cos w + \sin v \cos w \cos u + \sin w \cos u \cos v - \sin u \sin v \sin w$	
$\cos(u + v + w) = \cos u \cos v \cos w - \sin u \sin v \cos w - \sin v \sin w \cos u - \sin u \sin w \cos v$	
$\operatorname{tg}(u + v + w) = \frac{\operatorname{tgu} + \operatorname{tgv} + \operatorname{tgw} - \operatorname{tgu} \operatorname{tgv} \operatorname{tgw}}{1 - (\operatorname{tgu} \operatorname{tgv} + \operatorname{tgv} \operatorname{tgw} + \operatorname{tgw} \operatorname{tgu})}$	
$\operatorname{cotg}(u + v + w) = \frac{\operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v \operatorname{cotg} w - \operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg} v - \operatorname{cotg} w}{\operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} v \operatorname{cotg} w + \operatorname{cotg} w \operatorname{cotg} u - 1}$	

Câteva aplicații ale acestor formule:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - u) &= \cos u; & \cos(90^\circ - u) &= \sin u; & \operatorname{tg}(90^\circ - u) &= \operatorname{cotg} u; \\ \operatorname{cotg}(90^\circ - u) &= \operatorname{tgu}; & \sin(\pi - u) &= \sin u; & \cos(\pi - u) &= -\cos u; \\ \operatorname{tg}(\pi - u) &= -\operatorname{tgu}; & \operatorname{cotg}(\pi - u) &= -\operatorname{cotg} u. \end{aligned}$$

### Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice fundamentale în sume de funcții trigonometrice corespunzătoare

$\sin u \cos v = \frac{[\sin(u+v) + \sin(u-v)]}{2}$	$\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v}$
$\cos u \cos v = \frac{[\cos(u+v) + \cos(u-v)]}{2}$	$\operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v = \frac{\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}$
$\sin u \sin v = \frac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$	$\operatorname{cotg} u \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{cotg} u + \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} v}$
$4 \sin u \sin v \sin w = \sin(u + v - w) + \sin(-u + v + w) + \sin(u - v + w) - \sin(u + v + w)$	

$$4 \sin u \cos v \cos w = \sin(u + v - w) - \sin(-u + v + w) + \sin(u - v + w) + \sin(u + v + w)$$

$$4 \sin u \sin v \cos w = -\cos(u + v - w) + \cos(-u + v + w) + \cos(u - v + w) - \cos(u + v + w)$$

$$4 \cos u \cos v \cos w = \cos(-u + v - w) + \cos(u - v + w) + \cos(u + v - w) + \cos(u + v + w)$$

## Funcțiile trigonometrice ale jumătății, dublului și triplului unui unghi

### i) Funcțiile trigonometrice fundamentale ale jumătății unghiului

Funcția căutată	Expresia ei
$\sin(u/2)$	$\pm\sqrt{(1-\cos u)/2}$
$\cos(u/2)$	$\pm\sqrt{(1+\cos u)/2}$
$\operatorname{tg}(u/2)$	$\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg} u} = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{1-\cos u}{\sin u} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$
$\operatorname{cotg}(u/2)$	$\frac{1}{-\operatorname{cotg} u \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 u + 1}} = \frac{\sin u}{1-\cos u} = \frac{1+\cos u}{\sin u} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}}$

### ii) Funcțiile trigonometrice fundamentale ale dublului unghiului

Funcția căutată	Expresia ei
$\sin 2u$	$2 \sin u \cos u = \pm 2 \sin u \sqrt{1-\sin^2 u} = \pm 2 \cos u \sqrt{1-\cos^2 u}$
$\cos 2u$	$\cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u$
$\operatorname{tg} 2u$	$(2 \operatorname{tg} u) / (1 - \operatorname{tg}^2 u)$
$\operatorname{cotg} 2u$	$(\operatorname{cotg}^2 u - 1) / (2 \operatorname{cotg} u)$
$\sec 2u$	$\sec^2 u / (2 - \sec^2 u)$
$\operatorname{cosec} 2u$	$\pm(\operatorname{cosec}^2 u) / 2\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}$

### iii) Funcțiile trigonometrice fundamentale ale triplului unghiului

Funcția căutată	Expresia ei
$\sin 3u$	$3 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$
$\cos 3u$	$\cos^3 u - 3 \cos u \sin^2 u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u$
$\operatorname{tg} 3u$	$(3 \operatorname{tg} u - \operatorname{tg}^3 u) / (1 - 3 \operatorname{tg}^2 u)$
$\operatorname{cotg} 3u$	$(\operatorname{cotg}^3 u - 3 \operatorname{cotg} u) / (3 \operatorname{cotg}^2 u - 1)$

Alte formule utile:

$$\sin 4u = 2 \sin 2u \cdot \cos 2u; \quad \cos 4u = 8 \cos^4 u - 8 \cos^2 u + 1;$$

$$\operatorname{tg} 4u = (4 \operatorname{tg} u - 4 \operatorname{tg}^3 u) / (1 - 6 \operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg}^4 u);$$

$$\operatorname{cotg} 4u = (\operatorname{cotg}^4 u - 6 \operatorname{cotg}^2 u + 1) / (4 \operatorname{cotg}^3 u - 4 \operatorname{cotg} u).$$

### Formule de transformare a unor sume de funcții trigonometrice în produse (formule calculabile prin logaritmi)

$$\sin u + \sin v = 2 \sin((u+v)/2) \cos((u-v)/2);$$

$$\sin u - \sin v = 2 \sin(u-v/2) \cos((u+v)/2);$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos((u+v)/2) \cos((u-v)/2);$$

$$\cos u - \cos v = 2 \sin((u+v)/2) \sin((u-v)/2);$$

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = (\sin(u+v)) / (\cos u \cos v); \quad \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = (\sin(u-v)) / (\cos u \cos v);$$

$$\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v = (\sin(v+u)) / (\sin u \sin v);$$

$$\operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg} v = (\sin(v-u)) / (\sin u \sin v);$$

$$1 - \cos u = 2 \sin^2(u/2); \quad 1 + \cos u = 2 \cos^2(u/2); \quad 1 \pm \sin 2u = (\sin u \pm \cos u)^2;$$

$$1 \pm \sin u = \sin(\pi/2) \pm \sin u; \quad 1 \pm \operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(\pi/4) \pm \operatorname{tg} u;$$

$$\sin u + \cos u = \sqrt{2} \sin(u + \pi/4) = \sqrt{2} \cos(u - \pi/4);$$

$$\sin u - \cos u = \sqrt{2} \sin(u - \pi/4) = -\sqrt{2} \cos(u + \pi/4).$$

### Identități pentru funcțiile trigonometrice ale unghiurilor $A$ , $B$ și $C$ ale unui triunghi oarecare

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos(A/2) \cdot \cos(B/2) \cdot \cos(C/2);$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin(A/2) \cdot \sin(B/2) \cdot \sin(C/2);$$

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2;$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C;$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C;$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$



$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C;$$

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2 - 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C;$$

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C;$$

$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1;$$

$$\operatorname{tg}(A/2) \cdot \operatorname{tg}(B/2) + \operatorname{tg}(B/2) \cdot \operatorname{tg}(C/2) + \operatorname{tg}(C/2) \cdot \operatorname{tg}(A/2) = 1;$$

$$\operatorname{cotg}(A/2) + \operatorname{cotg}(B/2) + \operatorname{cotg}(C/2) = \operatorname{cotg}(A/2) \cdot \operatorname{cotg}(B/2) \cdot \operatorname{cotg}(C/2);$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C, \text{ (Relatia lui Cagnoli);}$$

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = 1;$$

$$\begin{aligned} 2 \cos A \cos B \cos C (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = \\ = \operatorname{tg}(A/2) \operatorname{tg}(B/2) \operatorname{tg}(C/2) (\sin A + \sin B + \sin C)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = (\sin A + \sin B + \sin C)(-\sin A + \sin B + \sin C) \times \\ \times (\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C). \end{aligned}$$

**Inegalități verificate de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare și de alte elemente ale acestuia**

$$8 \sin(A/2) \cdot \sin(B/2) \cdot \sin(C/2) \leq 1;$$

$$4 \left[ \sin^2(A/2) + \sin^2(B/2) + \sin^2(C/2) \right] \geq 3;$$

$$8 \cos(A/2) \cdot \cos(B/2) \cdot \cos(C/2) \leq 3\sqrt{3}; \quad \sin(A/2) < \cos(B/2) \cdot \cos(C/2);$$

$$3\sqrt{3} \left[ \operatorname{tg}(A/2) \cdot \operatorname{tg}(B/2) \cdot \operatorname{tg}(C/2) \right] \leq 1; \quad \operatorname{tg}(A/2) + \operatorname{tg}(B/2) + \operatorname{tg}(C/2) \geq \sqrt{3};$$

$$8 \cos A \cos B \cos C \leq 1; \quad 8 \sin A \sin B \sin C \leq 3\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg}^2(A/2) + \operatorname{tg}^2(B/2) + \operatorname{tg}^2(C/2) \geq 1; \quad 2(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3\sqrt{3};$$

$$2 \leq 2(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 3; \quad \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A \geq 9;$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C; \quad p \geq 3R \cdot \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C};$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{3}S; \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2; \quad 27Rr \leq 2p^2; \quad p \geq 3r\sqrt{3}; \quad R \geq 2r.$$

### Relații între elementele unui triunghi oarecare

a) Teorema sinusurilor:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

b) Teorema cosinusurilor:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

c) Teorema tangențelor (relațiile lui Neper):

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}[(A-B)/2]}{\operatorname{tg}[(A+B)/2]}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}[(B-C)/2]}{\operatorname{tg}[(B+C)/2]}, \quad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}[(C-A)/2]}{\operatorname{tg}[(C+A)/2]},$$

$$\operatorname{tg}A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B} = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}; \quad \operatorname{tg}B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C} = \frac{b \sin A}{c - b \cos A};$$

$$\operatorname{tg}C = \frac{c \sin A}{b - c \cos A} = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}.$$

d) Teorema proiecțiilor:

$$a = b \cos C + c \cos B; \quad b = c \cos A + a \cos C; \quad c = a \cos B + b \cos A.$$

e) Formulele lui Karl Mollweide:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos[(A-B)/2]}{\sin(C/2)}; \quad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos[(B-C)/2]}{\sin(A/2)}; \quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos[(C-A)/2]}{\sin(B/2)};$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin[(A-B)/2]}{\cos(C/2)}; \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin[(B-C)/2]}{\cos(A/2)}; \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin[(C-A)/2]}{\cos(B/2)}.$$

f) Alte relații importante:

- $\sin(a/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/bc}; \quad \cos(A/2) = \sqrt{p(p-a)/bc};$   
 $\operatorname{tg}(A/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/p(p-a)}$  și analoagele acestora;
- $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C;$
- $r = (p-a) \operatorname{tg}(A/2) = (p-b) \operatorname{tg}(B/2) = (p-c) \operatorname{tg}(C/2);$
- $p-a = 4R \cos(A/2) \cdot \sin(B/2) \cdot \sin(C/2)$  și analoagele acesteia;

- $h_a = 2R \sin B \sin C$ ;  $r_a = r + a \operatorname{tg}(A/2)$ ;  $p = 4R \cos(A/2) \cos(B/2) \cos(C/2)$ .
- $r = 4R \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2)$ ;  $r = p \operatorname{tg}(A/2) \operatorname{tg}(B/2) \operatorname{tg}(C/2)$ .

### Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice în cazurile tip

Cazul	Datele	Necunoscutele	Formule de rezolvare			
			$\operatorname{tg} B = b/c$	$\operatorname{tg} C = c/b$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$S = bc/2$
I	$A = 90^\circ, b, c$	$B, a, C, S$	$\operatorname{cotg} B = c/b$	$\operatorname{cotg} C = b/c$	$a = b/\cos \hat{C}$	$S = bc/2$
			$\sin B = b/a$	$\cos C = b/a$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
II	$A = 90^\circ, a, b$	$B, c, C, S$	$C = 90^\circ - B$	$B = 90^\circ - C$	$c = a \cos B$	$S = b\sqrt{a^2 - b^2}/2$
					$S = (1/2)ab \sin \hat{C}$	
III	$A = 90^\circ, B, a$	$C, c, b, S$	$C = 90^\circ - B$	$b = a \sin B$	$c = a \sin C$	$S = (1/4)a^2 \sin 2B$
				$b = a \cos C$	$c = a \cos B$	
IV	$A = 90^\circ, B, b$	$C, c, a, S$	$C = 90^\circ - B$	$a = b/\sin B$	$c = b \operatorname{tg} C$	$S = (1/2)b^2 \operatorname{cotg} B$
				$a = b/\cos C$	$c = b \operatorname{cotg} B$	

## Rezolvarea triunghiurilor oarecare în cazurile tip

Caz	Date	Necunoscute	Formule de rezolvare			
I	$B, C, a$	$A, b, c, S$	$A = \pi + \frac{B+C}{-1}$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$c = (a \sin C) / \sin A$	$S = (1/2)bc \sin A$
	$A, B, a$	$C, b, c, S$	$C = \pi + \frac{A+B}{-1}$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$c = (a \sin C) / \sin A$	$S = \frac{(a^2/2) \sin B \sin C}{\sin A}$
II	$C, a, b$	$A, B, c, S$	$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}; \\ A + B = 180^\circ - C \end{cases}$		$c = (a \sin C) / \sin A$	$S = \frac{ab \sin C}{2}$
III	$A, a, b$	$B, C, c, S$	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$	$C = \pi + \frac{A+B}{-1}$	$c = (a \sin C) / \sin A$ $c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ $c = (b \sin C) / \sin B$	$S = (1/2)bc \sin A;$ $S = (b/a) \sin A \times$ $\times \left( b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} \right)$
IV	$a, b, c$	$A, B, C, S$	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad 2p = a + b + c.$			
			$\operatorname{tg}(A/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/(p-a)}; \quad \cos(B/2) = \sqrt{p(p-b)/ac};$ $\sin(c/2) = \sqrt{(p-a)(p-b)/ab}$			

**Observație:** În cazul III putem avea drept soluție: două triunghiuri, un triunghi sau nici un triunghi, cu datele  $A, a, b$ .

Intr-adevăr, apariția radicalului  $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$  în expresia lui  $c$  impune o discuție a semnului cantității de sub radical. Pe scurt, această discuție este:

- $A > 90^\circ$

$a > b \Rightarrow$  un singur triunghi;

$a \leq b \Rightarrow$  nici un triunghi.

- $A = 90^\circ$

$a > b \Rightarrow$  un singur triunghi;

$a \leq b \Rightarrow$  nici un triunghi.

- $A < 90^\circ$

i)  $a < b \sin A \Rightarrow$  nici un triunghi;

ii)  $a = b \sin A \Rightarrow$  un triunghi dreptunghic,  $B = 90^\circ$ ;

iii)  $a > b \sin A : \begin{cases} a > b \Rightarrow \text{un singur triunghi;} \\ a = b \Rightarrow \text{un singur triunghi isocel;} \\ a < b \Rightarrow \text{două triunghiuri.} \end{cases}$

### Produse. Sume. Inegalități și identități remarcabile

- $\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = n/2^{n-1}$ ;

- $\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \sqrt{n}/2^{n-1}$ ;

- $\cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \sqrt{n}/2^{n-1}$ ;

- $\sin \frac{\pi}{4n} \cdot \sin \frac{3\pi}{4n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \sqrt{2}/2^n$ ;

- $\cos \frac{\pi}{4n} \cdot \cos \frac{3\pi}{4n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \sqrt{2}/2^{n-1}$ ;

- $\sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}/2^n$ ;

- $\cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \cos \frac{n\pi}{2n+1} = 1/2^n$ ;

- $\cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = (-1)^n / 2^{2n}$  ;
- $\cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \cos \frac{2^n \pi}{2n+1} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}, & n \text{ impar}; \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}, & n \text{ par}; \end{cases}$
- $\cos(x/2) \cdot \cos(x/2^2) \cdot \dots \cdot \cos(x/2^n) = \sin x / [2^n \sin(x/2^n)]$  ;
- $(2 \cos x - 1) \cdot (2 \cos 2x - 1) \cdot \dots \cdot (2 \cos(2^{n-1}x) - 1) = \frac{2 \cos(2^n x) + 1}{1 + 2 \cos x}$  ;  
 $1 + 2 \cos x \neq 0$  ;
- $\sin x + \sin(x+h) + \dots + \sin(x+nh) = \frac{\sin \frac{(n+1)h}{2} \sin \frac{2x+nh}{2}}{\sin(h/2)}$  ,  $\sin(h/2) \neq 0$  ;
- $\cos x + \cos(x+h) + \dots + \cos(x+nh) = \frac{\sin \frac{(n+1)h}{2} \cos \frac{2x+nh}{2}}{\sin(h/2)}$  ,  
 $\sin(h/2) \neq 0$  ;
- $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = (\sin^2 nx) / \sin x$  ,  $\sin x \neq 0$  ;
- $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = [\sin(2nx)] / 2 \sin x$  ,  $\sin x \neq 0$  ;
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x + \dots + \operatorname{tg}(2^{n-1}x) + \operatorname{cotg}(2^{n-1}x) =$   
 $= 2 [\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(2^n x)]$  ;
- $\operatorname{tg} x + (1/2) \operatorname{tg}(x/2) + (1/4) \operatorname{tg}(x/4) + \dots + (1/2^n) \operatorname{tg}(x/2^n) =$   
 $(1/2^n) \operatorname{cotg}(x/2^n) - 2 \operatorname{cotg}(2x)$  ;
- $1 + a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1}$  ;
- $a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}$  ;
- $\operatorname{arctg}(1/3) + \operatorname{arctg}(1/7) + \dots + \operatorname{arctg}(1/(n^2 + n + 1)) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\frac{1}{n+1})$  ,  
 $n \in \mathbb{N}^*$  ;

- $\arctg(1/2) + \arctg(1/8) + \dots + \arctg(1/(2n^2)) = \frac{\pi}{4} - \arctg\left(\frac{1}{2n+1}\right),$   
 $n \in \mathbb{N}^* ;$
- $\cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7) = -1/2 ;$
- $\cos(\pi/19) + \cos(3\pi/19) + \dots + \cos(17\pi/19) = 1/2 ;$
- $\arctg(1/2) + \arctg(1/3) = \pi/4 ;$
- $4\arctg(1/5) - \arctg(1/239) = \pi/4 ,$  (Machin);
- $\arctg(1/3) + \arctg(1/5) + \arctg(1/7) + \arctg(1/8) = \pi/4 ;$
- $8\arctg(1/10) - \arctg(1/239) - \arctg(1/515) = \pi/4 ,$  (Meisel);
- $24\arctg(1/8) + 8\arctg(1/57) + 4\arctg(1/239) = \pi ;$
- $|\sin x| \leq |x|, |\sin nx| \leq n|x|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* ;$
- $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R} ;$
- $\sin(x + y + z) < \sin x + \sin y + \sin z, \forall x, y, z \in (0, \pi/2) .$

## Funcții trigonometrice inverse

Relații între funcțiile trigonometrice inverse:

$$\left\{ \begin{array}{l} \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \arctg\left(x/\sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{arccotg}\left(\sqrt{1-x^2}/x\right), 0 < x < 1; \\ \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \arctg\left(\sqrt{1-x^2}/x\right) = \operatorname{arccotg}\left(x/\sqrt{1-x^2}\right), 0 < x < 1; \\ \arctg x = \arcsin\left(x/\sqrt{1+x^2}\right) = \arccos\left(1/\sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arccotg}(1/x), x > 0; \\ \operatorname{arccotg} x = \arcsin\left(1/\sqrt{1+x^2}\right) = \arccos\left(x/\sqrt{1+x^2}\right) = \arctg(1/x), x > 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2), & 0 < x < 1; \\ 2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1), & 0 < x < 1; \\ 2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \left[ \frac{(1 - x^2)}{(2x)} \right], & x > 0; \\ 2 \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} \left[ \frac{(x^2 - 1)}{(2x)} \right], & x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arcsin x = 2 \arccos \left[ \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} \right], & 0 < x < 1; \\ \arccos x = 2 \arccos \left[ \sqrt{\frac{(1+x)}{2}} \right], & 0 < x < 1; \\ \operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)}{x} \right], & x > 0. \end{cases}$$

Formule de adunare:

$$\begin{cases} \arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy), & 0 < x, y < 1; \\ \arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), & 0 < x, y < 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}), & 0 < x, y < 1; \\ \arccos x - \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}), & 0 < x, y < 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arccotg} \frac{1-xy}{x+y}, & x, y > 0; \\ \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & x, y > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arccotg} x + \operatorname{arccotg} y = \operatorname{arccotg} \frac{xy-1}{x+y}, & x, y > 0; \\ \operatorname{arccotg} x - \operatorname{arccotg} y = \operatorname{arctg} \frac{y-x}{1+xy}, & x, y > 0. \end{cases}$$



**Condiții necesare și suficiente ca valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale corespunzătoare la două unghiuri  $u$  și  $v$  să fie egale**

Teoremă.

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$  sau  $u = \pi - v + 2l\pi$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ ;
- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$  sau  $u = -v + 2l\pi$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ ;
- $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ ,  $u \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ ,  $v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ ;
- $\operatorname{cotg} u = \operatorname{cotg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ ,  $u \neq m\pi$ ,  $v \neq n\pi$ ,  $k, m, n \in \mathbb{Z}$

**Ecuatii trigonometrice fundamentale**

Ecuția	Discuție după $a$	Mulțimea soluțiilor $S$
$\sin x = a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = (\arcsin a + 2\mathbb{Z}\pi) \cup (\pi - \arcsin a + 2\mathbb{Z}\pi)$ sau $\begin{cases} x' = \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x'' = \pi - \arcsin a + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$
	$ a  > 1$	$S = \emptyset$
	$a = -1$	$S = -\pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$
$\cos x = a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = (\arccos a + 2\mathbb{Z}\pi) \cup (-\arccos a + 2\mathbb{Z}\pi)$ sau $\begin{cases} x' = \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x'' = -\arccos a + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$
	$ a  > 1$	$S = \emptyset$
	$a = -1$	$S = \pi + 2\mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = 2\mathbb{Z}\pi$

$\operatorname{tg} x = a$ $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$ $a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arctg} a + \mathbb{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
	$a = -1$	$S = -\pi/4 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \pi/4 + \mathbb{Z}\pi$
$\operatorname{cotg} x = a$ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ $a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arccotg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arccotg} a + \mathbb{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arccotg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
	$a = -1$	$S = 3\pi/4 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \pi/4 + \mathbb{Z}\pi$

### Exemple:

- $\sin x = -\sqrt{3/2}$ ,  $x = (-1)^n (-\pi/3) + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . În intervalul  $[0, 360^\circ]$  avem rădăcinile:  $x_1 = 240^\circ$  și  $x_2 = 300^\circ$ ;
- $\cos x = 1/3$ ,  $x' = \arccos(1/3) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sau  $x'' = -\arccos(1/3) + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;
- $\operatorname{tg} x = -4$ ,  $x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$ ,  $x = 5\pi/6 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\cos x = -1/2$ ,  $x = \pm [\arccos(-1/2)] + 2k\pi = \pm [\pi - \arccos(1/2)] + 2k\pi = \pm (2\pi/3) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . În intervalul  $[0, 2\pi]$  avem rădăcinile (valorile principale):  $x_1 = 2\pi/3$  și  $x_2 = 4\pi/3$ ;

## B.5. Formule din analiza matematică

### Derivatele funcțiilor elementare

Funcția $y = f(x)$	Domeniul de definiție	Derivata $y'$	Mulțimea pe care $y$ este derivabilă
$y = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = 0$	$\mathbb{R}$
$y = x$	$\mathbb{R}$	$y' = 1$	$\mathbb{R}$
$y = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = a$	$\mathbb{R}$
$y = x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$y = ax^n,$ $(n \in \mathbb{N}), a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = nax^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$y = 1/x$	$\mathbb{R}^*$	$y' = -1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$y = x^{-n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$y' = -n/x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$y = x^\alpha,$ $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{R}$	$[0, +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$[0, +\infty)$
$y = x^\alpha,$ $\alpha < 1, \alpha \in \mathbb{R}$	$(0, +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$y' = 1/(2\sqrt{x})$	$\mathbb{R}_+^*$
$y = \sqrt[n]{x},$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R}_+$	$y' = 1/(n\sqrt[n]{x^{n-1}})$	$\mathbb{R}_+^*$
$y = \frac{ax+b}{cx+d},$ $a, b, c, d \in \mathbb{R},$ $ad - bc \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$
$y = e^x$	$\mathbb{R}$	$y' = e^x$	$\mathbb{R}$
$y = ae^x, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = ae^x$	$\mathbb{R}$
$y = ae^{bx}, a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = abe^{bx}$	$\mathbb{R}$
$y = a^x, a > 0,$ $a \neq 1, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$

Funcția $y = f(x)$	Domeniul de definiție	Derivata $y'$	Mulțimea pe care $y$ este derivabilă
$y = ba^x, a > 0,$ $a \neq 1, a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = ba^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$y = ba^{cx}, a \neq 1,$ $a > 0, a, b, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = bca^{cx} \ln a$	$\mathbb{R}$
$y = \ln x$	$(0, +\infty)$	$y' = 1/x$	$(0, +\infty)$
$y = \ln x $	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y' = 1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = \log_a x, a \in \mathbb{R},$ $a > 0, a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$y' = 1/(x \ln a)$	$(0, +\infty)$
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$y' = \cos x$	$\mathbb{R}$
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$y' = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} =$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$	$y' = -1/\sin^2 x =$ $= -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$y' = 1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$y' = -1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$y' = 1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$y' = -1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$y' = \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$y' = \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$

Ținând cont de mulțimile pe care funcțiile elementare sunt derivabile, de regulile precedente de derivare a funcțiilor elementare și de regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$y(x) = f(u(x)), \quad y'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x);$$

$$y(x) = f(u(v(x))), \quad y'(x) = f'(u)u'(v)v'(x),$$

obținem formulele de derivare cuprinse în tabelul următor.

### Derivate ale unor funcții compuse

Funcția $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Funcția $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$u$	$u'$	$Ca^u, C \in \mathbb{R},$ $a > 0, a \neq 1,$ $a \in \mathbb{R}$	$Cu' a^u \cdot \ln a$
$au, a \in \mathbb{R}$	$au'$	$\ln u, u > 0$	$u'/u$
$u \pm v$	$u' \pm v'$	$\ln u , u \neq 0$	$u'/u$
$uv$	$u'v \pm uv'$	$\log_a u, u > 0,$ $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	$(u' \cdot \log_a e)/u$
$uvw$	$u'vw + uv'w +$ $+uvw'$	$\sin u$	$u' \cos u$
$1/v$	$-v'/v^2$	$\cos u$	$-u' \sin u$
$u/v$	$(u'v - uv')/v^2$	$\operatorname{tg} u,$ $u \notin \mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}$	$u'/\cos^2 u$
$u^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$nu^{n-1} \cdot u'$	$\operatorname{cotg} u,$ $u \notin \mathbb{Z}\pi$	$-u'/\sin^2 u$
$au^n, n \in \mathbb{Z}^*,$ $a \in \mathbb{R}$	$nau^{n-1} \cdot u'$	$\arcsin u$	$u'/\sqrt{1-u^2}$
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R},$ $u > 0$	$\alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$\arccos u$	$-u'/\sqrt{1-u^2}$
$\sqrt{u}, u > 0$	$u'/(2\sqrt{u})$	$\operatorname{arctg} u$	$u'/(1+u^2)$
$\sqrt[n]{u}, n \text{ impar},$ $u \neq 0$	$u'/(n\sqrt[n]{u^{n-1}})$	$\operatorname{arccotg} u$	$-u'/(1+u^2)$

Funcția $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Funcția $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$\sqrt[n]{u}$ , $n$ par, $u > 0$	$u' / (n\sqrt[n]{u^{n-1}})$	$u^v$ , $u > 0$	$u^v (u'^{\frac{v}{u}} + v' \ln u)$
$e^u$	$u' \cdot e^u$	$x^v$ , $x > 0$	$v x^{v-1} + x^v v' \cdot \ln x$
$ae^u$ , $a \in \mathbb{R}$	$au' \cdot e^u$	$x^x$ , $x > 0$	$x^x (1 + \ln x)$

În tabelul de mai sus am notat cu  $u$ ,  $v$ ,  $w$  diferite funcții reale derivabile.

### Derivata unui determinant

Fie  $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $I$  un interval,  $n^2$  funcții de clasă  $C^1$  pe  $I$  și

$D(x) = |a_{ij}(x)|$ . Atunci avem:

$$D' = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\ + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

**Exemplu:** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ . Pentru a calcula derivata

$f'(x)$  notăm:  $u(x) \stackrel{\text{not.}}{=} 2x/(x^2+1)$ ,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci,  $f(x) = \arcsin u(x)$ .

Funcțiile  $\arcsin$  și  $u$  fiind derivabile, rezultă că  $f$  este derivabilă. Din calculele „legitime” pe care le vom face va rezulta și domeniul pe care  $f'$  există (este definită). Avem:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}; \quad u'(x) = 2 \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};$$

$$\sqrt{1-u^2(x)} = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{|x^2-1|}{x^2+1}.$$

Acum,

$$f' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{(x^2+1)}{|x^2-1|},$$

sau

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^2+1}, & x < -1, \\ \frac{2}{x^2+1}, & -1 < x < 1, \\ \frac{-2}{x^2+1}, & x > 1. \end{cases}$$

Astfel,  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Punctele  $A(-1, -\pi/2)$  și  $B(1, \pi/2)$  sunt puncte unghiulare:  $f'_s(-1) = -1$ ;  $f'_d(-1) = 1$ ,  $f'_s(1) = 1$ ,  $f'_d(1) = -1$ .

**Câteva derivate de ordin  $n$ :**

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(1/x)^n = (-1)^n \cdot n! / x^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(ae^x)^{(n)} = ae^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(x^m)^{(n)} = A_m^n x^{m-n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq n \leq m; \quad (x^m)^{(m)} = m!;$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad n \in \mathbb{N}^*;$$

$$(\operatorname{sh} x)^{(2n)} = \operatorname{sh} x; \quad (\operatorname{sh} x)^{(2n-1)} = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(\operatorname{ch} x)^{(2n)} = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)^{(2n-1)} = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n \cdot e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(\sin \omega x)^{(n)} = \omega^n \cdot \sin(\omega x + n\pi/2);$$

$$(\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cdot \cos(\omega x + n\pi/2);$$

$$(1/(x+a))^{(n)} = (-1)^n \cdot (n!) / (x+a)^{n+1}.$$

### Formula lui Leibniz

Fie  $f, g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții de  $n$  ori derivabile pe  $I$ . Atunci  $f \cdot g$  este de  $n$  ori derivabile pe  $I$  și avem relația:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)g'(x) + \dots + \\ + C_n^{n-1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + C_n^n f(x)g^{(n)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Exemplu: Să calculăm  $(2xe^{2x})^{(n)}$ . Avem:

$$(2xe^{2x})^{(n)} = (e^{2x} \cdot 2x)^{(n)} = (e^{2x})^{(n)} \cdot 2x + C_n^1 (e^{2x})^{(n-1)} \cdot (2x)' = \\ = 2^{n+1} x e^{2x} + 2^n n e^{2x} = 2^n e^{2x} (2x + n).$$

### Primitive imediate ale unor funcții elementare

Funcția $f(x)$	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită $\int f(x) dx$
$f(x) = x^n,$ $x \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$



Funcția $f(x)$	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită $\int f(x)dx$
$f(x) = x^\alpha,$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\mathbb{R}_+^*$	$\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$
$f(x) = \sqrt[m]{x},$ $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$	$\mathbb{R}_+$	$\int \sqrt[m]{x} dx = \frac{m \sqrt[m]{x^{m+1}}}{m+1} + C$
$f(x) = a^x,$ $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\int e^x dx = e^x + C$
$f(x) = 1/x$	$\mathbb{R}_-^*$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$
$f(x) = 1/x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$(-\infty, -a) \cup$ $\cup (a, +\infty)$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$(-a, a)$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x} + C$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}\}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}\}$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x  + C$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$	$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln \sin x  + C$
$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}\}$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$
$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \frac{-1}{\sin x} + C$
$f(x) = \sin(ax),$ $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$

Funcția $f(x)$	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită $\int f(x)dx$
$f(x) = \cos(bx),$ $b \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int \cos(bx) dx = \frac{\sin(bx)}{b} + C$
$f(x) = \sin^2 x$	$\mathbb{R}$	$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$
$f(x) = \cos^2 x$	$\mathbb{R}$	$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$
$f(x) = 1/\sin x$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right  + C$
$f(x) = 1/\cos x$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$	$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right  + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$ $= \ln \left( x + \sqrt{x^2+a^2} \right) + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$I \subset (-\infty, -a) \cup$ $\cup (a, +\infty)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2-a^2} \right  + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$(-a, a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C_1$
$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}},$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$(-a, a)$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos \left( \frac{x}{a} \right) + C =$ $= -\arcsin x + C_1$
$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arccotg} x + C_1$
$f(x) = \frac{-1}{(1+x^2)}$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg} x + C =$ $= -\operatorname{arctg} x + C_1$

$f(x) = \frac{-1}{a^2+x^2}, a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C$
<b>Funcția <math>f(x)</math></b>	<b>Domeniul de definiție</b>	<b>Integrala nedefinită <math>\int f(x)dx</math></b>
$f(x) = e^{ax} \sin(bx), a, b \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2+b^2} e^{ax} + C$
$f(x) = e^{ax} \cos(bx), a, b \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2+b^2} e^{ax} + C$
$f(x) = \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
$f(x) = \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

### Primitivele unor funcții compuse

- $\int u^n(x) u'(x) dx = u^{n+1}(x)/(n+1) + C, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, C \in \mathbb{R};$
- $\int u^\alpha(x) u'(x) dx = u^{\alpha+1}(x)/(\alpha+1) + C, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1,$   
 $u: I \rightarrow J \subset (0, +\infty);$
- $\int u'(x) / \sqrt[m]{u^{m-1}(x)} dx = m \cdot \sqrt[m]{u(x)} + C, m \in \mathbb{N}, m \geq 2, u: I \rightarrow J \subset \mathbb{R}_+^*;$
- $\int a^{u(x)} u'(x) dx = a^{u(x)} / \ln a + C, a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1;$
- $\int (u'(x)/u(x)) dx = \ln|u(x)| + C, u: I \rightarrow J \subset \mathbb{R}^*;$
- $\int (u'(x)/(u^2(x) - a^2)) dx = (1/2a) \ln|(u(x) - a)/(u(x) + a)|, a \in \mathbb{R}_+^*,$   
 $u(x) \neq \pm a, \forall x \in I;$
- $\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + C;$
- $\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + C;$
- $\int (u'(x)/\sin^2 u(x)) dx = -\operatorname{cotg} u(x) + C, u(x) \neq k\pi, x \in I, k \in \mathbb{Z};$
- $\int (u'(x)/\sin u(x)) dx = \ln|\operatorname{tg}(u(x)/2)| + C, u(x) \neq k\pi, x \in I, k \in \mathbb{Z};$

11.  $\int (u'(x)/\cos u(x)) dx = -\ln |\operatorname{tg}(u(x)/2 - \pi/4)| + C, u(x) \neq k\pi + \pi/2, x \in I, k \in \mathbb{Z};$
12.  $\int (u'(x)/\cos^2 u(x)) dx = \operatorname{tg} u(x) + C, u(x) \neq k\pi + \pi/2, x \in I, k \in \mathbb{Z};$
13.  $\int \operatorname{tgu}(x) \cdot u'(x) dx = -\ln |\cos u(x)| + C, u(x) \neq k\pi + \pi/2, x \in I, k \in \mathbb{Z};$
14.  $\int \operatorname{cot} gu(x) \cdot u'(x) dx = \ln |\sin u(x)| + C, x \in I, u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$
15.  $\int (\cos u(x)/\sin^2 u(x)) u'(x) dx = -1/\sin u(x) + C, x \in I, u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$
16.  $\int (\sin u(x)/\cos^2 u(x)) u'(x) dx = 1/\cos u(x) + C, x \in I, u(x) \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z};$
17.  $\int (1/\sqrt{a^2 + u^2(x)}) u'(x) dx = \ln(u(x) + \sqrt{a^2 + u^2(x)}) + C, a \in \mathbb{R}_+^*;$
18.  $\int (1/\sqrt{u^2(x) - a^2}) u'(x) dx = \ln|u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2}| + C, a \in \mathbb{R}_+^*, u(I) \subset (-\infty, -a) \cup (a, +\infty);$
19.  $\int (1/\sqrt{a^2 - u^2(x)}) u'(x) dx = \arcsin(u(x)/a) + C, a \in \mathbb{R}_+^*, u(I) \subset (-a, a);$
20.  $\int [u'(x)/(a^2 + u^2(x))] dx = (1/a) \operatorname{arctg}(u(x)/a) + C, a \in \mathbb{R}_+^*;$
21.  $\int \cos^2 u(x) u'(x) dx = u(x)/2 + [\sin(2u(x))]/4 + C;$
22.  $\int \sin^2 u(x) u'(x) dx = u(x)/2 - [\sin(2u(x))]/4 + C.$

### Primitivile unor funcții raționale

- $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C, b^2 - 4ac > 0;$
- $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}} + C, b^2 - 4ac < 0;$

- $$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{1}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \cdot \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C, \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N};$$
- $$\int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{\alpha}{2a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2\beta a - \alpha b}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} + C, \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

### Primitivele unor funcții exprimabile prin radicali

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + C, \quad a > 0;$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, \quad a < 0;$$
- $$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\alpha}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2\beta a - \alpha b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + C;$$
- $$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}} \times \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + C, \quad a > 0;$$
- $$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{-a}} \times \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, \quad a < 0;$$
- $$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C, \quad x \in \mathbb{R};$$
- $$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$$

### Integrale (definite) generalizate sau integrale improprii

Noțiunea de integrală definită (Riemann) se extinde și pentru funcții mărginite sau nemărginite, definite pe intervale compacte sau necompacte.

### i. Cazul în care o limită a integralei este infinită

**i.1.** Fie  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă pe orice compact  $[a, b] \subset [a, \infty]$ ,  $a < b$ . Integrala  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  se numește *integrală generalizată* sau *integrală improprie*.

**i.2.** Dacă limita:

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx \quad (*)$$

există și este finită, deci dacă  $I \in \mathbb{R}$ , spunem că funcția  $f$  este *integrabilă în sens generalizat* pe  $[a, \infty)$  sau că *integrala improprie*  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  este *convergentă* și luăm:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx.$$

#### Exemple:

a)  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $x \in [0, +\infty)$ . Avem:

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{1+x^2} \right] dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \left[ \frac{1}{1+x^2} \right] dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \arctg N = \frac{\pi}{2};$$

b)  $\int_1^{\infty} (1/x^n) dx = 1/(n-1)$ , pentru  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ;

c) Alte exemple de integrale improprii convergente sunt integralele lui Fresnel din teoria luminii:  $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\pi/8}$  și  $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\pi/8}$ .

**i.3.** Dacă limita (\*) nu există ori este infinită, atunci spunem că funcția  $f$  nu este *integrabilă în sens generalizat* sau că integrala  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  este *divergentă*.

**i.4.** Există criterii care stabilesc condiții suficiente pentru convergența integralelor de forma  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

**i.5.** Considerații asemănătoare cu cele de mai sus se pot face și pentru integralele de tipul  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  sau  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . Astfel, integrala convergentă

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  joacă un rol însemnat în teoria probabilităților și în teoria ecuațiilor diferențiale.

**ii. Cazul în care integrandul  $f$  devine infinit pentru  $x \rightarrow b$  și  $x < b$**

**ii.1.** Fie  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă pe orice compact  $[a, b - \varepsilon]$ , cu  $0 < \varepsilon < b - a$ , pentru care  $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} |f(x)| = \infty$ .

Integrala  $\int_a^b f(x) dx$  se numește *integrală generalizată* sau *integrală improprie*.

**ii.2.** Dacă limita:

$$L = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (**)$$

există și este finită (deci, dacă  $L \in \mathbb{R}$ ) spunem că funcția  $f$  este *integrabilă în sens generalizat* pe  $[a, b)$ , sau că *integrala improprie*  $\int_a^b f(x) dx$  este *convergentă* și

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

În acest caz, integrala convergentă se obișnuiește să fie notată cu  $\int_a^{b-} f(x) dx$ , sau  $\int_a^{b-0} f(x) dx$ . Exemplu: dacă  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [0, 1]$ , avem:

$$\int_0^{1-} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} [\arcsin(1-\varepsilon)] = \pi/2.$$

**ii.3.** Dacă limita (\*\*) nu există ori este infinită, atunci spunem că funcția  $f$  nu este integrabilă în sens generalizat sau că integrala  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă.

**ii.4.** Există criterii care dau condiții suficiente pentru convergența integralelor de forma  $\int_a^{b^-} f(x)dx$ .

**Exemplu:** Dacă există un exponent  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 1$  pentru care

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} (b-x)^\alpha f(x) = M \in \mathbb{R}$$

este finită, atunci  $\int_a^{b^-} f(x)dx$  este convergentă. Funcția lui Euler de speța întâi,  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$  este o integrală improprie convergentă pentru  $p > 0$ ,  $q > 0$ , ( $p, q \in \mathbb{R}$ ).

**ii.5.** Considerații asemănătoare cu cazul  $\int_a^{b^-} f(x)dx$  se pot face și pentru

$$\int_{a^+}^b f(x)dx, \text{ sau } \int_{a^+}^{b^-} f(x)dx.$$

Câteva integrale improprii convergente:

$$\int_{a^+}^{b^-} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \pi; \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2;$$

$$\int_0^{a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \pi/2; \quad \int_0^\infty e^{-x} dx = 1;$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \pi/(2a); \quad \int_0^\infty \frac{1}{a + bx^2} dx = \pi/(2\sqrt{ab});$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n dx = n!, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/2.$$

### Formula lui Moivre

$$(\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i \sin(nu), \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ și } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consecințe ale formulei lui Moivre:

$$\cos nu = \cos^n u - C_n^2 \cos^{n-2} u \sin^2 u + C_n^4 \cos^{n-4} u \sin^4 u - \dots;$$

$$\sin nu = C_n^1 \cos^{n-1} u \sin u - C_n^3 \cos^{n-3} u \sin^3 u + \dots;$$

$$\operatorname{tg} nu = (C_n^1 \operatorname{tg} u - C_n^3 \operatorname{tg}^3 u + C_n^5 \operatorname{tg}^5 u - \dots) / (1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 u + C_n^4 \operatorname{tg}^4 u - \dots).$$



**Observație:** Se demonstrează că formula lui Moivre este adevărată și pentru  $n$  număr întreg negativ, respectiv  $n \in \mathbb{Q}$ .

**Extragerea rădăcinii de ordinul  $n$  dintr-un număr complex**

$$z = r(\cos u + i \sin u);$$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = r^{1/n} \left\{ \cos\left[\frac{u + 2k\pi}{n}\right] + i \sin\left[\frac{u + 2k\pi}{n}\right] \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] + i \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i(b/|b|) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right], \quad b \neq 0.$$

Pentru simplitate, de obicei se utilizează notațiile:  $\left(\sqrt[n]{1}\right)_k \stackrel{not.}{=} \varepsilon_k$  și

$$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k \stackrel{not.}{=} \omega_k.$$

**Exemple:**

- Pentru  $n = 3$  și  $z = 1$  ( $r = 1$  și  $u = 0$ ) rădăcinile cubice complexe ale unității sunt:  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = j$ ,  $\varepsilon_2 = j^2$ , unde  $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$  și  $j^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ . Afizele  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$  corespund vârfurilor unui triunghi echilateral, înscris într-un cerc de rază 1, cu centrul în originea reperului;
- Pentru  $n = 2$  și  $z = i$  ( $r = 1$  și  $u = \pi/2$ ) avem:  $z_0 = -\sqrt{2}(1+i)/2$ ,  $z_1 = \sqrt{2}(1+i)/2$ .

**Forma exponențială a numerelor complexe:**  $z = re^{iu}$

Proprietăți:

- $\bar{z} = re^{-iu}$ ;
- $zz' = rr'e^{i(u+u')}$ , dacă  $z = re^{iu}$  și  $z' = r'e^{iu'}$ ;
- $(z'/z) = (r'/r)e^{i(u-u')}$ ,  $r \neq 0$ ;
- $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} e^{i(u+2k\pi)/n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ;
- $z^n = r^n e^{inu}$ .

## Formulele lui Euler

$$e^{+iu} = \cos u + i \sin u; \quad \cos u = (e^{iu} + e^{-iu})/2;$$

$$e^{-iu} = \cos u - i \sin u; \quad \sin u = (e^{iu} - e^{-iu})/2i.$$

## Ecuțiile în coordonate carteziene ale câtorva curbe remarcabile

Astroida	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
Cardioida	$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$
Cisoida lui Diocles	$y^2 = x^3/(2a - x)$
Concoida lui Nicomede	$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2x^2$
Foliul lui Descartes	$y^3 + x^3 = 3axy$
Lănțișorul	$y = (e^x + e^{-x})/2$
Lemniscata lui Bernoulli	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
Melcul lui Pascal	$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$
Roza cu patru ramuri	$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$
Strofoida dreaptă (cubica lui Descartes)	$y^2 = x^2(a + x)/(a - x)$
Parabola semicubică a lui W. Neil	$y = x^{3/2}$

## Anexa C

### Elemente de calcul vectorial. Aplicații

Metoda calculului vectorial se referă atât la studiul nemijlocit al vectorilor, considerați drept elemente geometrice, cât și la crearea unui aparat matematic alcătuit din litere și simboluri, care să ușureze operațiile cu vectori. Utilizarea notațiilor, chiar și în cele mai simple operații, lărgeste considerabil cadrul metodei vectoriale, făcând posibilă rezolvarea unui număr mare de probleme concrete. În cele ce urmează vom utiliza metoda analitică de studiu a vectorilor, plecând de la noțiunile fundamentale aferente. Pentru a aprofunda acest studiu vom prezenta unele aplicații concrete, care pot fi considerate ca fiind exemplificatoare.

#### C.1. Mărimi scalare și vectoriale

Mărimile cu care ne întâlnim în general<sup>1</sup> în mecanică sunt clasificate în *mărimi scalare* (scalari) și *mărimi vectoriale* (vectori).

Orice mărime fizică complet determinată prin cunoașterea unui singur număr real (pozitiv sau negativ), atașat mărimii respective la scara adoptată și însoțit de unitatea de măsură caracteristică se numește *mărime fizică scalară*. Proprietatea fundamentală a mărimilor scalare este aceea că valoarea lor nu depinde de sistemul de coordonate în raport cu care se analizează comportarea acestora. De exemplu, masa, volumul, lucrul mecanic, temperatura, entropia, sarcina electrică etc. sunt mărimi fizice scalare și uneori sunt numite, simplu, *scalari*.

Din categoria mărimilor fizice pentru care sunt necesare mai multe numere reale pentru a putea fi complet determinate, fac parte atât *mărimile*

---

<sup>1</sup> Mărimi cu ordin tensorial mai mare de unu apar cu precădere doar în cadrul mecanicii solidului rigid și al mecanicii mediilor continue deformabile. Exemple de astfel de mărimi vor fi date în continuare.

*fizice vectoriale*<sup>2</sup> (cum ar fi: viteza liniară, accelerația, impulsul, intensitatea câmpului electric etc.) cât și cele *tensoriale*<sup>3</sup> (de exemplu: tensorul momentelor de inerție,  $I_{\alpha\beta}$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), tensorul tensiunilor într-un mediu continuu deformabil,  $T_{ik}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ), tensorul deformațiilor unui mediu continuu deformabil,  $e_{ik}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ), tensorul densității fluxului de impuls al unui fluid în mișcare oarecare,  $\Pi_{ik}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ) etc.)

Orice mărime care, pe lângă valoarea sa numerică, este caracterizată din punct de vedere geometric și printr-o *orientare în spațiu* (cum ar fi: forța, viteza, accelerația etc.) se numește *mărime vectorială* sau simplu, *vector*. De exemplu, pentru a cunoaște forța (mecanică) ce acționează asupra unui rigid, este necesar ca pe lângă intensitatea forței (valoarea sa numerică), să cunoaștem atât direcția pe care aceasta acționează, cât și sensul ei.

În spațiul euclidian cu trei dimensiuni  $E_3$ , un *vector* este o entitate matematică care se reprezintă geometric printr-un segment de dreaptă orientat, și care, din punct de vedere algebric este formată dintr-un ansamblu de trei scalari, numiți *componentele vectorului*.

Un vector se notează fie printr-o singură literă cu săgeată deasupra ( $\vec{F}$  - vectorul forței), fie prin două litere cu săgeată ( $\overrightarrow{AB}$  etc.). Punctul  $A$  reprezintă *originea* sau *punctul de aplicație* al vectorului, iar punctul  $B$  extremitatea sa. *Sensul* „de parcurs” este de la  $A$  la  $B$ , iar mărimea vectorului (*modulul*) este determinată de lungimea segmentului  $\|AB\|$ .

Mărimea unui vector oarecare  $\vec{A}$  se notează prin  $|\vec{A}|$ , sau mai simplu, prin

$A$ . Deci, un vector este definit prin următoarele elemente:

1. originea sau punctul de aplicație;

<sup>2</sup> Care, din punct de vedere pur algebric, sunt de fapt mărimi tensoriale de ordinul întâi, la fel cum, din același punct de vedere, mărimile scalare nu sunt altceva decât mărimi tensoriale de ordinul zero.

<sup>3</sup> Aici, prin apelativul „mărimi tensoriale” au fost desemnate doar mărimile tensoriale de ordinul doi, cu toate că, în cadrul mecanicii există mărimi tensoriale chiar de ordinul patru. Un astfel de exemplu îl constituie tensorul elasticității unui mediu continuu deformabil cu proprietăți elastice,  $C_{ijkl}$ , ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ).

2. dreapta suport (direcția);
3. sensul vectorului;
4. mărimea sau modulul.

Vectorul cu modulul egal cu unitatea (într-un anumit sistem de unități) se numește *vector unitar*. Un vector unitar care are aceeași direcție și același sens cu un vector dat,  $\vec{A}$  (sau o axă dată,  $\Delta$ ) se numește *versor* al vectorului  $\vec{A}$  (respectiv, al axei  $\Delta$ ).

În funcție de caracterul punctului de aplicație, distingem trei categorii de vectori.

1. Un vector de mărime și orientare dată, dar cu punctul de aplicație arbitrar se numește *vector liber*. Ca exemple de astfel de mărimi vectoriale amintim accelerația gravitațională și inducția câmpului magnetic terestru, ambele considerate în condițiile laboratorului.
2. Un vector de mărime și orientare dată, având punctul de aplicație fixat într-un punct se numește *vector legat*. Exemple: viteza și/sau accelerația unui punct material, forța rezultantă care acționează asupra unei molecule dintr-un fluid, intensitatea câmpului electrostatic al unei sarcini electrice punctiforme etc. Acest tip de vector este legat de punctul care-l caracterizează.
3. Un vector de mărime și orientare dată, cu punctul de aplicație ce se poate „plimba” pe dreapta suport (fără ca celelalte elemente să se modifice) se numește *vector glisant* sau *vector alunecător*. O forță care acționează asupra unui solid rigid constituie un exemplu clasic în acest sens. Rezultatul acțiunii sale nu se va modifica dacă o translatăm de-a lungul dreptei suport. Un alt exemplu este vectorul vitezei unghiulare de rotație,  $\vec{\omega}$ , a unui solid rigid în jurul unei axe fixe. Punctul lui de aplicație poate fi ales oriunde de-a lungul axei de rotație.

Din punctul de vedere al elementelor care caracterizează un vector (origine, direcție, sens și modul) a defini un *vector* înseamnă a indica mărimile care îl definesc complet. Cunoscând aceste mărimi se poate construi vectorul respectiv.

Există diferite metode pentru a caracteriza un vector: descriptive, geometrice, numerice ș.a. Din geometria analitică se cunoaște că pentru a caracteriza un *vector liber* este suficient să indicăm cele trei proiecții ale sale

pe axele de coordonate ale unui reper în raport cu care este considerat vectorul, sau echivalent, valoarea lui numerică împreună cu cele două unghiuri pe care el le formează cu oricare două dintre aceste axe (cel de-al treilea unghi poate fi determinat cu ajutorul primelor două, cu condiția să se știe dacă este ascuțit sau obtuz). Pentru a caracteriza un *vector glisant* este suficient să indicăm valoarea lui numerică, cele două unghiuri pe care le formează dreapta suport cu oricare două dintre axele de coordonate, precum și două coordonate ale punctului de intersecție dintre dreapta suport și unul (oricare) din planele de coordonate. În cazul unui *vector legat*, pentru a-l defini complet sunt necesare șase mărimi: cele trei coordonate ale originii și cele trei coordonate ale extremității lui, sau echivalent, cele trei coordonate ale originii și cele trei proiecții ale vectorului pe axele de coordonate etc.

## C.2. Elemente de algebră vectorială

Poziția în spațiu a unui punct oarecare,  $P$ , poate fi definită printr-un vector care are punctul de aplicație în originea unui sistem de referință convenabil ales și extremitatea în punctul  $P$ . Un asemenea vector se numește *vector de poziție al punctului  $P$*  și se notează, de obicei, cu  $\vec{r}$ . O dreaptă pe care s-a fixat un sens, ales ca pozitiv, se numește *axă*. Sensul opus se numește negativ. Sensul pozitiv se indică prin vârful unei săgeți. Fie o axă  $(\Delta)$  și un vector oarecare  $\vec{a}$  cu originea în  $A$  și extremitatea în  $B$ . Se numește *proiecție a vectorului  $\vec{a}$  pe axa  $(\Delta)$* , vectorul definit de proiecțiile ortogonale  $A'$ ,  $B'$  ale extremităților  $A$  și  $B$  ale lui  $\vec{a}$  pe axa  $(\Delta)$  (vezi Fig. C1).

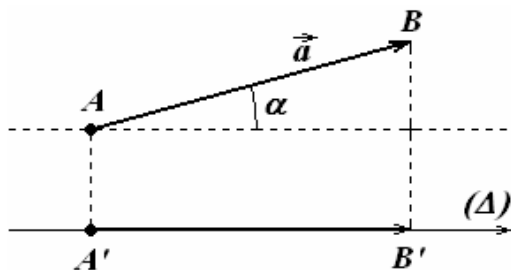


Fig. C1

Notăm prin  $a_A$  mărimea scalară și algebrică a proiecției vectorului  $\vec{a}$  pe axa ( $\Delta$ ), semnul plus corespunzând cazului când proiecția și axa au același sens, iar semnul minus cazului când proiecția și axa au sensuri opuse. Se observă că  $a_A = a \cos \alpha$ , adică proiecția  $a_A$  este pozitivă, negativă, sau nulă, după cum unghiul  $\alpha$  satisface relațiile:  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha > \frac{\pi}{2}$

sau  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Vom utiliza notația:

$$a_A = pr_A \vec{a}. \quad (C.1)$$

Dacă vectorul  $\vec{a}$  este egal cu vectorul unitar  $\vec{u}$ , rezultă că

$$pr_A \vec{a} = \cos \alpha. \quad (C.2)$$

Fie  $Oxyz$  un triedru ortogonal drept și un vector oarecare,  $\vec{a}$  cu originea în  $A$  și extremitatea în  $B$  (vezi Fig. C2).

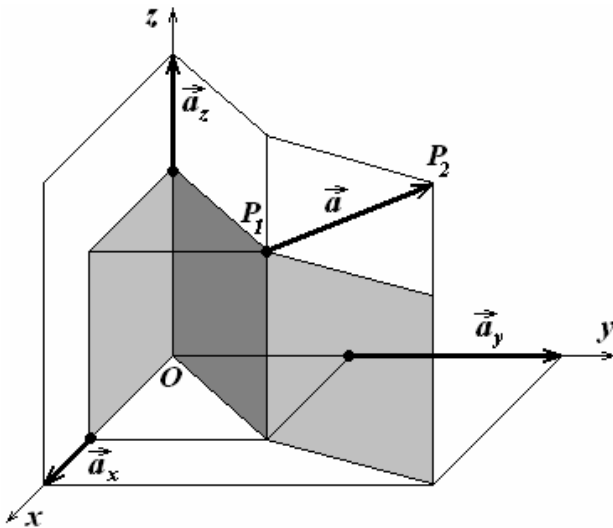


Fig. C2

Proiectând vectorul  $\vec{a}$  pe axele reperului cartezian  $Oxyz$  se obțin segmentele orientate  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  și  $\vec{a}_z$ . Mărimile algebrice ale acestor proiecții,

adică  $a_x$ ,  $a_y$  și respectiv  $a_z$  se numesc *componentele vectorului*  $\vec{a}$ . Din Fig. C2 rezultă mărimea componentelor vectorului  $\vec{a}$ :

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1, \quad (\text{C.3})$$

unde  $x_1, y_1$  și  $z_1$  sunt coordonatele punctului  $A$  (coordonatele originii vectorului  $\vec{a}$ ), iar  $x_2, y_2$  și  $z_2$  sunt coordonatele punctului  $B$  (ale extremității vectorului  $\vec{a}$ ).

Doi (sau mai mulți vectori) care au mărimea și sensul comune, iar direcțiile lor sunt paralele, se numesc *echipolenți*. Vectorii echipolenți cu  $\vec{a}$  se reprezintă prin aceleași relații (C.3), deci prin aceleași numere  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$ .

Proiecțiile  $a_x$ ,  $a_y$  și  $a_z$  se mai numesc *componentele vectoriale* ale lui  $\vec{a}$ . Prin proiecția unui vector (sau a unei relații vectoriale) pe o direcție vom înțelege componenta vectorului (a relației vectoriale) după acea direcție.

Relația de egalitate se poate defini numai între doi (sau mai mulți) vectori de același tip. De exemplu, doi vectori glisanți  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt egali dacă au comune direcția, sensul și mărimea. Egalitatea celor doi vectori se exprimă prin relația vectorială:  $\vec{a} = \vec{b}$ , sau echivalent, prin relațiile scalare:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z,$$

obținute prin proiecția relației vectoriale  $\vec{a} = \vec{b}$  pe cele trei axe de coordonate:  $Ox$ ,  $Oy$  și respectiv  $Oz$ .

Doi vectori care au aceeași direcție se numesc *coliniari*. Doi vectori coliniari care au sensurile opuse se numesc *opuși*. Relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. reflexivitate:  $\vec{a} = \vec{a}$ ;
2. simetrie: dacă  $\vec{a} = \vec{b}$  atunci  $\vec{b} = \vec{a}$  și reciproc;
3. tranzitivitate: dacă  $\vec{a} = \vec{b}$  și  $\vec{b} = \vec{c}$ , atunci  $\vec{a} = \vec{c}$ .

### C.2.1. Operații cu vectori

Operațiile cel mai des întâlnite între vectorii liberi sunt:

- adunarea (scăderea),
- înmulțirea cu un scalar,
- produsul scalar,



- produsul vectorial,
- produsul mixt.

Cu ajutorul operațiilor produs scalar și produs vectorial pot fi construite și alte expresii, mai complexe, cum ar fi: produsul scalar de produse vectoriale, dublul produs vectorial etc.

### Adunarea vectorilor

Fie doi vectori liberi,  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Pentru „a construi” suma celor doi vectori, se consideră într-un punct arbitrar, originea comună  $O$  a doi vectori echipolenți cu  $\vec{a}$  și respectiv cu  $\vec{b}$  (vezi Fig. C3).

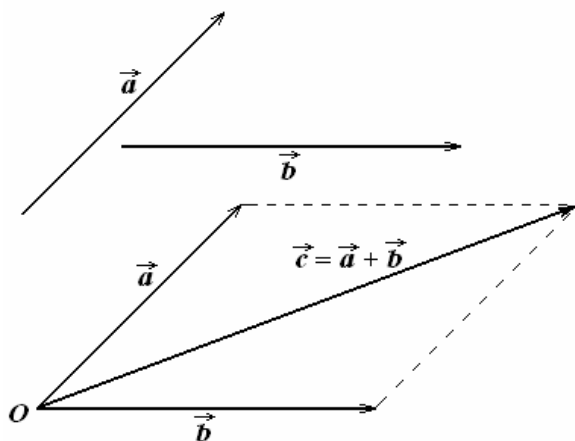


Fig. C3

Prin definiție, „vectorul diagonală a paralelogramului” construit pe vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , cu originea în  $O$ , se notează,  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  și se numește *suma vectorială* sau *rezultanta vectorilor*  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ .

Rezultanta a doi vectori se poate construi și în alt mod (*regula poligonului*). În extremitatea unuia din vectori se construiește un vector echipolent cu cel de-al doilea; rezultanta celor doi vectori va fi un vector cu originea în originea primului vector și extremitatea în extremitatea celui de-al doilea vector. Regula paralelogramului se poate generaliza pentru  $n$  vectori:  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Suma vectorială  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$  se con-

struiește în acest caz aplicând de  $n-1$  ori regula paralelogramului în felul următor: rezultanta primilor doi vectori se compune vectorial cu cel de-al treilea, suma vectorială obținută cu cel de-al patrulea vector ș.a.m.d. (vezi Fig. C4). Vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  sunt dispuși pe laturile unui contur poligonal. Se observă că, în cazul unui contur poligonal închis, rezultanta este nulă.

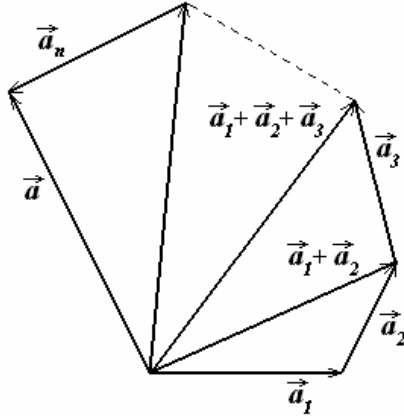


Fig. C4

Astfel, rezultă următoarele proprietăți evidente ale adunării vectorilor:

- comutativitate:  $\vec{a}_1 + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}_1$ ,
- asociativitate  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

Din cele prezentate mai sus rezultă că un vector poate fi definit în întregime prin intermediul celor trei proiecții ale sale față de un sistem rectangular de coordonate carteziene,  $Oxyz$ . Din Fig. C2 deducem că

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z. \quad (\text{C.4})$$

Dacă  $\vec{i}, \vec{j}$  și  $\vec{k}$  sunt versorii axelor  $Ox, Oy$  și respectiv  $Oz$ , atunci vectorii  $\vec{a}_x, \vec{a}_y$  și  $\vec{a}_z$  pot fi scriși astfel:

$$\vec{a}_x = a_x \vec{i}, \quad \vec{a}_y = a_y \vec{j}, \quad \vec{a}_z = a_z \vec{k},$$

iar vectorul  $\vec{a}$  (scris în funcție de componentele sale  $a_x, a_y$  și  $a_z$ ) devine:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (\text{C.5})$$

Relația (C.5) dă așa-numita *expresia analitică a vectorului*  $\vec{a}$ . Utilizând notațiile

$$a_x = a_1, \quad a_y = a_2, \quad a_z = a_3, \\ \vec{i} = \vec{u}_1, \quad \vec{j} = \vec{u}_2, \quad \vec{k} = \vec{u}_3,$$

relația (C.5) mai poate fi scrisă sub forma

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{u}_i. \quad (\text{C.6})$$

În cele ce urmează, ori de câte ori avem o sumare după un indice care se repetă în același termen, vom renunța la semnul sumă. Această convenție poartă numele de *convenția lui Einstein*. Conform acesteia, relația (C.6) devine

$$\vec{a} = a_i\vec{u}_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.7})$$

Vectorul de poziție al oricărui punct  $P$  în raport cu un reper cartezian  $Oxyz$  poate fi exprimat și cu ajutorul expresiei (C.7). Poziția punctului  $P$  este unic determinată, fie prin coordonatele sale:  $x$ ,  $y$  și  $z$ , fie prin vectorul de poziție  $\vec{r}$ , care are originea în  $O$  și extremitatea în  $P$ . Practic, fiecărui punct  $P$  îi corespunde un anumit vector de poziție  $\vec{r}$  în raport cu reperul cartezian  $Oxyz$ . Observând că  $x$ ,  $y$  și  $z$  sunt componentele vectorului  $\vec{r}$  pe axele reperului  $Oxyz$ , vom scrie expresia analitică a lui  $\vec{r}$ , particularizând relația (C.6) astfel:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_i\vec{u}_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.8})$$

Considerând trei vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  (cu componentele indicate în paranteze),

$$\vec{a} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = \vec{b}(b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = \vec{c}(c_x, c_y, c_z) \quad (\text{C.9})$$

și utilizând expresiile analitice ale acestora în acord cu relația (C.7), deducem că în cazul adunării vectoriale, relația vectorială  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  este echivalentă cu următoarele trei relații scalare:

$$c_i = a_i + b_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.10})$$

## Scăderea a doi vectori

Considerând doi vectori liberi  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , definim *operația de scădere* a vectorului  $\vec{b}$  din vectorul  $\vec{a}$  prin relația

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Această operație reprezintă de fapt o consecință a adunării vectoriale, deoarece diferența vectorială  $\vec{a} - \vec{b}$  se reduce la suma  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , unde vectorul  $(-\vec{b})$  este opusul lui  $\vec{b}$ , rezultanta obținându-se după regula cunoscută (a paralelogramului). Vectorul diferență,  $\vec{d}$ , are originea în extremitatea vectorului scăzător ( $\vec{b}$ ) și extremitatea în extremitatea vectorului descăzut ( $\vec{a}$ ). Proiectând relația vectorială  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  pe axele reperului cartezian  $Oxyz$ , se obțin cele trei ecuații scalare echivalente:

$$d_i = a_i - b_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.11})$$

### Înmulțirea unui vector cu un scalar

Fie  $\vec{a}$  un vector liber și  $\lambda$  un scalar real. Produsul dintre scalarul  $\lambda$  și vectorul  $\vec{a}$  se notează cu  $\lambda\vec{a}$  și este un vector coliniar cu  $\vec{a}$ , de modul  $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ , având același sens cu  $\vec{a}$  dacă  $\lambda > 0$  și sensul opus lui  $\vec{a}$ , dacă  $\lambda < 0$ . Dacă  $\lambda = 0$ , sau dacă  $\vec{a} = 0$ , (vectorul nul), avem  $\lambda\vec{a} = 0$ .

Faptul că doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari poate fi exprimat printr-o relație de forma

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \quad (\text{C.12-1})$$

sau,

$$\vec{a} = \mu\vec{b}. \quad (\text{C.12-2})$$

Înmulțirea unui vector cu un scalar are următoarele proprietăți:

1.  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ ;
2.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ;
3.  $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = \alpha\beta\vec{a}$ ;
4.  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$ .

Considerând  $n$  vectori,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , dacă există niște scalari reali,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , nu toți nuli, astfel încât

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0, \quad (\text{C.13})$$

atunci spunem că vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  sunt *liniar dependenți*. Dacă această relație are loc numai pentru  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$  atunci vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  se numesc *liniar independenți*. De exemplu, dacă considerăm combinația liniară a doi vectori necoliniari,  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$ :

$$\vec{a}_3 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2, \quad (\text{C.14})$$

în care scalarii  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  nu sunt simultan nuli, atunci vectorul  $\vec{a}_3$ , este situat în planul determinat de direcțiile vectorilor  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$ , adică vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  și  $\vec{a}_3$  sunt coplanari, iar relația (C.14) exprimă condiția de coplanaritate a celor trei vectori. Aceasta poate fi scrisă și sub forma:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0, \quad (\text{C.15})$$

adică cei trei vectori coplanari sunt *liniar dependenți*. Reciproc, dacă trei vectori sunt liniar dependenți, atunci ei sunt coplanari. Din ecuația vectorială (C.13) deducem că vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  sunt liniar independenți, ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ ), dacă rangul matricii sistemului este egal cu numărul necunoscutelor  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ . Rezultă de aici că, în spațiul euclidian  $E_3$  există cel mult trei vectori liniar independenți, care formează o bază a acestui spațiu.

Să considerăm sistemul de versori  $\vec{i}, \vec{j}$  și  $\vec{k}$  ai axelor reperului cartezian  $Oxyz$ . Acești vectori sunt liniar independenți, deci formează o bază pe spațiul  $E_3$ , și orice vector  $\vec{a}$  poate fi scris în funcție de componentele sale ( $a_x, a_y, a_z$ ) și elementele bazei ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) conform relației (C.5):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

## Produsul scalar

Prin definiție, *produsul scalar* a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se notează prin  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  și este dat de expresia:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_i b_i, \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (\text{C.16})$$

Din relația (C.16), rezultă că produsul scalar a doi vectori este o mărime scalară (un scalar).

Proprietăți:

- produsul scalar este comutativ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- produsul scalar este distributiv față de adunare:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

- dacă  $\vec{a} = \vec{b}$ , atunci  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$ ;

- pentru orice scalar  $\lambda$ , avem:

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\lambda \vec{a}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b});$$

- dacă produsul scalar al celor doi vectori este nul ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ) atunci acești vectori sunt fie ortogonali, fie măcar unul din ei este nul;

- considerând  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  și  $\vec{u}_3$  versorii unui triedru ortogonal, rezultă atunci că

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

și

$$\vec{u}_1^2 = \vec{u}_2^2 = \vec{u}_3^2 = 1,$$

relații care pot fi scrise condensat sub forma:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k = \delta_{ik}, \quad (\text{C.17})$$

unde  $\delta_{ik}$  este tensorul unitate simetric de ordinul al doilea (simbolul lui Kronecker):

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

- utilizând relațiile (C.5) și (C.18) produsul scalar al vectorilor  $\vec{a} (a_x, a_y, a_z)$  și  $\vec{b} (b_x, b_y, b_z)$  se poate exprima analitic astfel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \vec{u}_i) \cdot (b_j \vec{u}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.19})$$

În particular, dacă  $\vec{a} = \vec{b}$ ,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 = a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.20})$$

Mărima proiecției vectorului  $\vec{a}$  pe una din axele unui reper cartezian  $Oxyz$  (de exemplu axa  $Ox_i$ , de versor  $\vec{u}_i$ ) este dată de produsul scalar dintre vectorul  $\vec{a}$  și versorul axei,  $\vec{u}_i$ :

$$(\vec{a})_i = \vec{a} \cdot \vec{u}_i = a_k \vec{u}_k \cdot \vec{u}_i = a_k \delta_{ik} = a_i. \quad (\text{C.21})$$

În fizică, produsul scalar a doi vectori este folosit, de exemplu, pentru a exprima lucrul mecanic elementar efectuat de o forță  $\vec{F}$ , care, acționând asupra unui corp, își deplasează punctul de aplicație cu mărimea  $d\vec{r}$ :  $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , sau pentru a exprima fluxul elementar al unui anumit vector (de exemplu, inducția magnetică,  $\vec{B}$ ) printr-o anumită suprafață elementară  $d\vec{S}$ :  $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

### Produsul vectorial

Fie doi vectori liberi  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Se numește *produs vectorial* al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  un vector notat cu  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  și caracterizat prin:

- direcția normală pe planul determinat de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ;
- sensul astfel încât vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  să formeze un triedru drept;
- mărimea egală cu aria paralelogramului construit pe vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  presupuși aplicați în punctul  $O$  (vezi Fig. C5).

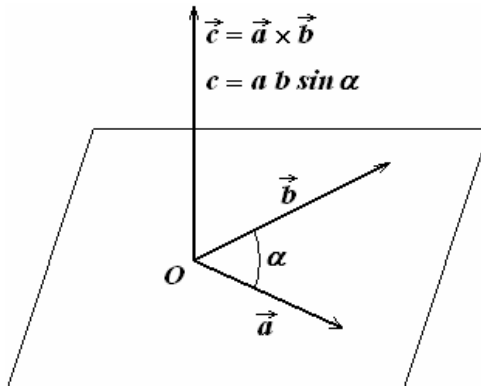


Fig. C5

Prin definiție, produsul vectorial al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este dat de expresia:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \vec{u}_c = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{u}_i, \quad (\text{C.22})$$

unde  $\vec{u}_c$  este versorul lui  $\vec{c}$ , iar  $\varepsilon_{ijk}$ , ( $i, j, k = \overline{1, 3}$ ) este pseudotensorul unitate complet antisimetric de ordinul al treilea (simbolul Levi-Civita).

Proprietățile produsului vectorial a doi vectori:

- produsul vectorial este anticomutativ, adică,  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ;

- dacă  $\lambda$  este un scalar, atunci  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ ;

- produsul vectorial este distributiv față de adunare,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

- dacă unul din vectori este nul, sau cei doi vectori sunt coliniari, produsul vectorial este nul. În situația din urmă avem:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{a} = \lambda (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0};$$

- între versorii  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  și  $\vec{u}_3$  ai unui triedru ortogonal drept există următoarele relații:

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_1 = \vec{0}, \quad \vec{u}_2 \times \vec{u}_2 = \vec{0}, \quad \vec{u}_3 \times \vec{u}_3 = \vec{0},$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3,$$

$$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1, \quad (\text{C23})$$

$$\vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = \vec{u}_2,$$

care pot fi scrise condensat prin intermediul simbolului de permutare Levi-Civita,  $\varepsilon_{ijk}$ , definit prin:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{dacă } i, j, k \text{ formează o (orice) permutare pară a lui } 1, 2, 3, \\ -1, & \text{dacă } i, j, k \text{ formează o (orice) permutare impară a lui } 1, 2, 3, \\ 0, & \text{dacă cel puțin doi din indicii } i, j, k \text{ sunt egali,} \end{cases}$$

adică:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1,$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1,$$



$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{233} = \dots = 0.$$

Utilizând simbolul Levi-Civita, relațiile (C.23) se scriu condensat, astfel:

$$\vec{u}_i \times \vec{u}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{u}_k, \quad (i, j, k = \overline{1,3}). \quad (\text{C.24})$$

Se poate verifica ușor faptul că simbolul lui Levi-Civita se bucură de proprietatea:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{is} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{js} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{ks} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.25})$$

Dacă egalăm indicii  $i$  și  $p$  ( $i = p$ ) și sumăm după valoarea lor comună, rezultă:  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{iqk} = \delta_{jq} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kq}$ , unde toți indicii iau valori de la 1 la 3. Punând în această relație  $j = q$  și sumând din nou după valoarea comună a acestor doi indici va rezulta:  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijs} = \delta_{ji} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{ki} = 3\delta_{ks} - \delta_{ks} = 2\delta_{ks}$ . În virtutea acestei proprietăți, înmulțind relația (C.24) cu  $\varepsilon_{ijs}$  și efectuând sumarea după indicii  $i$  și  $j$  se obține:

$$\varepsilon_{ijs} \vec{u}_i \times \vec{u}_j = \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{ijk} \vec{u}_k = 2\delta_{sk} \vec{u}_k = 2\vec{u}_s$$

de unde,

$$\vec{u}_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sij} \vec{u}_i \times \vec{u}_j, \quad (i, j, s = \overline{1,3}).$$

Având în vedere relația (C.24), produsul vectorial  $\vec{a} \times \vec{b}$  poate fi exprimat sub formă analitică astfel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i \vec{u}_i) \times (b_j \vec{u}_j) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{u}_k, \quad (i, j, k = \overline{1,3}). \quad (\text{C.26})$$

O altă modalitate de a exprima produsul vectorial a doi vectori,  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , este următoarea:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{u}_k = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

adică, produsul vectorial al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se poate exprima analitic, sub forma unui determinant simbolic de ordinul trei.

Proiectând vectorul  $(\vec{a} \times \vec{b})$  pe direcția  $x_p$  (înmulțindu-l scalar cu versorul  $\vec{u}_p$ ), obținem:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_p = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{u}_p = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{u}_k \cdot \vec{u}_p = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \delta_{kp} = \varepsilon_{ijp} a_i b_j = \varepsilon_{pij} a_i b_j.$$

În cazul în care vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari, deoarece componentele lor sunt proporționale, rezultă că determinantul din (C.27) este nul, deoarece liniile doi și trei ale acestuia au elementele proporționale.

În fizică, produsul vectorial a doi vectori este utilizat, de exemplu:

- pentru a exprima momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un pol  $O$ :  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , unde  $\vec{r}$  este vectorul care „unește” polul  $O$  cu punctul de aplicație al vectorului forță;
- pentru a exprima „vectorul”<sup>4</sup> vârtej în mecanica fluidelor:  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$ , unde  $\nabla$  este operatorul nabla, iar  $\vec{v}(x, y, z)$  este câmpul vitezelor fluidului;
- pentru a exprima viteza liniară a unui corp,  $\vec{v}_{rot}$ , în mișcarea de rotație cu viteza instantanee de rotație  $\vec{\omega}$ , în jurul unei axe:  $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ;
- pentru a exprima inducția magnetică a câmpului magnetic creat de un curent liniar:  $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{(\Gamma)} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ , unde  $\mu$  este permeabilitatea

magnetică a mediului în care se află circuitul electric,  $d\vec{l}$  este un element de linie/arc (având sensul dat de curentul electric, a cărui intensitate este  $I$ ) al circuitului electric liniar  $\Gamma$ , iar  $\vec{r}$  este vectorul care „unește” punctul în care se determină inducția câmpului magnetic cu originea vectorului  $d\vec{l}$ ;

<sup>4</sup> Am scris cuvântul „vectorului” între ghilimele deoarece, după cum vom vedea în secțiunea C.3., vârtejul  $\vec{\Omega}$  este de fapt un pseudovector și nu un vector polar (vector).

- pentru a exprima densitatea fluxului de energie a unui câmp electromagnetic (vectorul Poynting):  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ , unde  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt intensitățile componentelor electrică și respectiv magnetică ale câmpului electromagnetic etc.

## Produsul mixt a trei vectori

Fie trei vectori liberi,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ , cu punctul de aplicație în  $O$ .  
Expresia

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \left[ = a_i \vec{u}_i \cdot (b_j \vec{u}_j \times c_k \vec{u}_k) = a_i b_j c_k \vec{u}_i \cdot (\vec{u}_j \times \vec{u}_k) \right] = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{C.28}$$

unde<sup>5</sup>

$$\vec{u}_i \cdot (\vec{u}_j \times \vec{u}_k) = \varepsilon_{ijk},$$

se numește *produsul mixt al vectorilor*  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ .

Din relația de definiție (C.28) observăm că proprietățile produsului mixt sunt strâns legate de proprietățile determinantilor, adică produsul mixt este nul dacă două linii ale determinantului sunt proporționale și își schimbă semnul dacă inversăm două linii ale determinantului. De asemenea, la permutările ciclice ale celor trei vectori, produsul mixt rămâne neschimbat:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ .

În fizică, produsul mixt a trei vectori este utilizat, de exemplu, pentru a exprima momentul unei forțe  $\vec{F}$  față de o axă  $\Delta$ :  $M_\Delta = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{M}_O$ , unde  $\vec{u}_\Delta$  este versorul axei  $\Delta$ , iar  $\vec{M}_O$  este momentul forței  $\vec{F}$  față de un punct/pol (oarecare<sup>6</sup>),  $O$ , de pe axă.

<sup>5</sup> De aici putem extrage o altă definiție a simbolului Levi-Civita, ca fiind produsul mixt al versurilor unui reper triortogonal pe spațiul euclidian  $E_3$ :  $\varepsilon_{ijk} = \vec{u}_i \cdot (\vec{u}_j \times \vec{u}_k)$  (la fel cum, simbolul Kronecker este dat de produsul scalar al acelorași versori:  $\delta_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$ ).

<sup>6</sup> Prin definiție, momentul unei forțe față de o axă este egal cu proiecția pe acea axă a momentului forței față de un punct/pol (oarecare) de pe acea axă (se demonstrează că momentul unei forțe față de o axă,  $M_\Delta$ , este același, indiferent de punctul/polul  $O$  de pe axă, față de care este calculat – în prealabil – momentul  $\vec{M}_O$  al forței respective).

## Produsul mixt de patru vectori (produsul scalar de produse vectoriale)

Se obține produsul mixt de patru vectori dacă unul din vectorii produsului mixt de trei vectori este scris ca un produs vectorial al altor doi vectori, adică:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ . Utilizând metoda analitică obținem:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{c} \times \vec{d})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ipq} c_p d_q = \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} a_j b_k c_p d_q = (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) a_j b_k c_p d_q = \delta_{jp} \delta_{kq} a_j b_k c_p d_q - \\ &- \delta_{jq} \delta_{kp} a_j b_k c_p d_q = a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \end{aligned} \quad (C.29)$$

## Dublul produs vectorial

Considerând trei vectori liberi,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ , cu originea într-un punct  $O$ , definim dublul produs vectorial al acestor vectori prin relația:

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (C.30)$$

Din cele prezentate mai sus (în paragraful dedicat produsului vectorial) deducem că, din punct de vedere geometric, vectorul  $\vec{d}$  este ortogonal atât pe vectorul  $\vec{a}$ , cât și pe vectorul  $(\vec{b} \times \vec{c})$ , deci este coplanar cu vectorii  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ . Analitic, dublul produs vectorial se scrie astfel:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \vec{u}_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \vec{u}_i = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \vec{u}_i = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \vec{u}_i = a_j b_l c_j \vec{u}_i - a_j b_j c_l \vec{u}_i = a_j c_j (b_l \vec{u}_i) - a_j b_j (c_l \vec{u}_i) = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}. \end{aligned} \quad (C.31)$$

În fizică, dublul produs vectorial este utilizat, de exemplu, pentru a exprima forța macroscopică de interacțiune dintre două circuite liniare parcurse de curent electric:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(r_1)} \oint_{(r_2)} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3},$$

unde  $\mu$  este permeabilitatea magnetică a mediului în care se află circuitele,  $I_1$  și  $I_2$  sunt intensitățile curenților electrici continui care străbat cele două circuite,  $d\vec{l}_1$  și  $d\vec{l}_2$  sunt două elemente vectorizate de linie/arc ale celor două circuite ( $\Gamma_1$  și respectiv,  $\Gamma_2$ ), iar  $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$  este vectorul care „unește” originea lui  $d\vec{l}_1$  cu aceea a lui  $d\vec{l}_2$ .

### Identitatea lui Lagrange

Ridicând la pătrat produsul vectorial a doi vectori liberi  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , obținem:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{imn} a_m b_n = \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} a_j a_m b_k b_n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) a_j a_m b_k b_n = \delta_{jm} \delta_{kn} a_j a_m b_k b_n - \\ &\quad - \delta_{jn} \delta_{km} a_j a_m b_k b_n = a_j a_j b_k b_k - a_j a_k b_k b_j = (a_j a_j)(b_k b_k) - \\ &\quad - (a_j b_j)(a_k b_k) = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \end{aligned} \quad (C.32)$$

relație numită *identitatea lui Lagrange*.

### C.3. Tensori și pseudotensori

Întrucât experiența la catedră a autorilor a arătat o anume dificultate din partea studenților în a înțelege și utiliza noțiunea de *pseudotensor*, în cele ce urmează ne vom referi pe scurt asupra acesteia. Pentru un fizician, de o atenție aparte se bucură noțiunile care derivă ca și cazuri particulare din cea de pseudotensor, respectiv: noțiunea de *pseudoscalar* și cea de *pseudovector*. Evident, un pseudoscalar este un pseudotensor de ordinul zero, iar un pseudovector este un pseudotensor de ordinul întâi. De obicei, un pseudoscalar mai este numit și *scalar de specie a doua* (scalarul numindu-se atunci de *specie întâi*), iar un pseudovector mai este numit *vector de specie* (uneori *speța*) *a doua* sau *vector axial* (vectorul numindu-se atunci de *specie*/*speța întâi* sau *vector polar*).

Din punct de vedere strict matematic situația este cât se poate de simplă, însă acest mod de a pune problema nu oferă o imagine cât de cât

intuitivă asupra necesității introducerii acestei noțiuni. De fapt, algebric vorbind, singura diferență dintre un tensor și un pseudotensor este apariția în legea de transformare a celui de-al doilea a unui factor în plus (determinantul matricei transformării), față de aceeași lege din cazul primului (tensorului). Pentru a lămuri aceste aspecte vom porni chiar de la definiția tensorului.

Există mai multe moduri de a introduce noțiunea de tensor; în cazul de față cea mai indicată este aceea care utilizează noțiunea de *transformare ortogonală de coordonate*. Fără a intra în amănunte<sup>7</sup>, lucrurile stau în felul următor: poziția în spațiu a unui punct oarecare  $P$  față de un sistem de referință dat poate fi precizată cu ajutorul coordonatelor carteziene ale acestui punct,  $x_1, x_2, x_3$ , considerate în raport cu un sistem triortogonal de axe de coordonate, care are originea într-un punct oarecare  $O$  al celui referențial. Un astfel de *sistem de coordonate* se numește *cartezian* (vezi Fig. C6).

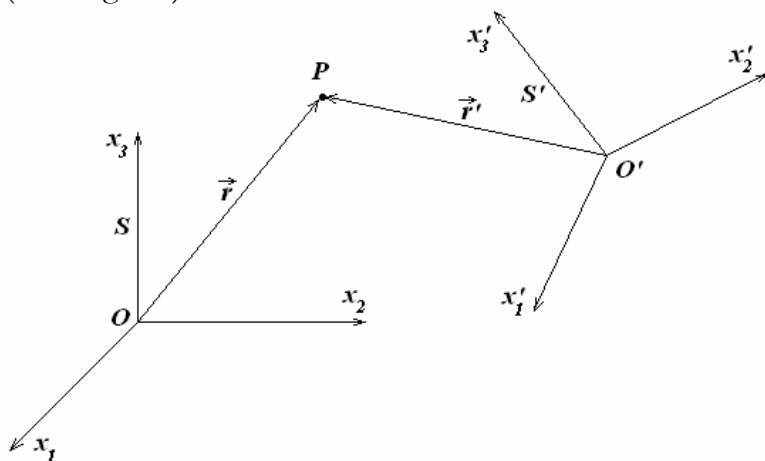


Fig. C6

Întrucât atât poziția punctului  $O$ , cât și direcțiile axelor de coordonate sunt arbitrare (datorită omogeneității și izotropiei spațiului

<sup>7</sup> Pentru „o imagine” mai detaliată asupra transformărilor ortogonale de coordonate îndrumăm cititorul să consulte Anexa A din lucrarea *Applied Analytical Mechanics* (Ioan Mercheș, Lucian Burlacu, „The Voice of Bucovina” Press, Iași, 1995).

vid) este necesar să definim legea de transformare a coordonatelor punctului  $P$ , atunci când se trece de la sistemul de coordonate inițial,  $S (Ox_1x_2x_3)$ , la un alt sistem de coordonate,  $S' (O'x'_1x'_2x'_3)$ . Este evident că noile coordonate ale punctului  $P$  (față de  $S'$ ) sunt funcții de coordonatele  $x_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) ale aceluiași punct față de sistemul inițial,  $S$ :

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = \overline{1,3}).$$

Pentru ca ecuațiile  $x'_i = \text{const.}_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) să reprezinte ecuațiile unor plane față de reperul  $S$ , trebuie ca transformarea de mai sus să fie liniară, adică de forma:

$$x'_i = R_{ij}x_j + X_i, \quad (i = \overline{1,3}),$$

unde  $X_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) sunt coordonatele originii  $O'$  a noului reper,  $S'$ , față de reperul inițial,  $S$ . Necesitatea ca distanța dintre oricare două puncte din spațiu să fie aceeași, indiferent față de care sistem de referință este determinată/măsurată, impune setului de nouă mărimi  $R_{ij}$ , ( $i, j = \overline{1,3}$ ) (care, privite ca formând o matrice, poartă numele de *matricea transformării de coordonate*) condiția:

$$R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}, \quad (i, j, k = \overline{1,3}),$$

numită *condiție de ortogonalitate*, care reduce la trei numărul parametrilor  $R_{ij}$  independenți. Transformarea liniară  $x'_i = R_{ij}x_j + X_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ), care satisface condiția de ortogonalitate se numește *transformare ortogonală neomogenă de coordonate*. Dacă  $X_i = 0$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) atunci transformarea se numește *omogenă*.

Se poate arăta<sup>8</sup> că determinantul matricei transformării este ori (+1), ori (-1):

$$\det \hat{R} \equiv \det(R_{ij}) = \pm 1.$$

Transformările pentru care  $\det \hat{R} = +1$  se numesc *proprii*, iar cele pentru care  $\det \hat{R} = -1$  se numesc *improprii*. De exemplu, translațiile

<sup>8</sup> Idem.



$\left[ x'_i = X_i, \left( i = \overline{1,3} \right) \right]$  sau rotațiile  $\left[ x'_i = R_{ij}x_j, \left( i, j = \overline{1,3} \right) \right]$  sunt exemple de transformări ortogonale proprii, iar inversiile (reflexiile în oglindă ale axelor de coordonate) – de exemplu, reflexia în oglindă reprezentată grafic

în Fig. C7, a cărei matrice a transformării este  $\hat{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – fac parte

din categoria transformărilor ortogonale improprii.

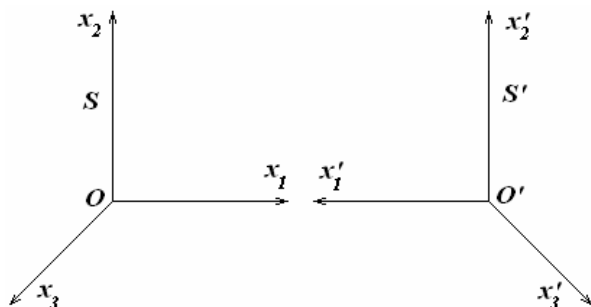


Fig. C7

Se poate arăta că mulțimea transformărilor ortogonale neomogene de coordonate formează o structură de grup în raport cu operația de compunere a acestor transformări, numit *grupul transformărilor ortogonale neomogene de coordonate*. Proprietățile acestui grup, precum și principalele lui subgrupuri pot fi găsite în lucrarea amintită anterior<sup>9</sup>.

Pentru înțelegerea noțiunilor de pseudoscalar și pseudovector (și, în general, a celei de pseudotensor) este necesar să definim noțiunea de *orientare* a unui reper. Astfel, un reper  $S$  se numește *drept* (sau de *orientare dreaptă*) dacă, rotind un burghiu drept (orientat de-a lungul axei  $Ox_3$  și având vârful în sensul axei) cu un unghi de  $90^\circ$ , produce suprapunerea axei  $Ox_1$  peste axa  $Ox_2$  (vezi Fig. C8). Altfel spus, dacă  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ , unde  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  și  $\vec{u}_3$  sunt versorii axelor  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  și respectiv  $Ox_3$ , atunci reperul este drept. În acest fel apare evidentă extrem de importanta legătură care

<sup>9</sup> Idem.

există între operația de produs vectorial și noțiunea de orientare a unui reper. Un reper stâng (de orientare stângă) poate fi obținut efectuând un număr impar de inversii spațiale (ale axelor de coordonate). În termenii transformărilor ortogonale de coordonate, considerațiile de mai sus asupra noțiunii de orientare a unui reper pot fi exprimate matematic într-un mod foarte concis, astfel:

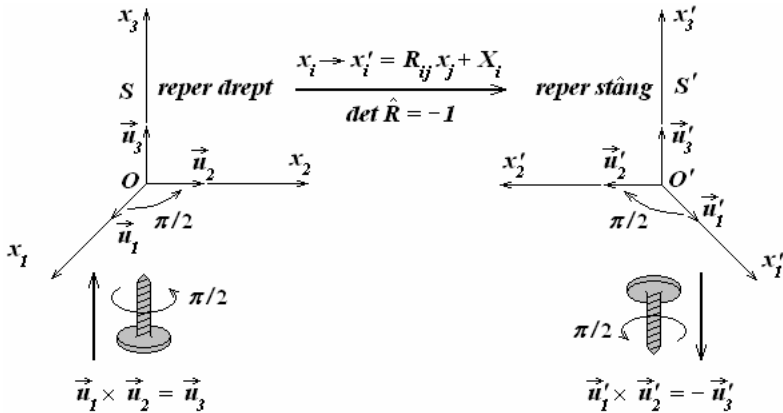


Fig. C8

Fie un reper drept,  $S$ . Atunci, orice reper  $S'$  care rezultă printr-o transformare ortogonală de coordonate având

↗  $\det \hat{R} = +1$  este un reper drept,

↘  $\det \hat{R} = -1$  este un reper stâng.

În acest cadru putem defini principalele mărimi algebrice astfel:

**Definiție:** Se numește *scalar* o mărime caracterizată de un număr real, care rămâne neschimbat la orice transformare de coordonate.

Pentru o mărime fizică scalară definiția este asemănătoare, numai că în acest caz trebuie precizată și unitatea de măsură.

**Definiție:** Un scalar a cărui formă algebrică este aceeași în orice sistem de coordonate se numește *invariant*.

**Definiție:** Se numește *vector*,  $\vec{v}$ , o mărime caracterizată de un sistem ordonat de trei numere reale,  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , numite *componentele vectorului*, care la o transformare ortogonală de coordonate se transformă după legea:

$$v'_i = R_{ij}v_j, \quad (i, j = \overline{1,3}).$$

$v'_i$  sunt componentele vectorului în noul sistem de coordonate, iar  $R_{ij}$ ,  $(i, j = \overline{1,3})$  sunt elementele matricei transformării.

**Definiție:** Se numește *tensor de rang/ordin  $n$*  în spațiul euclidian  $E_m$  o mărime caracterizată de un set ordonat de  $m^n$  numere reale,  $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ,  $(i_1, i_2, \dots, i_n = \overline{1, m})$ , numite *componentele tensorului*, care la o transformare ortogonală de coordonate se transformă după legea:

$$t'_{i_1 i_2 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} t_{j_1 j_2 \dots j_n}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n = \overline{1, m}).$$

**Definiție:** Se numește *pseudotensor de rang/ordin  $n$*  în spațiul euclidian  $E_m$  o mărime caracterizată de un set ordonat de  $m^n$  numere reale,  $t^*_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ,  $(i_1, i_2, \dots, i_n = \overline{1, m})$ , numite *componentele pseudotensorului*, care la o transformare ortogonală de coordonate se transformă după legea:

$$t^{*'}_{i_1 i_2 \dots i_n} = (\det \hat{R}) R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} t^*_{j_1 j_2 \dots j_n}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n = \overline{1, m}).$$

Cu alte cuvinte, la o transformare ortogonală proprie ( $\det \hat{R} = +1$ ) pseudotensorii se transformă la fel ca tensorii, iar la o transformare ortogonală improprie ( $\det \hat{R} = -1$ ) apare o diferență de semn. De exemplu, la o inversie a celor trei axe de coordonate (o transformare ortogonală improprie),  $x_i \rightarrow x'_i = -x_i$ ,  $(i = \overline{1,3})$  componentele unui vector satisfac relațiile:  $v'_i = -v_i$ ,  $(i = \overline{1,3})$ , pe când, componentele unui pseudovector satisfac relațiile:  $v^{*'}_i = v^*_i$ ,  $(i = \overline{1,3})$ . Ținând seama de legătura (semnalată anterior) dintre orientarea reperelor și caracterul propriu sau impropriu al transformărilor ortogonale de coordonate, putem spune că la schimbarea orientării unui reper tensorii își schimbă semnul componentelor, pe când pseudotensorii nu.

Pentru a ilustra aceste afirmații vom considera un singur exemplu, cel al vectorului axial inducție a câmpului magnetic creat în vid de un element de circuit liniar parcurs de un curent continuu de intensitate  $I$  și

situat în planul  $x_1Ox_2$  (vezi Fig. C9). După cum se știe, valoarea acestui câmp într-un punct determinat de vectorul „de poziție”  $\vec{r}$ , care are originea în originea elementului de curent  $I d\vec{l}$  este dată de legea Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

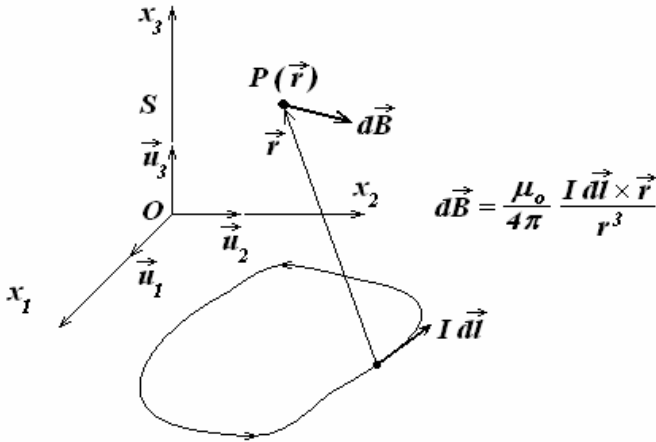


Fig. C9

Deoarece elementul de curent se află în planul  $x_1Ox_2$ , avem:

$$I d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ I dx_1 & I dx_2 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = I x_3 dx_2 \vec{u}_1 + I x_2 dx_1 \vec{u}_3 - I x_1 dx_2 \vec{u}_3 - I x_3 dx_1 \vec{u}_2,$$

ceea ce conduce la următoarele componente ale câmpului magnetic elementar  $d\vec{B}$  în punctul considerat,  $P(\vec{r})$ :

$$\begin{cases} dB_1 = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x_3 dx_2}{r^3}, \\ dB_2 = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x_3 dx_1}{r^3}, \\ dB_3 = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{r^3}. \end{cases}$$

Efectuând acum transformarea ortogonală improprie dată de relațiile:

$$x_i \rightarrow x'_i = -x_i, \quad (i = \overline{1,3}),$$

(cu alte cuvinte, realizând inversia celor trei axe de coordonate, sau altfel spus, schimbând orientarea reperului) și având în vedere faptul că din punct de vedere fizic configurația nu s-a modificat (avem același circuit electric liniar, parcurs de același curent, în același sens etc.), ceea ce înseamnă că după transformare  $r' = r$  (lungimea vectorului „de poziție”  $\vec{r}$  rămâne, evident, aceeași),  $d\vec{l}' = -d\vec{l}$  și  $\vec{r}' = -\vec{r}$  (deoarece axele și-au schimbat sensul),  $I' = I$ ,  $\mu'_0 = \mu_0$  (relații evidente), avem:

$$\begin{aligned} d\vec{B}' &= \frac{\mu'_0}{4\pi} \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{r}'}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [(-d\vec{l}) \times (-\vec{r})] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \left\{ -[(-\vec{r}) \times d\vec{l}] \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \left\{ -[-(d\vec{l} \times \vec{r})] \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = d\vec{B}, \end{aligned}$$

adică:

$$\begin{cases} dB'_1 = dB_1, \\ dB'_2 = dB_2, \\ dB'_3 = dB_3, \end{cases}$$

ceea ce este în acord cu afirmațiile de mai sus: la o transformare ortogonală improprie, sau echivalent, la schimbarea orientării reperului, componentele pseudotensorilor (în cazul nostru a pseudovectorului  $d\vec{B}$ ) nu se modifică.

Să revenim acum asupra observației făcute mai sus referitoare la statutul special al operației de produs vectorial în legătură cu caracterul pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Astfel, am văzut că efectul unei inversii (oglundiri) a axelor de coordonate este schimbarea orientării reperului afectat de acea inversie. Dar schimbarea orientării unui reper determină schimbarea semnului componentelor tensorilor și păstrarea nealterată a semnului componentelor pseudotensorilor, fiind astfel strâns legată de caracterul de pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Întrucât din punct de vedere algebric efectul unei inversii poate fi exprimat cu ajutorul produsului vectorial (al versorilor axelor reperului), apare ca evidentă legătura dintre operația de produs vectorial și caracterul pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Această observație este deosebit de importantă în

vederea stabilirii corecte a caracterului pseudo- sau non-pseudo- al scalarilor și/sau vectorilor și, în general, al oricăror tensori.

După cum am văzut anterior, în cazul unui reper drept putem scrie că  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ . Dacă efectuăm acum o inversie (sau un număr impar de inversii) a axelor de coordonate (de exemplu, a axei  $Ox_3 : x'_3 = -x_3$ ) orientarea reperului se va schimba, acesta devenind un reper stâng:  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = -\vec{u}_3$ . Datorită proprietății de anticomutativitate a operației de produs vectorial, lucrurile stau la fel dacă inversia afectează oricare altă axă de coordonate. Într-adevăr, să presupunem că are loc o inversie a axei  $Ox_2 : x'_2 = -x_2$ . În acest caz (vezi Fig. C10) putem scrie:

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_2 \times \vec{u}_1 = -\vec{u}_1 \times \vec{u}_2,$$

sau

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = -\vec{u}_3,$$

adică aceeași relație ca în primul caz (inversia axei  $Ox_3$ ).

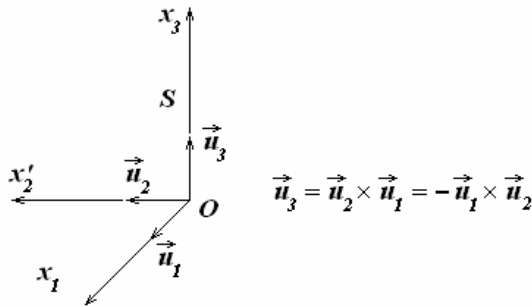


Fig. C10

Situația este aceeași și dacă inversia afectează axa  $Ox_1$  sau, mai general, un număr impar de axe. Dacă, în schimb, au loc un număr par de inversii, atunci orientarea reperului nu se schimbă și nici caracterul de pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Algebric, această proprietate se poate exprima tot cu ajutorul produsului vectorial. Într-adevăr, dacă, de exemplu, au loc două inversii (să zicem, ale axelor  $Ox_1$  și  $Ox_3$ ), atunci putem scrie (vezi

Fig. C11):  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ , ceea ce înseamnă că reperul este drept, adică la fel cum era înaintea celor două inversii.

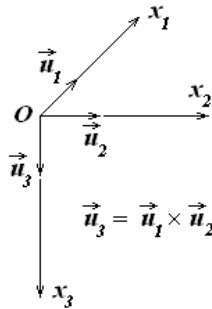


Fig. C11

Din cele discutate mai sus reiese o metodă simplă și foarte ușor de aplicat în vederea stabilirii caracterului de pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Pentru aceasta trebuie doar să observăm că schimbarea orientării reperului (și deci a semnului componentelor tensorilor – pe de o parte – și păstrarea neschimbată a semnului componentelor pseudotensorilor – pe de altă parte) depinde de numărul de inversii care afectează axele de coordonate (par sau impar). În acest fel, dacă asociem în mod convențional semnul minus mărimilor pseudotensoriale și semnul plus celor tensoriale, și dacă în plus ținem cont de faptul că, în baza acestei asocieri operația de produs vectorial „are caracterul de pseudo-” (datorită proprietății de anticomutativitate a ei), deci  $i$  se asociază semnul  $(-1)$ , atunci problema este rezolvată: caracterul mărimilor tensoriale (de orice ordin) va fi dat de semnul „rezultant” asociat expresiilor care definesc aceste mărimi  $(+1)$  sau  $(-1)$ . Exemple:

- 1) După cum știm, vectorul de poziție  $\vec{r}$  al originii unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un punct (pol) este un vector polar (vector), la fel ca și vectorul forței  $\vec{F}$ . Atunci, având în vedere asocierea convențională amintită mai sus, celor două mărimi ( $\vec{r}$  și  $\vec{F}$ ) li se asociază semnul  $(+1)$ . Întrucât operația de produs vectorial are caracter de pseudovector (deci  $i$  se asociază semnul  $(-1)$ ), rezultă că

momentul unei forțe  $\vec{F}$  în raport cu un pol este un pseudovector. Într-adevăr,

$$\underbrace{\vec{M}}_{(-1)} = \underbrace{\vec{r}}_{(+1)} \times \underbrace{\vec{F}}_{(-1)(+1)};$$

- 2) Operatorul nabla  $\left( \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$  este un vector, viteza liniară a unei particule de fluid în mișcare este tot un vector, deci „vectorul” vârtej,

$$\underbrace{\vec{\Omega}}_{(-1)} = \frac{1}{2} \underbrace{\nabla}_{(+1)} \times \underbrace{\vec{v}}_{(-1)(+1)}$$

este de fapt un pseudovector (vector axial sau de speța a doua). În mod analog se poate justifica faptul că rotorul oricărui vector polar este un vector axial (pseudovector);

- 3) Așa cum știm, forța de interacțiune magnetică ce se exercită între două circuite parcurse de curent electric este un vector (vector polar). Într-adevăr, deoarece elementele de curent  $I_1 d\vec{l}_1$  și  $I_2 d\vec{l}_2$ , ca și vectorul „de poziție” (al elementului de curent  $I_2 d\vec{l}_2$  față de originea lui  $I_1 d\vec{l}_1$ )  $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$  sunt vectori (vectori polari), avem:

$$\underbrace{\vec{F}}_{(+1)}_{12} = \underbrace{-\vec{F}}_{(+1)}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(r_1)} \oint_{(r_2)} \frac{\underbrace{d\vec{l}_2}_{(+1)} \times \underbrace{(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}_{(-1)(+1)(+1)}}{r_{12}^3};$$

- 4) Momentul unei forțe  $\vec{F}$  față de o axă  $\Delta$ ,  $M_\Delta = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{M}_O$  ( $\vec{u}_\Delta$  fiind versorul axei  $\Delta$ , iar  $\vec{M}_O$  – momentul forței  $\vec{F}$  față de un punct/pol oarecare<sup>10</sup>  $O$  de pe axă) este un pseudoscalar, deoarece semnul asociat lui este  $(-1)$ . Într-adevăr:

<sup>10</sup> Prin definiție, momentul unei forțe față de o axă este egal cu proiecția pe acea axă a momentului forței față de un punct/pol (oarecare) de pe acea axă (se demonstrează că momentul unei forțe față de o axă,  $M_\Delta$ , este același, indiferent de punctul/polul  $O$  de pe axă, față de care este calculat – în prealabil – momentul  $\vec{M}_O$  al forței respective).



$$\underbrace{M}_{(-1)} = \underbrace{\vec{u}}_{(+1)} \cdot (\underbrace{\vec{r}}_{(+1)} \times \underbrace{\vec{F}}_{(-1)(+1)})$$

- 5) Dacă  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{d}$  sunt vectori axiali, iar  $\vec{c}$  este un vector polar, atunci  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$  este un pseudoscalar (scalar de speța a doua).  
Într-adevăr:

$$\underbrace{p}_{(-1)} = (\underbrace{\vec{a}}_{(-1)} \times \underbrace{\vec{b}}_{(-1)}) \cdot (\underbrace{\vec{c}}_{(+1)} \times \underbrace{\vec{d}}_{(-1)}) \text{ etc.}$$

În continuare vom da câteva exemple de mărimi fizice (însoțite de unitățile lor de măsură în *SI*), care au – ca și entități algebrice – ordinul tensorial zero și unu.

- 1) Exemple de *mărimi fizice scalare*: masa,  $m[\text{kg}]$ ; temperatura,  $T[\text{K}]$ ; presiunea,  $p[\text{N} \cdot \text{m}^{-2}]$ ; lucrul mecanic,  $L[\text{J}]$ ; concentrația unei substanțe chimice într-o soluție,  $c[\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}]$ ; puterea,  $P[\text{W}]$ ; densitatea unei substanțe,  $\rho[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ ; permeabilitatea magnetică a vidului,  $\mu_0[\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$ ; potențialul electric într-un punct,  $\forall[\text{V}]$ ; fluxul câmpului electric,  $\Phi_e[\text{V} \cdot \text{m}]$  etc.;
- 2) Exemple de *mărimi fizice pseudoscalare*: momentul unei forțe față de o axă,  $M_\Delta[\text{N} \cdot \text{m}]$ ; fluxul câmpului magnetic,  $\Phi_m[\text{T} \cdot \text{m}^2]$  etc.;
- 3) Exemple de *mărimi fizice vectoriale*: viteza liniară a unui corp,  $\vec{v}[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$ ; forța (newtoniană),  $\vec{F}[\text{N}]$ ; accelerația liniară,  $\vec{a}[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$ ; intensitatea câmpului electric,  $\vec{E}[\text{V} \cdot \text{m}^{-1}]$ ; densitatea fluxului de energie electromagnetică (vectorul Poynting),  $\vec{Y}[\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$ ; inducția câmpului electric,  $\vec{D}[\text{C} \cdot \text{m}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}]$ ; densitatea de impuls a câmpului electromagnetic,  $\vec{g}[\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$  etc.;

- 4) Exemple de *mărimi fizice pseudovectoriale*: inducția câmpului magnetic,  $\vec{B}[T]$ ; viteza unghiulară,  $\vec{\omega}[rad \cdot s^{-1}]$ ; momentul unei forțe față de un pol,  $\vec{M}[N \cdot m]$ ; vârtejul curgerii unui fluid,  $\vec{\Omega}[s^{-1}]$  etc.

## C.4. Elemente de analiză vectorială

### C.4.1. Funcții vectoriale

În cele ce urmează vom considera acei vectori care depind de un parametru real, variabil,  $t$ . Dacă fiecărei valori date a parametrului  $t$  îi corespunde un vector  $\vec{a}$ , atunci spunem că  $\vec{a}$  este o funcție vectorială de  $t$  și scriem  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ . Dacă  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  este vectorul de poziție al unui punct  $P$  în raport cu sistemul de coordonate  $Oxyz$ , atunci curba descrisă de acest punct este dată de ecuațiile parametrice:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Considerăm un punct material  $P$  definit prin vectorul de poziție  $\vec{a}(t)$  în raport cu originea unui sistem de coordonate  $Oxyz$ . O variație a parametrului real  $t$  produce o variație corespunzătoare a vectorului de poziție  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ , astfel încât extremitatea lui va descrie o curbă  $C$ , numită *hodograful funcției*  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  (vezi Fig. C12).

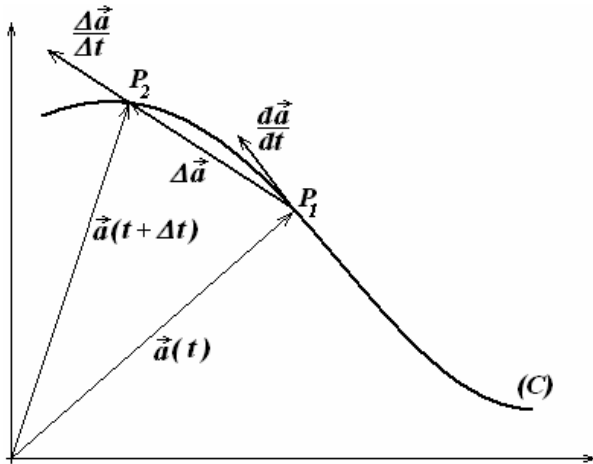


Fig. C12

### C.4.2. Derivata și diferențiala unei funcții vectoriale

Considerând că  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  este o funcție vectorială continuă de parametrul  $t$ , se poate defini *derivata acestei funcții vectoriale* în raport cu  $t$  prin relația:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t},$$

unde,

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t),$$

reprezintă creșterea  $\Delta\vec{a}$  a funcției  $\vec{a}(t)$ , corespunzătoare unei creșterii  $\Delta t$  a parametrului  $t$  (ceea ce determină deplasarea punctului material din punctul  $P_1$  în punctul  $P_2$ ), iar vectorul  $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$  este un vector coliniar cu  $\Delta\vec{a}$ .

Vectorul  $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$  este un vector paralel cu tangenta în punctul  $P$  la curba  $C$ , sensul lui corespunzând variației crescătoare a parametrului  $t$ . Mărima (modulul) derivatei  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  este:

$$\left| \frac{d\vec{a}}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{da_x}{dt} \right)^2 + \left( \frac{da_y}{dt} \right)^2 + \left( \frac{da_z}{dt} \right)^2}.$$

*Diferențiala funcției vectoriale*  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  poate fi definită prin relația:

$d\vec{a} = \frac{d\vec{a}}{dt} dt$ , unde  $dt$  este o creștere elementară, arbitrară, a parametrului  $t$ . Dacă vectorul  $\vec{a}(t)$  este o funcție de mai multe variabile:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se definește *diferențiala totală a funcției vectoriale*  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  prin:

$$d\vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i} dx_i, \quad (i = \overline{1, n}),$$

unde simbolul  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  este operatorul de derivare parțială în raport cu variabila  $x_i$ . Ținând seama de proprietățile operațiilor cu vectori și derivarea (diferențierea) funcțiilor scalare, rezultă următoarele reguli:

$$\frac{d(\vec{a} \pm \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$\frac{d(\lambda \vec{a})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ pentru } \lambda = \text{const.};$$

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b};$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot \frac{d(\vec{b} \times \vec{c})}{dt};$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = \frac{d\vec{a}}{dt} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \times \frac{d(\vec{b} \times \vec{c})}{dt}.$$

### C.4.3. Integrala unui vector (a unei funcții vectoriale)

Integrala unei funcții vectoriale se definește analog cu integrala unei funcții scalare. Fie  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  o funcție vectorială continuă de parametrul real  $t$ . În calculul vectorial, pe spațiul euclidian tridimensional  $E_3$  se definesc următoarele trei tipuri de integrale:

(a) Integrala curbilinie:  $\int_{P_1}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ , de-a lungul unei curbe  $C$ , între

punctele  $P_1$  și  $P_2$ , în care  $\vec{a}$  este un vector ce are punctul de aplicație pe curbă, iar  $d\vec{r}$  este un element de arc vectorizat al curbei  $C$ . Această integrală se numește *circulația vectorului  $\vec{a}$*  de-a lungul curbei  $C$  de la  $P_1$  la  $P_2$ . Dacă  $C$  este o curbă închisă, atunci circulația de-a lungul curbei ( $C$ ) se notează astfel:  $\oint \vec{a} \cdot d\vec{r}$ .

(b) Integrala dublă:  $\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ , unde  $\vec{a}$  este un vector cu punctul de

aplicație pe suprafața  $S$ , iar  $d\vec{S}$  este un element de suprafață vectorizat. Integrala se numește *fluxul vectorului  $\vec{a}$*  prin suprafața  $S$ . Dacă  $S$  este o suprafață închisă, integrala se notează astfel:  $\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$ .

(c) Integrala triplă:  $\iiint_D \vec{a} \, d\tau$ , unde  $D$  este un domeniu de volum  $V$ ,  $d\tau$  este un element de volum, iar vectorul  $\vec{a}$  are punctul de aplicație într-un punct oarecare din  $D$ .

#### C.4.4. Câmpuri scalare și vectoriale

Dacă o mărime fizică are o valoare bine determinată în fiecare punct dintr-un domeniu  $D$  din spațiu, atunci mulțimea acestor valori definește *câmpul mărimii* respective. De exemplu, un corp încălzit determină un câmp al temperaturii. În fiecare punct al corpului, temperatura are o anumită valoare. Dacă considerăm curgerea unui lichid, aceasta ne definește un câmp al vitezelor: în fiecare punct al domeniului ocupat de lichid avem determinat un vector, anume, viteza particulei de lichid din punctul respectiv. Când se definește un câmp se stabilește o corespondență între fiecare punct  $P$  din domeniul  $D$  și valoarea mărimii fizice respective în acel punct. Această corespondență definește o funcție de punctul  $P$ . Deoarece fiecare punct este determinat prin intermediul coordonatelor  $x$ ,  $y$  și  $z$ , sau echivalent, al vectorului de poziție  $\vec{r}$  în raport cu originea unui sistem de coordonate  $Oxyz$ , câmpurile diverselor mărimi fizice sunt determinate prin cunoașterea funcțiilor corespunzătoare (scalare, vectoriale sau tensoriale) de cele trei variabile scalare,  $x$ ,  $y$  și  $z$ .

Dacă în domeniul  $D$  din spațiul euclidian  $E_3$  fiecărui punct  $P \in D$  îi corespunde o valoare a unei mărimi scalare  $\varphi(P)$ , atunci spunem că în domeniul  $D$  s-a definit un *câmp scalar*,  $\varphi(x, y, z)$ . De exemplu, temperatura este o funcție scalară care depinde de punct. În fiecare punct  $P$  al unei regiuni, temperatura are o valoare  $T(P)$ . Corespondența dintre punctele  $P$  ale regiunii considerate și valorile pe care le ia temperatura în acele puncte definește o funcție scalară de punct,  $T(P) = T(x, y, z)$ . Un alt exemplu este presiunea  $p$  a aerului care este, de asemenea, o mărime scalară ce depinde de punct. În fiecare punct  $P$  al unei regiuni, presiunea ia o valoare  $p(P)$ . Corespondența dintre punctele  $P$  ale regiunii considerate și valorile pe care le ia presiunea în acele puncte definește o funcție scalară de punct  $p(P) = p(x, y, z)$ .

Dacă fiecărui punct  $P \in D$  i se asociază o mărime vectorială  $\vec{a}(P) = \vec{a}(x, y, z)$ , spunem că în domeniul  $D$  s-a definit un *câmp vectorial*. De exemplu, un astfel de câmp se găsește în regiunea din jurul unui corp electrizat. În fiecare punct al acestei regiuni se poate defini vectorul  $\vec{E}$  al intensității câmpului electric (electrostatic). Vitezele moleculelor unui fluid în mișcare constituie, de asemenea, un exemplu de câmp vectorial.

Un câmp scalar  $\varphi$  (sau vectorial  $\vec{A}$ ) se numește *nestaționar* dacă  $\varphi$  (respectiv  $\vec{A}$ ) depinde explicit de timp. În caz contrar, câmpul se numește *staționar*. Funcțiile  $\varphi$  și  $\vec{A}$  se presupun continue și cu derivate parțiale continue.

## C.5. Operatori vectoriali de ordinul întâi<sup>11</sup>

### C.5.1. Gradientul

Fie funcția scalară  $\varphi(x, y, z)$  de clasă  $C^1$  (derivabilă și cu derivate de ordinul întâi continue), definită pe un anumit domeniu  $D \subset E_3$ . Din cele arătate mai sus, rezultă că în domeniul  $D$ ,  $\varphi(x, y, z)$  definește un câmp scalar. Diferențiala funcției  $\varphi(x, y, z)$  este, după cum știm, dată de relația:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (\text{C.33})$$

care, ținând cont de expresia analitică a produsului scalar a doi vectori (vezi relația (C.16)), poate fi scrisă sub forma:

<sup>11</sup> După cum vom vedea, de fapt operatorul este unul singur, anume operatorul nabla, cu ajutorul căruia se exprimă atât gradientul, cât și divergența sau rotorul diverselor câmpuri scalare și/sau (după caz) vectoriale. Totuși, prin abuz de limbaj, atât gradientul, cât și divergența și rotorul diverselor câmpuri sunt numiți tot operatori, cu toate că aceste mărimi sunt de fapt *rezultatul* aplicării operatorului nabla (în diverse moduri) asupra câmpurilor respective. În schimb, laplaceanul este un operator veritabil, obținut prin aplicarea succesivă, de două ori (cu ajutorul produsului scalar), a operatorului nabla asupra unui câmp scalar. De altfel, în mod absolut corect, se și spune „operatorul lui Laplace”.

$$d\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) =$$

$$= \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \vec{u}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \vec{u}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \vec{u}_3 \right) \cdot (dx_1 \vec{u}_1 + dx_2 \vec{u}_2 + dx_3 \vec{u}_3),$$

adică poate fi considerată ca produsul scalar al vectorilor

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

și un al doilea vector (pe care-l vom nota cu  $\vec{A}$ ) ale cărui componente sunt chiar derivatele parțiale ale funcției scalare  $\varphi(x, y, z)$ :

$$\vec{A} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} = \vec{u}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.34})$$

Câmpul vectorial  $\vec{A}$  ale cărui componente față de un reper triortogonal cartezian sunt  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) se numește *gradientul câmpului scalar*  $\varphi$  și se notează de obicei cu  $\text{grad}\varphi$ . Utilizând această notație, relația (C.33) devine:

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{r}. \quad (\text{C.35})$$

Vectorul  $\text{grad}\varphi$  determină variația funcției  $\varphi$  în jurul unui punct, iar componenta pe direcția  $x_i$  a acestuia, adică derivata parțială a lui  $\varphi$  în raport cu  $x_i$  reprezintă viteza de variație a lui  $\varphi$  pe direcția respectivă. Direcția vectorului  $\text{grad}\varphi$  într-un punct oarecare este direcția pe care mărimea scalară  $\varphi$  variază cel mai rapid, pornind din acel punct, iar sensul vectorului  $\text{grad}\varphi$  se consideră acela în care mărimea scalară  $\varphi$  crește. Din relația (C.33) se observă că vectorul  $\text{grad}\varphi$  poate fi obținut prin aplicarea operatorului

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i = \overline{1,3}) \quad (\text{C.36})$$

funcției scalare  $\varphi(x_i)$ . Acest operator, notat cu simbolul  $\nabla$ , se numește *operatorul nabla* sau *operatorul lui Hamilton*. Cu ajutorul lui putem scrie gradientul unui câmp scalar  $\varphi$  astfel:

$$\text{grad}\varphi = \vec{u}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \nabla\varphi, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.37})$$

Câmpul vectorial  $\vec{A}$  definit de relația (C.34) se numește *câmp potențial*, iar  $\varphi(x_i)$  se numește *potențialul câmpului*. De exemplu, pornind de la câmpul electrostatic  $\vec{E}(\vec{r})$ , putem determina potențialul electric  $V(\vec{r})$ , dar se poate proceda și invers: cunoscând potențialul putem determina câmpul, utilizând relația:  $\vec{E} = -\text{grad } V$ . În acest caz, semnul minus arată că  $\vec{E}(\vec{r})$  este îndreptat spre regiunea cu potențial negativ<sup>12</sup>.

Din definiția (C.36) a operatorului  $\nabla$  rezultă că acesta este un operator vectorial, liniar și diferențial (de ordinul întâi). Proiectând  $\text{grad } \varphi(x_i)$  pe direcția  $x_i$ , obținem următoarea relație:

$$(\text{grad } \varphi)_i = (\nabla \varphi) \cdot \vec{u}_i = \left( \vec{u}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \cdot \vec{u}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \vec{u}_k \cdot \vec{u}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \delta_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

sau, utilizând două notații des utilizate în analiza vectorială:

$$\text{grad}_i \varphi = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \stackrel{\text{not.}}{=} \partial_i \varphi \stackrel{\text{not.}}{=} \varphi_{,i}. \quad (\text{C.38})$$

## Suprafețe echipotențiale

Presupunând că funcția  $\varphi(P)$  este uniformă și continuă în  $D$  împreună cu derivatele sale parțiale până la ordinul doi, să considerăm toate punctele în care această funcție ia aceeași valoare. Aceste puncte constituie o suprafață în  $D$ . Într-adevăr, dacă  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sunt coordonatele punctului  $P$ , relația  $\varphi(P) = K = \text{const.}$  se mai scrie sub forma:

$$\varphi(x, y, z) = K \quad (\text{C.39})$$

și reprezintă ecuația (sub formă implicită a) unei suprafețe în  $D \subset E_3$ . Ținând seama de relațiile (C.39) și (C.35) rezultă că

$$d\varphi = 0 = \text{grad} \varphi \cdot d\vec{r}. \quad (\text{C.40})$$

Această relație este valabilă în orice punct  $P$  al suprafeței (C.39). Cum egalitatea cu zero trebuie să aibă loc fără ca vreunul din cei doi vectori să fie în mod obligatoriu nul, și cum  $d\vec{r}$  se află în planul tangent la suprafața

<sup>12</sup> Semnul minus, folosit de obicei pentru a scrie intensitatea câmpului electrostatic  $\vec{E}$  în funcție de gradientul potențialului electrostatic  $V(\vec{r})$ , este introdus în mod convențional. Această convenție este legată de sensul liniilor câmpului electrostatic; astfel, se consideră că liniile lui  $\vec{E}$  „ies” din sursele (sarcinile electrice) pozitive ale câmpului și „intră” în sursele negative.



(C.39), rezultă că în orice punct al acestei suprafețe vectorul  $\text{grad}\varphi$  are direcția normalei la suprafață. Dând valori constantei  $K$  din (C.39) obținem o familie de suprafețe care satisfac condiția (C.40). Aceste suprafețe se numesc *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel*.

### Linii de câmp

Fie un câmp vectorial staționar  $\vec{A} = \vec{A}(x_i)$  și o curbă oarecare, dată parametric prin relațiile:  $x_i = x_i(s)$ , ( $i = \overline{1,3}$ ). Dacă în fiecare punct al curbei, câmpul  $\vec{A}$  este tangent la aceasta, atunci curba se numește *linie de câmp* sau *linie de forță* a câmpului vectorial  $\vec{A}$ . Ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp se deduc din relația evidentă:  $\vec{A} \times d\vec{s} = 0$ , care arată că produsul vectorial al vectorilor coliniari  $\vec{A}$  și  $d\vec{s}$  este nul. Proiectând această relație vectorială pe axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  ale unui sistem cartezian de coordonate obținem ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \quad (\text{C.41})$$

Conform relației (C.40), pentru suprafețele echipotențiale vectorul  $\vec{A} = \text{grad}\varphi$  este ortogonal pe elementul de arc  $d\vec{r}$ , care la rândul lui este tangent la suprafețele echipotențiale. Întrucât liniile de câmp ale lui  $\vec{A} = \text{grad}\varphi$  sunt coliniare cu  $d\vec{r}$  rezultă că acestea sunt în același timp ortogonale la suprafețele echipotențiale  $\varphi = \text{const}$ .

### Derivata direcțională (derivata după o direcție)

Fie o axă ( $\Delta$ ) a cărei direcție și sens sunt date de versorul  $\vec{u}_\Delta = \frac{d\vec{r}}{ds}$ , unde prin  $ds = |d\vec{r}|$  am notat modulul elementului de linie  $d\vec{r}$  al axei ( $\Delta$ ). Prin *derivata direcțională* a unei funcții scalare  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  după axa dată ( $\Delta$ ) (sau derivata după direcția axei considerate ( $\Delta$ )) se înțelege proiecția gradientului acestei funcții pe direcția dată (considerată):

$$\text{grad}\varphi \cdot \vec{u}_\Delta = \frac{d\varphi}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

În relația anterioară am utilizat scrierea formală a gradientului lui  $\varphi$ :

$$\mathit{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{r}} \text{ și am simplificat (tot formal) pe } d\vec{r}.$$

### C.5.2. Divergența unui câmp vectorial

Având în vedere caracterul vectorial al operatorului  $\nabla$ , să-l aplicăm scalar câmpului vectorial  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ ; cu alte cuvinte,  $\nabla$  fiind un vector poate fi înmulțit scalar și/sau vectorial cu alți vectori. Rezultatul operației de produs scalar dintre  $\nabla$  și  $\vec{A}$  (în această ordine) este un câmp scalar, care se numește *divergența* lui  $\vec{A}$  și se notează  $div \vec{A}$ . Chiar dacă, așa cum știm, produsul scalar a doi vectori este comutativ, deoarece  $\nabla$  este în primul rând un operator are importanță ordinea în care sunt considerați cei doi vectori în produsul scalar. Cu alte cuvinte,  $\vec{A} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \vec{A}$ . Într-adevăr, mărimea

$$\vec{A} \cdot \nabla = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

este la rândul ei un operator, pe când

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left( \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (A_k \vec{u}_k) = (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k) \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{C.42})$$

este o mărime scalară bine definită, numită *divergența câmpului vectorial*  $\vec{A}(\vec{r})$ :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \stackrel{\text{not.}}{=} div \vec{A}. \text{ Cu notațiile din (C.38) mai putem scrie:}$$

$$div \vec{A} = \nabla_i A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i = A_{i,i}, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.43})$$

Un câmp vectorial  $\vec{A}$  pentru care  $div \vec{A} = 0$  se numește *câmp fără surse* sau *câmp solenoidal*; liniile unui astfel de câmp sunt curbe închise. Dacă, în schimb,  $div \vec{A} \neq 0$ , atunci câmpul vectorial  $\vec{A}$  se numește *câmp cu surse*. Evident, în acest caz există două posibilități:

$$\nearrow \quad div \vec{A} > 0,$$

$$div \vec{A} \neq 0$$

$$\searrow \quad div \vec{A} < 0.$$

În primul caz ( $div \vec{A} > 0$ ) sursele câmpului sunt pozitive. O sursă pozitivă se mai numește și „izvor”. În cazul al doilea ( $div \vec{A} < 0$ ) sursele sunt

negative; o sursă negativă se mai numește și „puț”. Pentru un câmp cu surse există totdeauna măcar o linie de câmp care „nu se închide”<sup>13</sup> în surse („merge” spre infinit). Prin convenție, de obicei se consideră că liniile unui astfel de câmp ies din sarcinile pozitive și intră în sarcinile negative. Evident, pentru un câmp solenoidal, liniile de câmp neavând de unde ieși și unde intra (neexistând surse) acestea trebuie să se închidă în ele însele. Un exemplu de astfel de câmp (fără surse, sau solenoidal) este câmpul magnetostatic de inducție  $\vec{B}$ . Este știut faptul că, cel puțin până la ora actuală, nu s-a reușit detectarea experimentală a monopolului magnetic<sup>14</sup>, care, din punct de vedere fenomenologic, ar putea juca rol de sursă a câmpului magnetic. Într-adevăr, orice experiment arată faptul că în oricât de multe și de mici bucăți am diviza un magnet, rezultă totdeauna alți mici magneți și niciodată pólî nord și sud separați<sup>15</sup>. Analogia matematică aproape perfectă dintre câmpurile electrostatic și magnetostatic a necesitat introducerea unor echivalenți pentru sarcinile electrice pozitive (sursele pozitive ale câmpului electrostatic) și sarcinile electrice negative (sursele negative ale câmpului electrostatic) ale câmpului electrostatic și pentru câmpul magnetostatic. Aceștia sunt cei doi poli: polul nord magnetic (corespondentul sarcinii electrice pozitive) și polul sud magnetic (analogul sarcinii electrice negative). Aceste aspecte sunt schițate grafic (în cazul simplu al unui ansamblu format din doar două sarcini – electrice și respectiv magnetice) în Fig. C13.

De altfel, singura diferență notabilă din punct de vedere matematic dintre cele două câmpuri este cea care exprimă divergența celor două câmpuri (de fapt, legea lui Gauss pentru cele două câmpuri):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho \neq 0 \quad (\text{unde } \rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau} = \rho(\vec{r}) \text{ este densitatea sarcinii}$$

electrice) și  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  (densitatea sarcinilor magnetice – monopolilor –

<sup>13</sup> În sensul că, dacă acea linie de câmp a ieșit dintr-o sursă pozitivă, atunci ea nu mai intră într-o sursă negativă, ci se îndreaptă spre infinit, și invers: există cel puțin o linie de câmp care intră într-o sursă negativă și care nu vine dintr-o sursă pozitivă, ci de la infinit (vezi Fig. 13 a).

<sup>14</sup> Cu toate că, diverse modele teoretice din teoria cuantică a câmpurilor i-au prezis existența reală.

<sup>15</sup> Deci nu rezultă mono-poli, ci „bi-poli”, orice mic magnet care rezultă în urma divizării având doi poli (un pol nord și unul sud) și nu unul singur.

este nulă). În regiunea din spațiu unde nu există sarcini electrice ( $\rho = 0$ ) cele două ecuații se scriu la fel:  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  și  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

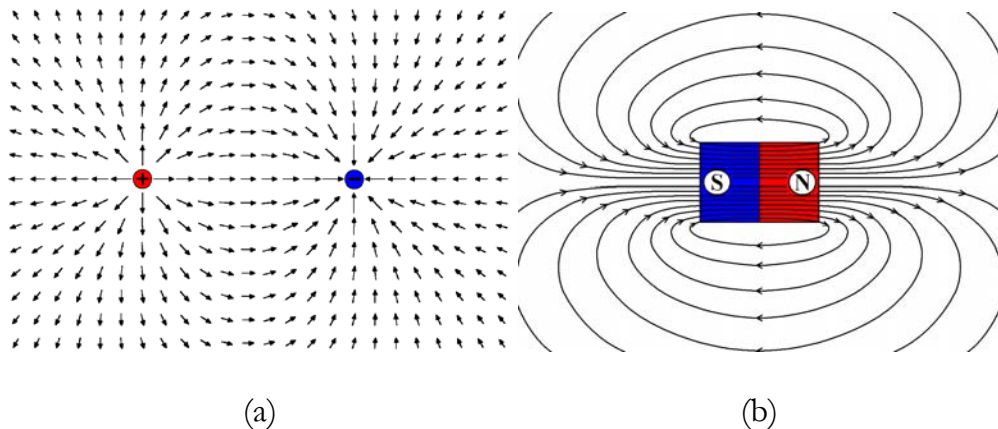


Fig. 13

Cu alte cuvinte, într-o astfel de regiune a spațiului, din punct de vedere matematic cele două câmpuri se comportă absolut identic, și în acest caz nu se vorbește de câmp electric sau câmp magnetic, ci despre *câmp electromagnetic*. „Echivalența” matematică a celor două câmpuri a permis realizarea primei unificări (din șirul încă neterminat<sup>16</sup>) a două teorii ale fizicii. Acest lucru a fost făcut de către J.C. Maxwell, care a reușit pentru prima dată să unifice teoria câmpului magnetic cu cea a câmpului

<sup>16</sup> Mai apoi s-a reușit unificarea teoriei electromagnetismului cu cea a interacțiilor nucleare slabe, rezultând teoria electroslabă; aceasta a fost unificată ulterior (în cadrul Modelului Standard) cu teoria interacțiilor nucleare tari (cromodinamica cuantică), rezultând o nouă teorie, care descrie global și unitar interacțiunile electromagnetice și cele nucleare (tari și slabe), singura interacțiune care încă nu a reușit nici la ora actuală să fie înglobată într-o singură (unică) teorie care ar fi capabilă să descrie unitar toate cele patru interacțiuni cunoscute până în prezent fiind gravitația. Principalul obstacol îl reprezintă neliniaritatea ecuațiilor câmpului gravitațional (Einstein) care împiedică cuantificarea într-o schemă cunoscută a acestui câmp. Precizăm că toate aceste teorii de unificare nu au putut fi elaborate decât în cadrul unor formalisme relativiste și totodată cuantice. De altfel, marele vis al oricărui fizician teoretician este de a realiza această Teorie a Marii Unificări (a tuturor celor patru interacțiuni fundamentale: electromagnetică, nucleară slabă, nucleară tare și gravitațională) cunoscută sub acronimul GUT (Grand Unified Theory).

electric într-una nouă, coerentă și unitară, cea a câmpului electromagnetic. Această nouă teorie are la bază celebrele ecuații ale lui Maxwell<sup>17</sup>.

### C.5.3. Rotorul unui câmp vectorial

Dacă, în paragraful C.5.2 în loc de a utiliza operația de produs scalar vom folosi operația de produs vectorial (care, de această dată este de la bun început necomutativă), adică dacă îl vom înmulți vectorial pe  $\nabla$  cu câmpul vectorial  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  (în această ordine) obținem ceea ce se numește *rotorul câmpului vectorial*  $\vec{A}$ . Deci, prin rotorul câmpului vectorial  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  înțelegem câmpul vectorial  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Dacă  $\vec{A}$  este un vector polar,  $\vec{B}$  este un vector axial. Pentru a exprima analitic rotorul unui câmp vectorial, vom utiliza relația (C. 27):

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{u}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (\text{C.44})$$

$$= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Înmulțind scalar cu versorul direcției  $x_s$ , relația (C.44) (adică cu  $\vec{u}_s$ ), obținem proiecția rotorului lui  $\vec{A}$  după această direcție, sau altfel spus, componenta rotorului lui  $\vec{A}$  după direcția dată de  $\vec{u}_s$ :

$$\left( \text{rot } \vec{A} \right)_s = \left( \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{u}_i \right) \cdot \vec{u}_s = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \left( \vec{u}_i \cdot \vec{u}_s \right) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \delta_{si} = \varepsilon_{sjk} \partial_j A_k. \quad (\text{C.45})$$

De exemplu, considerând în (C.45)  $s=1$  pentru proiecția sau componenta după axa  $x$  a rotorului lui  $\vec{A}$  obținem:

$$\begin{aligned} \left( \text{rot } \vec{A} \right)_1 &\equiv \left( \text{rot } \vec{A} \right)_x = \varepsilon_{1jk} \partial_j A_k = \varepsilon_{123} \partial_2 A_3 + \varepsilon_{132} \partial_3 A_2 = \\ &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y A_z - \partial_z A_y \equiv \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \end{aligned}$$

<sup>17</sup> Cele patru ecuații ale lui Maxwell reprezintă de fapt teorema Gauss pentru cele două câmpuri (electric și magnetic), la care se adaugă legea inducției electromagnetice și cea a inducției magnetoelectrice.

Un câmp vectorial  $\vec{A}$  pentru care,  $rot \vec{A} = 0$  se numește *câmp irotațional* sau *câmp fără vârtejuri*. Un astfel de câmp este, de exemplu, câmpul electrostatic, a cărui intensitate este  $\vec{E}$ .

## C.6. Identități vectoriale

Prezentăm mai jos unele dintre cele mai des întâlnite/utilizate identități din analiza vectorială, împreună cu „demonstrarea” lor.

$$1. \text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\varphi. \quad (\text{C.46})$$

Într-adevăr,

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \vec{u}_i \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i} = \vec{u}_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \varphi + \vec{u}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \psi = \varphi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\varphi.$$

$$2. \text{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\varphi. \quad (\text{C.47})$$

Într-adevăr,

$$\text{div}(\varphi\vec{A}) = \frac{\partial(\varphi A_i)}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + A_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \varphi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\varphi.$$

$$3. \text{rot}(\varphi\vec{A}) = \nabla \times (\varphi\vec{A}) = \varphi \nabla \times \vec{A} + (\nabla\varphi) \times \vec{A} = \varphi \text{rot} \vec{A} + \text{grad}\varphi \times \vec{A}. \quad (\text{C.48})$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\varphi\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varphi A_k) \vec{u}_i = \varphi (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{u}_i) + \varepsilon_{ijk} (\partial_j \varphi) A_k \vec{u}_i = \\ &= \varphi \text{rot} \vec{A} + \text{grad}\varphi \times \vec{A}. \end{aligned}$$

$$4. \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}. \quad (\text{C.49})$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i = \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) = \\ &= \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k + \varepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j = -A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k + B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j = \end{aligned}$$

$$= -A_j \left( \text{rot } \vec{B} \right)_j + B_k \left( \text{rot } \vec{A} \right)_k = -\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A}.$$

$$5. \nabla \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A}. \quad (\text{C.50})$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \nabla \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) &= \text{grad} \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) = \partial_i \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) \vec{u}_i = \partial_i \left( A_j B_j \right) \vec{u}_i = A_j \partial_i B_j \vec{u}_i + B_j \partial_i A_j \vec{u}_i = \\ &= A_j \partial_i B_j \vec{u}_i + \underbrace{\left( -A_j \partial_j B_i \vec{u}_i + A_j \partial_j B_i \vec{u}_i \right)}_{=0} + B_j \partial_i A_j \vec{u}_i + \underbrace{\left( -B_j \partial_j A_i \vec{u}_i + B_j \partial_j A_i \vec{u}_i \right)}_{=0} = \\ &= \left( A_j \partial_i B_j \vec{u}_i - A_j \partial_j B_i \vec{u}_i \right) + A_j \partial_j B_i \vec{u}_i + \left( B_j \partial_i A_j \vec{u}_i - B_j \partial_j A_i \vec{u}_i \right) + B_j \partial_j A_i \vec{u}_i = \\ &= \left( A_j \partial_i B_j - A_j \partial_j B_i \right) \vec{u}_i + \left( A_j \partial_j \right) \left( B_i \vec{u}_i \right) + \left( B_j \partial_i A_j - B_j \partial_j A_i \right) \vec{u}_i + \left( B_j \partial_j \right) \left( A_i \vec{u}_i \right) = \\ &= A_j \underbrace{\left( \partial_i B_j - \partial_j B_i \right)}_{\substack{\text{not.} \\ = T_{ij}^B = -T_{ji}^B}} \vec{u}_i + \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + B_j \underbrace{\left( \partial_i A_j - \partial_j A_i \right)}_{\substack{\text{not.} \\ = T_{ij}^A = -T_{ji}^A}} \vec{u}_i + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} = \\ &= A_j \underbrace{T_{ij}^B}_{\substack{\text{(C.93)} \\ = \varepsilon_{ijk} P_k^B}} \vec{u}_i + \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + B_j \underbrace{T_{ij}^A}_{\substack{\text{(C.93)} \\ = \varepsilon_{ijk} P_k^A}} \vec{u}_i + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} = A_j \varepsilon_{ijk} \underbrace{P_k^B}_{\substack{\text{(C.91)} \\ = \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} T_{lm}^B = (\text{rot } \vec{B})_k}} \vec{u}_i + \\ &+ \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + B_j \varepsilon_{ijk} \underbrace{P_k^A}_{\substack{\text{(C.91)} \\ = \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} T_{lm}^A = (\text{rot } \vec{A})_k}} \vec{u}_i + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} = A_j \varepsilon_{ijk} \left( \text{rot } \vec{B} \right)_k \vec{u}_i + \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + \\ &+ B_j \varepsilon_{ijk} \left( \text{rot } \vec{A} \right)_k \vec{u}_i + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} = \varepsilon_{ijk} A_j \left( \text{rot } \vec{B} \right)_k \vec{u}_i + \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + \\ &+ \varepsilon_{ijk} B_j \left( \text{rot } \vec{A} \right)_k \vec{u}_i + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A}. \end{aligned}$$

$$6. \text{rot} \left( \vec{A} \times \vec{B} \right) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + \left( \vec{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} - \left( \vec{A} \cdot \nabla \right) \vec{B}. \quad (\text{C.51})$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( \vec{A} \times \vec{B} \right) &= \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_k = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \left( A_l B_m \right) = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_l \partial_j B_m + \\ &+ \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} B_m \partial_j A_l = \vec{u}_i \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} A_l \partial_j B_m + \vec{u}_i \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} B_m \partial_j A_l = \\ &= \vec{u}_i \left( \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) A_l \partial_j B_m + \vec{u}_i \left( \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) B_m \partial_j A_l = \\ &= \vec{u}_i \delta_{il} \delta_{jm} A_l \partial_j B_m - \vec{u}_i \delta_{im} \delta_{jl} A_l \partial_j B_m + \vec{u}_i \delta_{il} \delta_{jm} B_m \partial_j A_l - \vec{u}_i \delta_{im} \delta_{jl} B_m \partial_j A_l = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \vec{u}_i A_i \partial_j B_j - \vec{u}_i A_j \partial_j B_i + \vec{u}_i B_j \partial_j A_i - \vec{u}_i B_i \partial_j A_j = (A_i \vec{u}_i) (\partial_j B_j) - \\
 &\quad - (A_j \partial_j) (B_i \vec{u}_i) + (B_j \partial_j) (A_i \vec{u}_i) - (B_i \vec{u}_i) (\partial_j A_j) = \\
 &\quad = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}.
 \end{aligned}$$

$$7. \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \nabla \cdot (\operatorname{rot} \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (\text{C.52})$$

Într-adevăr, deoarece operatorul  $\nabla$  este un vector (mai exact, un operator vectorial) și întrucât produsul mixt a trei vectori în care doi dintre ei sunt coliniari este zero, identitatea apare ca evidentă. Altfel:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) &= \partial_i (\operatorname{rot} \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_i (\partial_j A_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k + \\
 + \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k) &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k + \varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k - \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i A_k) = \\
 &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k - \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k) = 0,
 \end{aligned}$$

unde am presupus faptul că  $\vec{A}(x, y, z)$  satisface condițiile din teorema Schwarz, care „asigură” egalitatea derivatelor mixte de ordinul doi ale componentelor  $A_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) ale câmpului (funcției) vectoriale  $\vec{A}$ :

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i} \Leftrightarrow \partial_i \partial_j A_k = \partial_j \partial_i A_k. \text{ Am arătat deci că:}$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

unde  $\varepsilon_{ijk}$  este un pseudotensor *antisimetric* în perechea de indici ( $ij$ ), iar

derivata  $\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}$  este – din punct de vedere algebric – un tensor de ordinul

doi *simetric* – în condițiile teoremei Schwarz – în aceeași pereche de indici:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} \stackrel{\text{cf. th. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i}. \text{ Acest rezultat este valabil pentru orice doi}$$

tensori, unul simetric și celălalt antisimetric (în aceeași indici), demonstrația făcându-se ca mai sus. Așadar, produsul a doi tensori/pseudotensori

dintre care unul este simetric, iar celălalt antisimetric în aceeași pereche de indici, este totdeauna nul.

$$8. \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0. \quad (\text{C.53})$$

Această identitate poate fi justificată simplu, prin aceea că produsul vectorial a doi vectori coliniari este totdeauna nul. Altfel:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \bar{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\operatorname{grad} \varphi)_k = \bar{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi \equiv \bar{u}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

$\varepsilon_{ijk}$  fiind antisimetric în perechea de indici  $(j k)$ , aceeași în care

„tensorul”  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$  este simetric.

$$9. \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = (\nabla \cdot \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi \stackrel{\text{not.}}{=} \Delta \varphi, \quad (\text{C.54})$$

unde operatorul

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \equiv \partial_i \partial_i$$

se numește *operatorul lui Laplace* sau *laplacean* (în coordonate carteziene). Ecuația

$$\Delta \varphi = 0$$

se numește *ecuația lui Laplace*. Soluțiile ecuației Laplace se numesc *funcții armonice*. Generalizarea operatorului lui Laplace pe un spațiu cu patru dimensiuni, în care a patra dimensiune este temporală, iar reprezentarea spațiului este una euclidiană complexă, se notează de obicei cu simbolul  $\square$  și se mai numește *operatorul lui D'Alembert* sau *dalambertian*. Relația dintre

cei doi operatori Laplace este:  $\Delta_{(4)} \bullet = \Delta_{(3)} \bullet - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2}$ , sau altfel scris:

$\square \bullet = \Delta \bullet - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2}$ , unde “ $\bullet$ ” ține locul mărimii asupra căreia urmează să

acționeze operatorii considerați. Într-adevăr, dacă  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  și

$x_4 = ict$  (unde  $i = \sqrt{-1}$ , iar  $v$  este o viteză constantă – în cazul spațiului Minkowski aceasta este chiar viteza luminii în vid,  $c$ ) sunt cele patru coordonate ale spațiului considerat, avem:

$$\begin{aligned} \Delta_{(4)} (\equiv \square) &= \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Delta_{(3)} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

$$10. \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \tag{C.55}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) &= \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\text{rot } \vec{A})_k = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \vec{u}_i \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \\ &= \vec{u}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \vec{u}_i \delta_{il} \delta_{jm} \partial_j \partial_l A_m - \vec{u}_i \delta_{im} \delta_{jl} \partial_j \partial_l A_m = \\ &= \vec{u}_i \partial_m \partial_i A_m - \vec{u}_i \partial_j \partial_j A_i = \vec{u}_i \partial_i \partial_m A_m - \partial_j \partial_j A_i \vec{u}_i = \vec{u}_i \partial_i (\text{div } \vec{A}) - \partial_j \partial_j \vec{A} = \\ &= \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \end{aligned}$$

În concluzie, gradientul rezultă prin aplicarea operatorului nabla în mod direct asupra unui câmp scalar, rezultatul fiind un câmp vectorial. Divergența rezultă prin aplicarea operatorului nabla (cu ajutorul produsului scalar) asupra unui câmp vectorial, rezultatul fiind un câmp scalar, rotorul rezultă prin aplicarea aceluiași operator nabla (dar cu ajutorul produsului vectorial) asupra unui câmp vectorial, rezultatul fiind tot un câmp vectorial, iar laplaceanul se aplică asupra câmpurilor scalare, rezultatul fiind tot un câmp scalar<sup>18</sup>. Sub formă de tabel, aceste concluzii pot fi sintetizate astfel:

---

<sup>18</sup> Uneori se întâlnesc și relații în care laplaceanul este aplicat unor mărimi vectoriale (de exemplu, în cazul ecuației satisfăcută de potențialul vector într-un mediu omogen și izotrop:  $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}$ ). În astfel de cazuri, de fapt, trebuie să înțelegem (căci altfel nu putem calcula) un set de trei ecuații scalare:  $\Delta A_i = -\mu j_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), proiecții ale ecuației vectoriale inițiale pe cele trei axe de coordonate.

	$\nabla$	$\varphi$ (câmp scalar)	$\vec{A}$ (câmp vectorial)
$\nabla$	-	$\nabla\varphi$ Gradient (vector)	-
$\nabla \cdot$	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \equiv \Delta$ Laplaceanul (scalar)	-	$\nabla \cdot \vec{A}$ Divergență (scalar)
$\nabla \times$	-	-	$\nabla \times \vec{A}$ Rotor (vector)

### C.7. Coordonate curbilinii ortogonale. Operatori diferențiali de ordinul I în coordonate curbilinii ortogonale

Fie  $\vec{r}$  vectorul de poziție al unui punct  $P(\vec{r})$  din spațiul euclidian tridimensional  $E_3$  și  $x_1, x_2, x_3$  coordonatele carteziene ale acestuia față de un reper triortogonal  $Ox_1x_2x_3$ . Fie, de asemenea, trei parametri reali independenți,  $q_1, q_2$  și  $q_3$  astfel încât coordonatele  $x_i, (i=\overline{1,3})$  să fie funcții de clasă  $C^1$  de acești parametri:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), \quad (i=\overline{1,3}). \quad (\text{C.56})$$

Presupunem că între cele două mulțimi (cea a coordonatelor,  $x_i, (i=\overline{1,3})$ , și cea a parametrilor,  $q_j, (j=\overline{1,3})$ ) există o corespondență unu-la-unu; unui set dat de parametri ( $q$ ) îi corespunde un singur set de coordonate ( $x$ ) și invers. În aceste condiții transformarea (C.56) este local reversibilă dacă determinantul funcțional (iacobianul) acesteia este diferit de zero:

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0. \quad (\text{C.57})$$

Dacă se dau valori fixe la doi dintre parametrii  $q_j, (j=\overline{1,3})$ , să zicem, de exemplu, parametrilor  $q_2$  și  $q_3$ , atunci se obține curba de coordonate  $q_1 = \text{variabil}$ . În mod asemănător pot fi obținute și celelalte două curbe de

coordonate:  $q_2 = \text{variabil}$  și  $q_3 = \text{variabil}$ . Acest fapt arată că prin orice punct din spațiu trec trei curbe de coordonate (vezi Fig. C14). Parametrii  $q_1$ ,  $q_2$  și  $q_3$  se numesc *coordonatele generale* sau *coordonatele curbilinii* ale punctului  $P$ .

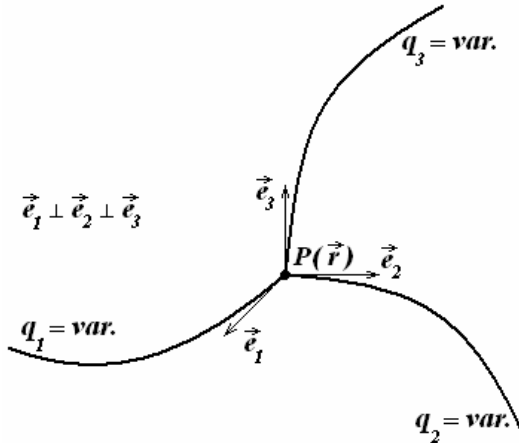


Fig. C14

Dacă  $\vec{e}_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) sunt vectori tangenți la curbele de coordonate  $q_i = \text{variabil}$ , ( $i = \overline{1,3}$ ), atunci condiția (C.57) exprimă faptul că acești vectori sunt liniar independenți, deci pot constitui o bază în  $E_3$ . Într-adevăr,

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = J \neq 0.$$

Dacă în orice punct din domeniul  $D^{(q)}$  definit de setul tuturor valorilor posibile ale parametrilor ( $q$ ) vectorii  $\vec{e}_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) formează un triedru

ortogonal drept, atunci spunem că cele trei coordonate curbilinii  $(q_1, q_2, q_3)$  definesc un *sistem de coordonate curbilinii ortogonale*, iar dacă triedrul format de cei trei vectori nu este ortogonal (adică este oarecare, cei trei vectori rămânând liniar independenți), spunem că cele trei coordonate curbilinii  $(q_1, q_2, q_3)$  definesc un *sistem de coordonate curbilinii generale*.

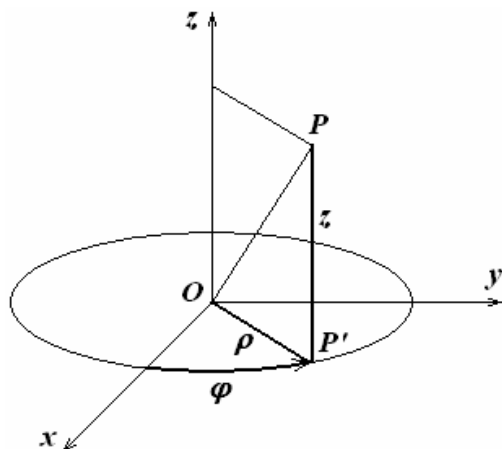


Fig. C15

Două dintre cele mai cunoscute și mai utilizate astfel de sisteme de coordonate sunt *sistemul de coordonate sferice* și *sistemul de coordonate cilindrice*. În sistemul de coordonate cilindrice, cele trei coordonate curbilinii care precizează în mod univoc poziția unui punct oarecare,  $P$ , în spațiu sunt  $r$ ,  $\varphi$  și  $z$ , numite *coordonațe cilindrice* ale punctului  $P$  (vezi Fig. C15). Domeniul de variație al acestor parametri este:

$$D^{(cilind)} = \{(r, \varphi, z) \mid r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}.$$

Relațiile (C.56) sunt în acest caz:

$$\begin{cases} x_1 \equiv x = r \cos \varphi, \\ x_2 \equiv y = r \sin \varphi, \\ x_3 \equiv z = z, \end{cases} \quad (\text{C.58})$$

iar relațiile inverse,  $q_j = q_j(x_1, x_2, x_3)$ , ( $j = \overline{1,3}$ ), sunt:

$$\begin{cases} q_1 \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ q_2 \equiv \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \\ q_3 \equiv z = z. \end{cases}$$

În sistemul de coordonate sferice, cele trei coordonate curbilinii care precizează în mod univoc poziția unui punct oarecare,  $P$ , în spațiu sunt  $r$ ,  $\theta$  și  $\varphi$ , numite *coordonate sferice* ale punctului  $P$  (vezi Fig. C16).

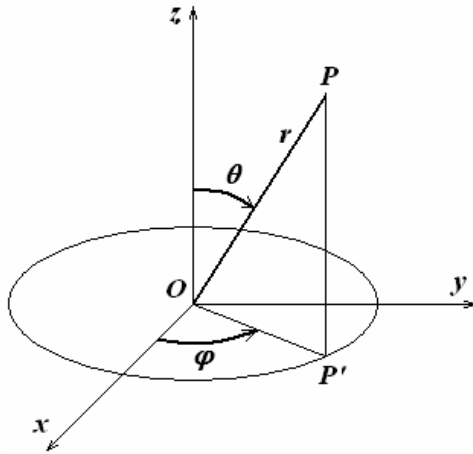


Fig. C16

Domeniul de variație al acestor parametri este:

$$D^{(sfer)} = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Relațiile (C.56) sunt în acest caz:

$$\begin{cases} x_1 \equiv x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 \equiv y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 \equiv z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (C.59)$$

iar relațiile inverse,  $q_j = q_j(x_1, x_2, x_3)$ , ( $j = \overline{1,3}$ ), sunt:

$$\begin{cases} q_1 \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ q_2 \equiv \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ q_3 \equiv \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Pentru ca parametrii  $(q_1, q_2, q_3)$  să definească un nou sistem de coordonate, este nevoie să fie determinate intervalele în care acești trei parametri trebuie să varieze, astfel încât corespondența între mulțimea punctelor din spațiu și mulțimea coordonatelor curbilinii,  $q_j = q_j(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(j = \overline{1,3})$  să fie biunivocă.

Fie  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$  cei trei versori ai vectorilor  $\vec{e}_i$ ,  $(i = \overline{1,3})$ . În noul sistem de coordonate (curbilinei), vectorul de poziție  $\vec{r}$  al unui punct oarecare din spațiu,  $P(\vec{r})$ , este dat de expresia:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (\text{C.60})$$

Atunci, deoarece  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ ,  $(i = \overline{1,3})$  sunt vectori tangenți la curbele  $q_i = \text{var.}$ ,  $(i = 1, 2, 3)$ , putem scrie:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{e}_i = H_i \vec{v}_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (\text{C.61})$$

unde

$$H_i^{\text{not.}} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2}, \quad (i = \overline{1,3}) \quad (\text{C.62})$$

se numesc *coeficienții Lamé* și reprezintă mărimile (lungimile, moduli) vectorilor  $\vec{e}_i$ ,  $(i = \overline{1,3})$ , tangenți la curbele de coordonate  $q_i = \text{variabil}$ ,  $(i = 1, 2, 3)$ .

Să considerăm acum și versorii normali la suprafețele de coordonate  $q_1 = q_1^0 = \text{const.}$ ,  $q_2 = q_2^0 = \text{const.}$  și  $q_3 = q_3^0 = \text{const.}$  Fie aceștia  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  și respectiv  $\vec{n}_3$ . Deoarece vectorii *grad*  $q_i$  sunt și ei normali la suprafețele



$q_i = q_i^0 = \text{const.}_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ), dacă notăm cu  $h_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) moduli vectorilor  $\text{grad } q_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ), putem scrie:

$$\text{grad } q_i = h_i \vec{n}_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (\text{fără sumare}). \quad (\text{C.63})$$

Cum,

$$\text{grad } q_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_1} \vec{u}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial x_2} \vec{u}_2 + \frac{\partial q_i}{\partial x_3} \vec{u}_3 \equiv \frac{\partial q_i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \vec{k}$$

avem:

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_3} \right)^2 = \left( \frac{\partial q_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial q_i}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial q_i}{\partial z} \right)^2. \quad (\text{C.64})$$

Cantitățile  $h_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) se numesc *parametrii diferențiali de ordinul I*.

**Definiție:** Spunem că vectorii  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  și  $\vec{a}_3$  – pe de o parte – și  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$  și  $\vec{b}_3$  – pe de altă parte – formează un *sistem de vectori reciproci unii față de ceilalți*, dacă avem îndeplinite relațiile:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i = 1, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (\text{f.s.})$$

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 0, \quad (i, j = \overline{1,3}; i \neq j).$$

Să arătăm că vectorii  $\text{grad } q_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) formează un sistem de vectori reciproci cu  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ , ( $i = \overline{1,3}$ ). Pentru aceasta trebuie să arătăm că

$$\text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 1, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (\text{f.s.})$$

și că

$$\text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = 0, \quad (i, j = \overline{1,3}; i \neq j).$$

Înmulțind scalar cu  $\text{grad } q_i$  ambii membri ai relației

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3,$$

obținem:

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} = \\ = \left( \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right) dq_1 + \left( \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left( \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

și, deoarece  $dq_1$ ,  $dq_2$  și  $dq_3$  sunt independenți, rezultă că numai coeficientul lui  $dq_i$ , ( $i=1,3$ ) este egal cu unu, ceilalți doi coeficienți fiind egali cu zero (*q.e.d.*).

În cazul unui reper cartezian, versorii  $\vec{v}_1 \equiv \vec{i}$ ,  $\vec{v}_2 \equiv \vec{j}$  și  $\vec{v}_3 \equiv \vec{k}$  sunt perpendiculari doi câte doi și formează (fiecare dintre ei în parte, atunci când originea  $O$  a reperului „parcurge” mulțimea tuturor punctelor din spațiu) un sistem de vectori echipolenți. În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale versorii  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$  formează un triedru ortogonal drept în orice punct  $P$  din spațiu, dar versorii (fiecare dintre cei trei în parte) care corespund unui alt (oricare) punct  $P' \neq P$  din spațiu nu mai sunt echipolenți cu primii (cei din punctul  $P$ ). În plus, vectorii  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  și  $\vec{e}_3$  (care au drept versori pe  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$ ) nu își păstrează modulul constant (fiecare dintre ei separat) atunci când punctul  $P$  parcurge întreg spațiul. În fine, în cazul coordonatelor curbilinii *oarecare*, atât vectorii  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  și  $\vec{e}_3$ , cât și versorii  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  și  $\vec{n}_3$  sunt *oarecare* și depind de punctul  $P$  (rămânând, totuși, liniar independenți).

*Coordonatele curbilinii ortogonale* sunt acele coordonate curbilinii ale căror curbe de coordonate sunt perpendiculare două câte două în orice punct  $P$  din spațiu. Rezultă că, în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale, versorii  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  și  $\vec{n}_3$  coincid respectiv cu  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$  și sunt perpendiculari doi câte doi, deci avem relațiile:

$$\vec{n}_i = \vec{v}_i; \quad \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0; \quad \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = 0, \quad (i \neq j).$$

Din aceste relații rezultă că pentru ca un sistem de coordonate curbilinii să fie ortogonal, sunt necesare și suficiente condițiile:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad (i \neq j), \quad (\text{C.65})$$

sau

$$\text{grad } q_i \cdot \text{grad } q_j = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad (i \neq j). \quad (\text{C.65}')$$

Dacă coordonatele curbilini sunt ortogonale, putem găsi o relație de legătură între coeficienții lui Lamé,  $H_i$  și parametrii diferențiali de ordinul I,  $h_i$ .

Din relațiile:  $\text{grad } q_i = h_i \vec{v}_i$ , (f.s.),  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{v}_i$ , (f.s.) și din relațiile de reciprocitate obținem:

$$\text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{v}_i \cdot H_i \vec{v}_i = h_i H_i = 1,$$

adică:

$$h_i = \frac{1}{H_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C.66})$$

și, în particular:

$$\text{grad } q_i = \frac{\vec{v}_i}{H_i}, \quad (i = \overline{1,3}), \text{ (f.s.)}$$

### Elementul de linie/arc în coordonate curbilini ortogonale

Într-un sistem de coordonate curbilini ortogonale avem:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \vec{v}_1 + H_2 dq_2 \vec{v}_2 + H_3 dq_3 \vec{v}_3. \quad (\text{C.67})$$

Componentele  $|d\vec{r}| \equiv |d\vec{s}| = |H_1 dq_1 \vec{v}_1| = ds_1 = H_1 dq_1$ ,  $ds_2 = H_2 dq_2$  și  $ds_3 = H_3 dq_3$  ale vectorului  $d\vec{r}$  după direcțiile date de versorii  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  și respectiv  $\vec{v}_3$  se numesc *componentele curbilini* ale vectorului  $d\vec{r}$ . Ridicând la pătrat relația (C.67) obținem:

$$\begin{aligned} d\vec{r}^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &\equiv ds^2 = H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 + H_3^2 (dq_3)^2 \quad \text{not.} \\ &= H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

adică pătratul elementului de arc (metrica) în coordonate curbilini.

## Elementul de suprafață în coordonate curbilinii ortogonale

Expresia corectă a elementului de suprafață în coordonate curbilinii ortogonale poate fi obținută prin generalizarea expresiei corespunzătoare scrisă într-un sistem de coordonate carteziene, utilizând interpretarea geometrică a produsului vectorial a doi vectori. După cum știm, din punct de vedere geometric, produsul vectorial a doi vectori este un vector care are modulul egal cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, direcția perpendiculară pe planul format de cei doi vectori și sensul dat de sensul în care înaintează un burghiu drept, care este rotit astfel încât primul vector să se suprapună peste al doilea pe drumul cel mai scurt (vezi Fig. C17).

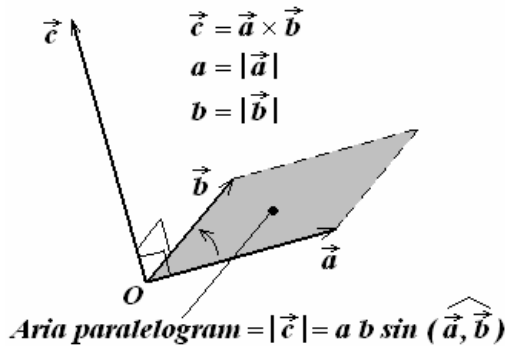


Fig. C17

Ținând cont de acest lucru, un element vectorizat de suprafață (o suprafață elementară vectorizată) în coordonate curbilinii ortogonale este dat(ă) de produsul vectorial a două elemente de linie/arc corespunzătoare considerate, de asemenea, în coordonate curbilinii ortogonale. Pentru a înțelege mai ușor, să vedem mai întâi cum stau lucrurile într-un sistem de coordonate carteziene. Într-un astfel de sistem există trei elemente vectorizate de suprafață:  $d\vec{S}_x = dydz \vec{i}$ ,  $d\vec{S}_y = dzdx \vec{j}$  și  $d\vec{S}_z = dxdy \vec{k}$ , date de produsele vectoriale ale celor trei elemente de linie/arc, anume:  $d\vec{r}_x = dx \vec{i}$ ,  $d\vec{r}_y = dy \vec{j}$  și  $d\vec{r}_z = dz \vec{k}$ . Mai exact, elementul vectorizat de suprafață  $d\vec{S}_x = d\vec{r}_y \times d\vec{r}_z = dydz (\vec{j} \times \vec{k}) = dydz \vec{i}$  este un vector elementar

al cărui modul este egal cu aria paralelogramului (în acest caz, dreptunghiului) cu laturile de lungime  $dy$  și respectiv  $dz$ , a cărui direcție este perpendiculară pe planul determinat de cele două elemente vectorizate de linie ( $d\vec{r}_y$  și  $d\vec{r}_z$ ), (direcția axei  $Ox$ , perpendiculară pe planul  $yOz$ ) și al cărui sens este dat de regula burghiului drept (este sensul vectorului  $\vec{j} \times \vec{k}$ , adică al versorului  $\vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}$  al axei  $Ox$ ).

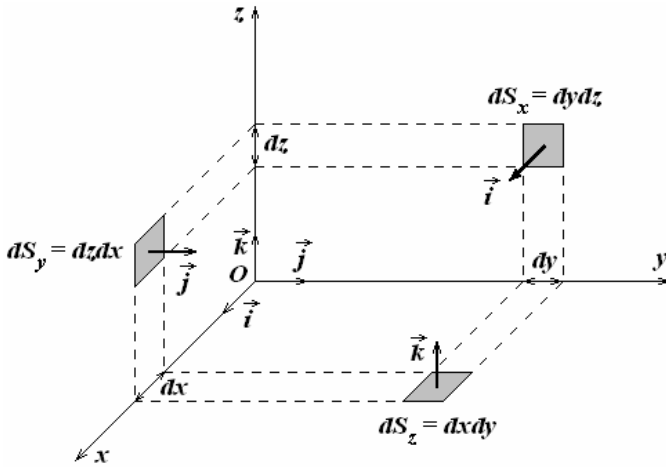


Fig. C18

În mod analog se obțin și celelalte două elemente vectorizate de suprafață (vezi Fig. C18):

$$d\vec{S}_y = d\vec{r}_z \times d\vec{r}_x = dz dx (\vec{k} \times \vec{i}) = dz dx \vec{j}$$

și

$$d\vec{S}_z = d\vec{r}_x \times d\vec{r}_y = dx dy (\vec{i} \times \vec{j}) = dx dy \vec{k} .$$

Atunci, elementul vectorizat „total/rezultant” de suprafață este:

$$d\vec{S} = d\vec{S}_x + d\vec{S}_y + d\vec{S}_z = dy dz \vec{i} + dz dx \vec{j} + dx dy \vec{k} .$$

Prin analogie, elementelor vectorizate de linie/arc în coordonate curbilini ortogonale:  $d\vec{r}_i = H_i dq_i \vec{v}_i$ , (f.s.) și  $d\vec{r}_j = H_j dq_j \vec{v}_j$ , (f.s.) le va corespunde elementul vectorizat de suprafață:

$$d\vec{S}_{ij} = d\vec{r}_i \times d\vec{r}_j = H_i H_j dq_i dq_j (\vec{v}_i \times \vec{v}_j) ,$$

unde, pentru a indica faptul că mărimea care rezultă prin produsul vectorial a celor două elemente vectorizate de linie are un caracter tensorial (și nu unul vectorial) am utilizat o săgeată cu dublu sens. Deoarece elementul vectorizat de suprafață trebuie să fie un vector și nu un tensor, nu acesta este „adevăratul” element de suprafață. Întrucât mărimea  $d\vec{S}_{ij}$  este un tensor antisimetric, acesteia îi corespunde (pseudo)vectorul (vezi relația (C.91)):

$$d\vec{S}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} d\vec{S}_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} d\vec{r}_j \times d\vec{r}_k \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} d\vec{s}_j \times d\vec{s}_k,$$

care este elementul vectorizat de suprafață căutat. De exemplu, pentru  $i=1$  obținem:

$$\begin{aligned} d\vec{S}_1 &\equiv d\vec{S}_{q_1} = \frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} d\vec{S}_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} d\vec{r}_j \times d\vec{r}_k = \frac{1}{2} (\varepsilon_{123} d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3 + \varepsilon_{132} d\vec{r}_3 \times d\vec{r}_2) = \\ &= \frac{1}{2} (H_2 H_3 dq_2 dq_3 \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 - H_2 H_3 dq_2 dq_3 \vec{v}_3 \times \vec{v}_2) = H_2 H_3 dq_2 dq_3 \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \\ &= H_2 H_3 dq_2 dq_3 \vec{v}_1. \end{aligned}$$

(C.69)

În mod cu totul asemănător se obțin și celelalte două elemente vectorizate de suprafață:  $d\vec{S}_2 \equiv d\vec{S}_{q_2} = H_3 H_1 dq_3 dq_1 \vec{v}_2$  și  $d\vec{S}_3 \equiv d\vec{S}_{q_3} = H_1 H_2 dq_1 dq_2 \vec{v}_3$ . Prin adunare rezultă atunci elementul vectorizat „total” de suprafață în coordonate curbilinii ortogonale:

$$d\vec{S} = H_2 H_3 dq_2 dq_3 \vec{v}_1 + H_3 H_1 dq_3 dq_1 \vec{v}_2 + H_1 H_2 dq_1 dq_2 \vec{v}_3. \quad (\text{C.70})$$

În relația de mai sus  $H_i H_j dq_i dq_j \vec{v}_k$  este elementul vectorizat de suprafață normal la „planul”  $q_i P q_j$ , ( $i, j = \overline{1,3}$ ), versorul normalei la acest element de suprafață fiind  $\vec{v}_k$ , ( $k = \overline{1,3}$ ).

### Elementul de volum în coordonate curbilinii ortogonale

Elementul de volum în coordonatele curbilinii ortogonale poate fi obținut prin generalizarea expresiei elementului de volum din coordonatele carteziane, ținând cont de interpretarea geometrică a produsului mixt a trei vectori.

În coordonate carteziane avem:

$$dV = d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3) = dx \vec{i} \cdot (dy \vec{j} \times dz \vec{k}) = dx dy dz \left[ \vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) \right] = dx dy dz.$$

Fie acum punctele (infinitesimal apropiate în spațiu)  $M(q_1, q_2, q_3)$  și  $N(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$ . Ducând cele trei suprafețe de coordonate care trec prin punctul  $M$  și cele trei suprafețe de coordonate care trec prin punctul vecin  $N$ , se formează un paralelipiped curbiliniu elementar. Putem considera drept muchii ale acestui paralelipiped vectorii elementari tangenți la curbele de coordonate ce trec prin punctul  $M$ , adică vectorii:  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2$  și  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$ . Volumul acestui paralelipiped este dat de produsul mixt al celor trei vectori. Prin urmare, se obține:

$$dV = d\vec{s}_1 \cdot (d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3) = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \left[ \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \right] = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (C.71)$$

## Exemple:

### 1) Coordonate cilindrice

Vom arăta în cele ce urmează că *sistemul de coordonate cilindrice* este un sistem de coordonate ortogonale și vom calcula coeficienții lui Lamé, elementul de arc, metrica, elementul vectorizat de suprafață și elementul de volum în aceste coordonate. Avem:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$$

Față de un reper cartezian, vectorul de poziție  $\vec{r}$  al unui punct oarecare  $P$  din spațiu este dat de relația:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k}.$$

Avem:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \vec{i} + \rho \cos \varphi \vec{j}$$

și

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}.$$

Utilizând aceste expresii obținem:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0,$$

ceea ce, în acord cu relațiile (C.65), arată că acest sistem de coordonate este unul cu coordonate curbilinii ortogonale. În plus,

- coeficienții Lamé sunt:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1;$$

- elementul de arc este:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\rho \vec{v}_1 + \rho d\varphi \vec{v}_2 + dz \vec{v}_3 = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{u}_z = \\ &= d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{k}; \end{aligned}$$

- metrica este:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

- elementul vectorizat de suprafață este:

$$d\vec{S} = \rho d\varphi dz \vec{v}_1 + d\rho dz \vec{v}_2 + \rho d\rho d\varphi \vec{v}_3 = \rho d\varphi dz \vec{u}_\rho + d\rho dz \vec{u}_\varphi + \rho d\rho d\varphi \vec{u}_z,$$

iar elementul de volum este:

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

## 2) Coordonate sferice

În acest caz avem:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi,$$

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + r \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - r \sin \theta \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \vec{i} + r \sin \theta \cos \varphi \vec{j},$$

iar din aceste relații rezultă:



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0,$$

ceea ce, în acord cu (C.65) arată că și acest sistem de coordonate este unul cu coordonate curbilinii ortogonale. În plus,

- coeficienții Lamé sunt:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta;$$

- elementul de arc este:

$$d\vec{r} \equiv d\vec{s} = dr \vec{v}_1 + r d\theta \vec{v}_2 + r \sin \theta d\varphi \vec{v}_3 = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi;$$

- metrica este:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2;$$

- elementul vectorizat de suprafață este:

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{v}_1 + r \sin \theta dr d\varphi \vec{v}_2 + r dr d\theta \vec{v}_3 = \\ &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r + r \sin \theta dr d\varphi \vec{u}_\theta + r dr d\theta \vec{u}_\varphi, \end{aligned}$$

iar elementul de volum este:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

## Gradientul, rotorul, divergența și operatorul lui Laplace în coordonate curbilinii ortogonale

Este bine știut faptul că rezolvarea unei probleme de ecuațiile fizicii matematice este mult ușurată dacă se ține cont de simetria acesteia. Cum, cel mai adesea avem de a face cu simetrii care corespund coordonatelor curbilinii ortogonale (simetrie sferică, cilindrică, polară plană etc.), devine imperios necesar să cunoaștem expresiile operatorilor diferențiali (gradientul, divergența, rotorul și laplaceanul) în aceste coordonate.

Fie  $\varphi = \varphi(x, y, z) \equiv \varphi(\vec{r})$  un câmp scalar de clasă  $C^1$  pe un anumit domeniu  $D \subset E_3$ . Atunci, în coordonatele curbilinii ortogonale  $q_1, q_2, q_3$ , pentru  $\text{grad } \varphi$  vom avea:

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3.$$

Deoarece

$$\text{grad } q_i = \frac{\vec{v}_i}{H_i}, \text{ (f.s.)},$$

putem scrie:

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \vec{v}_3. \quad (\text{C.72})$$

De exemplu, în coordonatele cilindrice avem:

$$\text{grad } \phi(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}, \quad (\text{C.73})$$

iar în coordonatele sferice:

$$\text{grad } \phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi. \quad (\text{C.74})$$

### Rotorul în coordonate curbilinii ortogonale

Fie câmpul vectorial  $\vec{V} = V_i \vec{v}_i = V_1 \vec{v}_1 + V_2 \vec{v}_2 + V_3 \vec{v}_3$  de clasă  $C^1$  pe un domeniu  $D \subset E_3$ . Să calculăm  $\text{rot } \vec{V}$ . Avem:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \text{rot}(V_i \vec{v}_i) = \text{rot}(V_1 \vec{v}_1 + V_2 \vec{v}_2 + V_3 \vec{v}_3) = V_1 \text{rot } \vec{v}_1 + (\text{grad } V_1) \times \vec{v}_1 + \\ &+ V_2 \text{rot } \vec{v}_2 + (\text{grad } V_2) \times \vec{v}_2 + V_3 \text{rot } \vec{v}_3 + (\text{grad } V_3) \times \vec{v}_3 = \\ &= V_i \text{rot } \vec{v}_i + (\text{grad } V_i) \times \vec{v}_i. \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Pentru a calcula  $\text{rot } \vec{v}_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ), ținem seama de relația cunoscută:

$$\text{grad } q_i = \frac{1}{H_i} \vec{v}_i, \quad (i = \overline{1,3}), \text{ (f.s.)}.$$

Din identitatea vectorială dată de relația (C.53) rezultă că

$$\text{rot}(\text{grad } q_i) = 0, \quad \forall q_i,$$

adică

$$\text{rot}(\text{grad } q_i) = \text{rot}\left(\frac{1}{H_i} \vec{v}_i\right) = \frac{1}{H_i} \text{rot } \vec{v}_i + \text{grad}\left(\frac{1}{H_i}\right) \times \vec{v}_i = 0, \text{ (f.s.)}.$$

De aici rezultă că

$$\frac{1}{H_i} \text{rot } \vec{v}_i = -\text{grad}\left(\frac{1}{H_i}\right) \times \vec{v}_i, \text{ (f.s.)}. \quad (\text{C.76})$$

Dar,

$$\text{grad}\left(\frac{1}{H_i}\right) = -\frac{1}{H_i^2} \text{grad } H_i, \text{ (f.s.)}$$

Înlocuind această relație în (C.76) rezultă:

$$\frac{1}{H_i} \text{rot } \vec{v}_i = -\text{grad}\left(\frac{1}{H_i}\right) \times \vec{v}_i = \frac{1}{H_i^2} \text{grad } H_i \times \vec{v}_i, \quad (i = \overline{1,3}), \text{ (f.s.)},$$

adică

$$\text{rot } \vec{v}_i = \frac{1}{H_i} \text{grad } H_i \times \vec{v}_i, \quad (i = 1, 2, 3), \text{ (f.s.)}.$$

Înlocuind această expresie în relația (C.75) rezultă:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= V_i \text{rot } \vec{v}_i + (\text{grad } V)_i \times \vec{v}_i = \frac{V_i}{H_i} \text{grad } H_i \times \vec{v}_i + (\text{grad } V_i) \times \vec{v}_i = \\ &= \left( \frac{V_i}{H_i} \text{grad } H_i + \text{grad } V_i \right) \times \vec{v}_i = \frac{1}{H_i} \text{grad}(V_i H_i) \times \vec{v}_i = \\ &= \frac{1}{H_1} \text{grad}(V_1 H_1) \times \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \text{grad}(V_2 H_2) \times \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \text{grad}(V_3 H_3) \times \vec{v}_3. \end{aligned}$$

Deci,

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{H_i} \text{grad}(V_i H_i) \times \vec{v}_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (\text{C.77})$$

De exemplu,

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{V})_1 &= (\text{rot } \vec{V}) \cdot \vec{v}_1 = \\ &= \left[ \frac{1}{H_1} \text{grad}(V_1 H_1) \times \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \text{grad}(V_2 H_2) \times \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \text{grad}(V_3 H_3) \times \vec{v}_3 \right] \cdot \vec{v}_1 = \\ &= \left[ \frac{1}{H_2} \text{grad}(V_2 H_2) \times \vec{v}_2 \right] \cdot \vec{v}_1 + \left[ \frac{1}{H_3} \text{grad}(V_3 H_3) \times \vec{v}_3 \right] \cdot \vec{v}_1 = \\ &= \left( \text{grad } V_2 \times \vec{v}_2 + \frac{V_2}{H_2} \text{grad } H_2 \times \vec{v}_2 \right) \cdot \vec{v}_1 + \\ &+ \left( \text{grad } V_3 \times \vec{v}_3 + \frac{V_3}{H_3} \text{grad } H_3 \times \vec{v}_3 \right) \cdot \vec{v}_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_2}{\partial q_1} \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_2}{\partial q_2} \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial V_2}{\partial q_3} \vec{v}_3 \right) \times \vec{v}_2 \right] \cdot \vec{v}_1 + \\
&+ \frac{V_2}{H_2} \left[ \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{v}_3 \right) \times \vec{v}_2 \right] \cdot \vec{v}_1 + \\
&+ \left[ \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_3}{\partial q_1} \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3}{\partial q_2} \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial V_3}{\partial q_3} \vec{v}_3 \right) \times \vec{v}_3 \right] \cdot \vec{v}_1 + \\
&+ \frac{V_3}{H_3} \left[ \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{v}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{v}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{v}_3 \right) \times \vec{v}_3 \right] \cdot \vec{v}_1 = \\
&= \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial V_2}{\partial q_3} + \frac{V_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right) (\vec{v}_3 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 + \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3}{\partial q_2} + \frac{V_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 = \\
&= -\frac{1}{H_3} \frac{\partial V_2}{\partial q_3} - \frac{V_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3}{\partial q_2} + \frac{V_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} = \\
&= \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 H_2) \right].
\end{aligned}$$

În mod analog se obțin:

$$(\text{rot } \vec{V})_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (V_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (V_3 H_3) \right]$$

și

$$(\text{rot } \vec{V})_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (V_1 H_1) \right].$$

În concluzie,

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{V} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 H_2) \right] \vec{v}_1 + \\
&+ \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (V_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (V_3 H_3) \right] \vec{v}_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (V_1 H_1) \right] \vec{v}_3.
\end{aligned}$$

De exemplu, în coordonate cilindrice:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right] \vec{k},$$

iar în coordonate sferice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{V} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right] \vec{u}_\theta + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi. \end{aligned}$$

### Divergența în coordonate curbilini ortogonale

Fie câmpul vectorial  $\vec{V} = V_i \vec{v}_i = V_1 \vec{v}_1 + V_2 \vec{v}_2 + V_3 \vec{v}_3$  de clasă  $C^1$  pe un domeniu  $D \subset E_3$ . Să calculăm divergența acestui câmp vectorial. Avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} (V_i \vec{v}_i) &= \operatorname{div} (V_1 \vec{v}_1 + V_2 \vec{v}_2 + V_3 \vec{v}_3) = V_1 \operatorname{div} \vec{v}_1 + (\operatorname{grad} V_1) \cdot \vec{v}_1 + \\ &+ V_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 + (\operatorname{grad} V_2) \cdot \vec{v}_2 + V_3 \operatorname{div} \vec{v}_3 + (\operatorname{grad} V_3) \cdot \vec{v}_3 = \\ &= V_i \operatorname{div} \vec{v}_i + (\operatorname{grad} V_i) \cdot \vec{v}_i. \end{aligned} \tag{C.78}$$

Pentru a calcula  $\operatorname{div} \vec{v}_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) ținem cont că  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$  și  $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ . Pentru  $i = 1$  avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}_1 = \operatorname{div} (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) &= \vec{v}_3 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \frac{1}{H_2} \operatorname{grad} H_2 \times \vec{v}_2 - \\ &- \vec{v}_2 \cdot \frac{1}{H_3} \operatorname{grad} H_3 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \frac{\operatorname{grad} H_2}{H_2} + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \frac{\operatorname{grad} H_3}{H_3} = \\ &= \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \left[ \frac{\operatorname{grad} H_2}{H_2} + \frac{\operatorname{grad} H_3}{H_3} \right] = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \left[ \frac{\operatorname{grad} (H_2 H_3)}{H_2 H_3} \right] = \\ &= \vec{v}_1 \cdot \left[ \frac{\operatorname{grad} (H_2 H_3)}{H_2 H_3} \right]. \end{aligned}$$

Prin permutări circulare obținem:

$$\operatorname{div} \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \left[ \frac{\operatorname{grad} (H_3 H_1)}{H_3 H_1} \right]$$

și

$$\operatorname{div} \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \left[ \frac{\operatorname{grad}(H_1 H_2)}{H_1 H_2} \right].$$

Înlocuind aceste expresii în relația (C.78), obținem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= V_1 \vec{v}_1 \cdot \frac{\operatorname{grad}(H_2 H_3)}{H_2 H_3} + \operatorname{grad} V_1 \cdot \vec{v}_1 + V_2 \vec{v}_2 \cdot \frac{\operatorname{grad}(H_3 H_1)}{H_3 H_1} + \operatorname{grad} V_2 \cdot \vec{v}_2 + \\ &+ V_3 \vec{v}_3 \cdot \frac{\operatorname{grad}(H_1 H_2)}{H_1 H_2} + \operatorname{grad} V_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \left[ V_1 \frac{\operatorname{grad}(H_2 H_3)}{H_2 H_3} + \operatorname{grad} V_1 \right] + \\ &+ \vec{v}_2 \cdot \left[ V_2 \frac{\operatorname{grad}(H_3 H_1)}{H_3 H_1} + \operatorname{grad} V_2 \right] + \vec{v}_3 \cdot \left[ V_3 \frac{\operatorname{grad}(H_1 H_2)}{H_1 H_2} + \operatorname{grad} V_3 \right] = \\ &= \vec{v}_1 \cdot \frac{\operatorname{grad}(V_1 H_2 H_3)}{H_2 H_3} + \vec{v}_2 \cdot \frac{\operatorname{grad}(V_2 H_3 H_1)}{H_3 H_1} + \vec{v}_3 \cdot \frac{\operatorname{grad}(V_3 H_1 H_2)}{H_1 H_2} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \operatorname{grad}(V_1 H_2 H_3) \cdot H_1 \vec{v}_1 + \frac{\operatorname{grad}(V_2 H_3 H_1)}{H_1 H_2 H_3} \cdot H_2 \vec{v}_2 + \\ &\quad + \frac{\operatorname{grad}(V_3 H_1 H_2)}{H_1 H_2 H_3} \cdot H_3 \vec{v}_3. \end{aligned}$$

(C.79)

Întrucât

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi \cdot H_1 \vec{v}_1 &= H_1 \vec{v}_1 \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \operatorname{grad} q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \operatorname{grad} q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \operatorname{grad} q_3 \right) = \\ &= H_1 \vec{v}_1 \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\vec{v}_1}{H_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\vec{v}_2}{H_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \frac{\vec{v}_3}{H_3} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

și analog

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot H_2 \vec{v}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}$$

și

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot H_3 \vec{v}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}$$

din (C.79) rezultă:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 H_1 H_2) \right]. \quad (\text{C.80})$$

De exemplu, în coordonate cilindrice avem:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

iar în coordonate sferice,

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r V_\varphi) \right].$$

### Operatorului lui Laplace în coordonate curbilinii ortogonale

Conform definiției,

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \Phi). \quad (\text{C.81})$$

Utilizând rezultatele (C.72) și (C.80) în relația (C.81) obținem:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{C.82})$$

De exemplu, în coordonate cilindrice avem:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

iar în coordonate sferice:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

## C.8. Câteva aplicații ale calculului vectorial

### Exercițiul 1

Fie  $\vec{r}(x, y, z)$  vectorul de poziție al unui punct  $P$  în raport cu originea reperului cartezian  $Oxyz$ . Să se calculeze:  $rot \vec{r}$ ,  $div \vec{r}$ ,  $grad r$ ,  $grad\left(\frac{1}{r}\right)_{r \neq 0}$ ,  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)_{r \neq 0}$  și  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ .

### Rezolvare:

Avem:

$$rot \vec{r} = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0;$$

$$div \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3;$$

$$\begin{aligned} grad r &= \vec{u}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_k x_k} = \vec{u}_i \frac{2x_k}{2\sqrt{x_k x_k}} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \\ &= \frac{x_k \delta_{ki}}{r} \vec{u}_i = \frac{x_i \vec{u}_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}_r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} grad\left(\frac{1}{r}\right)_{r \neq 0} &= \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{u}_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\vec{u}_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_k x_k} = -\vec{u}_i \frac{1}{r^2} \frac{2x_k}{2\sqrt{x_k x_k}} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \\ &= -\vec{u}_i \frac{1}{r^2} \frac{x_k \delta_{ki}}{r} = -\frac{x_i \vec{u}_i}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{r}\right)_{r \neq 0} &= div \left[ grad\left(\frac{1}{r}\right) \right] = -div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} div \vec{r} - \vec{r} \cdot grad\left(\frac{1}{r^3}\right) = \\ &= -\frac{3}{r^3} - \vec{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^6}\right) \frac{\partial r^3}{\partial x_i} \vec{u}_i = -\frac{3}{r^3} + \frac{\vec{r}}{r^6} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_k)^{3/2} \vec{u}_i = -\frac{3}{r^3} + \\ &+ \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_i}{r^6} \frac{3}{2} (x_k x_k)^{1/2} 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} \vec{r} \cdot x_i \vec{u}_i = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0. \end{aligned}$$



Pentru a determina pe  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$  pentru orice valoare a lui  $r$  (deci, inclusiv în punctul  $r=0$ ) vom face apel la unele cunoștințe simple de electrostatică. După cum știm, pentru o distribuție volumică de sarcină electrică de densitate  $\rho(\vec{r})$  aflată în vid, ecuația Poisson se scrie astfel:

$$\Delta V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (\text{C.83})$$

Dacă distribuția de sarcină electrică este alcătuită dintr-o singură sarcină electrică punctiformă de valoare  $Q$ , situată în vid, într-un punct de vector de poziție  $\vec{r}_0$ , atunci putem scrie:

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (\text{C.84})$$

unde  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$  este distribuția „delta” a lui Dirac. Ținând cont că în acest caz

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (\text{C.85})$$

prin înlocuirea relațiilor (C.84) și (C.85) în (C.83), rezultă:

$$\Delta\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Delta\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\right) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -Q \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\varepsilon_0},$$

de unde, prin simplificarea cu  $\frac{Q}{\varepsilon_0} \neq 0$ , obținem:

$$\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Dacă sarcina electrică punctiformă se află în originea sistemului de coordonate ( $\vec{r}_0 = 0$ ) rezultă relația căutată:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(r).$$

În continuare vom rezolva acest exercițiu cu ajutorul soft-ului Mathematica 4.0. Liniile de comandă care permit aceasta sunt date mai jos:

<<Calculus`VectorAnalysis`

SetCoordinates[Spherical[r, Theta, phi]]

G1=Grad[Sqrt[x^2+y^2+z^2], Cartesian[x, y, z]]

G2=Grad[[Sqrt[x^2+y^2+z^2], ProlateSpheroidal[x, y, z]]]

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\sin^2 [y] + \sinh^2 [x]}}, \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\sin^2 [y] + \sinh^2 [x]}}, \\ \frac{z \operatorname{Csc} [y] \operatorname{Csch} [x]}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{array} \right\}$$

În următoarele două figuri (Fig. C19 și Fig. C20) sunt reprezentate grafic  $\operatorname{grad} r$  și  $\operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right)_{r \neq 0}$  în coordonate carteziene  $(x, y, z)$ . Acest lucru poate fi făcut cu ajutorul următoarelor două linii de comandă:

PlotGradientField3D[Sqrt[x^2+y^2+z^2], {x, .01, 6}, {y, .01, 6}, {z, .1, 4}]

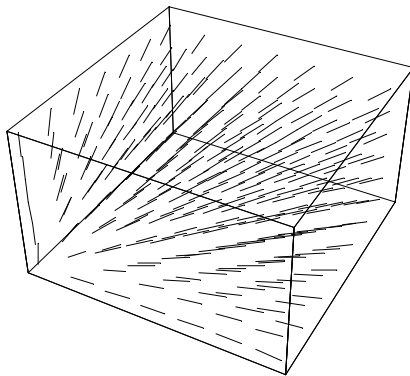
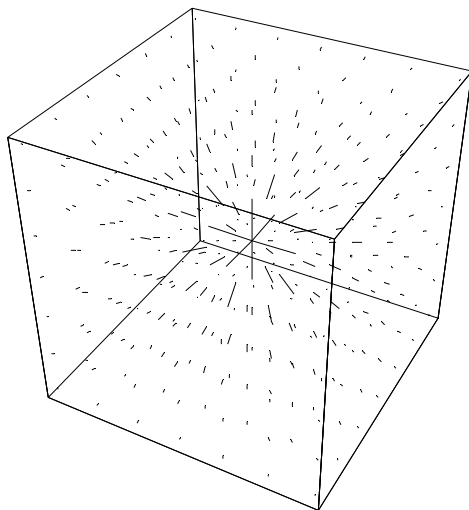


Fig. C19

**PlotGradientField3D[1/Sqrt[x^2+y^2+z^2], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]**



**Fig. C20**

În următoarele trei figuri (Fig. C21, Fig. C22 și Fig. C23) este reprezentat grafic vectorul de poziție  $\vec{r}$  în diferite sisteme de coordonate:

1. sferice ( $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ ), pentru  $r = 1 \text{ cm}$
2. cilindrice ( $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ ), pentru  $\rho = 5 \text{ cm}$  și
3. cartezian ( $x, y, z$ ).

Liniiile de comandă care realizează acest lucru sunt:

**<<Graphics`ParametricPlot3D`**

**G3=ParametricPlot3D[ {r \* Sin[θ] \* Cos[φ], r \* Sin[θ] \* Sin[φ], r \* Cos[θ]},**

**{θ, 0, Pi, Pi/20}, {φ, 0, 2 \* Pi, Pi/10} ]**

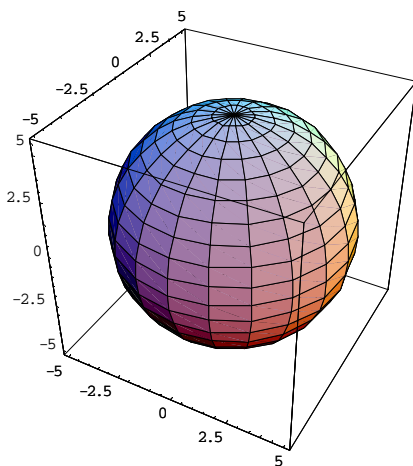


Fig. C21

$\rho = 5;$

$G4 = \text{ParametricPlot3D}[\{\rho * \text{Cos}[\varphi], \rho * \text{Sin}[\varphi], z\}, \{z, 0, 10, 1/2\}, \{\varphi, 0, 2 * \text{Pi}, \text{Pi}/10\}]$

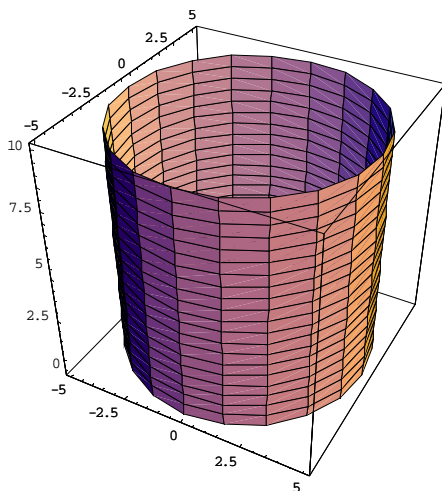


Fig. C22

$z = 1$ ;

`ParametricPlot3D[{x, y, z}, {x, -1, 1, 1/2}, {y, -1, 1, 1/2}]`

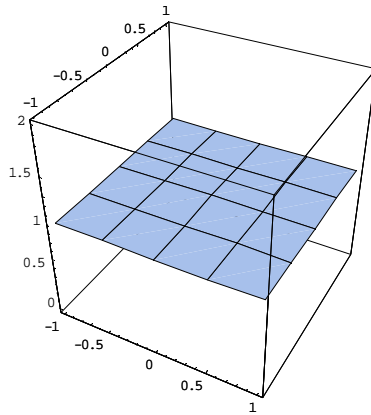


Fig. C23

Valorile rotorului ( $rot \vec{r} = 0$ ) și divergenței ( $div \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$ ) vectorului de poziție  $\vec{r}$  în coordonate carteziene pot fi obținute cu ajutorul liniilor de comandă:

`<<Calculus`VectorAnalysis``

`Curl[{x, y, z}, Cartesian[{x, y, z}]]`

`Div[{x, y, z}, Cartesian[x, y, z]]`

având ca rezultat:

$$\{0, 0, 0\}$$

și respectiv,

$$3$$

## Exercițiul 2

Dacă  $\vec{A}$  este un vector constant, să se calculeze:

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{r}), \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{r}), \operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{r}).$$

**Rezolvare:**

În conformitate cu identitatea vectorială dată de relația (C.49) obținem:

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{r} = \vec{r} \cdot 0 - \vec{A} \cdot 0 = 0.$$

De asemenea, utilizând identitatea vectorială dată de relația (C.51) avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{r}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{r} = \\ &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{r} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{r} = 3\vec{A} - \vec{A} = 2\vec{A}. \end{aligned}$$

În fine, cu ajutorul identității vectoriale dată de relația (C.52) se obține:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{r} + \vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{A} = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{A}$$

Să verificăm corectitudinea acestor relații și cu ajutorul soft-ului Mathematica 4.0. Pentru aceasta vom utiliza următoarele linii de comandă:

<<Calculus`VectorAnalysis`

A1=CrossProduct[{A, A, A}, {x, y, z}, Cartesian[x, y, z]]

Div[A1, Cartesian[x, y, z]]

0

Curl[A1, Cartesian[x, y, z]]

{-Ay + Az, Ax - Az, -Ax + Ay}

{2A, 2A, 2A}

A2=DotProduct[{A, A, A}, {x, y, z}]

Grad[A2, Cartesian[x, y, z]]

Ax + Ay + Az

{A, A, A}

**Exercițiul 3**

Dacă  $\vec{a}$  este un vector constant, iar  $\vec{r}$  este vectorul de poziție al unui punct oarecare într-un reper cartezian, să se calculeze:

- (a) divergența și rotorul vectorului  $\vec{V} = \vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})$ ;  
 (b) divergența și rotorul vectorului  $\vec{V} = \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$ ;  
 (c) divergența și rotorul vectorului  $\vec{V} = (\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{a}$ ;  
 (d) divergența și rotorul vectorului  $\vec{V} = \frac{(\vec{a} \times \vec{r})}{r^2}$ ;  
 (e) divergența și rotorul vectorului  $\vec{V} = \text{grad } r$ .

**Rezolvare:**

(a) Avem:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \text{div} [\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})] = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} (\vec{r} \times \vec{a}) = -\vec{a} \cdot \text{rot} (\vec{r} \times \vec{a}) = \\ &= -\vec{a} \cdot [\vec{r} \text{ div } \vec{a} - \vec{a} \text{ div } \vec{r} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{a}] = -\vec{a} \cdot [-\vec{a} \text{ div } \vec{r} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r}] = \\ &= -\vec{a} \cdot (-3\vec{a} + \vec{a}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} = 2a^2 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \text{rot} [\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})] = \vec{a} \text{ div} (\vec{r} \times \vec{a}) - (\vec{r} \times \vec{a}) \text{ div } \vec{a} + [(\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \nabla] \vec{a} - \\ &- (\vec{a} \cdot \nabla) (\vec{r} \times \vec{a}) = -(\vec{a} \cdot \nabla) (\vec{r} \times \vec{a}) = -a_l \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j a_k) = -\varepsilon_{ijk} a_l a_k \delta_{lj} = -\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \\ &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} a_j a_k + \varepsilon_{ijk} a_j a_k) = -\frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} a_j a_k + \varepsilon_{ikj} a_k a_j) = -\frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} a_j a_k - \varepsilon_{ijk} a_k a_j) = \\ &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} a_j a_k - \varepsilon_{ijk} a_j a_k) = 0. \end{aligned}$$

Să verificăm aceste rezultate utilizând același soft, Mathematica 4.0. Pentru aceasta utilizăm următoarele linii de comandă:

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
```

```
A1=CrossProduct[{x,y,z},{A,A,A},Cartesian[x,y,z]];
```

```
V=CrossProduct[{A,A,A},A1,Cartesian[x,y,z]];
```

```
Div[V,Cartesian[x,y,z]]
```

**Curl[V, Cartesian[ x, y, z ]]**

$$2\mathbf{a}^2$$

$$\{0, 0, 0\}$$

(b) În mod analog cu considerațiile de la punctul (a), pentru vectorul  $\vec{V} = \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$ , avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{div} [\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})] = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \operatorname{rot} \vec{r} - \vec{r} \cdot \operatorname{rot} (\vec{a} \times \vec{r}) = -\vec{r} \cdot \operatorname{rot} (\vec{a} \times \vec{r}) = \\ &= -\vec{r} \cdot [\vec{a} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r}] = -\vec{r} \cdot (3\vec{a} - \vec{a}) = -2\vec{r} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{V} &= \operatorname{rot} [\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})] = \vec{r} \operatorname{div} (\vec{a} \times \vec{r}) - (\vec{a} \times \vec{r}) \operatorname{div} \vec{r} + [(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \nabla] \vec{r} - \\ &- (\vec{r} \cdot \nabla) (\vec{a} \times \vec{r}) = -(\vec{a} \times \vec{r}) \operatorname{div} \vec{r} + [(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \nabla] \vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla) (\vec{a} \times \vec{r}) = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + \\ &+ (\vec{a} \times \vec{r})_i \partial_i (x_k \vec{u}_k) - x_j \partial_j (\vec{u}_i \varepsilon_{ilm} a_l x_m) = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r})_i \vec{u}_k \delta_{ik} - \\ &- \vec{u}_i \varepsilon_{ilm} x_j a_l \delta_{jm} = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) - \vec{u}_i \varepsilon_{ijl} x_j a_l = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) - \\ &- \vec{u}_i \varepsilon_{ijl} a_l x_j = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) - (\vec{a} \times \vec{r}) = -3(\vec{a} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Aceleași rezultate se obțin și utilizând următoarele linii de comandă în Mathematica 4.0:

**<<Calculus`VectorAnalysis`**

**A1=CrossProduct[{A, A, A}, {x, y, z}, Cartesian[{x, y, z}]];**

**V=CrossProduct[{x, y, z}, A1, Cartesian[{x, y, z}]];**

**Div[V, Cartesian[{x, y, z}]]**

**Curl[V, Cartesian[{x, y, z}]]**

$$-2Ax - 2Ay - 2Az$$

$$\{3Ay - 3Az, -3Ax + 3Az, 3Ax - 3Ay\}$$

(c) Pentru  $\vec{V} = (\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{a}$  avem:



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) + \operatorname{div}[(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{a}] = \operatorname{div}[(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{a}] = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{div} \vec{a} + \\ &+ \vec{a} \cdot \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{V} &= \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) + \operatorname{rot}[(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{a}] = \vec{a} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{a} - \\ &- (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{r} + (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) \times \vec{a} = 3\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{a}. \end{aligned}$$

(d) Să calculăm divergența și rotorul vectorului  $\vec{V} = \frac{(\vec{a} \times \vec{r})}{r^2}$  cu  $\vec{a} = \text{const.}$

Avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{div} \left( \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r^2} \right) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r^2} \right) = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \left[ \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r^2} \right) \right] = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \vec{u}_i \left( \frac{-2r}{r^4} \right) \frac{\partial (\sqrt{x_k x_k})}{\partial x_i} = \\ &= -(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \vec{u}_i \left( \frac{2}{r^3} \right) \frac{1}{2r} 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = -(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \vec{u}_i \left( \frac{2}{r^3} \right) \frac{1}{2r} 2x_k \delta_{ik} = \\ &= -\frac{2}{r^4} [\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{r})] = 0, \end{aligned}$$

iar pentru  $\operatorname{rot} \vec{V}$  avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{V} &= \operatorname{rot} \left[ \frac{(\vec{a} \times \vec{r})}{r^2} \right] = \frac{1}{r^2} \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) + \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r^2} \right) \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \frac{1}{r^2} \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) - \\ &- \frac{2}{r^4} [\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})] = \frac{1}{r^2} \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = \frac{1}{r^2} [\vec{a} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{r}] = \\ &= \frac{1}{r^2} (3\vec{a} - \vec{a}) = \frac{2\vec{a}}{r^2}. \end{aligned}$$

(e) În fine, pentru  $\vec{V} = \operatorname{grad} r$  obținem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \operatorname{div} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{3}{r} + \vec{r} \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \right) \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{x_k x_k}) = \frac{3}{r} + \vec{r} \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \right) \vec{u}_i \frac{1}{2r} 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{r} + \vec{r} \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \right) \vec{u}_i \frac{1}{2r} 2x_k \delta_{ik} = \frac{3}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

și

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} r) = 0.$$

#### Exercițiul 4

Fiind dat un câmp vectorial  $\vec{w}$  pentru care  $\operatorname{div} \vec{w} = 0$  și  $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$ , să se arate că  $\vec{E} = \operatorname{grad}(\vec{r} \cdot \vec{w}) + \operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{w}) + \vec{w} = 0$ .

#### Rezolvare:

Utilizând identitățile vectoriale date de relațiile (C.50) și (C.51), avem:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{grad}(\vec{r} \cdot \vec{w}) + \operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{w}) + \vec{w} = \vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{w} + \vec{w} \times \operatorname{rot} \vec{r} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{w} + \\ &+ (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{r} \operatorname{div} \vec{w} - \vec{w} \operatorname{div} \vec{r} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{w} + \vec{w} = \\ &= 2(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{r} - 2\vec{w} = 2w_i \partial_i (\vec{u}_k x_k) - 2\vec{w} = 2\vec{w} - 2\vec{w} = 0. \end{aligned}$$

#### Exercițiul 5

Fiind dat un câmp vectorial  $\vec{v}$  pentru care  $\operatorname{div} \vec{v} = a^2$  și  $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{a}$ , să se arate că  $L = \operatorname{div}(\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}) - 4\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , știind că  $\vec{a}$  este un vector constant.

#### Rezolvare:

Utilizând identitatea vectorială dată de relația (C.49), avem:

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{div}(\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}) - 4\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) - 4\operatorname{div} \vec{v} = \\ &= 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - 4a^2 = -2\vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} = 0. \end{aligned}$$

### C.9. Izomorfismul dintre mulțimea tensorilor antisimetrice de ordinul doi și cea a vectorilor definiți pe același spațiu tridimensional, $E_3$

Fie un tensor covariant de ordinul doi,  $A_{ij}$ , ( $i, j = \overline{1,3}$ ), definit pe spațiul euclidian tridimensional  $E_3$ . Evident, acesta va avea un număr de  $n^m = 3^2 = 9$  componente, unde prin  $n$  am notat numărul de dimensiuni ale spațiului pe care este definit tensorul,  $n = p + q$  este ordinul tensorului, iar  $p (= 2)$  (respectiv  $q (= 0)$ ) reprezintă numărul indicilor de covarianță (respectiv de contravarianță) ai tensorului. Sub formă matricială, acest tensor poate fi reprezentat astfel:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.86})$$

Dacă tensorul este antisimetric,

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad \forall i, j = \overline{1,3}, \quad (\text{C.87})$$

atunci, pentru  $i = j$  (adică pentru elementele de pe diagonala principală) avem  $A_{ii} = -A_{ii}$  (fără sumare), adică  $2A_{ii} = 0 \Rightarrow A_{ii} = 0$  (fără sumare), ceea ce arată că toate elementele diagonalei principale din (C.86) sunt nule. Deci, pentru un tensor antisimetric, de două ori covariant, definit pe  $E_3$ , putem scrie:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.88})$$

Având în vedere și proprietatea de antisimetrie (C.87), relația (C.88) poate fi scrisă în următoarele opt moduri (echivalente, din punctul de vedere al relației de antisimetrie):

$$(A_{ij})_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 0 & -A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A_{ij})_3 = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})_4 = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & -A_{32} \\ -A_{13} & A_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A_{ij})_5 = \begin{pmatrix} 0 & -A_{21} & -A_{31} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})_6 = \begin{pmatrix} 0 & -A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & -A_{32} \\ -A_{13} & A_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A_{ij})_7 = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{12} & 0 & -A_{32} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{ij})_8 = \begin{pmatrix} 0 & -A_{21} & -A_{31} \\ A_{21} & 0 & -A_{32} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

Aceste relații arată faptul că un tensor antisimetric de ordinul doi, definit pe un spațiu cu trei dimensiuni are doar trei componente esențial distincte.

Se poate arăta că, în cazul general, un tensor de  $p$  ori covariant, de  $q$  ori contravariant, antisimetric în grupul de  $a$  indici și definit pe un spațiu cu  $n$  dimensiuni are  $C_n^a n^{p+q-a}$  componente esențial distincte. În cazul de față,  $C_3^2 3^{2+0-2} = C_3^2 3^0 = C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ .

O relația asemănătoare poate fi găsită și pentru un tensor de același fel, dar simetric (și nu antisimetric) în grupul de  $s$  indici; în acest caz numărul de componente esențial distincte este dat de relația:  $\bar{C}_n^s n^{p+q-s}$ , unde  $\bar{C}_n^s = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)}{s!}$  reprezintă combinațiile cu repetiție a  $n$  obiecte luate câte  $s$  (vezi Anexa B).

Revenind, să observăm că există deci opt moduri de a considera cele trei componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric de ordinul doi pe un spațiu cu trei dimensiuni. Dintre toate aceste modalități de a scrie matricea (C.88) a tensorului în discuție, o vom alege pe a treia, adică:

$$(A_{ij}) = (A_{ij})_3 = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.89})$$

Evident, acest lucru nu a fost făcut la întâmplare. Dacă vom observa cu atenție modalitatea aleasă, vom constata că aceasta este singura având componentele cu semnul plus cu indicii scriși astfel încât să respecte permutările circulare ale indicilor 1, 2 și 3. Într-adevăr, din (C.89) rezultă că singurele componente esențial distincte sunt  $A_{12}$ ,  $A_{23}$  și  $A_{31}$ .

Ținând cont că pe un spațiu cu trei dimensiuni vectorii au de asemenea trei componente, ne putem întreba dacă nu cumva cele trei componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric de ordinul doi, pe același spațiu cu trei dimensiuni, pot fi considerate ca și componentele unui vector din acest spațiu. Răspunsul este afirmativ, legea care asociază cele trei componente esențial distincte ale tensorului, celor trei componente ale vectorului fiind:

$$\begin{aligned} A_{12} &\rightarrow v_3, & v_1 &= A_{23}, \\ A_{23} &\rightarrow v_1, & \Rightarrow v_2 &= A_{31}, \\ A_{31} &\rightarrow v_2, & v_3 &= A_{12}, \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

adică asocierea se face astfel încât să fie respectată ordinea dictată de permutările circulare ale celor trei indici: 1, 2 și 3. Într-o singură relație, corespondențele date de (C.90) pot fi scrise astfel:

$$v_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk}, \quad (\text{C.91})$$

unde  $\varepsilon_{ijk}$ , ( $i, j, k = \overline{1,3}$ ) este pseudotensorul unitate, complet antisimetric, de ordinul trei, pe spațiul cu trei dimensiuni  $E_3$  (simbolul Levi-Civita).

Relația (C.91) poate fi verificată cu ușurință pentru orice indice  $i = 1, 2, 3$ ; într-adevăr, de exemplu, dacă  $i = 2$ , atunci

$$v_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} A_{jk} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{213} A_{13} + \varepsilon_{231} A_{31}) = \frac{1}{2} (-A_{13} + A_{31}) = \frac{1}{2} (A_{31} + A_{31}) = A_{31}$$

*q.e.d.*

Invers, ne putem la fel de bine întreba dacă nu cumva și corespondența reciprocă este valabilă, adică, dacă nu cumva cele trei componente ale unui vector dintr-un spațiu cu trei dimensiuni  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \equiv v_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), pot constitui cele trei componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric de ordinul doi pe același spațiu. Și acest răspuns este afirmativ, legea care dă această corespondență fiind:

$$\begin{aligned} v_1 &\rightarrow A_{23}, & A_{12} &= v_3, \\ v_2 &\rightarrow A_{31}, & \Rightarrow & A_{23} = v_1, \\ v_3 &\rightarrow A_{12}, & A_{31} &= v_2, \end{aligned} \tag{C.92}$$

și, după cum simplu se poate observa, se bazează pe aceeași regulă de respectare a permutărilor circulare ale indicilor 1, 2 și 3. Și corespondențele date de (C.92) pot fi scrise într-o singură relație, utilizând același simbol Levi-Civita; aceasta este:

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk} v_k, \quad (i, j, k = \overline{1, 3}), \tag{C.93}$$

și, de asemenea, poate fi verificată pentru orice pereche de indici  $ij$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ). De exemplu, dacă  $ij \equiv 31$ , avem:  $A_{31} = \varepsilon_{31k} v_k = \varepsilon_{312} v_2 = v_2$  etc.

Cele două corespondențe, (C.91) și (C.93) determină izomorfismul căutat.

Pentru a fi riguroși, trebuie să observăm că, deoarece simbolul Levi-Civita nu este un tensor, ci un pseudotensor, prin izomorfismul amintit anterior (mai exact, prin relațiile (C.91)), unui *tensor antisimetric* de ordinul doi pe un spațiu cu trei dimensiuni i se asociază un *pseudovector* (un vector axial) și nu un vector, deoarece produsul dintre un pseudotensor ( $\varepsilon_{ijk}$ ) și un tensor ( $A_{jk}$ ) este un pseudotensor (în cazul nostru, de ordinul unu, adică un pseudovector). Reciproc, unui *vector* pe un spațiu cu trei

---

dimensiuni, din aceleași motive, prin izomorfismul precizat mai sus (mai precis, prin relațiile (C.93)) i se asociază nu un tensor, ci un *pseudotensor*.

## Bibliografie

- [1] Arthur, W., Fenster, S., *Mechanics Halt*, Rimhart Winston Inc., 1969.
- [2] Baratesch, H.J., *Mathematische Formelen*, Ed. a XVI-a, Köln, Leipzig, Buch-und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, 1992.
- [3] Bălan, Șt., *Culegere de probleme de mecanică*, Ediția a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
- [4] Borș, C., *Lección de mecanică*, Editura Universității „Al.I. Cuza”, Iași, 1983.
- [5] Bradbury, T.C., *Theoretical Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1968.
- [6] Bradford, N.C., *Mechanics*, Wiley, London, 1973.
- [7] Brădeanu, P., Pop, I., Brădeanu, D., *Probleme și exerciții de mecanică teoretică*, Editura Tehnică, București, 1978.
- [8] Bucholtz, N.N., Voronkov, I.M., Minakov, I.A., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Tehnică, București, 1962.
- [9] Burlacu, L., David, D.Gh., *Culegere de probleme de mecanică analitică*, Editura Universității din București, 1988.
- [10] Cone, G.F., *Probleme rezolvate de fizică*, Vol. I, II, III, Litografia Institutului Politehnic din București, 1974, 1975, 1976.
- [11] Cronin, J.A., Greenberg, D.F., Telegdi, V.L., *University of Chicago Graduate Problems in Physics with Solutions*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
- [12] Dragoș, L., *Principiile mecanicii analitice*, Editura Tehnică, București, 1976.
- [13] Drăganu, M., *Introducere matematică în fizica teoretică modernă*, Editura Tehnică, București, Vol. I, 1957.
- [14] Forray, M.J., *Variational Calculus in Science and Engineering*, McGraw-Hill, New-York, 1968.
- [15] Fox, W.R., *Introduction to Fluid Mechanics*, Wiley, New-York, 1973.
- [16] Gábos, Z., Stan, I., *Curs de mecanică teoretică pentru fizicieni*, Universitatea „Babeș-Bolyai”, Cluj-Napoca, 1974.
- [17] Gantmacher, F., *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir, Moskow, 1975.



- [18] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co., Mass., 1980.
- [19] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., Fedorchenko, A.M., *Problems in Theoretical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1977.
- [20] Greenwood, D.T., *Principles of Dynamics*, 2nd ed., Englewood Cliffs, 1988.
- [21] Haar, D.Ter, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964.
- [22] Iacob, C., *Mecanică teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [23] Ionescu-Pallas, N., *Introducere în mecanica teoretică modernă*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1969.
- [24] Irodov, I., Saveliev, I., Zamcha, O., *Recueil de problèmes de physique générale*, Éditions Mir, Moscova, 1976.
- [25] Kibble, T.W., *Classical Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1973.
- [26] Kittel, C., Kight, W.D., Ruderman, M.A., *Mechanics*, McGraw-Hill, New-York, 1965.
- [27] Kotkin, L.G., Serbo, V.G., *Collection of Problems in Classical Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [28] Kotkin, L.G., Serbo, V.G., *Sbornik zadach po klasicheskoj mehanike*, Nauka, Moskva, 1977.
- [29] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Mecanica*, Editura Tehnică, București, 1966.
- [30] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Mecanique des fluides*, Mir, Moskow, 1967.
- [31] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon Press, 1976.
- [32] Marion, J., *Classical Dynamics*, Academic Press Inc., New-York, 1965.
- [33] Mercheș, I., Burlacu, L., *Mecanică teoretică și a mediilor deformabile*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [34] Mercheș, I., Burlacu, L., *Applied Analytical Mechanics*, „The Voice of Bucovina” Press, Iași, 1995.
- [35] Meshcherskiï, I.V., *A Collection of Problems of Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [36] Moore, E.L., *Theoretical Mechanics*, Wiley, 1983.
- [37] Novacu, V., *Mecanică teoretică*, Universitatea din București, 1969.

- [38] Olihovskii, I.I., Pavlenko, M.G., Kuzimenkov, L.S., *Zadach po teoreticheskoj mehanike dlja fizikov*, Izd. Moskovskogo Universiteta, 1977.
- [39] Olihovskii, I.I., *Kurs teoreticheskoj mehaniki dlja fizikov*, Izd. Maskovskogo Universiteta, 1978.
- [40] Petkevici, V.V., *Teoreticheskaia Mehanika*, Nauka, Moskva, 1981.
- [41] Piatnitzkii, E.S., Truhan, N.M., Hanukaev, Iu.I., Iakovenko, G.N., *Sbornik zadach po analiticheskoj mehanike*, „Nauka”, Moskva, 1980.
- [42] Plăciñteanu, I., *Mecanică vectorială și analitică*, Editura Tehnică, București, 1958.
- [43] Popescu, I.M., *Fizica*, Vol. I și II, Litografia Institutului Politehnic din București, 1973, 1975.
- [44] Popescu, I.M., Cone, G.F., Stanciu, Gh.A., *Culegere de probleme de fizică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [45] Radu, A., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
- [46] Rogai, E., *Tabele și formule matematice*, București, Editura Tehnică, 1983, 1984.
- [47] Rogai, E., Teodorescu, C., *Tabele matematice uzuale*, București, Editura Tehnică, edițiile I – VIII.
- [48] Rossberg, K., *A First Course in Analytical Mechanics*, Wiley, 1983.
- [49] Saletan, E.J., Cromer, A.H., *Theoretical Mechanics*, John Wiley, New-York, 1971.
- [50] Serrin, J., *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, Vol. VIII/1, Fluid Dynamics I, 1959.
- [51] Smoleanski, M.L., *Tabele de integrale nedefinite*, Editura Tehnică, București, 1972.
- [52] Spiegel, M.R., *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, Mc Graw Hill, New-York, 1967.
- [53] Stan, M., Tudorache, Șt., *Culegere de probleme de fizică*, Vol. I și II, Litografia Institutului Politehnic din București, 1972.
- [54] Teodorescu, P.P., Ilie, V., *Teoria elasticității și introducere în mecanica mediilor deformabile*, Editura „Dacia”, Cluj-Napoca, 1976.

- [55] Tomasevich, O.F., *Zbirnik zadach z teoretichnoi fiziki (A Collection of Problems in Theoretical Physics)*, Kiev University Press, Kiev, 1958 (in Ukrainian).
- [56] Țițeica, Ș., *Curs de Mecanică Teoretică*, Universitatea din București, Fasciculele 1, 2 (1975), Fascicula 4 (1978).
- [57] Vâlcovici, V. și colab., *Mecanică teoretică*, Editura Tehnică, București, 1968.
- [58] Vescan, T.T., *Fizică teoretică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1957.
- [59] Vladimirov, V., Mikhailov, V., Chabounine, M., Karimova, Kh., Sidorov, Y., Vacharine, A., *Recueil de problèmes d'équations de physique mathématique*, Éditions Mir, Moscova, 1976.