

6. Si  $\mathbf{b}$  es un vector constante, demuestre que

$$\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right) = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3}$$

7. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores constantes, demuestre que, para  $\mathbf{r} \neq \mathbf{b}$ ,

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3} \right) = 0$$

*Sugerencia:* Utilice las identidades (d) y (h) del Teorema 3 de la Sección 16.2.

8. Utilice el resultado del Ejercicio 7 para ofrecer una demostración alternativa de que

$$\operatorname{div} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = 0$$

Nótese que  $\operatorname{div}$  se refiere a la variable  $\mathbf{r}$ .

9. Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores constantes, demuestre que, para  $\mathbf{r} \neq \mathbf{b}$ ,

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3} \right) = - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3}$$

*Sugerencia:* Utilice la identidad (e) del Teorema 3 de la Sección 16.2.

10. Si  $\mathbf{F}$  es cualquier campo vectorial suave, demuestre que

$$\oint_{\mathcal{C}} (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{s}) = 0$$

por cualquier curva cerrada a  $\mathcal{C}$ . *Sugerencia:* Los gradientes de las componentes de  $\mathbf{F}$  son conservativos.

11. Verifique que si  $\mathbf{r}$  no está en  $\mathcal{C}$ , entonces

$$\operatorname{rot} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = \mathbf{0}$$

En este caso,  $\operatorname{rot}$  se toma con respecto a la variable  $\mathbf{r}$ .

12. Verifique la fórmula  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ , siendo  $\mathbf{A}$  el potencial vector magnético definido en función de la densidad de corriente en estado estacionario  $\mathbf{J}$ .

13. Si  $\mathbf{A}$  es el potencial vector del campo magnético producido por una densidad de corriente estacionaria en un filamento cerrado, demuestre que en el exterior del filamento  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

14. Si  $\mathbf{A}$  es el potencial vector del campo magnético producido por una densidad de corriente continua en estado estacionario, demuestre que  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  en todas partes. A partir de aquí, demuestre que  $\mathbf{A}$  cumple la ecuación vectorial de Poisson  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$ .

15. Demuestre que en una región del espacio que no contenga cargas ( $\rho = 0$ ) y sin corrientes ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ), tanto  $\mathbf{U} = \mathbf{E}$  como  $\mathbf{U} = \mathbf{H}$  satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{U}$$

siendo  $c = \sqrt{1/(\epsilon_0 \mu_0)} \approx 3 \times 10^8$  m/s.

\*16. **(Flujo de calor en el espacio tridimensional)** El calor contenido en un elemento de volumen  $dV$  dentro de un sólido homogéneo es  $\delta c T dV$ , siendo  $\delta$  y  $c$  constantes (la densidad y el calor específico del material sólido), y  $T = T(x, y, z, t)$  la temperatura en el instante  $t$  en la posición  $(x, y, z)$  en el sólido. El calor siempre fluye en la dirección del gradiente de temperatura negativo, con una velocidad proporcional al tamaño de dicho gradiente. Por tanto, la velocidad de flujo de la energía calorífica a través del elemento de superficie  $dS$  con normal  $\hat{\mathbf{N}}$  es  $-k \nabla T \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ , siendo  $k$  también una constante que depende del material del sólido (el coeficiente de conductividad térmica). Utilice «la conservación de la energía calorífica» para demostrar que para cualquier región  $R$  con superficie  $\mathcal{S}$  dentro del sólido

$$\delta c \iiint_R \frac{\partial T}{\partial t} dV = k \iint_{\mathcal{S}} \nabla T \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

siendo  $\hat{\mathbf{N}}$  la normal unitaria hacia el exterior sobre  $\mathcal{S}$ . A partir de aquí, demuestre que el flujo de calor dentro del sólido está gobernado por la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\delta c} \nabla^2 T = \frac{k}{\delta c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

## 16.7 Coordenadas curvilíneas ortogonales

En esta sección opcional, obtendremos fórmulas del gradiente de un campo escalar y de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial en términos de sistemas de coordenadas más generales que el sistema de coordenadas cartesianas utilizado en las secciones anteriores de este capítulo. En particular, expresaremos estas magnitudes en términos de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas presentados en la Sección 14.6.

Denominaremos espacio  $xyz$  al sistema de coordenadas cartesianas habitual  $(x, y, z)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Se puede definir un sistema de coordenadas diferentes  $[u, v, w]$  en el espacio  $xyz$  mediante una transformación continua de la forma

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

Si la transformación es uno a uno, de una región  $D$  en el espacio  $uvw$  en una región  $R$  en el espacio  $xyz$ , entonces un punto  $P$  en  $R$  se puede representar mediante una tripleta  $[u, v, w]$ , las coordenadas cartesianas del punto único  $Q$  en el espacio  $uvw$  correspondiente a la transformación de  $P$ . En este caso, diremos que la transformación define un **sistema de coordenadas curvilíneas** en  $R$  y denominaremos  $[u, v, w]$  a las **coordenadas curvilíneas** de  $P$  con respecto a ese sistema. Nótese que  $[u, v, w]$  son coordenadas cartesianas en su propio espacio (el espacio  $uvw$ ); son coordenadas curvilíneas en el espacio  $xyz$ .

En general, relajaremos el requisito de que la transformación que define un sistema de coordenadas curvilíneas sea uno a uno, es decir, que todo punto  $P$  de  $R$  deba tener un único conjunto de coordenadas curvilíneas. Es razonable requerir sólo que la transformación sea *uno a uno localmente*. Por tanto, puede haber más de un punto  $Q$  en el que se transforme un determinado punto  $P$ , pero solamente será uno en cualquier subregión adecuadamente pequeña de  $D$ . Por ejemplo, en el sistema de coordenadas polares del plano

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

la transformación es localmente uno a uno desde  $D$ , la mitad del plano  $r\theta$  donde  $0 < r < \infty$  en la región  $R$  formada por todos los puntos del plano  $xy$  excepto el origen. Aunque, por ejemplo,  $[1, 0]$  y  $[1, 2\pi]$  son las coordenadas polares del mismo punto en el plano  $xy$ , no están cercanas en  $D$ . Obsérvese, sin embargo, que existe todavía un problema con el origen, que se puede representar como  $[0, \theta]$  para *cualquier*  $\theta$ . Como la transformación no es localmente uno a uno en  $r = 0$ , consideraremos al origen del plano  $xy$  como un **punto singular** del sistema de coordenadas polares en el plano.

**Ejemplo 1** El sistema de coordenadas cilíndricas  $[r, \theta, z]$  en  $\mathbb{R}^3$  se define mediante la transformación

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z$$

con  $r \geq 0$  (véase la Sección 14.6). Esta transformación hace corresponder el semiespacio  $D$  dado por  $r > 0$  en todo el plano  $xyz$  excluyendo al eje  $z$ , y es uno a uno localmente. Consideraremos  $[r, \theta, z]$  como las coordenadas polares cilíndricas en todo el espacio  $xyz$ , pero diremos que los puntos del eje  $z$  son puntos singulares del sistema ya que los puntos  $[0, \theta, z]$  son idénticos para todo  $\theta$ .

**Ejemplo 2** El sistema de coordenadas esféricas  $[\rho, \phi, \theta]$  está definido por la transformación

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

con  $\rho \geq 0$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$  (véase la Sección 14.6). La transformación hace corresponder la región  $D$  del espacio  $\rho\phi\theta$  dado por  $\rho > 0$ ,  $0 < \phi < \pi$  de forma uno a uno localmente en el espacio  $xyz$ , excluido el eje  $z$ . El punto de coordenadas cartesianas  $(0, 0, z)$  se puede representar mediante las coordenadas esféricas  $[0, \phi, \theta]$  para  $\phi$  y  $\theta$  arbitrarios si  $z = 0$ , mediante  $[z, 0, \theta]$  para  $\theta$  arbitrario si  $z > 0$ , y mediante  $[|z|, \pi, \theta]$  para  $\theta$  arbitrario si  $z < 0$ . Por tanto, todos los puntos del eje  $z$  son puntos singulares del sistema de coordenadas esféricas.

## Curvas coordenadas y superficies coordenadas

Sea  $[u, v, w]$  un sistema de coordenadas curvilíneas en el espacio  $xyz$ , y sea  $P_0$  un punto no singular del sistema. Entonces, la transformación

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

es localmente uno a uno cerca de  $P_0$ . Sea  $P_0$  un punto con coordenadas curvilíneas  $[u_0, v_0, w_0]$ . El plano cuya ecuación es  $u = u_0$  en el espacio  $uvw$  se transforma en una superficie en el espacio  $xyz$  que pasa por  $P_0$ . Esta superficie se denomina superficie  $u$  y nos referiremos a ella mediante la ecuación  $u = u_0$ ; sus ecuaciones paramétricas son

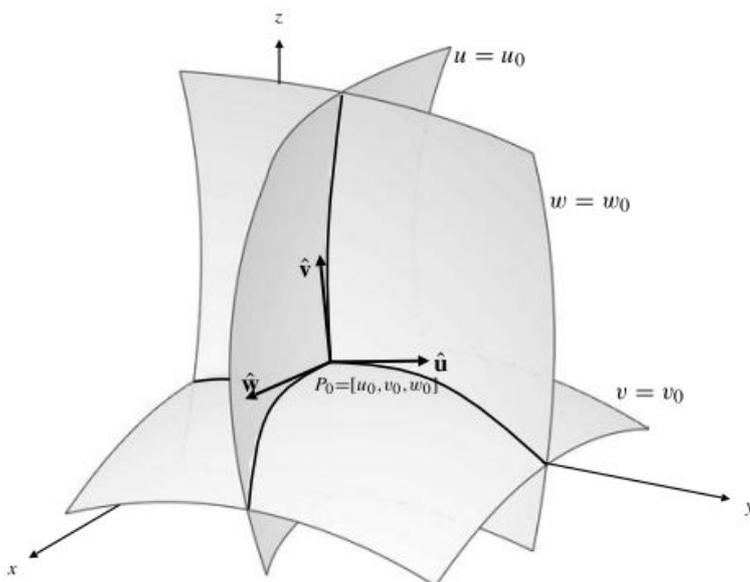
$$x = x(u_0, v, w), \quad y = y(u_0, v, w), \quad z = z(u_0, v, w)$$

con parámetros  $v$  y  $w$ . De forma similar, la superficie  $v$ ,  $v = v_0$ , y la superficie  $w$ ,  $w = w_0$ , pasan por  $P_0$ ; son las imágenes de los planos  $v = v_0$  y  $w = w_0$  en el espacio  $uvw$ .

### Coordenadas curvilíneas ortogonales

Se dice que  $[u, v, w]$  es un **sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales** en el espacio  $xyz$  si, para todo punto no singular  $P_0$  en el espacio  $xyz$ , las tres **superficies coordenadas**  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  y  $w = w_0$  se cruzan entre sí en  $P_0$  formando ángulos rectos.

Se asume tácitamente que las superficies coordenadas son suaves en todos los puntos no singulares, de forma que estamos suponiendo realmente que sus vectores normales son mutuamente perpendiculares. La Figura 16.19 muestra las superficies coordenadas que pasan por  $P_0$  en un sistema típico de coordenadas curvilíneas ortogonales.



**Figura 16.19** Superficies coordenadas  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

Las parejas de superficies coordenadas que pasan por un punto se cortan formando una **curva coordenada** que pasa por dicho punto. Por ejemplo, las superficies coordenadas  $v = v_0$  y  $w = w_0$  se cortan formando la **curva  $u$**  cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x(u, v_0, w_0), \quad y = y(u, v_0, w_0), \quad z = z(u, v_0, w_0)$$

siendo  $u$  el parámetro. Un vector unitario  $\hat{u}$  tangente a la curva  $u$  en  $P_0$  es normal a la superficie coordenada  $u = u_0$  en dicho punto. Lo mismo ocurre para los vectores unitarios  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$ . En un

sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, los tres vectores  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$  forman una base de vectores unitarios mutuamente perpendiculares en cualquier punto no singular  $P_0$  (véase la Figura 16.19). Esta base se denomina **base local** en  $P_0$ .

**Ejemplo 3** En el sistema de coordenadas cilíndricas (véase la Figura 16.20), las superficies coordenadas son:

- Cilindros circulares cuyo eje coincide con el eje  $z$  (superficies  $r$ ).
- Semiplanos verticales que radian desde el eje  $z$  (superficies  $\theta$ ).
- Planos horizontales (superficies  $z$ ).

Las curvas coordenadas son:

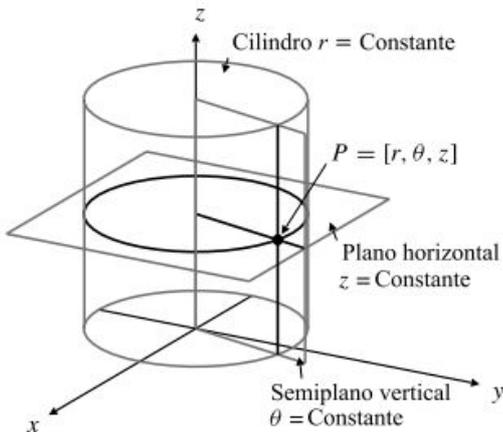
- Semirrectas horizontales que radian desde el eje  $z$  (curvas  $r$ ).
- Circunferencias horizontales centradas en el eje  $z$  (curvas  $\theta$ ).
- Rectas verticales (curvas  $z$ ).

**Ejemplo 4** En el sistema de coordenadas esféricas (véase la Figura 16.21), las superficies coordenadas son:

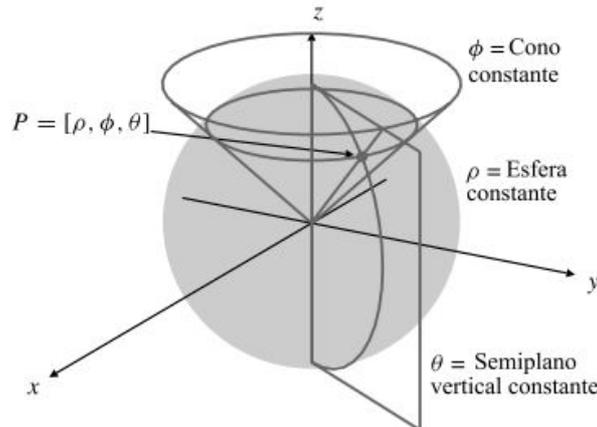
- Esferas centradas en el origen (superficies  $\rho$ ).
- Conos circulares verticales con vértices en el origen (superficies  $\phi$ ).
- Semiplanos verticales que radian desde el eje  $z$  (superficies  $\theta$ ).

Las curvas coordenadas son:

- Semirrectas que radian desde el origen (curvas  $\rho$ ).
- Semicircunferencias verticales centradas en el origen (curvas  $\phi$ ).
- Circunferencias horizontales centradas en el eje  $z$  (curvas  $\theta$ ).



**Figura 16.20** Superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas.



**Figura 16.21** Superficies coordenadas en coordenadas esféricas.

### Factores de escala y elementos diferenciales

En el resto de esta sección supondremos que  $[u, v, w]$  son coordenadas curvilíneas **ortogonales** en el espacio  $xyz$  definidas mediante la transformación

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

Supondremos también que las superficies coordenadas son suaves en todo punto no singular y que los vectores de la base local  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$  en todo punto no singular forman un triedro orientado

a la derecha. Esto se cumple en coordenadas cilíndricas y esféricas. En el caso de coordenadas esféricas, ésta es la razón por la que se escoge el orden de las coordenadas como  $[\rho, \phi, \theta]$ , en vez de  $[\rho, \theta, \phi]$ .

El **vector de posición** de un punto  $P$  en el espacio  $xyz$  se puede expresar en función de las coordenadas curvilíneas:

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$$

Si se mantienen fijas  $v = v_0$  y  $w = w_0$ , y hacemos variar  $u$ , entonces  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0, w_0)$  define una curva  $u$  en el espacio  $xyz$ . En cualquier punto  $P$  de esta curva, el vector

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

es tangente a la curva  $u$  en  $P$ . En general, los tres vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

son tangentes, respectivamente, a las curvas  $u$ ,  $v$  y  $w$  que pasan por  $P$ . Son también normales, respectivamente, a las superficies  $u$ ,  $v$  y  $w$  que pasan por  $P$ , por lo que son mutuamente perpendiculares (véase la Figura 16.19). Las longitudes de estos vectores tangentes se denominan *factores de escala* del sistema de coordenadas.

Los **factores de escala** del sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales  $[u, v, w]$  son las tres funciones

$$h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, \quad h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, \quad h_w = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|$$

Los factores de escala son distintos de cero en todo punto no singular  $P$  del sistema de coordenadas, por lo que la base local en  $P$  se puede obtener dividiendo los vectores tangentes a las curvas coordenadas por sus longitudes. Como se hizo notar anteriormente, denominaremos a los vectores de la base local  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{v}}$  y  $\hat{\mathbf{w}}$ . Por consiguiente,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \hat{\mathbf{u}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \hat{\mathbf{v}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w \hat{\mathbf{w}}$$

Los vectores de la base  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{v}}$  y  $\hat{\mathbf{w}}$  formarán un triedro orientado a la derecha suponiendo que escogemos el orden adecuado para las coordenadas  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

**Ejemplo 5** En coordenadas cilíndricas tenemos  $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ , por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \mathbf{i} + r \cos \theta \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

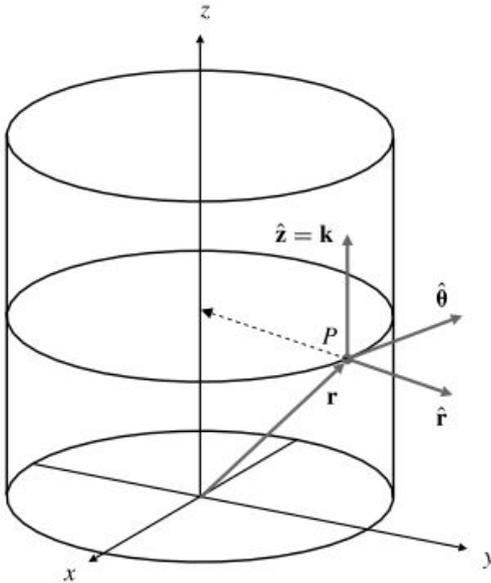
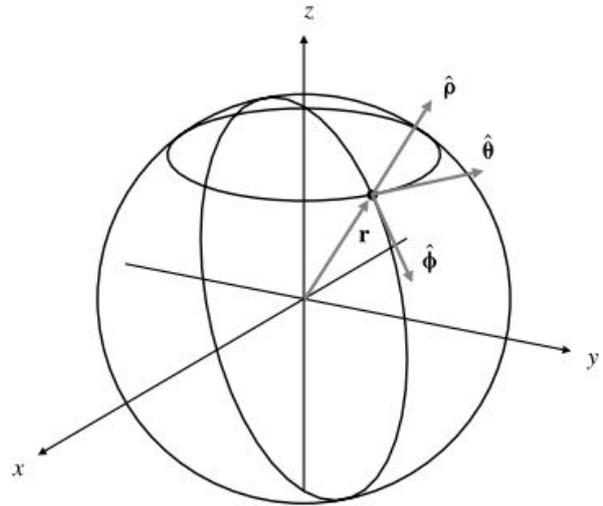
Por tanto, los factores de escala en el sistema de coordenadas cilíndricas se expresan como

$$h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r \quad \text{y} \quad h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1$$

y la base local está formada por los vectores

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k}$$

Véase la Figura 16.22. La base local está orientada a la derecha.


**Figura 16.22** La base local en coordenadas cilíndricas.

**Figura 16.23** La base local en coordenadas esféricas.

**Ejemplo 6** En coordenadas esféricas tenemos

$$\mathbf{r} = \rho \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \rho \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} + \rho \sin \phi \mathbf{k}$$

Por tanto, los vectores tangentes a las curvas coordenadas son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \rho \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \rho \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} - \rho \sin \phi \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\rho \sin \phi \sin \theta \mathbf{i} + \rho \sin \phi \cos \theta \mathbf{j}$$

y los factores de escala están dados por

$$h_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = 1, \quad h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \rho \quad \text{y} \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \sin \phi$$

La base local está formada por los vectores

$$\hat{\rho} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k}$$

$$\hat{\phi} = \cos \theta \sin \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} - \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

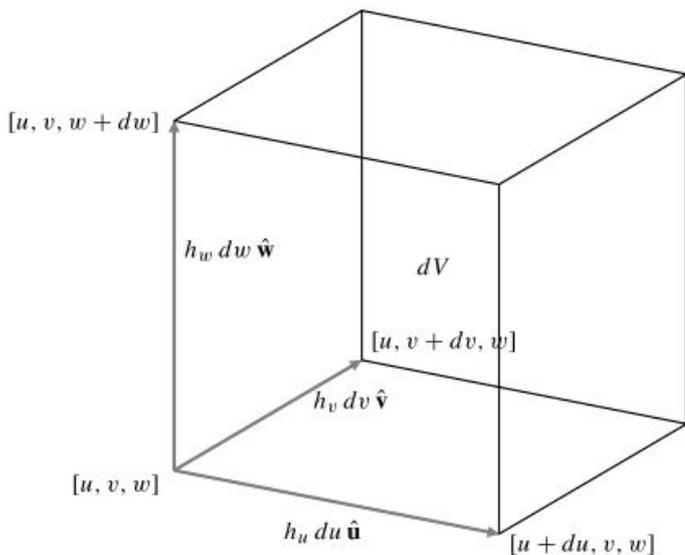
Véase la Figura 16.23. La base local está orientada a la derecha.

El elemento de volumen en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales es el volumen de una *caja coordenada* infinitesimal limitada por parejas de superficies  $u$ ,  $v$  y  $w$  correspondientes a los valores  $u$  y  $u + du$ ,  $v$  y  $v + dv$ , y  $w$  y  $w + dw$ , respectivamente. Véase la Figura 16.24. Como estas superficies coordenadas se suponen suaves, y como se cortan formando ángulos rectos, la caja coordenada es rectangular, y está generada por los vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du = h_u du \hat{\mathbf{u}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = h_v dv \hat{\mathbf{v}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw = h_w dw \hat{\mathbf{w}}$$

Por tanto, el elemento de volumen está dado por

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw$$



**Figura 16.24** Elemento de volumen en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Además, los elementos de área de superficie sobre las superficies  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las áreas de las caras apropiadas de la caja coordenada:

**Elementos de área sobre superficies coordenadas**

$$dS_u = h_v h_w dv dw, \quad dS_v = h_u h_w du dw, \quad dS_w = h_u h_v du dv$$

Los elementos de longitud de arco sobre las curvas coordenadas  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las aristas de la caja coordenada:

**Elementos de longitud de arco sobre curvas coordenadas**

$$ds_u = h_u du, \quad ds_v = h_v dv, \quad ds_w = h_w dw$$

**Ejemplo 7** Para coordenadas cilíndricas, el elemento de volumen, como se muestra en la Sección 14.6, es

$$dV = h_r h_\theta h_z dr d\theta dz = r dr d\theta dz$$

Los elementos de área de superficie en el cilindro  $r = \text{constante}$ , el semiplano  $\theta = \text{constante}$  y el plano  $z = \text{constantes}$  son, respectivamente,

$$dS_r = r d\theta dz, \quad dS_\theta = dr dz \quad \text{y} \quad dS_z = r dr d\theta$$

**Ejemplo 8** En coordenadas esféricas, el elemento de volumen, como se vio en la Sección 14.6, es

$$dV = h_\rho h_\phi h_\theta d\rho d\phi d\theta = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

El elemento de área en la esfera  $\rho = \text{constante}$  es

$$dS_\rho = h_\phi h_\theta d\phi d\theta = \rho^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

El elemento de área en el cono  $\phi = \text{constante}$  es

$$dS_\phi = h_\rho h_\theta d\rho d\theta = \rho \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta$$

El elemento de área en el semiplano  $\theta = \text{constante}$  es

$$dS_\theta = h_\rho h_\phi d\rho d\phi = \rho d\rho d\phi$$

## Grad, div y rot en coordenadas curvilíneas ortogonales

El gradiente  $\nabla f$  de un campo escalar  $f$  se puede expresar en función de la base local en cualquier punto  $P$  con coordenadas curvilíneas  $[u, v, w]$  en la forma

$$\nabla f = f_u \hat{\mathbf{u}} + f_v \hat{\mathbf{v}} + f_w \hat{\mathbf{w}}$$

Para determinar los coeficientes  $f_u$ ,  $f_v$  y  $f_w$  en esta fórmula, compararemos dos expresiones de la derivada direccional de  $f$  en una curva arbitraria en el espacio  $xyz$ .

Si la curva  $\mathcal{C}$  tiene una parametrización  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  en función de la longitud de arco, entonces la derivada direccional de  $f$  en la curva  $\mathcal{C}$  está dada por

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{ds}$$

Por otra parte, esta derivada direccional está también dada por  $df/ds = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{T}}$ , siendo  $\hat{\mathbf{T}}$  el vector tangente unitario a  $\mathcal{C}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \frac{dw}{ds} \\ &= h_u \frac{du}{ds} \hat{\mathbf{u}} + h_v \frac{dv}{ds} \hat{\mathbf{v}} + h_w \frac{dw}{ds} \hat{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{T}} = f_u h_u \frac{du}{ds} + f_v h_v \frac{dv}{ds} + f_w h_w \frac{dw}{ds}$$

Comparando estas dos expresiones para  $df/ds$  en la curva  $\mathcal{C}$ , vemos que

$$f_u h_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_v h_v = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_w h_w = \frac{\partial f}{\partial w}$$

Por tanto, hemos demostrado que

### El gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$$

**Ejemplo 9** En coordenadas cilíndricas, el gradiente del campo escalar  $f(r, \theta, z)$  es

$$\nabla f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

**Ejemplo 10** En coordenadas esféricas, el gradiente del campo escalar  $f(\rho, \phi, \theta)$  es

$$\nabla f(\rho, \phi, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

Consideremos ahora un campo vectorial  $\mathbf{F}$  expresado en coordenadas curvilíneas:

$$\mathbf{F}(u, v, w) = F_u(u, v, w) \hat{\mathbf{u}} + F_v(u, v, w) \hat{\mathbf{v}} + F_w(u, v, w) \hat{\mathbf{w}}$$

El flujo de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de la caja coordenada infinitesimal de la Figura 16.24 es la suma de los flujos de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de las tres parejas de superficies opuestas de la caja. El flujo hacia el exterior de las superficies  $u$  correspondientes a  $u$  y  $u + du$  es

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(u + du, v, w) \cdot \hat{\mathbf{u}} dS_u - \mathbf{F}(u, v, w) \cdot \hat{\mathbf{u}} dS_u \\ &= (F_u(u + du, v, w) h_v(u + du, v, w) h_w(u + du, v, w) \\ &\quad - F_u(u, v, w) h_v(u, v, w) h_w(u, v, w)) dv dw \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) du dv dw \end{aligned}$$

Se obtienen expresiones similares para los flujos hacia el exterior de las otras parejas de superficies coordenadas.

La divergencia de  $\mathbf{F}$  en  $P$  es el flujo *por unidad de volumen* hacia el exterior de la caja coordenada infinitesimal situada en  $P$ . Por tanto, está dada por

#### La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(u, v, w) &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u(u, v, w)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v(u, v, w)) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w(u, v, w)) \right] \end{aligned}$$

**Ejemplo 11** En coordenadas cilíndricas,  $h_r = h_z = 1$  y  $h_\theta = r$ . Por consiguiente, la divergencia de  $\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z \mathbf{k}$  es

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (r F_z) \right] \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

**Ejemplo 12** En coordenadas esféricas,  $h_\rho = 1$ ,  $h_\phi = \rho$  y  $h_\theta = \rho \operatorname{sen} \phi$ . La divergencia del campo vectorial  $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\phi \hat{\phi} + F_\theta \hat{\theta}$  es

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \operatorname{sen} \phi F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \operatorname{sen} \phi F_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho F_\theta) \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} F_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cot \phi}{\rho} F_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Para calcular el rotacional de un campo vectorial expresado en coordenadas curvilíneas ortogonales podemos utilizar algunas identidades vectoriales obtenidas previamente. Obsérvese en primer lugar que el gradiente del campo escalar  $f(u, v, w) = u$  es  $\hat{\mathbf{u}}/h_u$ , por lo que  $\hat{\mathbf{u}} = h_u \nabla u$ . De forma similar,  $\hat{\mathbf{v}} = h_v \nabla v$  y  $\hat{\mathbf{w}} = h_w \nabla w$ . Por tanto, el campo vectorial

$$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}}$$

se puede expresar de la forma

$$\mathbf{F} = F_u h_u \nabla u + F_v h_v \nabla v + F_w h_w \nabla w$$

Utilizando la identidad  $\mathbf{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$  (véase el Ejercicio 13 de la Sección 16.2), podemos calcular el rotacional de cada uno de los términos de la expresión anterior. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(F_u h_u \nabla u) &= \nabla(F_u h_u) \times \nabla u \\ &= \left[ \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_u) \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_u) \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_u h_u) \hat{\mathbf{w}} \right] \times \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} \\ &= \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_u h_u) \hat{\mathbf{v}} - \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_u) \hat{\mathbf{w}} \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial w} (F_u h_u) (h_v \hat{\mathbf{v}}) - \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_u) (h_w \hat{\mathbf{w}}) \right] \end{aligned}$$

Para obtener el resultado anterior hemos utilizado que  $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{w}}$  y  $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$ . Por eso hemos supuesto que el sistema de coordenadas curvilíneas está orientado hacia la derecha.

Se pueden calcular las expresiones correspondientes para los otros dos términos de la fórmula de  $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ . Combinando los tres términos, llegamos a la conclusión de que el rotacional de

$$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}}$$

está dado por

### El rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\mathbf{rot} \mathbf{F}(u, v, w) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

**Ejemplo 13** En coordenadas cilíndricas, el rotacional de  $\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z \mathbf{k}$  está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{F} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left( \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{F_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

**Ejemplo 14** En coordenadas esféricas, el rotacional de  $\mathbf{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\phi \hat{\phi} + F_\theta \hat{\theta}$  está dado por

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \rho \sin \phi \hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\phi & \rho \sin \phi F_\theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho \sin \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi F_\theta) - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right] \hat{\rho} \\ &\quad + \frac{1}{\rho \sin \phi} \left[ \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\theta) \right] \hat{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\rho \sin \phi} \left[ (\cos \phi) F_\theta + (\sin \phi) \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right] \hat{\rho} \\ &\quad + \frac{1}{\rho \sin \phi} \left[ \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - (\sin \phi) F_\theta - (\rho \sin \phi) \frac{\partial F_\theta}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left[ F_\phi + \rho \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\theta} \end{aligned}$$

## Ejercicios 16.7

En los Ejercicios 1 y 2, calcule los gradientes de los campos escalares dados, expresados en coordenadas cilíndricas o esféricas.

1.  $f(r, \theta, z) = r\theta z$                       2.  $f(\rho, \phi, \theta) = \rho\phi\theta$

En los Ejercicios 3-8, calcule  $\text{div } \mathbf{F}$  y  $\text{rot } \mathbf{F}$  para los campos vectoriales dados expresados en coordenadas cilíndricas o esféricas.

3.  $\mathbf{F}(r, \theta, z) = r\hat{\mathbf{r}}$                       4.  $\mathbf{F}(r, \theta, z) = r\hat{\theta}$   
 5.  $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \sin \phi \hat{\phi}$               6.  $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \rho \hat{\phi}$   
 7.  $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \rho \hat{\theta}$                       8.  $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \hat{\rho}$

9. Sea  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  la definición de un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales  $(u, v)$  en el plano  $xy$ . Calcule los factores de escala, los vectores de la base local y el elemento de área del sistema de coordenadas  $(u, v)$ .
10. Continuando con el Ejercicio 9, exprese el gradiente de un campo escalar  $f(u, v)$ , y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}(u, v)$  en función de las coordenadas curvilíneas.

11. Exprese el gradiente del campo escalar  $f(r, \theta)$  y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}(r, \theta)$  en función de las coordenadas polares del plano  $(r, \theta)$ .

12. La transformación

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v$$

define **coordenadas elípticas** en el plano  $xy$ . Este sistema de coordenadas tiene puntos singulares en  $x = \pm a, y = 0$ .

- (a) Demuestre que las curvas  $v, u = \text{constante}$  son elipses cuyos focos son los puntos singulares.  
 (b) Demuestre que las curvas  $u, v = \text{constante}$  son hipérbolas cuyos focos son los puntos singulares.  
 (c) Demuestre que las curvas  $u$  y  $v$  que pasan por un punto no singular se cortan formando ángulos rectos.  
 (d) Calcule los factores de escala  $h_u$  y  $h_v$  y el elemento de área  $dA$  del sistema de coordenadas elípticas.
13. Describa las superficies coordenadas y las curvas coordenadas del sistema de coordenadas cilíndricas elípticas en el espacio  $xyz$  definido por

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sen v, \quad z = z$$

14. La Laplaciana  $\nabla^2 f$  de un campo escalar  $f$  se puede calcular como  $\text{div } \nabla f$ . Utilice este método para calcular la Laplaciana de la función  $f(r, \theta, z)$  expresada en coordenadas cilíndricas (esto repite el Ejercicio 33 de la Sección 14.6).

15. Calcule la Laplaciana  $\nabla^2 f = \text{div } \nabla f$  de la función  $f(\rho, \phi, \theta)$ , expresada en coordenadas esféricas (esto repite el Ejercicio 34 de la Sección 14.6, pero ahora es mucho más fácil).
16. Calcule la Laplaciana  $\nabla^2 f = \text{div } \nabla f$  de una función  $f(u, v, w)$  expresada en coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias  $(u, v, w)$ .

## Repaso del capítulo

### Ideas clave

• **¿Qué significan las siguientes expresiones?**

- ◇ Divergencia de un campo vectorial  $\mathbf{F}$
- ◇ Rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$
- ◇  $\mathbf{F}$  es solenoidal
- ◇  $\mathbf{F}$  es irrotacional
- ◇ Potencial escalar
- ◇ Potencial vector
- ◇ Coordenadas curvilíneas ortogonales

• **Enuncie los siguientes teoremas:**

- ◇ Teorema de la Divergencia
- ◇ Teorema de Green
- ◇ Teorema de Stokes

### Ejercicios de repaso

1. Si  $\mathbf{F} = x^2z\mathbf{i} + (y^2z + 3y)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ , calcule el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de la parte del elipsoide  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ , con  $z \geq 0$ , orientada con normal hacia arriba.
2. Sea  $\mathcal{S}$  la parte del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ax$  que está entre los planos horizontales  $z = 0$  y  $z = b$ , con  $b > 0$ . Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \cos(z^2)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$  a través de  $\mathcal{S}$ , hacia el exterior.
3. Calcule  $\oint_C (3y^2 + 2xe^{y^3}) dx + (2x^2ye^{y^3}) dy$  en sentido contrario al de las agujas del reloj por la frontera del paralelogramo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 1)$  y  $(1, 1)$ .
4. Si  $\mathbf{F} = -z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ , ¿cuáles son los posibles valores de  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  sobre circunferencias de radio  $a$  en el plano  $2x + y + 2z = 7$ ?
5. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial suave en el espacio tridimensional, y suponga que, para todo  $a > 0$ , el

de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de la esfera de radio  $a$  centrada en el origen es  $\pi(a^3 + 2a^4)$ . Calcule la divergencia de  $\mathbf{F}$  en el origen.

6. Sea  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x \cos(1 - x^2 - y^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ . Calcule el flujo de  $\text{rot } \mathbf{F}$  hacia arriba, a través de una superficie cuya frontera es la curva  $x^2 + y^2 = 1, z = 2$ .
7. Sea  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^\lambda \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $r = |\mathbf{r}|$ . ¿Para qué valor o valores de  $\lambda$  es  $\mathbf{F}$  solenoidal en un subconjunto abierto del espacio tridimensional? ¿Es  $\mathbf{F}$  solenoidal en todo el espacio tridimensional para algún valor de  $\lambda$ ?
8. Sabiendo que  $\mathbf{F}$  cumple que  $\text{rot } \mathbf{F} = \mu \mathbf{F}$  en el espacio tridimensional, siendo  $\mu$  una constante distinta de cero, demuestre que  $\nabla^2 \mathbf{F} + \mu^2 \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .
9. Sea  $P$  un poliedro en el espacio tridimensional con  $n$  caras planas,  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Sea  $\mathbf{N}_i$  la normal a  $F_i$  con dirección hacia fuera desde  $P$ , y sea  $N_i$  un vector de longitud igual al área de la cara  $F_i$ . Demuestre que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i = \mathbf{0}$$

Obtenga además una versión de este resultado para el caso de un polígono  $P$  en el plano.

10. Indique alrededor de qué curva cerrada y simple  $C$  en el plano  $xy$  el campo vectorial
 
$$\mathbf{F} = (2y^3 - 3y + xy^2)\mathbf{i} + (x - x^3 + x^2y)\mathbf{j}$$
 tiene circulación máxima.
11. Indique alrededor de qué superficie cerrada y orientada en  $\mathbb{R}^3$  el campo vectorial
 
$$\mathbf{F} = (4x + 2x^3z)\mathbf{i} - y(x^2 + z^2)\mathbf{j} - (3x^2z^2 + 4y^2z)\mathbf{k}$$
 tiene flujo máximo.
12. Calcule el valor máximo de

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

siendo  $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + (3z - xy^2)\mathbf{j} + (4y - x^2y)\mathbf{k}$  y  $C$  una curva cerrada y simple en el plano  $x + y + z = 1$ , orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj vista desde arriba en el eje  $z$ . ¿Qué curva  $C$  produce este máximo?

### Problemas avanzados

1. **(El universo en expansión)** Sea  $\mathbf{v}$  el campo de velocidades a gran escala de la materia en el universo (*gran escala* significa la escala de las distancias intergalácticas; el movimiento a *pequeña escala* como el de los sistemas planetarios alrededor de sus soles, e incluso de las estrellas alrededor de los centros galácticos, ha sido promediado). Suponga que  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial suave. De acuerdo con la teoría astronómica actual, la distancia entre dos puntos cualesquiera está creciendo, y la velocidad de incremento es proporcional a la distancia entre dichos puntos. La constante de proporcionalidad,  $C$ , se denomina *constante de Hubble*. En función de  $\mathbf{v}$ , si  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son dos puntos, entonces

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1)) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = C|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$$

Demuestre que  $\text{div } \mathbf{v}$  es constante, y calcule el valor de dicha constante en función de la constante de Hubble. *Sugerencia:* Calcule el flujo de  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  hacia el exterior de una esfera de radio  $\epsilon$  centrada en  $\mathbf{r}_1$ , y tome el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero.

2. **(Ángulo sólido)** Dos rayos que parten de un punto  $P$  determinan un ángulo en dicho punto cuya medida en radianes es igual a la longitud del arco de circunferencia de radio 1 con centro en  $P$  que está entre los dos rayos. De forma similar, un semicono de forma arbitraria  $K$  con vértice en  $P$  determina un **ángulo sólido** en  $P$  cuya medida en **estereorradianes** (*estéreo + radianes*) es el área de la parte de la esfera de radio 1 con centro en  $P$  que está dentro de  $K$ . Por ejemplo, el primer octante de  $\mathbb{R}^3$  es un semicono con vértice en el origen. Determina un ángulo sólido en el origen que mide

$$4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ estereorradianes}$$

ya que el área de la esfera unidad es  $4\pi$  (véase la Figura 16.25).

- (a) Calcule la medida en estereorradianes del ángulo sólido en el vértice de un semicono circular recto cuya generatriz forma un ángulo  $\alpha$  con su eje central.
- (b) Dada una superficie orientada y suave que cruza al semicono general  $K$ , pero no en su vértice  $P$ , sea  $\mathcal{S}$  la parte de la superficie que está dentro de  $K$ . Oriente  $\mathcal{S}$  con una normal apuntando hacia el exterior desde  $P$ . Demuestre que la medida en estereorradianes del ángulo sólido en  $P$  determinada

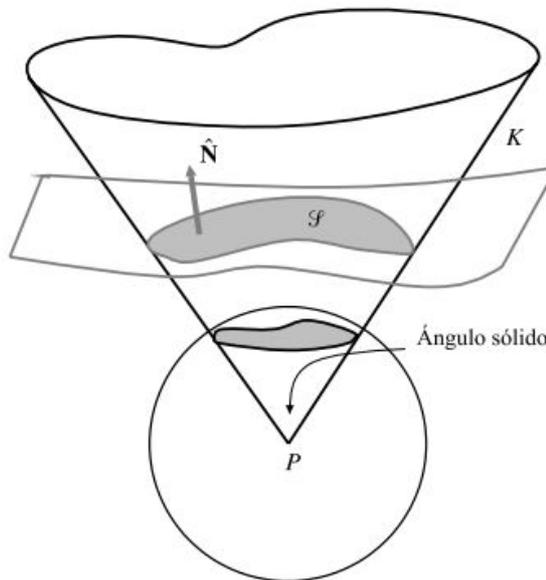


Figura 16.25

por  $K$  es el flujo de  $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$  a través de  $\mathcal{S}$ , siendo  $\mathbf{r}$  el vector que va desde  $P$  hasta el punto  $(x, y, z)$ .

### Integrales sobre dominios en movimiento

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada con respecto al tiempo  $t$  de una integral de  $f(x, t)$  sobre un «intervalo en movimiento»  $[a(t), b(t)]$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \\ &+ f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt} \end{aligned}$$

Los tres problemas siguientes, sugeridos por Luigi Quartapelle del Politécnico de Milán, proporcionan varias ampliaciones de este resultado unidimensional a dimensiones superiores. Los cálculos son un poco largos, por lo que puede ser conveniente obtener alguna ayuda de Maple o de algún otro sistema de matemáticas por computador.

### \*3. (Velocidad de cambio de la circulación sobre una curva en movimiento)

- (a) Sea  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  un campo vectorial suave en  $\mathbb{R}^3$  que depende de un parámetro  $t$ , y sea

$$\mathbf{G}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(s, t), t) = \mathbf{F}(x(s, t), y(s, t), z(s, t), t)$$

donde  $\mathbf{r}(s, t) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$  tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Demuestre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \\ = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} + \left( (\nabla \times \mathbf{F}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \end{aligned}$$

En este caso, el rotacional  $\nabla \times \mathbf{F}$  se toma con respecto al vector de posición  $\mathbf{r}$ .

- (b) Para un  $t$  fijo (que puede pensar que representa el tiempo),  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ , ( $a \leq s \leq b$ ) representa paraméricamente una curva  $C_t$  en  $\mathbb{R}^3$ . La curva se mueve cuando  $t$  varía; la velocidad de cualquier punto sobre  $C_t$  es  $\mathbf{v}_C(s, t) = \partial \mathbf{r} / \partial t$ . Demuestre que

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_t} ((\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{v}_C) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}(\mathbf{r}(b, t), t) \cdot \mathbf{v}_C(b, t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}(a, t), t) \cdot \mathbf{v}_C(a, t)$$

*Sugerencia:* Expresé

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) ds \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \right) \right] ds \end{aligned}$$

Utilice ahora el resultado de (a).

- \*4. (Velocidad de cambio del flujo a través de una superficie en movimiento)** Sea  $S_t$  una superficie en movimiento en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada suavemente (para cada  $t$ ) como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, t) = x(u, v, t)\mathbf{i} + y(u, v, t)\mathbf{j} + z(u, v, t)\mathbf{k}$$

donde  $(u, v)$  pertenece a una región de parámetros  $R$  en el plano  $uv$ . Sea  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$  una función suave de un vector tridimensional, y sea  $\mathbf{G}(u, v, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v, t), t)$ .

- (a) Demuestre que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{G} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathbf{G} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} \left( \mathbf{G} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] + (\nabla \cdot \mathbf{F}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \end{aligned}$$

- (b) Si  $C_t$  es la frontera de  $S_t$  con orientación correspondiente a la de  $S_t$ , utilice el Teorema de Green para demostrar que

$$\begin{aligned} &\iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathbf{G} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \mathbf{G} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] \right) \right] du dv \\ &= \oint_{C_t} \left( \mathbf{F} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

- (c) Combine los resultados de (a) y (b) para demostrar que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \iint_{S_t} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &= \iint_{S_t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{S_t} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v}_S \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &\quad + \oint_{C_t} (\mathbf{F} \times \mathbf{v}_C) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{v}_S = \partial \mathbf{r} / \partial t$  sobre  $S_t$  es la velocidad de  $S_t$ ,  $\mathbf{v}_C = \partial \mathbf{r} / \partial t$  sobre  $C_t$  es la velocidad de  $C_t$ , y  $\hat{\mathbf{N}}$  es el campo normal unitario sobre  $S_t$  correspondiente a su orientación.

- \*5. (Velocidad de cambio de integrales sobre volúmenes en movimiento)** Sea  $S_t$  la posición en el instante  $t$  de una superficie cerrada y suave en  $\mathbb{R}^3$  que varía suavemente con  $t$  y limita en todo instante  $t$  una región  $D_t$ . Si  $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}, t)$  indica el campo normal unitario hacia fuera (desde  $D_t$ ) sobre  $S_t$  y  $\mathbf{v}_S(\mathbf{r}, t)$  es la velocidad del punto  $\mathbf{r}$  sobre  $S_t$  en el instante  $t$ , demuestre que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_t} f dV = \iiint_{D_t} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S_t} f \mathbf{v}_S \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

se cumple para funciones suaves  $f(\mathbf{r}, t)$ . *Sugerencia:* Sea  $\Delta D_t$  el conjunto de puntos por los que  $S_t$  pasa cuando  $t$  se incrementa hasta  $t + \Delta t$ . El elemento de volumen  $dV$  en  $\Delta D_t$  se puede expresar en función del elemento de área  $dS$  sobre  $S_t$  como

$$dV = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \Delta t$$

Demuestre que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left[ \iiint_{D_{t+\Delta t}} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV - \iiint_{D_t} f(\mathbf{r}, t) dV \right] \\ &= \iiint_{D_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} dV \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \iiint_{\Delta D_t} f(\mathbf{r}, t) dV \\ &\quad + \iiint_{\Delta D_t} \frac{f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} dV \end{aligned}$$

y demuestre que la última integral  $\rightarrow 0$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ .





## CAPÍTULO 17

# Ecuaciones diferenciales ordinarias

Para resolver esta ecuación diferencial la observas hasta que la solución se te ocurre.

**George Polya (1887-1985)**

de *How to Solve It*, Princeton, 1945

La ciencia es una ecuación diferencial. La religión es la condición de contorno.

**Alan Turing (1912-1954)**

citado en *Theories of Everything*, de J. D. Barrow

**Introducción** Una **ecuación diferencial** (o **ED**) es una ecuación en la que intervienen una o más derivadas de una función desconocida. Resolver la ecuación diferencial significa obtener una función (o todas las funciones) que cumpla la ecuación diferencial.

Muchas leyes físicas y relaciones entre magnitudes que se estudian en varias disciplinas científicas se expresan matemáticamente como ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la segunda ley del movimiento de Newton ( $F = ma$ ) establece que la posición  $x(t)$  en el instante  $t$  de un objeto de masa constante  $m$  sobre el que actúa una fuerza  $F(t)$  debe satisfacer la ecuación diferencial (ecuación del movimiento):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$$

De forma similar, la biomasa  $m(t)$  en el instante  $t$  de un cultivo bacteriano que crece en un medio de soporte uniforme cambia con una velocidad proporcional a la biomasa:

$$\frac{dm}{dt} = km(t)$$

que es la ecuación diferencial del crecimiento exponencial (o, si  $k < 0$ , del decrecimiento exponencial). Como las ecuaciones diferenciales surgen ampliamente en el modelado abstracto de fenómenos concretos, dichas ecuaciones y las técnicas para resolverlas están en el corazón de las matemáticas aplicadas. De hecho, la mayor parte de la literatura matemática actual trata directamente sobre ecuaciones diferenciales o está motivada por problemas que surgen en el estudio de estas ecuaciones. Debido a esto, hemos presentado varias ecuaciones diferenciales, los términos de su

descripción y las técnicas para su solución en varios lugares en el desarrollo del cálculo que se realiza en este libro. En este capítulo final se proporciona un marco unificado, con una breve introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Algún material de secciones anteriores (particularmente de las Secciones 7.9 y 3.7) forma parte natural de este capítulo, por lo que nos referiremos a dichas secciones en los instantes adecuados. Este capítulo es, de necesidad, relativamente corto. Los estudiantes de matemáticas y sus aplicaciones siguen en general uno o más cursos completos de ecuaciones diferenciales y, aun así, apenas arañan la superficie de esta materia.

## 17.1 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de varias formas. La clasificación más significativa se basa en el número de variables con respecto a las que aparecen las derivadas de la ecuación. Una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** es aquella en la que aparecen derivadas sólo con respecto a una variable. Los dos ejemplos dados anteriormente son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una **ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP)** es aquella en la que aparecen derivadas parciales de la función desconocida con respecto a más de una variable. Por ejemplo, la **ecuación de onda unidimensional**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

modela el desplazamiento lateral  $u(x, t)$  en la posición  $x$  en el instante  $t$  de una cuerda vibrante estirada (véase la Sección 12.4). En este capítulo no trataremos las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también con respecto a su **orden**. El orden de una ecuación diferencial es el máximo orden de las derivadas presentes en la ecuación. La ecuación de onda unidimensional es una EDP de segundo orden. El siguiente ejemplo ilustra el orden de dos EDO.

### Ejemplo 1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x^3 y = \sin x \quad \text{tiene orden 2}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 4x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = y \frac{d^2 y}{dx^2} + e^y \quad \text{tiene orden 3}$$

Como toda ecuación, una ecuación diferencial se puede expresar en la forma  $F = 0$ , siendo  $F$  una función. En el caso de una EDO, la función  $F$  puede depender de la variable independiente (denominada habitualmente  $x$  o  $t$ ), de la función desconocida (habitualmente  $y$ ) y de cualquier derivada de la función desconocida hasta el orden de la ecuación. Por ejemplo, una EDO de orden  $n$  se puede expresar en la forma

$$F = (x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Un caso especial importante de ecuaciones diferenciales es el de las que son **lineales**. Una EDO lineal de orden  $n$  tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots \\ + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Cada término en la expresión del miembro izquierdo es el producto de un *coeficiente* que es función de  $x$ , y un segundo factor que es o bien  $y$  o bien una de las derivadas de  $y$ . El miembro

derecho no depende de  $y$ , y se denomina **término no homogéneo**. Obsérvese que ninguno de los términos del miembro izquierdo puede tener ninguna potencia de  $y$  o de sus derivadas que no sea la primera, y que  $y$  y sus derivadas nunca se multiplican entre sí.

Una EDO lineal se denomina **homogénea** si en todos sus términos interviene la función desconocida  $y$ , es decir, si  $f(x) = 0$ . Si  $f(x)$  no es idénticamente nula, la ecuación es **no homogénea**.

**Ejemplo 2** En el Ejemplo 1, la primera ED,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^3y = \text{sen } x$$

es lineal. Los coeficientes son  $a_2(x) = 1$ ,  $a_1(x) = 0$ ,  $a_0(x) = x^3$  y el término no homogéneo es  $f(x) = \text{sen } x$ . Aunque se puede expresar en la forma

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} - e^y = 0$$

la segunda ecuación es *no lineal* debido a que en el segundo término interviene el cuadrado de una derivada de  $y$ , en el tercer término aparece el producto de  $y$  con una de sus derivadas y el cuarto término no es y veces una función de  $x$ . La ecuación

$$(1 + x^2)\frac{d^3y}{dx^3} + \text{sen } x\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$$

es una ecuación lineal de orden 3. Los coeficientes son  $a_3(x) = 1 + x^2$ ,  $a_2(x) = \text{sen } x$ ,  $a_1(x) = -4$  y  $a_0(x) = 1$ . Como  $f(x) = 0$ , esta ecuación es *homogénea*.

El siguiente teorema establece que toda *combinación lineal* de una ecuación diferencial lineal y homogénea es también una solución. Se trata de un resultado extremadamente importante sobre las ED lineales y homogéneas.

**TEOREMA 1** Si  $y = y_1(x)$  e  $y = y_2(x)$  son dos soluciones de la ecuación lineal y homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

entonces también lo es la combinación lineal

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

para todos los valores de las constantes  $A$  y  $B$ .

**DEMOSTRACIÓN** Sabemos que

$$\begin{aligned} a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 &= 0 \quad y \\ a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \dots + a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $A$ , la segunda por  $B$  y sumando las dos se obtiene

$$\begin{aligned} a_n(Ay_1^{(n)} + By_2^{(n)}) + a_{n-1}(Ay_1^{(n-1)} + By_2^{(n-1)}) \\ + \dots + a_2(Ay_1'' + By_2'') + a_1(Ay_1' + By_2') + a_0(Ay_1 + By_2) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $y = Ay_1(x) + By_2(x)$  es también una solución de la ecuación.

El mismo tipo de demostración se puede utilizar en el siguiente teorema.

**TEOREMA 2** Si  $y = y_1(x)$  es una solución de la ecuación lineal y homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

e  $y = y_2(x)$  es una solución de la ecuación lineal y no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

entonces,  $y = y_1(x) + y_2(x)$  es también una solución de la misma ecuación lineal y no homogénea.

Haremos un amplio uso de los dos teoremas anteriores al presentar las ecuaciones lineales de segundo orden en las Secciones 17.6-17.8.

**Ejemplo 3** Verifique que  $y = \sin 2x$  e  $y = \cos 2x$  cumplen la ED  $y'' + 4y = 0$ . Calcule una solución  $y(x)$  de dicha ED que cumpla  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = -4$ .

**Solución** Si  $y = \sin 2x$ , entonces  $y'' = \frac{d}{dx}(2 \cos 2x) = -4 \sin 2x = -4y$ . Por lo tanto,  $y'' + 4y = 0$ . Un cálculo similar demuestra que  $y = \cos 2x$  también cumple la ED. Como la ED es lineal y homogénea, la función

$$y = A \sin 2x + B \cos 2x$$

es una solución para cualquier valor de las constantes  $A$  y  $B$ . Debe cumplirse que  $y(0) = 2$ , por lo que es necesario que  $2 = A \sin 0 + B \cos 0 = B$ . Por consiguiente,  $B = 2$ . Además,

$$y' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

Como debe ser  $y'(0) = -4$ , entonces  $-4 = 2A \cos 0 - 2B \sin 0 = 2A$ . Por tanto,  $A = -2$ , y la solución pedida es  $y = -2 \sin 2x + 2 \cos 2x$ .

**Observación** Sea  $P_n(r)$  el polinomio de grado  $n$  en la variable  $r$  dado por

$$P_n(r) = a_n(x)r^n + a_{n-1}(x)r^{n-1} + \dots + a_2(x)r^2 + a_1(x)r + a_0(x)$$

cuyos coeficientes dependen de la variable  $x$ . Podemos expresar la EDO de orden  $n$  con coeficientes  $a_k(x)$ , ( $0 \leq k \leq n$ ) y término no homogéneo  $f(x)$  en la forma

$$P_n(D)y(x) = f(x)$$

siendo  $D$  el *operador diferencial*  $d/dx$ . El miembro izquierdo de la ecuación anterior indica la aplicación del operador diferencial de orden  $n$

$$P_n(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$$

a la función  $y(x)$ . Por ejemplo,

$$a_k(x)D^k y(x) = a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}$$

A menudo es útil expresar las ED lineales mediante operadores diferenciales de esta forma.

**Observación** Desgraciadamente, el término *homogénea* se utiliza con más de un significado en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Ciertas EDO que no son necesariamente lineales se denominan homogéneas por una razón diferente a la que se aplica a las ecuaciones lineales anteriores. Aparecerán ecuaciones de este tipo en la Sección 17.2.

## Ejercicios 17.1

En los Ejercicios 1-10, indique el orden de las ED dadas, e indique también si son lineales o no lineales. Si son lineales, ¿son homogéneas o no homogéneas?

1.  $\frac{dy}{dx} = 5y$
2.  $\frac{d^2y}{dx^2} + x = y$
3.  $y \frac{dy}{dx} = x$
4.  $y''' + xy' = x \operatorname{sen} x$
5.  $y' + x \operatorname{sen} xy' = y$
6.  $y' + 4y - 3y = 2y^2$
7.  $\frac{d^3y}{dt^3} + t \frac{dy}{dt} + t^2y = t^3$
8.  $\cos x \frac{dx}{dt} + x \operatorname{sen} t = 0$
9.  $y^{(4)} + e^x y' = x^3 y$
10.  $x^2 y' + e^x y = \frac{1}{y}$
11. Verifique que  $y = \cos x$  e  $y = \operatorname{sen} x$  son soluciones de la ED  $y'' + y = 0$ . ¿Son soluciones las siguientes funciones?: (a)  $\operatorname{sen} x - \cos x$ , (b)  $\operatorname{sen}(x + 3)$ , (c)  $\operatorname{sen} 2x$ . Justifique sus respuestas.
12. Verifique que  $y = e^x$  e  $y = e^{-x}$  son soluciones de la ED  $y' - y = 0$ . ¿Son soluciones las siguientes funciones?: (a)  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ , (b)  $\cos x$ , (c)  $x^e$ . Justifique sus respuestas.
13.  $y_1 = \cos(kx)$  es una solución de  $y'' + k^2y = 0$ . Plantee y verifique otra solución  $y_2$  que no sea múltiplo de  $y_1$ . Obtenga a continuación una solución que cumpla  $y(\pi/k) = 3$  e  $y'(\pi/k) = 3$ .
14.  $y_1 = e^{kx}$  es una solución de  $y'' - k^2y = 0$ . Plantee y verifique otra solución  $y_2$  que no sea múltiplo de  $y_1$ . Obtenga a continuación una solución que cumpla  $y(1) = 0$  e  $y'(1) = 2$ .
15. Calcule una solución de  $y' + y = 0$  que cumpla  $y(\pi/2) = 2y(0)$  e  $y(\pi/4) = 3$ . *Sugerencia:* Vea el Ejercicio 11.
16. Calcule dos valores de  $r$  tales que  $y = e^{rx}$  sea una solución de  $y'' - y' - 2y = 0$ . Calcule a continuación una solución de la ecuación que cumpla  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .
17. Verifique que  $y = x$  es una solución de  $y' + y = x$  y calcule una solución  $y$  de esta ED que cumpla  $y(\pi) = 1$  e  $y'(\pi) = 0$ . *Sugerencia:* Utilice el Ejercicio 11 y el Teorema 2.
18. Verifique que  $y = -e$  es una solución de  $y' - y = e$  y calcule una solución  $y$  de esta ED que cumpla  $y(1) = 0$  e  $y'(1) = 1$ . *Sugerencia:* Utilice el Ejercicio 12 y el Teorema 2.

## 17.2 Solución de ecuaciones de primer orden

En esta sección desarrollaremos técnicas para resolver diversos tipos de EDO de primer orden; concretamente:

1. Ecuaciones separables.
2. Ecuaciones homogéneas.
3. Ecuaciones exactas.
4. Ecuaciones lineales.

La mayor parte de las ecuaciones de primer orden tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales generalmente habrá que utilizar integración. De hecho, el proceso de resolver la ED se denomina *integración* de la ED. No obstante, resolver ecuaciones diferenciales es en general más complicado que simplemente plantear una integral y calcularla. La única ED que se puede resolver de esta manera es el tipo más simple de ED lineal de primer orden que se puede expresar de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

La solución es entonces la primitiva de  $f$ :

$$y = \int f(x) dx$$

## Ecuaciones separables

El siguiente tipo más simple de ecuación a resolver se denomina **ecuación separable**. Una ecuación separable es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

donde la derivada  $dy/dx$  es un producto de una función sólo de  $x$  y una función sólo de  $y$ , en vez de ser una función más general de las dos variables  $x$  e  $y$ .

**En la Sección 7.9 se puede encontrar una presentación extensa de las ecuaciones separables con ejemplos y ejercicios, por lo que no la repetiremos aquí. Si no ha estudiado ese material, por favor hágalo ahora.**

## Ecuaciones homogéneas de primer orden

Una ED de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se denomina **homogénea**. Se trata de un uso *diferente* del término homogéneo del empleado en la sección anterior, que se aplicaba sólo a ecuaciones lineales. Aquí, homogénea se refiere al hecho de que  $y/x$ , y por tanto  $g(x, y) = f(y/x)$ , es *homogénea de grado 0* en el sentido descrito después del Ejemplo 7 de la Sección 12.5. Estas ecuaciones homogéneas se pueden transformar en una ecuación separable (que por tanto se puede resolver) mediante un cambio de la variable dependiente. Si hacemos

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{o, en otros términos,} \quad y = xv(x)$$

tenemos entonces

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

y la ecuación diferencial original se transforma en

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

que es separable.

**Ejemplo 1** Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$$

**Solución** La ecuación es homogénea (para verlo, divida el numerador y el denominador por  $x^2$ ). Si  $y = vx$ , entonces la ecuación se convierte en

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v}{v + v^2} = \frac{1}{v}$$

o

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$$

Separando variables e integrando, se calcula

$$\begin{aligned} \int \frac{v \, dv}{1-v^2} &= \int \frac{dx}{x} && \text{Sea } u = 1 - v^2 \\ -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} &= \int \frac{dx}{x} \\ -\ln|u| &= 2\ln|x| + C_1 = \ln C_2 x^2 && (C_1 = \ln C_2) \\ \frac{1}{|u|} &= C_2 x^2 \\ |1 - v^2| &= \frac{C_3}{x^2} && (C_3 = 1/C_2) \\ \left| 1 - \frac{y^2}{x^2} \right| &= \frac{C_3}{x^2} \end{aligned}$$

La solución se expresa mejor en la forma  $x^2 - y^2 = C_4$ . Sin embargo, cerca de los puntos donde  $y \neq 0$ , la ecuación se puede resolver expresando  $y$  en función de  $x$ .

## Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial de primer orden expresada en forma diferencial como

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0$$

que es equivalente a  $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ , se denomina **exacta** si el miembro izquierdo es el diferencial de una función  $\phi(x, y)$ :

$$d\phi(x, y) = M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy$$

La función  $\phi$  se denomina **función integral** de la ecuación diferencial. Las curvas de nivel  $\phi(x, y) = C$  o  $\phi$  son las **curvas solución** de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$x \, dx + y \, dy = 0$$

tiene curvas solución que se expresan como

$$x^2 + y^2 = C$$

ya que  $d(x^2 + y^2) = 2(x \, dx + y \, dy) = 0$ .

**Observación** La condición de que la ecuación diferencial  $M \, dx + N \, dy = 0$  sea exacta es equivalente a la condición de que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

sea *conservativo*; la función integral de la ecuación diferencial es entonces la función potencial del campo vectorial (véase la Sección 15.2).

Una **condición necesaria** para la exactitud de la ED  $M \, dx + N \, dy = 0$  es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esto dice simplemente que las derivadas parciales mixtas  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$  y  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$  de la función integral  $\phi$  deben ser iguales.

Una vez que sabemos que una ecuación es exacta, a menudo se puede plantear la función integral. En cualquier caso,  $\phi$  siempre se puede obtener por el mismo método utilizado para calcular el potencial de un campo vectorial conservativo de la Sección 15.2.

**Ejemplo 2** Verifique que la ED

$$(2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x}) dx + (x \cos y + \cos y + e^{-x}) dy = 0$$

es exacta y calcule sus curvas solución.

**Solución** En este caso,  $M = 2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x}$  y  $N = x \cos y + \cos y + e^{-x}$ . Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y - e^{-x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

la ED es exacta. Deseamos obtener  $\phi$  tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M = 2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N = x \cos y + \cos y + e^{-x}$$

Integramos la primera ecuación con respecto a  $x$ , teniendo en cuenta que la constante de integración puede depender de  $y$ .

$$\phi(x, y) = \int (2x + \operatorname{sen} y - ye^{-x}) dx = x^2 + x \operatorname{sen} y + ye^{-x} + C_1(y)$$

Sustituiremos ahora esta expresión en la segunda ecuación:

$$x \cos y + \cos y + e^{-x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x \cos y + e^{-x} + C_1(y)$$

De este modo,  $C_1(y) = \cos y$  y  $C_1(y) = \operatorname{sen} y + C_2$  (como la ED original era exacta, la ecuación  $C_1(y)$  no depende de  $x$ ; si no fuera así, no podríamos obtener  $C_1$  como función sólo de  $y$ ). Eligiendo  $C_2 = 0$  obtenemos que  $\phi(x, y) = x^2 + x \operatorname{sen} y + ye^{-x} + \operatorname{sen} y$  es la función integral para la ED dada. Las curvas solución de la ED son las curvas de nivel

$$x^2 + x \operatorname{sen} y + ye^{-x} + \operatorname{sen} y = C$$

## Factores de integración

Toda ecuación diferencial ordinaria de orden 1 y de grado 1 se puede expresar en forma diferencial:  $M dx + N dy = 0$ . Sin embargo, esta última ecuación en general no será exacta. Es posible multiplicar la ecuación por un **factor de integración**  $\mu(x, y)$  de forma que la ecuación resultante

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0$$

sea exacta. En general, estos factores de integración son difíciles de obtener; deben cumplir la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$M(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} - N(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(x, y) \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

que se sigue de la condición necesaria sobre exactitud planteada anteriormente. No intentaremos resolver esa ecuación aquí.

Sucede algunas veces que una ecuación diferencial tiene un factor de integración que depende sólo de una de las dos variables. Supongamos, por ejemplo, que  $\mu(x)$  es un factor

de integración de  $M dx + N dy = 0$ . Entonces,  $\mu(x)$  debe cumplir la ecuación diferencial ordinaria

$$N(x, y) \frac{d\mu}{dx} = \mu(x) \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

o bien

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)}$$

Esta ecuación se puede resolver (mediante integración) y expresar así  $\mu$  como función sólo de  $x$ , siempre que el miembro derecho sea independiente de  $y$ .

**Ejemplo 3** Demuestre que  $(x + y^2) dx + xy dy = 0$  tiene un factor de integración que depende sólo de  $x$ , calcúlelo y resuelva la ecuación.

**Solución** En este caso,  $M = x + y^2$  y  $N = xy$ . Como

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

no depende de  $y$ , la ecuación tiene un factor de integración que depende sólo de  $x$ . Este factor está dado por  $d\mu/\mu = dx/x$ . Evidentemente,  $\mu = x$  es un factor de integración adecuado; si multiplicamos la ecuación diferencial dada por  $x$ , obtenemos

$$0 = (x^2 + xy^2) dx + x^2y dy = d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}\right)$$

La solución es, por tanto,  $2x^3 + 3x^2y^2 = C$ .

**Observación** Por supuesto, es posible obtener un factor de integración que dependa sólo de  $y$  en vez de  $x$ . Véanse los Ejercicios 17-19 posteriores. Es también posible buscar factores de integración que dependan de combinaciones específicas de  $x$  e  $y$ , por ejemplo  $xy$ . Véase el Ejercicio 20.

## Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es aquella del tipo

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son funciones dadas, que se suponen continuas. La ecuación es *homogénea* (en el sentido descrito en la Sección 17.1) siempre que  $q(x) = 0$ . En ese caso, la ecuación lineal dada es separable:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

y se puede resolver integrando ambos miembros. Las ecuaciones lineales de primer orden no homogéneas se pueden resolver por un procedimiento en el que interviene el cálculo de un factor de integración.

**La técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, junto con varios ejemplos y ejercicios, se encuentra en la Sección 7.9. Si no ha estudiado ese material, por favor hágalo ahora.**

## Ejercicios 17.2

Véase la Sección 7.9 donde se plantean ejercicios sobre ecuaciones separables y ecuaciones lineales. Resuelva las ecuaciones diferenciales homogéneas de los Ejercicios 1-6.

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$4. \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3}$$

$$5. x \frac{dy}{dx} = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$6. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{-y/x}$$

7. Calcule una ecuación de la curva en el plano  $xy$  que pasa por el punto  $(2, 3)$  y tiene, en cada punto  $(x, y)$  de la misma, pendiente  $2x/(1 + y^2)$ .

8. Repita el Problema 7 para el punto  $(1, 3)$  y la pendiente  $1 + (2y/x)$ .

9. Demuestre que el cambio de variables  $\xi = x - x_0$ ,  $\eta = y - y_0$  transforma la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{ex + fy + g}$$

en la ecuación homogénea

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{e\xi + f\eta}$$

sabiendo que  $(x_0, y_0)$  es la solución del sistema

$$ax + by + c = 0$$

$$ex + fy + g = 0$$

10. Utilice la técnica del Ejercicio 9 para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 4}{2x - y - 3}$$

Demuestre que las ED de los Ejercicios 11-14 son exactas, y resuélvalas.

$$11. (xy^2 + y) dx + (x^2y + x) dy = 0$$

$$12. (e^x \sin y + 2x) dx + (e^x \cos y + 2y) dy = 0$$

$$13. e^{xy}(1 + xy) dx + x^2 e^{xy} dy = 0$$

$$14. \left(2x + 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0$$

Demuestre que las ED de los Ejercicios 15 y 16 admiten factores de integración que son funciones sólo de  $x$ . Después resuelva las ecuaciones.

$$15. (x^2 + 2y) dx - x dy = 0$$

$$16. (xe^x + x \ln y + y) dx + \left(\frac{x^2}{y} + x \ln x + x \operatorname{sen} y\right) dy = 0$$

17. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  si la ecuación  $M dx + N dy = 0$  tiene un factor de integración de la forma  $\mu(y)$ , y qué ED debe cumplir dicho factor de integración?

18. Calcule un factor de integración de la forma  $\mu(y)$  para la ecuación

$$2y^2(x + y^2) dx + xy(x + 6y^2) dy = 0$$

y después resuelva la ecuación. *Sugerencia:* Véase el Ejercicio 17.

19. Calcule un factor de integración de la forma  $\mu(y)$  para la ecuación  $y dx - (2x + y^3 e^y) dy = 0$  y después resuelva la ecuación. *Sugerencia:* Véase el Ejercicio 17.

20. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  si la ecuación  $M dx + N dy = 0$  tiene un factor de integración de la forma  $\mu(xy)$ , y qué ED debe cumplir dicho factor de integración?

21. Calcule un factor de integración de la forma  $\mu(xy)$  para la ecuación

$$\left(x \cos x + \frac{y^2}{x}\right) dx - \left(\frac{x \operatorname{sen} x}{y} + y\right) dy = 0$$

y después resuelva la ecuación. *Sugerencia:* Véase el Ejercicio 20.

## 17.3 Existencia, unicidad y métodos numéricos

Una ecuación diferencial general de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

especifica una pendiente  $f(x, y)$  en todo punto  $(x, y)$  del dominio de  $f$  y representa, por tanto, un **campo de pendientes**. Dicho campo de pendientes se puede representar gráficamente dibujando segmentos cortos con la pendiente indicada en muchos puntos del plano  $xy$ . Los campos de pen-

dientes son similares a los campos vectoriales, pero los segmentos se dibujan habitualmente de la misma longitud y sin puntas de flecha. La Figura 17.1 ilustra el campo de pendientes de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

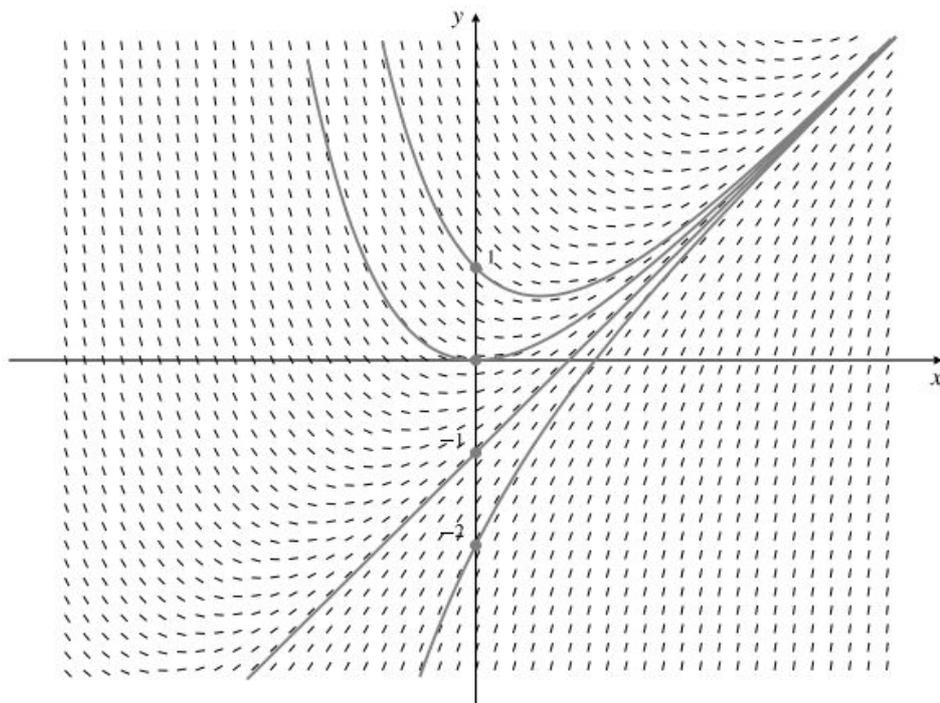
La resolución de un problema de valor inicial típico

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

implica obtener una función  $y = \phi(x)$  tal que

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{y} \quad \phi(x_0) = y_0$$

La gráfica de la ecuación  $y = \phi(x)$  es una curva que pasa por  $(x_0, y_0)$  y es tangente al campo de pendientes en cada punto. Tales curvas se denominan **curvas solución** de la ecuación diferencial. La Figura 17.1 muestra cuatro curvas solución de  $y' = x - y$  correspondientes a las condiciones iniciales  $y(0) = C$ , con  $C = -2, -1, 0$  y  $1$ .



**Figura 17.1** El campo de pendientes de la ED  $y' = x - y$  y cuatro curvas solución de la misma.

La ED  $y' = x - y$  es lineal y se puede resolver explícitamente por el método de la Sección 17.2. De hecho, la solución que cumple  $y(0) = C$  es  $y = x - 1 + (C + 1)e^{-x}$ . La mayoría de las ecuaciones diferenciales de la forma  $y' = f(x, y)$  no permiten despejar  $y$  como función explícita de  $x$ , por lo que debemos utilizar aproximaciones numéricas para calcular el valor de la función solución  $\phi(x)$  en puntos concretos.

## Existencia y unicidad de soluciones

Aunque no se pueda calcular una solución explícita de un problema de valor inicial, es importante saber si el problema tiene solución y si la solución es única.

**TEOREMA 3 Un teorema de existencia y unicidad para problemas de valor inicial de primer orden**

Supongamos que  $f(x, y)$  y  $f_2(x, y) = (\partial/\partial y)f(x, y)$  son continuas en un rectángulo  $R$  de la forma  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , que contiene al punto  $(x_0, y_0)$  en su interior. Entonces, existe un número  $\delta > 0$  y una función *única*  $\phi(x)$  definida y con derivada continua en el intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tal que  $\phi(x_0) = y_0$  y  $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$  para  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ . En otras palabras, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (*)$$

tiene una solución única  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Presentaremos sólo un esbozo de la demostración. Toda solución  $y = \phi(x)$  del problema de valor inicial (\*) debe cumplir también la **ecuación integral**

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt \quad (**)$$

y, a la inversa, toda solución de la ecuación integral (\*\*) debe cumplir también el problema de valor inicial (\*). Una secuencia de aproximaciones  $\phi_n(x)$  a una solución (\*\*) se puede construir como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= y_0 \\ \phi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_n(t)) dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Estas iteraciones se denominan **iteraciones de Picard**. La demostración del Teorema 3 implica demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \phi(x)$$

existe en un intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  y que el límite resultante  $\phi(x)$  cumple la ecuación integral (\*\*). Los detalles se pueden encontrar en textos más avanzados sobre ecuaciones diferenciales y análisis diferencial.

**Observación** Algunos problemas de valor inicial pueden tener soluciones que no son únicas. Por ejemplo, las funciones  $y_1(x) = x^3$  e  $y_2(x) = 0$  satisfacen ambas el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

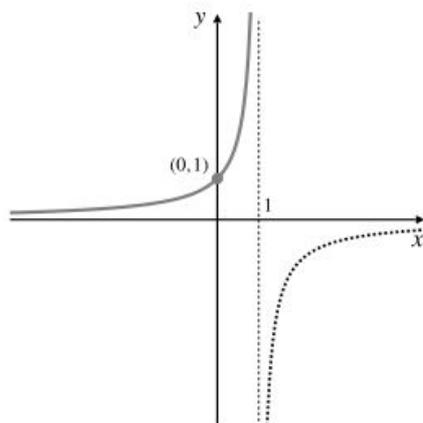
En este caso,  $f(x, y) = 3y^{2/3}$  es continua en todo el plano  $xy$ . Sin embargo,  $\partial f/\partial y = 2y^{-1/3}$  no es continua en el eje  $x$  y, por tanto, no es continua en ningún rectángulo que contenga al punto  $(0, 0)$  en su interior. No se cumplen las condiciones del Teorema 3 y el problema de valor inicial tiene solución, pero ésta no es única.

**Observación** La solución única  $y = \phi(x)$  al problema de valor inicial (\*) garantizada por el Teorema 3 puede no estar definida en todo el intervalo  $[a, b]$  porque puede «escapar» del rectán-

gulo  $R$  por sus lados superior o inferior. Aunque  $f(x, y)$  y  $(\partial/\partial y)f(x, y)$  sean continuas en todo el plano  $xy$ , la solución puede no estar definida en toda la recta real. Por ejemplo,

$$y = \frac{1}{1-x} \text{ cumple el problema de valor inicial } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pero sólo para  $x < 1$ . Empezando desde  $(0, 1)$  podemos seguir la curva solución tanto como deseemos a la izquierda de  $x = 0$ , pero a la derecha de  $x = 0$  la curva tiende a  $\infty$  cuando  $x \rightarrow 1 -$  (véase la Figura 17.2). No tiene sentido considerar la parte de la curva a la derecha de  $x = 1$  como parte de la curva solución del problema de valor inicial.



**Figura 17.2** La solución de  $y' = y^2$ ,  $y(0) = 1$  es la parte de la curva  $y = 1/(1-x)$  a la izquierda de la asíntota vertical en  $x = 1$ .

## Métodos numéricos

Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema 3, por lo que sabemos que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única  $y = \phi(x)$  en algún intervalo que contiene a  $x_0$ . Aun cuando no podamos resolver la ecuación diferencial y obtener explícitamente  $\phi(x)$ , todavía podemos intentar obtener valores aproximados  $y_n$  de  $\phi(x_n)$  en una secuencia de puntos

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \quad \dots$$

empezando en  $x_0$ . En este caso,  $h > 0$  (o  $h < 0$ ) se denomina **tamaño del paso** del esquema de aproximación. En el resto de esta sección describiremos tres métodos para construir las aproximaciones  $\{y_n\}$ :

1. El método de Euler.
2. El método de Euler mejorado.
3. El método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Cada uno de estos métodos empieza con un valor dado de  $y_0$  y proporciona una fórmula para construir  $y_{n+1}$  cuando se conoce  $y_n$ . Los tres métodos se enumeran anteriormente en orden de complejidad de sus fórmulas, pero las fórmulas más complicadas producen aproximaciones mucho mejores para cualquier tamaño dado del paso  $h$ .

El **método de Euler** se basa en aproximar la curva solución  $y = \phi(x)$  por una línea poligonal (una secuencia de segmentos rectos unidos por sus extremos), donde cada segmento tiene

una longitud horizontal  $h$  y una pendiente determinada por el valor de  $f(x, y)$  en el extremo final del segmento anterior. Por tanto, si  $x_n = x_0 + nh$ , entonces

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)h \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)h \\ y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)h \end{aligned}$$

y, en general,

**Fórmulas de iteración para el método de Euler**

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

**Ejemplo 1** Utilice el método de Euler para obtener valores aproximados de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

en el intervalo  $[0, 1]$  utilizando

- (a) 5 pasos de tamaño  $h = 0.2$ ,
- (b) 10 pasos de tamaño  $h = 0.1$ .

Calcule el error en cada paso, sabiendo que el problema (que es una ecuación lineal y, por tanto, se puede resolver explícitamente) tiene como solución  $y = \phi(x) = x - 1 + 2e^{-x}$ .

**Solución**

(a) Aquí tenemos  $f(x, y) = x - y$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  y  $h = 0.2$ , por lo que

$$x_n = \frac{n}{5}, \quad y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n - y_n)$$

y el error es  $e_n = \phi(x_n) - y_n$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  y  $5$ . Los resultados del cálculo, que se realiza fácilmente utilizando una hoja de cálculo, se presentan en la Tabla 1.

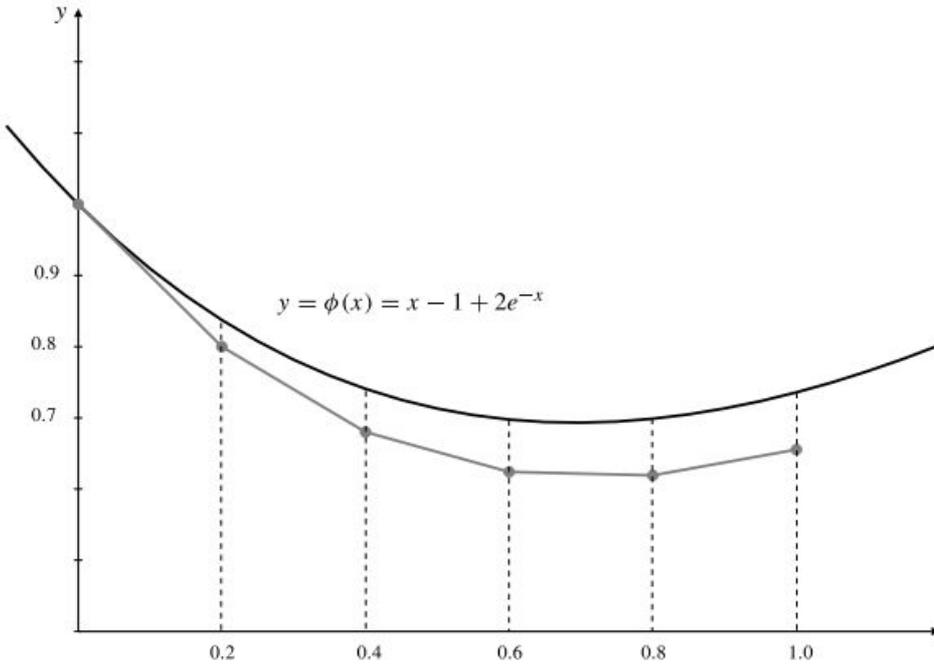
**Tabla 1.** Aproximaciones de Euler con  $h = 0.2$

$n$	$x_n$	$y_n$	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1}$	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	-1.000 000	0.800 000	0.000 000
1	0.2	0.800 000	-0.600 000	0.680 000	0.037 462
2	0.4	0.680 000	-0.280 000	0.624 000	0.060 640
3	0.6	0.624 000	-0.024 000	0.619 200	0.073 623
4	0.8	0.619 200	0.180 800	0.655 360	0.079 458
5	1.0	0.655 360	0.344 640		0.080 399

La Figura 17.3 muestra la solución exacta  $y = \phi(x)$  y la línea poligonal que representa la aproximación de Euler. La aproximación está por debajo de la curva solución, como reflejan los valores positivos de la última columna de la Tabla 1, que representan el error en cada paso.

(b) En este caso tenemos  $h = 0.1$ , de forma que

$$x_n = \frac{n}{10}, \quad y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n - y_n)$$



**Figura 17.3** La solución  $y = \phi(x)$  a  $y' = x - y, y(0) = 1$  y una aproximación de Euler a la misma en  $[0, 1]$  con tamaño del paso  $h = 0.2$ .

para  $n = 0, 1, \dots, 10$ . Presentamos los resultados de nuevo en forma de tabla:

**Tabla 2** Aproximaciones de Euler con  $h = 0.1$

$n$	$x_n$	$y_n$	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1}$	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	-1.000 000	0.900 000	0.000 000
1	0.1	0.900 000	-0.800 000	0.820 000	0.009 675
2	0.2	0.820 000	-0.620 000	0.758 000	0.017 462
3	0.3	0.758 000	-0.458 000	0.712 200	0.023 636
4	0.4	0.712 200	-0.312 200	0.680 980	0.028 440
5	0.5	0.680 980	-0.180 980	0.662 882	0.032 081
6	0.6	0.662 882	-0.062 882	0.656 594	0.034 741
7	0.7	0.656 594	0.043 406	0.660 934	0.036 577
8	0.8	0.660 934	0.139 066	0.674 841	0.037 724
9	0.9	0.674 841	0.225 159	0.697 357	0.038 298
10	1.0	0.697 357	0.302 643		0.038 402

Obsérvese que el error al final del primer paso es aproximadamente la cuarta parte del error al final del primer paso del apartado (a), pero al final en  $x = 1$  es sólo aproximadamente la mitad que el del apartado (a). Este comportamiento es característico del método de Euler.

Si disminuimos el tamaño del paso  $h$ , se requieren más pasos ( $n = \lfloor (x - x_0)/h \rfloor$ ) para llegar desde el punto inicial  $x_0$  a un valor particular  $x$  donde deseemos conocer el valor de la solución. En el método de Euler se puede demostrar que el error en cada paso disminuye en promedio proporcionalmente a  $h^2$ , pero los errores se pueden acumular de un paso otro, por lo que el error en  $x$  decrecerá proporcionalmente a  $nh^2 = |x - x_0|h$ . Esto es coherente con los resultados del Ejemplo 1. Disminuir  $h$  y, por tanto, aumentar  $n$  es costoso en términos de recursos computacionales, por lo que es conveniente buscar formas de reducir el error sin disminuir el tamaño del paso. Esto es similar a desarrollar técnicas mejores que la Regla del Trapecio para evaluar numéricamente integrales definidas.

El **método de Euler mejorado** es un paso en esta dirección. La exactitud del método de Euler está obstaculizada por el hecho de que la pendiente de cada segmento de la línea poligonal de aproximación está determinada por el valor de  $f(x, y)$  en un extremo del segmento. Como  $f$  varía a lo largo del segmento, podemos mejorar utilizando, por ejemplo, el valor medio de  $f(x, y)$  en los dos extremos del segmento, es decir, calculando  $y_{n+1}$  a partir de la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}$$

Desgraciadamente,  $y_{n+1}$  aparece en ambos miembros de la ecuación, por lo que no podremos resolverla despejando  $y_{n+1}$ . Podemos sortear esta dificultad sustituyendo  $y_{n+1}$  en el miembro derecho por su aproximación de Euler  $y_n + hf(x_n, y_n)$ . La fórmula resultante es la base del método de Euler mejorado.

### Fórmulas de integración del método de Euler mejorado

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}$$

**Ejemplo 2** Utilice el método de Euler mejorado con  $h = 0.2$  para calcular valores aproximados de la solución del problema de valor inicial del Ejemplo 1 en  $[0, 1]$ . Compare los errores con los obtenidos por el método de Euler.

**Solución** La Tabla 3 resume los cálculos de cinco pasos del método de Euler mejorado para  $f(x, y) = x - y$ ,  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 1$ .

**Tabla 3.** Aproximaciones del método de Euler mejorado  $h = 0.2$

$n$	$x_n$	$y_n$	$u_{n+1}$	$y_{n+1}$	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	0.800 000	0.840 000	0.000 000
1	0.2	0.840 000	0.712 000	0.744 800	-0.002 538
2	0.4	0.744 800	0.675 840	0.702 736	-0.004 160
3	0.6	0.702 736	0.682 189	0.704 244	-0.005 113
4	0.8	0.704 244	0.723 395	0.741 480	-0.005 586
5	1.0	0.741 480	0.793 184		-0.005 721

Obsérvese que los errores son considerablemente menores que la décima parte de los obtenidos en el Ejemplo 1(a). Por supuesto, se necesitan más cálculos en cada paso, pero el número de evaluaciones de  $f(x, y)$  requeridas es solamente el doble de las requeridas en el Ejemplo 1(a). Como en el caso de la integración numérica, si  $f$  es complicada, son estas evaluaciones de la función las que constituyen la mayor parte del «coste» computacional de las soluciones numéricas.

**Observación** Se puede demostrar para funciones  $f$  bien comportadas que el error en cada paso del método de Euler mejorado está acotado por un múltiplo de  $h^3$ , en vez de  $h^2$  como en el caso del método de Euler (sin mejora). Por tanto, el error acumulativo en  $x$  se puede acotar por una constante multiplicada por  $|x - x_0|h^2$ . Si el Ejemplo 2 se repite con 10 pasos de tamaño  $h = 0.1$ , el error en  $n = 10$  (es decir, en  $x = 1$ ) es  $-0.001\ 323$ , que es aproximadamente la cuarta parte del tamaño del error en  $x = 1$  con  $h = 0.2$ .

**El método de Runge-Kutta de cuarto orden** consigue una mejora adicional respecto al método de Euler mejorado, pero a expensas de requerir cálculos más complicados en cada paso. Requiere cuatro evaluaciones de  $f(x, y)$  en cada paso, pero el error en cada paso es menor que una constante multiplicada por  $h^5$ , por lo que el error acumulativo decrece como  $h^4$  cuando  $h$  decrece. Como el método de Euler mejorado, este método requiere calcular una cierta clase de pendiente promedio para cada segmento de la aproximación poligonal a la solución del problema de valor inicial. Presentaremos a continuación las fórmulas apropiadas pero no las obtendremos.

**Fórmulas de integración para el método de Runge-Kutta**

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \\
 p_n &= f(x_n, y_n) \\
 q_n &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} p_n\right) \\
 r_n &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} q_n\right) \\
 s_n &= f(x_n + h, y_n + h r_n) \\
 y_{n+1} &= y_n + h \frac{p_n + 2q_n + 2r_n + s_n}{6}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3** Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.2$  para calcular valores aproximados de la solución del problema de valor inicial del Ejemplo 1 en  $[0, 1]$ . Compare los errores con los obtenidos con los métodos de Euler y de Euler mejorado.

**Solución** La Tabla 4 resume el cálculo de cinco pasos del método de Runge-Kutta para  $f(x, y) = x - y$ ,  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 1$ , de acuerdo con las fórmulas anteriores. La citada tabla no muestra los valores de las cantidades intermedias  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $r_n$  y  $s_n$ , pero se han incluido columnas para esas cantidades en la hoja de cálculo con la que se han realizado los cálculos.

**Tabla 4.** Aproximaciones de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.2$

$n$	$x_n$	$y_n$	$e_n = \phi(x_n) - y_n$
0	0.0	1.000 000	0.000 000 0
1	0.2	0.837 467	-0.000 005 2
2	0.4	0.740 649	-0.000 008 5
3	0.6	0.697 634	-0.000 010 4
4	0.8	0.698 669	-0.000 011 3
5	1.0	0.735 770	-0.000 011 6

Los errores aquí son aproximadamente  $1/500$  del tamaño de los errores obtenidos con el método de Euler mejorado, y aproximadamente  $1/7\,000$  del tamaño de los errores obtenidos con el método de Euler. Esta gran mejora se obtiene a expensas de doblar el número de evaluaciones de la función requeridas con respecto al método de Euler mejorado y cuadruplicar el número requerido en el método de Euler. Si utilizamos 10 pasos de tamaño  $h = 0.1$  en el método de Runge-Kutta, el error en  $x = 1$  se reduce a  $-6.664\,82 \times 10^{-7}$ , que es menor que  $1/16$  de su valor cuando  $h = 0.2$ .

Nuestro ejemplo final muestra lo que sucede con las aproximaciones numéricas a una solución que no está acotada.

**Ejemplo 4** Obtenga aproximaciones en  $x = 0.4$ ,  $x = 0.8$  y  $x = 1.0$  a las soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

utilizando todos los métodos descritos anteriormente, y usando tamaños de paso  $h = 0.2$ ,  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$  para cada método. ¿Qué sugieren los resultados sobre los valores de la solución en estos puntos? Compare los resultados con la solución real  $y = 1/(1 - x)$ .

**Solución** Las diversas aproximaciones se calculan utilizando las diferentes fórmulas descritas anteriormente  $f(x, y) = y^2$ ,  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 1$ . Los resultados se presentan en la Tabla 5.

**Tabla 5.** Comparación de métodos y tamaños de paso para  $y' = y^2$ ,  $y(0) = 1$

	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
<b>Euler</b>			
$x = 0.4$	1.488 000	1.557 797	1.605 224
$x = 0.8$	2.676 449	3.239 652	3.793 197
$x = 1.0$	4.109 124	6.128 898	9.552 668
<b>Euler mejorado</b>			
$x = 0.4$	1.640 092	1.658 746	1.664 515
$x = 0.8$	4.190 396	4.677 726	4.897 519
$x = 1.0$	11.878 846	22.290 765	43.114 668
<b>Runge-Kutta</b>			
$x = 0.4$	1.666 473	1.666 653	1.666 666
$x = 0.8$	4.965 008	4.996 663	4.999 751
$x = 1.0$	41.016 258	81.996 399	163.983 395

Los resultados de Euler muestran poca información útil. Los resultados del método de Euler mejorado sugieren que la solución existe en  $x = 0.4$  y  $x = 0.8$ , pero probablemente no en  $x = 1$ . El método de Runge-Kutta confirma esto y sugiere que  $y(0.4) = 5/3$  e  $y(0.8) = 5$ , que son los valores correctos proporcionados por la solución real  $y = 1/(1 - x)$ . También sugiere muy fuertemente que la solución «estalla» en, o cerca de,  $x = 1$ .

### Ejercicios 17.3

Un computador es prácticamente esencial para realizar la mayor parte de estos ejercicios. Los cálculos se realizan fácilmente con un programa de hoja de cálculo en el que las fórmulas para calcular las diversas cantidades que aparecen se pueden repetir a lo largo de las columnas para automatizar el proceso de iteración.

1. Utilice el método de Euler con tamaños de paso (a)  $h = 0.2$ , (b)  $h = 0.1$  y (c)  $h = 0.05$  para aproximar  $y(2)$  sabiendo que  $y' = x + y$  e  $y(1) = 0$ . 
2. Repita el Ejercicio 1 utilizando el método de Euler mejorado. 

3. Repita el Ejercicio 1 utilizando el método de Runge-Kutta. 
4. Utilice el método de Euler con tamaños de paso (a)  $h = 0.2$  y (b)  $h = 0.1$  para aproximar  $y(2)$  sabiendo que  $y' = xe^{-y}$  e  $y(0) = 0$ . 
5. Repita el Ejercicio 4 utilizando el método de Euler mejorado. 
6. Repita el Ejercicio 4 utilizando el método de Runge-Kutta. 

- 7. Utilice el método de Euler con (a)  $h = 0.2$ , (b)  $h = 0.1$  y (c)  $h = 0.05$  para aproximar  $y(1)$  sabiendo que  $y' = \cos y$  e  $y(0) = 0$ . 
- 8. Repita el Ejercicio 7 utilizando el método de Euler mejorado. 
- 9. Repita el Ejercicio 7 utilizando el método de Runge-Kutta. 
- 10. Utilice el método de Euler con (a)  $h = 0.2$ , (b)  $h = 0.1$  y (c)  $h = 0.05$  para aproximar  $y(1)$  sabiendo que  $y' = \cos(x^2)$  e  $y(0) = 0$ .
- 11. Repita el Ejercicio 10 utilizando el método de Euler mejorado. 
- 12. Repita el Ejercicio 10 utilizando el método de Runge-Kutta. 

Resuelva las ecuaciones integrales de los Ejercicios 13 y 14 replanteándolas como problemas de valor inicial.

- 13.  $y(x) = 2 + \int_1^x (y(t))^2 dt$ . *Sugerencia:* Calcule  $\frac{dy}{dx}$  e  $y(1)$ .
- 14.  $u(x) = 1 + 3 \int_2^x t^2 u(t) dt$ . *Sugerencia:* Calcule  $\frac{du}{dx}$  y  $u(2)$ .
- 15. Los métodos de esta sección se pueden utilizar para aproximar numéricamente integrales definidas. Por ejemplo,

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

está dada por  $I = y(b)$ , con

$$y' = f(x) \quad \text{e} \quad y(a) = 0$$

Demuestre que un paso del método de Runge-Kutta con  $h = b - a$  da el mismo resultado para  $I$  que la Regla de Simpson (Sección 6.7) con dos subintervalos de longitud  $h/2$ .

- 16. Si  $\phi(0) = A \geq 0$  y  $\phi'(x) \geq k\phi(x)$  en  $[0, X]$ , con  $k > 0$  y  $X > 0$  constantes, demuestre que  $\phi(x) \geq Ae^{kx}$  en  $[0, X]$ . *Sugerencia:* Calcule  $(d/dx)(\phi(x)/e^{kx})$ .

\*17. Considere los tres problemas de valor inicial

(A)  $u' = u^2 \quad u(0) = 1$

(B)  $y' = x + y^2 \quad y(0) = 1$

(C)  $v' = 1 + v^2 \quad v(0) = 1$

- (a) Demuestre que la solución de (B) permanece entre las soluciones de (A) y (C) en cualquier intervalo  $[0, X]$  donde existan las soluciones de los tres problemas. *Sugerencia:* Debemos tener  $u(x) \geq 1$ ,  $y(x) \geq 1$  y  $v(x) \geq 1$  en  $[0, X]$  (¿por qué?). Aplique el resultado del Ejercicio 16 a  $\phi = y - u$  y a  $\phi = v - y$ .
- (b) Calcule soluciones explícitas para los problemas (A) y (C). ¿Qué se puede concluir sobre la solución del problema (B)?
- (c) Utilice el método de Runge-Kutta con  $h = 0.05$ ,  $h = 0.02$  y  $h = 0.01$  para aproximar la solución de (B) en  $[0, 1]$ . ¿Qué se puede concluir ahora? 

## 17.4 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

La ecuación diferencial ordinaria general de segundo orden es de la forma

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

para alguna función  $F$  de cuatro variables. Cuando esta ecuación se puede resolver explícitamente expresando  $y$  en función de  $x$ , la solución generalmente requiere dos integraciones y, por tanto, dos constantes arbitrarias. La solución única resulta de imponer los valores de la solución  $y$ , y de su derivada  $y' = dy/dx$ , en un punto particular. Tal imposición constituye un **problema de valor inicial** para la ecuación de segundo orden.

### Ecuaciones reducibles a primer orden

Una ecuación de segundo orden de la forma

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

en la que no aparece explícitamente la función desconocida  $y$  (excepto a través de sus derivadas) se puede reducir a una ecuación de primer orden mediante un cambio de la variable dependiente; si  $v = dy/dx$ , entonces la ecuación se puede expresar

$$F\left(\frac{dv}{dx}, v, x\right) = 0$$

Esta ecuación de primer orden en  $v$  puede ser susceptible de aplicar las técnicas descritas en las secciones anteriores. Si se puede tener una solución explícita e integrada  $v = v(x)$ , entonces la función

$$y = \int v(x) dx$$

es una solución explícita de la ecuación dada.

**Ejemplo 1** Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

**Solución** Si hacemos  $v = dy/dx$ , la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dv}{dx} = xv^2$$

que es una ecuación separable de primer orden. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v^2} &= x dx \\ -\frac{1}{v} &= \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{2} \\ v &= -\frac{2}{x^2 + C_1} \end{aligned}$$

La condición inicial  $y'(0) = -2$  indica que  $v(0) = -2$  y, por tanto,  $C_1 = 1$ . Entonces,

$$y = -2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -2 \tan^{-1} x + C_2$$

La condición inicial  $y(0) = 1$  implica que  $C_2 = 1$ , por lo que la solución del problema de valor inicial dado es  $y = 1 - 2 \tan^{-1} x$ .

Una ecuación de segundo orden de la forma

$$F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

en la que no intervenga explícitamente la variable independiente  $x$  se puede reducir a una ecuación de primer orden mediante un cambio de las variables dependiente e independiente. Sea de nuevo  $v = dy/dx$ , pero consideremos  $v$  como función de  $y$  en vez de  $x$ ;  $v = v(y)$ . Entonces,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dy}$$

por la Regla de la Cadena. Por consiguiente, la ecuación diferencial dada se convierte en

$$F\left(v \frac{dv}{dy}, v, y\right) = 0$$

que es una ecuación de primer orden en  $v$  como función de  $y$ . Si esta ecuación se puede resolver obteniendo  $v = v(y)$ , queda todavía el problema de resolver la ecuación separable  $(dy/dx) = v(y)$  expresando  $y$  en función de  $x$ .

**Ejemplo 2** Resuelva la ecuación  $y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

**Solución** El cambio de variable  $dy/dx = v(y)$  da como resultado la ecuación

$$yv \frac{dv}{dy} = v^2$$

que es separable,  $dv/v = dy/y$ , y su solución es  $v = C_1 y$ . La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

es de nuevo separable y da lugar a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= C_1 dx \\ \ln|y| &= C_1 x + C_2 \\ y &= \pm e^{C_1 x + C_2} = C_3 e^{C_1 x} \end{aligned}$$

## Ecuaciones lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen más frecuentemente en aplicaciones son ecuaciones lineales de segundo orden. Una ecuación lineal de segundo orden general adopta la forma

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Como se indicó en la Sección 17.1, si  $f(x) = 0$  idénticamente, entonces se dice que la ecuación es **homogénea**. Si los coeficientes  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$  y  $a_0(x)$  son continuos en un intervalo y  $a_2(x) \neq 0$  en dicho intervalo, entonces la ecuación homogénea

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

tiene una solución general de la forma

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

siendo  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  dos soluciones **independientes**, es decir, dos soluciones con la propiedad de que  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$  para todo  $x$  en el intervalo sólo si  $C_1 = C_2 = 0$  (no demostraremos esto aquí).

Siempre que una solución,  $y_1(x)$ , de una ecuación de segundo orden lineal homogénea sea conocida, se puede obtener otra solución independiente (y, por tanto, la solución general) sustituyendo  $y = v(x)y_1(x)$  en la ecuación diferencial. Esto da lugar a una ecuación separable lineal y de primer orden para  $v'$ .

**Ejemplo 3** Demuestre que  $y_1 = e^{-2x}$  es una solución de  $y' + 4y' + 4y = 0$ , y calcule la solución general de esta ecuación.

**Solución** Como  $y_1' = -2e^{-2x}$  e  $y_1'' = 4e^{-2x}$ , tenemos

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = e^{-2x}(4 - 8 + 4) = 0$$

por lo que  $y_1$  es de hecho una solución de la ecuación diferencial dada. Para obtener la solución general, probamos  $y = y_1v = e^{-2x}v(x)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} y &= -2e^{-2x}v + e^{-2x}v' \\ y' &= 4e^{-2x}v - 4e^{-2x}v' + e^{-2x}v'' \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED dada se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + 4y' + 4y \\ &= e^{-2x}(4v - 4v' + v'' - 8v + 4v' + 4v) = e^{-2x}v'' \end{aligned}$$

Por tanto,  $y = y_1v$  es una solución suponiendo que  $v''(x) = 0$ . Esta ecuación en  $v$  tiene la solución general  $v = C_1 + C_2x$ , por lo que la ecuación dada tiene como solución general

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde  $y_2 = xe^{-2x}$  es una segunda solución de la ED, independiente de  $y_1$ .

Por el Teorema 2 de la Sección 17.1, la solución general de la ecuación lineal de segundo orden no homogénea (con  $f(x) \neq 0$ ) es de la forma

$$y = y_p(x) + y_h(x)$$

donde  $y_p(x)$  es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea, e  $y_h(x)$  es la solución general (tal como se describe anteriormente) de la correspondiente ecuación homogénea. En la Sección 17.6 presentaremos la solución de las ecuaciones lineales no homogéneas. Sin embargo, primero, en la Sección 17.5 nos concentraremos en algunas clases especiales de ecuaciones lineales homogéneas.

## Ejercicios 17.4

- Demuestre que  $y = e^x$  es una solución de  $y'' - 3y' + 2y = 0$  y calcule la solución general de esta ED.
- Demuestre que  $y = e^{-2x}$  es una solución de  $y'' - y' - 6y = 0$  y calcule la solución general de esta ED.
- Demuestre que  $y = x$  es una solución de  $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$  en el intervalo  $(0, \infty)$  y calcule la solución general en este intervalo.
- Demuestre que  $y = x^2$  es una solución de  $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$  en el intervalo  $(0, \infty)$  y calcule la solución general en este intervalo.
- Demuestre que  $y = x$  es una solución de la ecuación diferencial  $x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = 0$  y calcule la solución general de esta ecuación.
- Demuestre que  $y = x^{-1/2} \cos x$  es una solución de la ecuación de Bessel con  $\nu = 1/2$ :

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

Calcule la solución general de esta ecuación.

## Sistemas de primer orden

- Un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en  $n$  funciones desconocidas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  se expresa como

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned}$$

Este sistema se denomina **sistema lineal de primer orden**  $n \times n$  y se puede expresar en forma vector-matriz como  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$ , siendo

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Demuestre que la ecuación lineal de segundo orden  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$  se puede transformar en un sistema de primer orden  $2 \times 2$  con  $y_1 = y$  e  $y_2 = y'$ , con

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

8. Generalice el Ejercicio 7 para transformar una ecuación lineal de orden  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$$

en un sistema de primer orden  $n \times n$ .

9. Si  $\mathcal{A}$  es una matriz constante  $n \times n$  y si existe un escalar  $\lambda$  y un vector constante distinto de cero  $\mathbf{v}$  para el que  $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , demuestre que  $\mathbf{y} = C_1 e^{\lambda x} \mathbf{v}$  es una solución del sistema homogéneo  $\mathbf{y}' = \mathcal{A}\mathbf{y}$ .

10. Demuestre que el determinante  $\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$  es cero para dos valores distintos de  $\lambda$ . Para cada uno de estos valores obtenga un vector  $\mathbf{v}$  distinto de cero que cumpla la condición  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ . A partir de aquí resuelva el sistema

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 3y_2$$

## 17.5 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (*)$$

siendo  $a, b$  y  $c$  constantes y  $a \neq 0$  se denomina **ecuación lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes**.

**En la Sección 3.7 se puede encontrar un extenso estudio de las técnicas para resolver estas ecuaciones, junto con ejemplos, ejercicios y aplicaciones al estudio del movimiento armónico simple y amortiguado; no repetiremos la presentación aquí. Si no la ha estudiado, por favor hágalo ahora.**

Sin embargo, ampliaremos el tratamiento para considerar ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden superior.

### Ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes

Como en la mayor parte de las aplicaciones de la ecuación (\*) la variable dependiente representa al tiempo, consideraremos, como hicimos en la Sección 3.7,  $y$  como una función de  $t$  en vez de  $x$ , de forma que el símbolo (') indicará la derivada  $d/dt$ . El resultado básico de la Sección 3.7 era que la función  $y = e^{rt}$  era una solución de (\*) suponiendo que  $r$  cumpliera la **ecuación auxiliar**

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (**)$$

La ecuación auxiliar es de segundo grado y puede tener:

- Dos raíces reales distintas,  $r_1$  y  $r_2$  (si  $b^2 > 4ac$ ), en cuyo caso (\*) tiene como solución general  $y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ .
- Una única raíz real repetida  $r$  (si  $b^2 = 4ac$ ), en cuyo caso (\*) tiene como solución general  $y = (C_1 + C_2 t) e^{rt}$ .
- Una pareja de raíces complejas conjugadas,  $r = k \pm i\omega$ , con  $k$  y  $\omega$  reales (si  $b^2 < 4ac$ ), en cuyo caso (\*) tiene como solución general  $y = e^{kt} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$ .

La situación es análoga para el caso de ecuaciones lineales y homogéneas con coeficientes constantes. Describiremos el procedimiento sin proporcionar las demostraciones. Si

$$P_n(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

es un polinomio de grado  $n$  con coeficientes constantes  $a_j$ , ( $0 \leq j \leq n$ ), y  $a_n \neq 0$ , entonces la ED

$$P_n(D)y = 0 \quad (\dagger)$$

donde  $D = d/dt$  se puede resolver sustituyendo  $y = e^{rt}$  y obteniendo la *ecuación auxiliar*  $P_n(r) = 0$ . Esta ecuación polinómica tiene  $n$  raíces (véase el Apéndice II), algunas de las cuales pueden ser iguales y algunas de las cuales, o bien todas, pueden ser complejas. Si los coeficientes del polinomio  $P_n(r)$  son todos reales, entonces las raíces complejas deben aparecer en parejas complejas conjugadas  $k \pm i\omega$ , siendo  $k$  y  $\omega$  reales.

La solución general de  $(\dagger)$  se puede expresar como una *combinación lineal* de  $n$  soluciones particulares independientes

$$y = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \dots + C_ny_n(t)$$

siendo  $C_j$  constantes arbitrarias. Las soluciones independientes  $y_1, y_2, \dots, y_n$  se construyen como sigue:

1. Si  $r_1$  es una raíz real de orden  $k$  de la ecuación auxiliar (es decir, si  $(r - r_1)^k$  es un factor de  $P_n(r)$ ), entonces

$$e^{r_1t}, \quad te^{r_1t}, \quad t^2e^{r_1t}, \quad \dots, \quad t^{k-1}e^{r_1t}$$

son  $k$  soluciones independientes de  $(\dagger)$ .

2. Si  $r = a + ib$  y  $r = a - ib$  (siendo  $a$  y  $b$  reales) constituyen una pareja de raíces complejas conjugadas de orden  $k$  de la ecuación auxiliar (es decir, si  $[(r - a)^2 + b^2]^k$  es un factor de  $P_n(r)$ ), entonces

$$\begin{aligned} e^{at} \cos bt, \quad te^{at} \cos bt, \quad \dots, \quad t^{k-1}e^{at} \cos bt \\ e^{at} \sin bt, \quad te^{at} \sin bt, \quad \dots, \quad t^{k-1}e^{at} \sin bt \end{aligned}$$

son  $2k$  soluciones independientes de  $(\dagger)$ .

**Ejemplo 1** Resuelva (a)  $y^{(4)} - 16y = 0$  y (b)  $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$ .

**Solución** La ecuación auxiliar de (a) es  $r^4 - 16 = 0$ , que se puede factorizar como  $(r - 2)(r + 2)(r^2 + 4) = 0$ , y, por tanto, sus raíces son  $r = 2, -2, 2i$  y  $-2i$ . Por tanto, la ED (a) tiene como solución general

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3 \cos(2t) + C_4 \sin(2t)$$

para constantes arbitrarias  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ .

La ecuación auxiliar de (b) es  $r^5 - 2r^4 + r^3 = 0$ , que se puede factorizar como  $r^3(r - 1)^2 = 0$ , y, por tanto, sus raíces son  $r = 0, 0, 0, 1, 1$ . La solución general de la ED (b) es

$$y = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^t + C_5te^t$$

siendo  $C_1, \dots, C_5$  constantes arbitrarias.

**Ejemplo 2** Indique el orden y la solución general de la ED homogénea lineal con coeficientes constantes cuya ecuación auxiliar es

$$(r + 4)^3(r^2 + 4r + 13)^2 = 0$$

**Solución** La ecuación auxiliar es de grado 7, por lo que la ED es de séptimo orden. Puesto que  $r^2 + 4r + 13 = (r + 2)^2 + 9$ , cuyas raíces son  $-2 \pm 3i$ , la ED debe tener la solución general

$$\begin{aligned} y = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} + C_3t^2e^{-4t} \\ + C_4e^{-2t} \cos(3t) + C_5e^{-2t} \sin(3t) + C_6te^{-2t} \cos(3t) + C_7te^{-2t} \sin(3t) \end{aligned}$$

## Ecuaciones de Euler (equidimensionales)

Una ecuación lineal homogénea de la forma

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

se denomina **ecuación de Euler** o **ecuación equidimensional**, siendo este último término apropiado debido a que todos los términos de la ecuación tienen la misma dimensión (es decir, se miden en las mismas unidades), suponiendo que las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  tienen la misma dimensión. Los coeficientes de una ecuación de Euler *no son constantes*, pero existe una técnica para resolver estas ecuaciones que es similar a la utilizada para resolver ecuaciones con coeficientes constantes, por lo que incluiremos una breve presentación de estas ecuaciones en esta sección. Como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, supondremos que las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales y que  $a \neq 0$ . Incluso así, el coeficiente de orden superior,  $ax^2$ , se anula en  $x = 0$  (que se denomina **punto singular** de la ecuación), y esto puede hacer que las soluciones no estén definidas en  $x = 0$ . Resolveremos la ecuación en el intervalo  $x > 0$ ; se puede aplicar la misma solución para  $x < 0$ , suponiendo que se sustituye  $x$  por  $|x|$  en dicha solución.

Busquemos soluciones en  $x > 0$  dadas por potencias de  $x$ , si

$$y = x^r, \quad \frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$$

entonces la ecuación de Euler se convierte en

$$(ar(r-1) + br + c)x^r = 0$$

Esto se cumple para todo  $x > 0$  siempre que  $r$  cumpla la **ecuación auxiliar**

$$ar(r-1) + br + c = 0 \quad \text{o, en otros términos,} \quad ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

Como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, existen tres posibilidades.

**CASO I** Si  $(b-a)^2 \geq 4ac$ , entonces la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales:

$$r_1 = \frac{a-b + \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{a-b - \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso, la ecuación de Euler tiene la solución general

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2}, \quad (x > 0)$$

La solución general normalmente se expresa en la forma

$$y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}$$

que es válida en cualquier intervalo que no contenga a  $x = 0$ , y puede incluso ser válida en intervalos que contengan al origen si, por ejemplo,  $r_1$  y  $r_2$  son enteros no negativos.

**Ejemplo 3** Resuelva el problema de valor inicial

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 0$$

**Solución** La ecuación auxiliar es  $2r(r-1) - r - 2 = 0$ , es decir,  $2r^2 - 3r - 2 = 0$  o  $(r-2)(2r+1) = 0$ , y tiene raíces  $r = 2$  y  $r = -(1/2)$ . Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial (válida para  $x > 0$ ) es

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-1/2}$$

Las condiciones iniciales implican que

$$5 = y(1) = C_1 + C_2 \quad \text{y} \quad 0 = y'(1) = 2C_1 - \frac{1}{2} C_2$$

Por tanto,  $C_1 = 1$  y  $C_2 = 4$ , y la solución del problema de valor inicial es

$$y = x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$$

**CASO II** Si  $(b - a)^2 = 4ac$ , entonces la ecuación auxiliar tiene una raíz doble, esto es, la raíz  $r = (a - b)/2a$ . Se deja como ejercicio para el lector verificar que en este caso la transformación  $y = x^r v(x)$  lleva a la solución general

$$y = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x, \quad (x > 0)$$

o, de forma más general,

$$y = C_1 |x|^r + C_2 |x|^r \ln |x|, \quad (x \neq 0)$$

**CASO III** Si  $(b - a)^2 < 4ac$ , entonces la ecuación auxiliar tiene raíces complejas conjugadas:

$$r = \alpha \pm i\beta, \quad \text{siendo} \quad \alpha = \frac{a - b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - (b - a)^2}}{2a}$$

Las correspondientes potencias  $x^r$  se pueden expresar en forma real de manera similar a la utilizada en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes; tenemos

$$\begin{aligned} x^{\alpha \pm i\beta} &= e^{(\alpha \pm i\beta) \ln x} = e^{\alpha \ln x} [\cos(\beta \ln x) \pm i \operatorname{sen}(\beta \ln x)] \\ &= x^\alpha \cos(\beta \ln x) \pm i x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x) \end{aligned}$$

De acuerdo con esto, la ecuación de Euler tiene la solución general

$$y = C_1 |x|^\alpha \cos(\beta \ln |x|) + C_2 |x|^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln |x|)$$

**Ejemplo 4** Resuelva la ED  $x^2 y'' - 3xy' + 13y = 0$ .

**Solución** La ED tiene como ecuación auxiliar  $r(r - 1) - 3r + 13 = 0$ , es decir,  $r^2 - 4r + 13 = 0$ , cuyas raíces son  $r = 2 \pm 3i$ . Por tanto, la ED tiene la solución general

$$y = C_1 x^2 \cos(3 \ln |x|) + C_2 x^2 \operatorname{sen}(3 \ln |x|)$$

## Ejercicios 17.5

Los ejercicios relacionados con la solución de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes y homogéneas se pueden encontrar al final de la Sección 3.7.

Calcule soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de los Ejercicios 1-4.

1.  $y''' - 4y'' + 3y' = 0$

2.  $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$       3.  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

4.  $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$

5. Demuestre que  $y = e^{2t}$  es una solución de

$$y''' - 2y'' - 4y = 0$$

donde ' indica  $d/dt$ , y obtenga la solución general de esta ED.

6. Exprese la solución general de la ED lineal con coeficientes constantes cuya ecuación auxiliar es  $(r^2 - r - 2)^2 (r^2 - 4)^2 = 0$ .

Calcule soluciones generales a las ecuaciones de Euler de los Ejercicios 7-12.

7.  $x^2 y'' - xy' + y = 0$

8.  $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$

9.  $x^2 y'' + xy' - y = 0$

10.  $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$

11.  $x^2 y'' + xy' = 0$

12.  $x^2 y'' + xy' + y = 0$

\*13. Resuelva la ED  $x^3 y''' + xy' - y = 0$  en el intervalo  $x > 0$ .

## 17.6 Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideraremos ahora el problema de resolver la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (*)$$

Supondremos que se conocen dos soluciones independientes  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  de la ecuación homogénea correspondiente

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

La función  $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ , que es la solución general de la ecuación homogénea, se denomina **función complementaria** de la ecuación no homogénea. El Teorema 2 de la Sección 17.1 sugiere la solución general de la ecuación homogénea de la forma

$$y = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde  $y_p(x)$  es cualquier **solución particular** de la ecuación no homogénea. Lo único que necesitamos hacer es obtener *una solución* de la ecuación homogénea, y podremos escribir la solución general.

Existen dos métodos habituales para calcular una solución particular  $y_p$  de la ecuación no homogénea (\*):

1. El método de los coeficientes indeterminados.
2. El método de la variación de parámetros.

El primero de ellos a duras penas se puede llamar un *método*; simplemente realiza una hipótesis sobre la forma de la solución como una suma de términos con coeficientes desconocidos y la sustituye en la ecuación para determinar los coeficientes. Este método funciona bien para ED simples, especialmente aquellas con coeficientes constantes. La naturaleza de la *hipótesis* depende del término no homogéneo  $f(x)$ , pero puede verse también afectada por la solución de la correspondiente ecuación homogénea. Unos cuantos ejemplos ilustrarán las ideas que intervienen.

**Ejemplo 1** Calcule la solución general de  $y'' + y' - 2y = 4x$ .

**Solución** Como el término no homogéneo  $f(x) = 4x$  es un polinomio de primer grado, «planteamos» que se puede encontrar una solución particular que sea también un polinomio. Por tanto, probamos

$$y = Ax + B, \quad y' = A, \quad y'' = 0$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED dada obtenemos

$$\begin{aligned} 0 + A - 2(Ax + B) &= 4x \quad \text{o} \\ -(2A + 4)x + (A - 2B) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se cumplirá para todo  $x$  siempre que  $2A + 4 = 0$  y  $A - 2B = 0$ . Por tanto, se requiere que  $A = -2$  y  $B = -1$ ; una solución particular de la ED dada es

$$y_p(x) = -2x - 1$$

Puesto que la correspondiente ecuación homogénea  $y'' + y' - 2y = 0$  tiene como función auxiliar  $r^2 + r - 2 = 0$  con raíces  $r = 1$  y  $r = -2$ , la ED dada tiene la solución general

$$y = y_p(x) + C_1e^x + C_2e^{-2x} = -2x - 1 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

**Ejemplo 2** Calcule soluciones generales de las ecuaciones (donde ' indica  $d/dt$ )

- (a)  $y' + 4y = \operatorname{sen} t$ ,  
 (b)  $y' + 4y = \operatorname{sen}(2t)$ ,  
 (c)  $y' + 4y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2t)$ .

**Solución**

- (a) Busquemos una solución particular de la forma

$$y = A \operatorname{sen} t + B \cos t \quad \text{de forma que}$$

$$y' = A \cos t - B \operatorname{sen} t$$

$$y' = -A \operatorname{sen} t - B \cos t$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED  $y' + 4y = \operatorname{sen} t$ , obtenemos

$$-A \operatorname{sen} t - B \cos t + 4A \operatorname{sen} t + 4B \cos t = \operatorname{sen} t$$

que se cumple para todo  $x$  si  $3A = 1$  y  $3B = 0$ . Por tanto,  $A = 1/3$  y  $B = 0$ . Como la ecuación homogénea  $y' + 4y = 0$  tiene la solución general  $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$ , la ecuación no homogénea dada tiene la solución general

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

- (b) Motivados por nuestro éxito en el apartado (a), podríamos estar tentados de intentar una solución particular de la forma  $y = A \operatorname{sen}(2t) + B \cos(2t)$ , pero esto no funciona, porque esta función es una solución de la ecuación homogénea, por lo que obtendríamos  $y' + 4y = 0$  para todo valor de  $A$  y  $B$ . En este caso es útil probar

$$y = At \operatorname{sen}(2t) + Bt \cos(2t)$$

Tenemos

$$y' = A \operatorname{sen}(2t) + 2At \cos(2t) + B \cos(2t) - 2Bt \operatorname{sen}(2t)$$

$$= (A - 2Bt) \operatorname{sen}(2t) + (B + 2At) \cos(2t)$$

$$y' = -2B \operatorname{sen}(2t) + 2(A - 2Bt) \cos(2t) + 2A \cos(2t)$$

$$- 2(B + 2At) \operatorname{sen}(2t)$$

$$= -4(B + At) \operatorname{sen}(2t) + 4(A - Bt) \cos(2t)$$

Sustituyendo en  $y' + 4y = \operatorname{sen}(2t)$  llegamos a

$$\begin{aligned} & -4(B + At) \operatorname{sen}(2t) + 4(A - Bt) \cos(2t) + 4At \operatorname{sen}(2t) + 4Bt \cos(2t) \\ & = \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

Obsérvese que los términos en los que aparece  $t \operatorname{sen}(2t)$  y  $t \cos(2t)$  se cancelan, y nos queda

$$-4B \operatorname{sen}(2t) + 4A \cos(2t) = \operatorname{sen}(2t)$$

que se cumple para todo  $x$  si  $A = 0$  y  $B = -1/4$ . Por tanto, la solución general del apartado (b) es

$$y = -\frac{1}{4} t \cos(2t) + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

- (c) Como la ecuación homogénea es la misma en los apartados (a), (b) y (c), y el término no homogéneo de la ecuación (c) es la suma de los términos no homogéneos de las ecuaciones (a) y (b), la suma de soluciones particulares de (a) y (b) es una solución particular de (c) (esto es porque la ecuación es *lineal*). Por consiguiente, la solución general de la ecuación (c) es

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} t \cos(2t) + C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

Resumimos a continuación las formas apropiadas de probar soluciones particulares de ecuaciones con coeficientes constantes:

**Soluciones de prueba para ecuaciones con coeficientes constantes**

Sean  $A_n(x)$ ,  $B_n(x)$  y  $P_n(x)$  los polinomios de grado  $n$

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$B_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n$$

Para obtener una solución particular  $y_p(x)$  de la ED de segundo orden lineal con coeficientes constantes y no homogénea

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0y = f(x)$$

se utilizan las siguientes formas:

Si  $f(x) = P_n(x)$ , intente  $y_p = x^m A_n(x)$ .

Si  $f(x) = P_n(x)e^{rx}$ , intente  $y_p = x^m A_n(x)e^{rx}$ .

Si  $f(x) = P_n(x)e^{rx} \cos(kx)$ , intente  $y_p = x^m e^{rx} [A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx)]$ .

Si  $f(x) = P_n(x)e^{rx} \sin(kx)$ , intente  $y_p = x^m e^{rx} [A_n(x) \cos(kx) + B_n(x) \sin(kx)]$ ,

siendo  $m$  el mínimo de los enteros 0, 1 y 2, que asegura que ningún término de  $y_p$  es una solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0y = 0$$

**Resonancia**

Para  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ , la solución  $y_\lambda(t)$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + y = \text{sen}(\lambda t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

se puede determinar buscando en primer lugar una solución particular de la ED con la forma  $y = A \text{sen}(\lambda t)$ , y después sumando la función complementaria  $y = B \cos t + C \text{sen} t$ . Los cálculos producen  $A = 1/(1 - \lambda^2)$ ,  $B = 0$ ,  $C = (1 - \lambda - \lambda^2)/(1 - \lambda^2)$ , por lo que

$$y_\lambda(t) = \frac{\text{sen}(\lambda t) + (1 - \lambda - \lambda^2) \text{sen} t}{1 - \lambda^2}$$

Para  $\lambda = 1$  el término no homogéneo de la ED es una solución de la ecuación homogénea  $y' + y = 0$ , por lo que debemos probar una solución particular de la forma  $y = At \cos t + Bt \text{sen} t$ . En este caso, la solución del problema de valor inicial es

$$y_1(t) = \frac{3 \text{sen} t - t \cos t}{2}$$

Esta solución también se puede obtener calculando  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} y_\lambda(t)$  mediante la Regla de l'Hôpital. Obsérvese que esta solución es no acotada; la amplitud de las oscilaciones se hace cada vez mayor cuando  $t$  crece. Por el contrario, las soluciones  $y_\lambda(t)$  para  $\lambda \neq 1$  están acotadas para todo  $t$ .

aunque pueden ser muy grandes para algunos valores de  $t$  si  $\lambda$  está cerca de 1. La Figura 17.4 muestra las gráficas de las soluciones  $y_{0.9}(t)$ ,  $y_{0.95}(t)$  e  $y_1(t)$  en el intervalo  $-10 \leq t \leq 100$ .

El fenómeno que se ilustra aquí se denomina **resonancia**. Los sistemas mecánicos vibrantes tienen frecuencias naturales de vibración. Si intentamos forzarlos para que vibren a frecuencias diferentes, la amplitud de las vibraciones variará sinusoidalmente con el tiempo produciendo un efecto que se denomina **batidos**. Las amplitud de los batidos puede llegar a ser muy grande, y el periodo de los batidos crece a medida que las frecuencias a las que se fuerza la vibración se acercan a la frecuencia natural del sistema. Si el sistema no tiene atenuación resistiva (el ilustrado aquí no la tiene), entonces las vibraciones forzadas a la frecuencia natural harán que el sistema vibre con amplitudes siempre crecientes.

Por poner un ejemplo concreto, si empujamos a un niño en un columpio, se elevará cada vez más si empujamos con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio. La resonancia se utiliza en el diseño de los circuitos de sintonía de las radios; el circuito se sintoniza (generalmente mediante un condensador variable) de forma que su frecuencia natural de oscilación sea la frecuencia de la estación que se está sintonizando. El circuito responde entonces mucho más fuertemente a la señal recibida de esa estación que a otras señales en diferentes frecuencias.

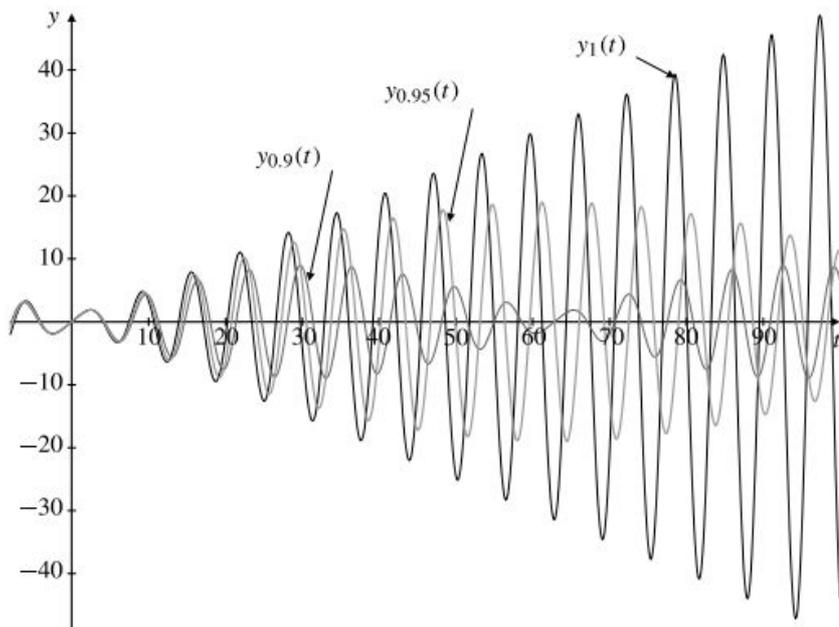


Figura 17.4 Resonancia.

### Variación de parámetros

Un método más formal para calcular una solución particular  $y_p(x)$  de una ecuación no homogénea cuando conocemos dos soluciones independientes,  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$ , de la ecuación homogénea es sustituir las constantes en la función complementaria por funciones, es decir, buscar  $y_p$  de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Al requerir que  $y_p$  cumpla la ED no homogénea dada se obtiene una ecuación que debe ser satisfecha por las dos funciones desconocidas  $u_1$  y  $u_2$ . Somos libres de requerir que cumplan también una segunda ecuación. Para simplificar los cálculos posteriores, escogeremos esta segunda ecuación como

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$$

Ahora tenemos

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED dada obtenemos

$$\begin{aligned} a_2(u_1 y_1' + u_2 y_2') + u_1(a_2 y_1' + a_1 y_1 + a_0 y_1) + u_2(a_2 y_2' + a_1 y_2 + a_0 y_2) \\ = a_2(u_1 y_1' + u_2 y_2') = f(x) \end{aligned}$$

dado que  $y_1$  e  $y_2$  cumplen la ecuación homogénea. Por tanto,  $u_1$  y  $u_2$  cumplen la pareja de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &= \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{aligned}$$

Podemos resolver estas dos ecuaciones obteniendo las funciones desconocidas  $u_1$  y  $u_2$  aplicando la Regla de Cramer (Teorema 5 de la Sección 10.6), o de cualquier otra forma, para obtener

$$u_1' = -\frac{y_2(x)}{W(x)} \frac{f(x)}{a_2(x)}, \quad u_2' = \frac{y_1(x)}{W(x)} \frac{f(x)}{a_2(x)}$$

donde  $W(x)$ , denominado **wronskiano** de  $y_1$  e  $y_2$ , es el determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Entonces,  $u_1$  y  $u_2$  se pueden obtener por integración.

**Ejemplo 3** Calcule la solución general de  $y'' - 3y' + 2y = 4x$ .

**Solución** Resolvemos primero la ecuación homogénea  $y'' - 3y' + 2y = 0$ , cuya ecuación auxiliar es  $r^2 - 3r + 2 = 0$ , con raíces  $r = 1$  y  $r = 2$ . Por tanto,  $y_1 = e^x$  e  $y_2 = e^{2x}$  son dos soluciones independientes de la ecuación homogénea, y la función complementaria es

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Se puede encontrar una solución particular  $y_p(x)$  de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x}$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  cumplen

$$u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} = 4x$$

$$u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0$$

Resolvemos estas ecuaciones lineales obteniendo  $u_1$  y  $u_2$  y después integramos, con lo que resulta

$$\begin{aligned} u_1 &= -4xe^{-x} & u_2 &= 4xe^{-2x} \\ u_1 &= 4(x+1)e^{-x} & u_2 &= -(2x+1)e^{-2x} \end{aligned}$$

Entonces,  $y_p = 4x + 4 - (2x + 1) = 2x + 3$  es una solución particular de la ecuación no homogénea, y la solución general es

$$y = 2x + 3 + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

**Observación** Este método para resolver la ecuación no homogénea se denomina **método de variación de parámetros**. Es completamente general y se aplica a ecuaciones de orden superior en la forma razonable, pero es algo difícil computacionalmente hablando. Podríamos haber obtenido  $y_p$  de forma más fácil si hubiéramos «adivinado» que sería de la forma  $y_p = Ax + B$ , y sustituido entonces en la ecuación diferencial para obtener

$$\begin{aligned} -3A + 2(Ax + B) &= 4x \\ \text{o} \quad 2Ax + (2B - 3A) &= 4x \end{aligned}$$

La única forma en la que esta última ecuación se puede cumplir para todo  $x$  es que  $2A = 4$  y  $2B - 3A = 0$ , es decir,  $A = 2$  y  $B = 3$ .

## Cálculos con Maple

Maple dispone de una rutina `dsolve` para resolver (algunas) ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial. Esta rutina toma una ED como entrada  $y$ , si se desea, condiciones iniciales para la misma. Ilustraremos el procedimiento para la ecuación  $y'' + 2y' + 5y = 25t + 20$  (suponiendo que la variable independiente es  $t$ ):

```
> DE := (D@@2) (y) (t) + 2*D(y) (t) + 5*y(t) = 25*t + 20;
```

$$DE := D^{(2)}(y)(t) + 2D(y)(t) + 5y(t) = 25t + 20$$

```
> dsolve (DE, y(t)) ;
```

$$y(t) = e^{-t} \sin(2t) \_C2 + e^{-t} \cos(2t) \_C1 + 2 + 5t$$

Nótese el uso que hace Maple de `\_C1` y `\_C2` para indicar constantes arbitrarias. En el caso de un problema de valor inicial suministraremos a `dsolve` la ED y sus condiciones iniciales en forma de una lista de argumentos encerrados entre corchetes o llaves:

```
> dsolve ([DE, y(0) = 3, D(y) (0) = -2], y(t)) ;
```

$$y(t) = -3e^{-t} \sin(2t) + e^{-t} \cos(2t) + 2 + 5t$$

Podríamos pensar que esta salida indica que  $y$  ha sido definida como función de  $t$  de forma que se puede tener un valor, por ejemplo para  $y(1)$ , proporcionando la entrada `evalf(y(1))`. Pero esto no funciona. De hecho, la salida de `dsolve` es simplemente una ecuación tal que su miembro izquierdo es el símbolo  $y(t)$ . Podemos, sin embargo, utilizar esta salida para definir  $y$  como función de  $t$  como sigue:

```
> y := unapply(op(2, %), t) ;
```

$$y := t \rightarrow -3e^{-t} \sin(2t) + e^{-t} \cos(2t) + 2 + 5t$$

`op(2, %)` en el comando `unapply` se refiere al segundo operando del resultado anterior (es decir, el miembro derecho de la ecuación de salida de `dsolve`). `unapply(f, t)` convierte una expresión  $f$  en una función de  $t$ . Para confirmar:

```
> evalf(y(1)) ;
```

5.843372646

## Ejercicios 17.6

Calcule soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas de los Ejercicios 1-12 por el método de los coeficientes indeterminados.

1.  $y'' + y - 2y = 1$
2.  $y'' + y - 2y = x$
3.  $y'' + y - 2y = e^{-x}$
4.  $y'' + y - 2y = e^x$
5.  $y'' + 2y' + 5y = x^2$
6.  $y'' + 4y = x^2$
7.  $y'' - y - 6y = e^{-2x}$
8.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$
9.  $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$
10.  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$
11.  $y'' + y = 4 + 2x + e^{-x}$
12.  $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

13. Repita el Ejercicio 3 utilizando el método de variación de parámetros.

14. Repita el Ejercicio 4 utilizando el método de variación de parámetros.

15. Obtenga una solución particular de la forma  $y = Ax^2$  de la ecuación de Euler  $x^2 y'' + xy' - y = x^2$ , y calcule a partir de aquí la solución general de esta ecuación en el intervalo  $(0, \infty)$ .

16. ¿Para qué valores de  $r$  se puede resolver la ecuación de Euler  $x^2 y'' + xy' - y = x^r$  por el método del

Ejercicio 15? Obtenga una solución particular para cada uno de esos valores de  $r$ .

**17.** Intente plantear la forma de una solución particular de  $x^2y'' + xy' - y = x$ , y a partir de aquí obtener la solución general de esta ecuación en el intervalo  $(0, \infty)$ .

**18.** Utilice el método de variación de parámetros para resolver  $x^2y'' + xy' - y = x$ .

**19.** Considere la ecuación lineal no homogénea

$$x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = x^3$$

Utilice el hecho de que  $y_1(x) = x$  e  $y_2(x) = xe^x$  son soluciones independientes de la correspondiente

ecuación homogénea (véase el Ejercicio 5 de la Sección 17.4) para obtener la solución general de esta ecuación no homogénea.

**20.** Considere la ecuación de Bessel no homogénea

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$$

Utilice el hecho de que  $y_1(x) = x^{-1/2} \cos x$  e  $y_2(x) = x^{-1/2} \sin x$  son soluciones independientes de la correspondiente ecuación homogénea (véase el Ejercicio 6 de la Sección 17.4) para obtener la solución general de esta ecuación no homogénea.

## 17.7 Soluciones de ecuaciones diferenciales basadas en series

En la Sección 17.5 presentamos un procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y homogéneas:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

y ecuaciones de Euler de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Muchas de las ecuaciones diferenciales homogéneas lineales y de segundo orden que surgen en las aplicaciones no tienen coeficientes constantes, y no son del tipo de Euler. Si las funciones coeficiente de dichas ecuaciones son suficientemente bien comportadas, a menudo se pueden obtener soluciones en forma de series de potencias (series de Taylor). Estas series solución se utilizan frecuentemente para definir nuevas funciones, cuyas propiedades se deducen parcialmente del hecho de que son la solución de ecuaciones diferenciales particulares. Por ejemplo, las funciones de Bessel de orden  $\nu$  se definen como ciertas soluciones basadas en series de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Las soluciones basadas en series de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas se obtienen más fácilmente cerca de un **punto ordinario** de la ecuación. Un punto ordinario es un punto  $x = a$  tal que la ecuación se puede expresar en la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde las funciones  $p(x)$  y  $q(x)$  son **analíticas** en  $x = a$  (recuérdese que una función  $f$  es analítica en  $x = a$  si  $f(x)$  se puede expresar como la suma de su desarrollo de Taylor en serie de potencias de  $x - a$  en un intervalo de radio positivo centrado en  $x = a$ ). Por tanto, asumimos

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - a)^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - a)^n$$

donde ambas series convergen en algún intervalo de la forma  $a - R < x < a + R$ . Frecuentemente  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios y, por tanto, son funciones analíticas en todas partes. Un cambio de la variable independiente  $\xi = x - a$  situará el punto  $x = a$  en el origen  $\xi = 0$ , por lo que podemos asumir que  $a = 0$ .