ssdfgdfgdgdd

gdfdfgdfgd

DAN LASCU

MATEMATICI SPECIALE PENTRU INGINERI

TEORIE ŞI EXEMPLE

2010

CUPRINS

5. FUNCȚII SPECIALE **128**

PREFAȚĂ

Matematica apare în toate domeniile inginereşti şi este esențial ca absolvenții unei facultăți tehnice să înțeleagă cât mai multe concepte şi să învețe să le aplice cu succes în problemele de inginerie.
Matematica, în interdependență cu alte discipline: fizica, chimia, tehnologia, informatica, economia, biologia, medicina, ştiințele umane, ocupă astăzi o poziție importantă în lumea ştiințifică şi în economia modernă. Matematica are un rol esențial în dezvoltarea instrumentelor de modelare folosite de aproape toate disciplinele, şi este omniprezentă în societatea contemporană hiper-tehnologizată (de exemplu, aritmetica este aplicată în metodele de codare şi criptare, ecuațiile cu derivate parțiale - în prognozele meteo, calculul probabilităților şi statistica - în finanțe, analiza Fourier şi calculul operațional - în mecanica undelor, electrotehnică). Numeroase profesii presupun cunoştințe de matematică.
Ne întrebăm care este rolul matematicii în acest context. Emanuel Kant spunea că "*o ştiință conține atâta ştiință câtă matematică conține în ea*". Nimic mai adevărat şi în cazul de față! Oare se pot acorda premii Nobel în economie, fizică, chimie fără ca teoria enunțată să aibă o fundamentare matematică, o modelare ştiințifică sub formă algoritmică riguroasă?

Cartea de față cuprinde într-o formă accesibilă cât mai multor studenți noțiunile de matematică inginerească pe care autorul le predă studenților din anul al II-lea de la Academia Navală "Mircea cel Bătrân", Constanța. Deşi se adresează în special studenților de la facultățile cu profil tehnic, cartea poate fi utilă şi în pregătirea studenților din învățământul economic sau a celor de la facultatea de matematică.
Dorința autorului este ca lucrarea să fie de un real ajutor studenților în străduințele lor de înțelegere şi însuşire a cunoştințelor de Matematici speciale.
Cartea este structurată în 5 capitole, conținând numeroase exemple rezolvate, care acoperă programa analitică a cursului de Matematici speciale.

August 2010 D.L.

1. FUNCȚII COMPLEXE

1.1 Numere complexe

1.1.1 Introducere. Forma algebrică

Mulțimea numerelor complexe a apărut din necesitatea extinderii mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$ astfel ca orice ecuație de gradul al doilea să aibă soluții în noua mulțime.

Fie $\mathbb{R}^2$ produsul cartezian al perechilor ordonate (x,y) de numere reale, adică

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Pe mulțimea $\mathbb{R}^2$ se definesc două operații algebrice interne, adunarea şi înmulțirea, astfel:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2), \quad (1.1.1)$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1). \quad (1.1.2)$$

Aşadar, prin mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe vom înțelege tripletul $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$. Mulțimea $\mathbb{C}$ înzestrată cu cele două operații are o structură de *corp comutativ*. Elementele corpului $\mathbb{C}$ se numesc *numere complexe*.

Un element al corpului $\mathbb{C}$ se va nota prin z, $z \in \mathbb{C}$, $z=(x,y)$, cu $x,y \in \mathbb{R}$.

Elementele neutre ale corpului $\mathbb{C}$ sunt

$$0=(0,0) \text{ şi } 1=(1,0). \quad (1.1.3)$$

Elementul

$$-z=(-x,-y) \quad (1.1.4)$$

este opusul elementului z, iar

$$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \quad (1.1.5)$$

este inversul lui z şi se notează $\frac{1}{z}$.

Numărul complex $(0,1)$ a fost notat de Euler cu i şi se numeşte *unitatea imaginară*. Avem

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1. \quad (1.1.6)$$

Aşadar, pentru orice $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, avem

$$z=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)$$

de unde, prin identificarea $x=(x,0)$ şi $y=(y,0)$, se obține scrierea uzuală a numerelor complexe

$$z=x+iy. \quad (1.1.7)$$

Deci, un număr complex $z\in\mathbb{C}$ se poate scrie în mod unic în forma (1.1.7), unde $x,y\in\mathbb{R}$. Expresia (1.1.7) se numeşte *forma algebrică* a numărului complex $z=(x,y)$.

Definiția 1.1.1 Dacă $z=x+iy$ este un număr complex, cu $x,y\in\mathbb{R}$, atunci

- x se numeşte *partea reală* a lui z şi se notează cu $\operatorname{Re} z$;
- y se numeşte *partea imaginară* a lui z şi se notează cu $\operatorname{Im} z$;
- $\bar{z}=x-iy$ se numeşte *conjugatul* lui z;

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numeşte *modulul* lui z.

Definiția 1.1.2 Fie $z = x + iy$. Dacă $x = 0$, atunci spunem că z este *pur imaginar*.

Definiția 1.1.3 (*Egalitatea*) Numerele complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ sunt egale dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. Deci, $z_1 = z_2$ dacă $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ şi $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Definiția 1.1.4 (*Operațiile aritmetice*) Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $x_2 \neq 0$ sau $y_2 \neq 0$.

Exemplul 1.1.5 Dacă $z_1 = 2 + 4i$ şi $z_2 = -3 + 8i$, atunci să se găsească $z_1 + z_2$ şi $z_1 z_2$.

Soluție. Avem:

$$z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i$$

şi

$$z_1 z_2 = (2 + 4i)(-3 + 8i) = -6 + 16i - 12i + 32i^2 = (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i .$$

Exemplul 1.1.6 Dacă $z_1 = 2 - 3i$ şi $z_2 = -9i$, atunci să se găsească modulele lui z_1 şi z_2.

Soluție. $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, $|z_2| = \sqrt{(-9)^2} = 9$.

Propoziția 1.1.7 Dacă z, z_1, z_2 sunt numere complexe oarecare, atunci

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\bar{\bar{z}} = z$;
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $|z^2| = |z|^2$;
- $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$, $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |x|^2$;
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;
- $|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, unde $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$.

Exemplul 1.1.8 Dacă $z_1 = 2 - 3i$ şi $z_2 = 4 + 6i$, atunci să se găsească $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Soluție. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{4+6i}=\frac{2-3i}{4+6i}\frac{4-6i}{4-6i}=\frac{8-12i-12i+18i^2}{4^2+6^2}=\frac{-10-24i}{52}=-\frac{10}{52}-\frac{24}{52}i=-\frac{5}{26}-\frac{6}{13}i.$$

Exemplul 1.1.9 Dacă $z=2-3i$, atunci să se găsească inversul său.

Soluție. Din $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, obținem că $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Deci,

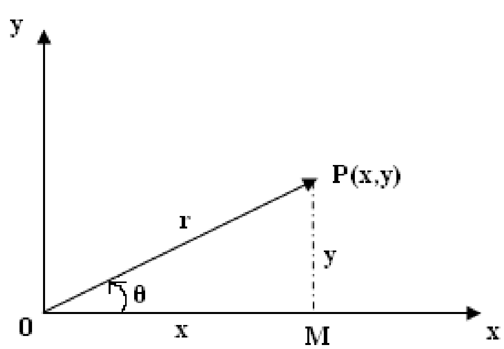
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}.$$

Aşadar,

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

1.1.2 Forma trigonometrică a numerelor complexe

În calculul cu numere complexe este foarte utilă scrierea acestora sub formă trigonometrică. Un număr complex $z=x+iy$ poate fi privit ca un vector în planul xOy, al cărui punct inițial este originea, punctul final fiind punctul (x,y). Din triunghiul dreptunghic OMP din figura alăturată avem: $x=r\cos\theta$ şi $y=r\sin\theta$. Aşadar, numărul complex $z=x+iy$ se poate scrie sub forma:



$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta,$$

deci

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\qquad(1.1.8)$$

care reprezintă *forma trigonometrică* a numărului complex z. Tot din figura alăturată se observă că r poate fi interpretat ca fiind distanța de la origine la punctul (x,y), deci r este modulul lui z, adică

$$r=|z|.\qquad(1.1.9)$$

Unghiul θ al înclinației vectorului z, care este măsurat întotdeauna în radiani de la axa reală pozitivă, este pozitiv când este măsurat în sens trigonometric şi negativ când este măsurat invers trigonometric. Unghiul θ se numeşte *argument* al lui z şi se notează cu $\theta=\mathrm{Arg}\,z$. Un argument al unui număr complex z trebuie să verifice ecuațiile

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\ \sin\theta=\frac{y}{r}.\qquad(1.1.10)$$

Deoarece $\cos\theta$ şi $\sin\theta$ sunt funcții periodice, având perioada 2π, rezultă că $\mathrm{Arg}\,z$ nu este unic. Cu alte cuvinte, dacă θ_0 este un argument al lui z, atunci şi unghiurile $\theta_0\pm2\pi$, $\theta_0\pm4\pi$, ... sunt argumente ale lui z. În practică, pentru a găsi unghiul θ vom utiliza formula:

$$tg\theta=\frac{y}{x}.\qquad(1.1.11)$$

Exemplul 1.1.10 Dacă $z=-\sqrt{3}-i$, atunci să se găsească forma sa trigonometrică.

Soluție. Deoarece $x=-\sqrt{3}$ și $y=-1$, avem $r=|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$. Cum $\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, avem $tg\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\theta=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Deoarece punctul $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ se află în cadranul al III-lea, atunci $\theta=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$. Aşadar, forma trigonometrică a lui z este

$$z=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Definiția 1.1.11 Vom numi *argument principal* al lui z, $z\neq 0$, și îl vom nota cu $\arg z$, valoarea unghiului θ care se află în intervalul $(-\pi,\pi]$.

Aşadar, $\operatorname{Arg} z$ reprezintă o mulțime de valori, și anume

$$\operatorname{Arg} z=\left\{\arg z+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}, \tag{1.1.12}$$

iar $\arg z$ este unic,

$$-\pi<\arg z\leq\pi . \tag{1.1.13}$$

Forma trigonometrică a numerelor complexe este extrem de utilă la înmulțirea și împărțirea a două numere trigonometrice.

Exemplul 1.1.12 Dacă $z_1=i$ și $z_2=-\sqrt{3}-i$, atunci să se găsească $\arg z_1$ și $\arg z_2$.

Soluție. Deoarece $z_1=0+1i$, avem $x_1=0$ și $y_1=1$. Deci, $tg\theta_1\to\infty$, de unde $\theta_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Din (1.1.13), rezultă că $\arg z_1=\frac{\pi}{2}$. Din exemplul 1.1.10, avem că $\theta_2=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Din (1.1.13), rezultă că $\arg z_2=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

Propoziția 1.1.13 Fie

$$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right),\ z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\ \text{și}\ z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right),$$

unde θ_1 și θ_2 sunt orice argumente ale lui z_1 și z_2, respectiv.

Atunci,

- $$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right), \tag{1.1.14}$$
- $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right),\ z_2\neq 0, \tag{1.1.15}$$
- $$z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right),\ n\in\mathbb{Z}, \tag{1.1.16}$$
- $$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots n-1, \tag{1.1.17}$$
- $$\operatorname{Arg}\left(z_1z_2\right)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \tag{1.1.18}$$

Definiția 1.1.14 Spunem că un număr w este *rădăcina de ordinul* n a unui număr complex nenul z dacă $w^n=z$, unde n este un întreg pozitiv.

Exemplul 1.1.15 Dacă $z_1=i$ și $z_2=-\sqrt{3}-i$, atunci să se găsească $\arg\left(z_1z_2\right)$ și $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Soluție. După cum am văzut mai sus, $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $\arg z_2 = -\dfrac{5\pi}{6}$. Avem

$$z_1 z_2 = i\left(-\sqrt{3}-i\right) = 1-\sqrt{3}i \text{ şi } \frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{-\sqrt{3}-i} = -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Din (1.1.18), avem

$$\operatorname{Arg}\left(z_1 z_2\right) = \frac{\pi}{2}+\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ şi } \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Exemplul 1.1.16 Dacă $z = -\sqrt{3}-i$, atunci să se calculeze z^3.

Soluție. În exemplul 1.1.10 am obținut că $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$. Aplicând (1.1.16) cu $r = 2$, $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$ şi $n = 3$, obținem

$$z^3 = \left(\sqrt{3}-i\right)^3 = 2^3\left(\cos 3\frac{7\pi}{6}+i\sin 3\frac{7\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{7\pi}{2}+i\sin\frac{7\pi}{2}\right) =$$

$$= 8\left(\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 8\left(0+i\left(-1\right)\right) = -8i.$$

Remarcă 1.1.17

- Dacă luăm $r = 1$, atunci din relația (1.1.16) se obține *formula lui de Moivre*

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta+i\sin n\theta. \quad (1.1.19)$$

- Folosind *formula lui Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta+i\sin\theta, \quad (1.1.20)$$

obținem *forma exponențială* a lui z:

$$z = re^{i\theta}. \quad (1.1.21)$$

- Tot cu ajutorul formulei lui Euler obținem şi expresia

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y+i\sin y\right). \quad (1.1.22)$$

Exemplul 1.1.18 Dacă $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, atunci să se calculeze z^3.

Soluție. Cum $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi $y_1 = \dfrac{1}{2}$, avem $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ şi $r = 1$. Din formula lui de Moivre, avem

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 = \cos 3\theta+i\sin 3\theta = \cos\left(3\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(3\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Exemplul 1.1.19 Să se găsească rădăcinile cubice ale lui $z = i$.

Soluție. Pentru a găsi aceste rădăcini va trebui să rezolvăm ecuația $w^3 = i$. Deoarece numărul complex $z = i$ are forma trigonometrică $z = \cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\cos\dfrac{\pi}{2}$, utilizând (1.1.17) obținem:

$$w_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}, \ k = 0,1,2.$$

Deci, cele trei rădăcini sunt

$$k=0\,,\quad w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,,$$

$$k=1\,,\quad w_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,,$$

$$k=2\,,\quad w_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i\,.$$

Exemplul 1.1.20 Să se găsească rădăcinile de ordinul patru ale lui $z=1+i$.

Soluție. În acest caz avem: $r=\sqrt{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$. Din (1.1.17) cu $n=4$, obținem:

$$w_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ k=0,1,2,3\,.$$

Deci, cele patru rădăcini sunt:

$$k=0\,,\ w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$k=1\,,\ w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$k=2\,,\ w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$k=3\,,\ w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

1.2 Elemente de topologie în corpul numerelor complexe

Definiția 1.2.1 Aplicația $d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|,\ \forall\, z_1,z_2\in\mathbb{C}\,, \tag{1.2.1}$$

se numeşte *metrică* sau *distanță* pe mulțimea $\mathbb{C}$.

Definiția 1.2.2 Se numeşte *disc deschis* cu centrul în punctul $a\in\mathbb{C}$ şi de rază $r>0$, mulțimea:

$$\Delta(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a|<r\}\,. \tag{1.2.2}$$

Prin *disc închis* cu centrul în punctul $a\in\mathbb{C}$ şi de rază $r>0$, vom înțelege mulțimea:

$$\overline{\Delta(a,r)}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a|\le r\}\,. \tag{1.2.3}$$

Definiția 1.2.3 Se numeşte *cerc* cu centrul în $a\in\mathbb{C}$ şi de rază $r>0$, mulțimea:

$$S(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a|=r\}\,. \tag{1.2.4}$$

Definiția 1.2.4 O mulțime V, $V\subset\mathbb{C}$, se numeşte *vecinătate* a punctului $z_0\in\mathbb{C}$ dacă există discul $\Delta(z_0,r)$ astfel încât $\Delta(z_0,r)\subset V$.

Definiția 1.2.5 Punctul z_0 este *punct interior* mulțimii $E\subset\mathbb{C}$ dacă $z_0\in E$ şi există o vecinătate V a punctului z_0 conținută în E, adică $z_0\in V\subset E$.

Mulțimea punctelor interioare mulțimii E se notează cu $\overset{0}{E}$ sau $\operatorname{Int} E$ şi se numeşte *interiorul* lui E. Mulțimea $E \subset \mathbb{C}$ se numeşte *deschisă* dacă orice punct al său este punct interior.

Definiția 1.2.6 Punctul z_0 este un *punct aderent* mulțimii $E \subset \mathbb{C}$ dacă în orice vecinătate V a punctului z_0 există cel puțin un punct al mulțimii E, adică $V \cap E \neq \phi$. Mulțimea punctelor aderente mulțimii $E \subset \mathbb{C}$ se numeşte *închiderea* mulțimii E şi se notează cu $\overline{E}$.

Dacă $E = \overline{E}$, atunci E este *mulțime închisă.*

Definiția 1.2.7 Punctul z_0 este un *punct de acumulare* pentru mulțimea E dacă în orice vecinătate V a sa există cel puțin un punct $z \in E$ cu $z \neq z_0$, adică $(V \setminus \{z_0\}) \cap E \neq \phi$.

Mulțimea punctelor de acumulare ale lui E se numeşte *derivata* mulțimii E şi se notează prin E'.

Definiția 1.2.8 Punctul z_0 este un *punct frontieră* al lui $E \subset \mathbb{C}$ dacă în orice vecinătate a lui z_0 există puncte $z \neq z_0$ care aparțin lui E şi puncte $z \neq z_0$ care nu aparțin lui E. Mulțimea punctelor frontieră ale lui E se numeşte *frontiera* mulțimii E şi se notează prin $\operatorname{Fr} E$ sau ∂E.

Definiția 1.2.9 Dacă cel puțin unul din numerele $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ este infinit, vom scrie $z = \infty$ şi vom spune că reprezintă *punctul de la infinit* al planului complex.

Definiția 1.2.10 O mulțime $E \subset \mathbb{C}$ este *mărginită* dacă există discul $\Delta(0, r)$ astfel încât $E \subset \Delta(0, r)$. În caz contrar, mulțimea este *nemărginită.*

Definiția 1.2.11 O mulțime mărginită şi închisă se numeşte *mulțime compactă.*

Definiția 1.2.12 O mulțime $E \subset \mathbb{C}$ se numeşte *mulțime conexă* dacă oricare ar fi descompunerea

$$E = E_1 \cup E_2, \text{ unde } E_1 \cap E_2 = \phi,\ E_1 \neq \phi,\ E_2 \neq \phi,$$

cel puțin una din mulțimile E_1 şi E_2 are un punct de acumulare în cealaltă.

Definiția 1.2.13 O mulțime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu.*

Observația 1.2.14 O mulțime deschisă este conexă dacă şi numai dacă oricare două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în acea mulțime.

Definiția 1.2.15 Un domeniu D se numeşte *simplu conex* dacă pentru orice curbă simplă închisă Γ conținută în D, interiorul curbei este inclus în domeniul D.

Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte domeniu *multiplu conex.*

Observația 1.2.16 Prin introducerea unor frontiere noi, numite *tăieturi*, domeniul devine simplu conex. Ordinul de conexiune al unui domeniu multiplu conex se obține adăugând o unitate la numărul de tăieturi necesare şi suficiente pentru ca domeniul să devină simplu conex.

1.3 Funcții complexe de o variabilă reală

1.3.1 Definiții. Limită. Continuitate

Definiția 1.3.1 Vom numi *funcție complexă de variabilă reală*, aplicația

$$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ sau } f(t) = x(t) + iy(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{1.3.1}$$

unde $x(t) = \operatorname{Re} f(t)$ şi $y(t) = \operatorname{Im} f(t)$.

Definiția 1.3.2 Spunem că un număr complex $l \in \mathbb{C}$ este *limita* funcției $f(t)$ în punctul $t_0 \in E'$ şi scriem $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = l$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $t \in E$, $t \neq t_0$ cu $|t - t_0| < \eta(\varepsilon)$, rezultă $|f(t) - l| < \varepsilon$.

Observația 1.3.3 Avem $\lim_{t \to t_0} f(t) = l \iff \lim_{t \to t_0} x(t) = \operatorname{Re} l$ şi $\lim_{t \to t_0} y(t) = \operatorname{Im} l$.

Definiția 1.3.4 Spunem că funcția complexă $f(t)$ este *continuă* în punctul $t_0 \in E$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $t \in E$ cu proprietatea $|t - t_0| < \eta(\varepsilon)$ rezultă că $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$.

Observația 1.3.5 Dacă $t_0 \in E \cap E'$, atunci $f(t)$ este continuă în punctul $t_0 \iff \lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.

Propoziția 1.3.6 Condiția necesară şi suficientă pentru ca funcția complexă $f(t) = x(t) + iy(t)$ să fie continuă în punctul $t_0 \in E$ este ca funcțiile reale $x(t)$ şi $y(t)$ să fie continue în t_0.

1.3.2 Derivabilitate. Diferențiabilitate

Fie $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $t_0 \in E \cap E'$.

Definiția 1.3.7 Spunem că funcția complexă $f(t)$ este *derivabilă* în punctul t_0 dacă există şi este finită limita:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{1.3.2}$$

Valoarea acestei limite se notează cu $f'(t_0)$ sau $\dfrac{df(t_0)}{dt}$ şi se numeşte *derivata* funcției f în punctul $t_0 \in E$.

Propoziția 1.3.8 Condiția necesară şi suficientă ca o funcție complexă $f(t)$ să fie derivabilă într-un punct este ca funcțiile reale $x(t)$ şi $y(t)$ să fie derivabile în acel punct.

Se poate scrie:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},\ t \in E \setminus \{t_0\},$$

de unde, trecând la limită când $t \to t_0$, obținem:

$$f'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0). \tag{1.3.3}$$

Observația 1.3.9 Menționăm că regulile de derivare pentru funcții reale se păstrează şi în cazul funcțiilor complexe de variabilă reală.

Fie $f(t)$ o funcție complexă derivabilă pe $E \subset \mathbb{R}$.

Definiția 1.3.10 Se numeşte *diferențiala* lui f în punctul $t_0 \in E$, următorul număr complex

$$df(t_0) = f'(t_0)dt,\ dt = t - t_0. \tag{1.3.4}$$

Ultima relație se mai poate scrie şi astfel:

$$df(t) = dx(t) + idy(t), \tag{1.3.5}$$

unde $dx(t) = x'(t)dt$ şi $dy(t) = y'(t)dt$.

Observația 1.3.11 Regulile de diferențiere cunoscute pentru sumă, produs şi cât se păstrează şi pentru funcțiile complexe de variabilă reală.

1.3.3 Integrala Riemann. Primitive

Definiția integralei Riemann pentru funcțiile complexe de variabilă reală este analoagă cu cea dată pentru funcțiile reale.

Fie funcția complexă $f(t)$, $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definiția 1.3.12 Se numeşte *diviziune* a intervalului $[a,b]$ orice submulțime $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n\} \subset [a,b]$ astfel încât:

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b. \qquad (1.3.6)$$

Definiția 1.3.13 Se numeşte *norma* diviziunii Δ numărul real:

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le k \le n} (t_k - t_{k-1}). \qquad (1.3.7)$$

Definiția 1.3.14 Se numeşte *suma Riemann* asociată funcției complexe f, diviziunii Δ şi punctelor intermediare ξ_i, şi se notează cu $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$, numărul complex având expresia:

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (1.3.8)$$

Definiția 1.3.15 Spunem că funcția complexă f este *integrabilă Riemann* pe $[a,b]$ dacă există un număr complex I astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi diviziunea Δ, cu $\|\Delta\| < \eta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi punctele intermediare $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon. \qquad (1.3.9)$$

Numărul I se notează cu $\int_a^b f(t)\,dt$ şi se numeşte *integrala Riemann* a funcției $f(t)$ pe intervalul $[a,b]$. În cazul în care integrala există, vom scrie

$$I = \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi). \qquad (1.3.10)$$

Propoziția 1.3.16 Funcția complexă $f(t)$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă funcțiile reale $x(t)$ şi $y(t)$ sunt integrabile pe $[a,b]$, unde $x(t) = \operatorname{Re} f(t)$ şi $y(t) = \operatorname{Im} f(t)$. De asemenea, avem că

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt. \qquad (1.3.11)$$

Definiția 1.3.17 Spunem că funcția complexă $F(t)$, $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, se numeşte *primitiva* funcției complexe $f(t)$ pe intervalul $[a,b]$, dacă $F(t)$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi

$$F'(t) = f(t), \ \forall t \in [a,b]. \qquad (1.3.12)$$

Observația 1.3.18 Dacă $f(t)$ are o primitivă $F(t)$, atunci $f(t)$ are o infinitate de primitive, şi anume mulțimea $\{F(t) + C, t \in [a,b], C \in \mathbb{C}\}$.

Definiția 1.3.19 Mulțimea tuturor primitivelor funcției $f(t)$ pe $[a,b]$ se notează cu $\int f(t)\,dt$ şi se numeşte *integrala nedefinită* a funcției $f(t)$. Deci,

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C, \ \forall t \in [a,b]. \qquad (1.3.13)$$

Observația 1.3.20 În particular, dacă funcția f este continuă pe $[a,b]$, atunci funcția complexă $\int_a^t f(\tau)d\tau$ este primitivă pentru funcția f pe $[a,b]$ şi $F'(t)=f(t)$, $t\in[a,b]$.

Teorema 1.3.21 (Formula Leibniz – Newton) Dacă $f(t)$ este o funcție integrabilă pe $[a,b]$ şi $F(t)$ este o primitivă a lui $f(t)$ pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \tag{1.3.14}$$

1.4 Funcții complexe de o variabilă complexă

1.4.1 Definiție. Limită. Continuitate

Definiția 1.4.1 Se numeşte *funcție complexă de variabilă complexă* o aplicație $f:E\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Observația 1.4.2 Funcția f poate fi privită fie ca o funcție de variabila $z=x+iy\in E$, fie ca funcție de variabilele x şi y, cu $(x,y)\in E$. Aşadar, f se poate scrie sub forma

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y), \tag{1.4.1}$$

unde $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ şi $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$.

Observația 1.4.3 Definiția lui $f(z)$ este echivalentă cu definirea simultană a două funcții reale u şi v, de variabile reale x şi y, deci putem considera $f(z)$ ca fiind o funcție vectorială de o variabilă vectorială definită pe $E\subset\mathbb{R}^2$ cu valori în $\mathbb{R}^2$.

Observația 1.4.4 Limita şi continuitatea unei funcții complexe $f(z)$ într-un punct z_0 se reduc la limita şi continuitatea funcției vectoriale $f(x,y)$ în punctul (x_0,y_0), noțiuni studiate la capitolul “Funcții vectoriale de variabilă vectorială” de la analiză matematică din anul I.

Propoziția 1.4.5 Fie $f:E\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ şi $z_0\in E'$. Funcția $f(z)$ are limită în z_0 dacă şi numai dacă funcțiile $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ au limită în acest punct şi, în caz afirmativ:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} u(x,y)+i\lim_{z\to z_0} v(x,y). \tag{1.4.2}$$

Propoziția 1.4.6 Condiția necesară şi suficientă pentru ca funcția $f(z)$ să fie continuă în punctul $z_0\in E$ este ca funcțiile reale u şi v să fie continue în acest punct.

Observația 1.4.7 Dacă $z_0\in E\cap E'$, atunci $f(z)$ este continuă în z_0 dacă şi numai dacă $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Exemplul 1.4.8 Să se studieze existența limitei în origine a funcției $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, dată prin

$$f(z)=\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}.$$

Soluție. Observăm că

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Considerăm două şiruri din $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\left((x_n^1, y_n^1)\right)_n$, $\left((x_n^2, y_n^2)\right)_n$ prin

$$\left(x_n^1, y_n^1\right) = \left(0, \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$\left(x_n^2, y_n^2\right) = \left(\frac{1}{n}, 0\right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cele două şiruri au aceeaşi limită şi anume $(0,0)$. Deoarece

$$f\left(x_n^1, y_n^1\right) = 0, \text{ iar } f\left(x_n^2, y_n^2\right) = 1,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că nu există limita în origine a funcției f.

Exemplul 1.4.9 Să se studieze continuitatea în origine a funcției $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dată prin

$$f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|}.$$

Soluție. Observăm că

$$f(z) = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0.$$

Vom arăta că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} = f(0,0) = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ cu } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta_\varepsilon, \text{ rezultă } \left| \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \varepsilon.$$

Pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sunt adevărate inegalitățile

$$\left| \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right| < |y| < \sqrt{x^2 + y^2}.$$

În concluzie, alegând $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, are loc relația de mai sus, deci funcția dată este continuă în origine.

1.4.2 Funcții olomorfe

Definiția 1.4.10 Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $z_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{C}$. Spunem că funcția $f(z)$ este *derivabilă* în z_0 (sau *monogenă* în z_0) dacă există şi este finită limita raportului

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\ z \in D \setminus \{z_0\} \tag{1.4.3}$$

când $z \to z_0$.

Limita, dacă există, se notează cu $f'(z_0)$ şi se numeşte *derivata complexă a lui f în z_0*.

Definiția 1.4.11 Funcția $f : D \to \mathbb{C}$ este *olomorfă* (sau *analitică*) în D dacă f este monogenă în orice punct z_0 din D.

Definiția 1.4.12 O funcție olomorfă pe $\mathbb{C}$ se numeşte *funcție întreagă.*

Teorema 1.4.13 (*Teorema Cauchy – Riemann*) Funcția $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, este monogenă în $z_0 \in D$ dacă şi numai dacă funcțiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sunt diferențiabile în z_0 şi derivatele lor parțiale verifică în punctul z_0 relațiile Cauchy – Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

În acest caz, avem:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right). \tag{1.4.5}$$

Exemplul 1.4.14 Să se determine punctele din $\mathbb{C}$ în care funcțiile următoare sunt monogene şi să se calculeze derivatele lor în acele puncte:

a) $f(z) = z^2$;

b) $f(z) = \overline{z}$;

c) $f(z) = e^z$;

d) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$;

e) $f(z) = z^2 + z \cdot \overline{z} - \left(\overline{z}\right)^2 + 2z - \overline{z}$.

Soluție.

a) Observăm că funcția se mai scrie

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy .$$

Deci, dacă $u = \operatorname{Re} f$ şi $v = \operatorname{Im} f$, atunci

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2, \\ v(x, y) = 2xy. \end{cases}$$

Prin calcul avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x .$$

Cum derivatele parțiale există şi sunt continue, iar condițiile Cauchy – Riemann sunt verificate în orice punct, rezultă că funcția f este monogenă în orice punct. Derivate ei este:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x + 2iy = 2z .$$

b) Deoarece funcțiile $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x$ şi $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -y$ nu verifică condițiile Cauchy – Riemann în niciun punct, rezultă că funcția nu este monogenă în niciun punct din $\mathbb{C}$.

c) Funcția f se mai scrie astfel:

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Deci, dacă $u = \operatorname{Re} f$ şi $v = \operatorname{Im} f$, atunci

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y, \\ v(x,y) = e^x \sin y. \end{cases}$$

Prin calcul direct se obțin expresiile:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \, , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \, , \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \, , \ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \, .$$

Cum derivatele parțiale există şi sunt continue, iar condițiile Cauchy – Riemann sunt verificate în orice punct, rezultă că funcția f este monogenă în orice punct. Derivata ei este:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \, .$$

d) Se observă că funcția f se mai poate scrie astfel:

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \, ,$$

deci

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \end{cases} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \, .$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \, , \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \, , \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \, , \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

sunt continue în orice punct cu excepția lui $z = 0$. Observăm că relațiile Cauchy – Riemann sunt verificate în orice punct $z \neq 0$. Deci, funcția f este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Derivata ei este:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + i\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{(y+ix)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \, .$$

e) Observăm că

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x + i(4xy + 3y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, .$$

Notând cu $u = \operatorname{Re} f$ şi $v = \operatorname{Im} f$, găsim:

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 + x, \\ v(x,y) = 4xy + 3y. \end{cases}$$

Calculând derivatele parțiale şi verificând condițiile Cauchy – Riemann, obținem:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 4x + 3, \\ 2y = -4y, \end{cases}$$

de unde rezultă $x = -1$ şi $y = 0$. Aşadar, funcția f este monogenă doar în punctul $(x,y) = (-1,0)$. Derivata în acest punct este:

$$f'(-1,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(-1,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(-1,0) = -1 \, .$$

1.5 Funcții armonice. Consecințe ale relațiilor Cauchy – Riemann

Definiția 1.5.1 Funcția $u : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ – mulțime deschisă, $u \in C^2(D)$ se numeşte *armonică* dacă $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ în orice punct din D.

Propoziția 1.5.2 Fie funcția $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ olomorfă în D, iar $u, v \in C^2(D)$. Atunci u şi v sunt funcții armonice pe D.

Demonstrație. Funcția f fiind olomorfă în D sunt verificate relațiile Cauchy – Riemann. Derivând aceste relații în raport cu x, obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \end{cases}$$

Din egalitatea derivatelor mixte $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ (teorema lui Schwarz) rezultă $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Analog se arată $\Delta v = 0$.

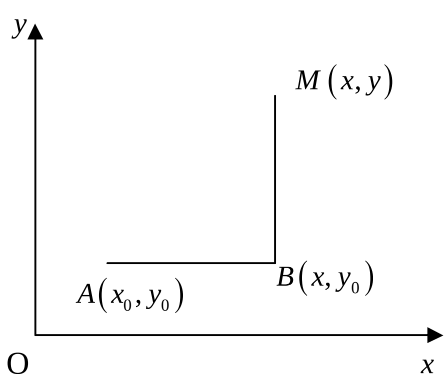
Observația 1.5.3 În continuare, vom arăta că dacă avem o funcție armonică putem determina o funcție olomorfă care să admită ca parte reală sau imaginară funcția dată.

Consecința 1.5.4 Fie u o funcție armonică definită pe un domeniu D. Atunci, există funcția armonică v astfel încât $f = u + iv$ să fie olomorfă în D.

Demonstrație. Partea reală şi imaginară a unei funcții olomorfe trebuie să verifice relațiile Cauchy – Riemann (1.4.4). Folosind aceste relații, diferențiala funcției v este

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \tag{1.5.1}$$

În partea dreaptă a egalității avem o diferențială totală exactă, deoarece $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, adică



$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, adică u armonică. Deci, v se poate exprima printr-o integrală curbilinie independentă de drum, integrală ce determină funcția v în afara unei constante aditive.

Avem $v(x, y) = \int_{AM} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$. Deci,

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt. \tag{1.5.2}$$

Consecința 1.5.5 Fie v o funcție armonică definită pe un domeniu D. Atunci, există funcția armonică u astfel încât $f = u + iv$ să fie olomorfă în D.

Demonstrație. Analog ca mai sus, avem

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy \,. \tag{1.5.3}$$

Deoarece v armonică, în partea dreaptă a egalității avem o diferențială totală exactă. Deci, u se poate exprima printr-o integrală curbilinie independentă de drum, integrală ce determină funcția u în afara unei constante aditive. Avem

$$u(x,y) = \int_{AM} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy \,.$$

Deci,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t, y_0)\,dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,dt. \tag{1.5.4}$$

Exemplul 1.5.6 Să se determine funcția olomorfă $f = u + iv$ ştiind că

a) $u(x,y) = e^x \cos x$ şi $f(0) = 1$;

b) $v(x,y) = e^x \sin y$ şi $f(0) = 1$;

c) $u(x,y) = x^2 - y^2$ şi $f(0) = 0$;

d) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2y$ şi $f(0) = 0$;

e) $v(x,y) = e^x \sin y + y$ şi $f(0) = 1$.

Soluție. a) Observăm că pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y \,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y \,.$$

Cum pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \,,$$

atunci u este o funcție armonică pe $\mathbb{R}^2$. Aplicând consecința 1.5.4, rezultă că există funcția v astfel încât $f = u + iv$ să fie olomorfă în $\mathbb{C}$. Aplicând formula (1.5.2), avem:

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} e^t \sin y_0 dt + \int_{y_0}^{y} e^x \cos t dt = (\sin y_0)\int_{x_0}^{x} e^t dt + e^x \int_{y_0}^{y} \cos t dt =$$
$$= e^x \sin y - e^{x_0} \sin y_0 = e^x \sin y + C,$$

unde C este o constantă arbitrară reală. Deci,

$$f(x,y) = e^x \cos y + i\left(e^x \sin y + C\right).$$

Cum $f(0) = 1$, atunci $f(0,0) = 1 + iC = 1$, deci $C = 0$. Aşadar,

$$f(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \,.$$

b) Prin calcul direct, obținem că pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \,,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \sin y \,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \, , \; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \sin y \, .$$

Cum pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avem:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \, ,$$

atunci v este o funcție armonică pe $\mathbb{R}^2$. Aplicând consecința 1.5.5, rezultă că există funcția u astfel încât $f = u + iv$ să fie olomorfă în $\mathbb{C}$. Aplicând formula (1.5.4), avem:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} e^t \cos y_0 dt - \int_{y_0}^{y} e^x \sin t dt = (\cos y_0) \int_{x_0}^{x} e^t dt - e^x \int_{y_0}^{y} \sin t dt =$$
$$= e^x \cos y - e^{x_0} \cos y_0 = e^x \cos y + C,$$

unde C este o constantă arbitrară reală. Rezultă că:

$$f(x, y) = e^x \cos y + C + ie^x \sin y \, .$$

Din condiția $f(0) = 1$ găsim că $C = 0$. Aşadar, funcția olomorfă f este:

$$f(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \, .$$

c) Verificăm dacă u este funcție armonică, adică dacă $\Delta u = 0$. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \, , \; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \, , \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \, , \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \, ,$$

deci $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$. Folosind consecința 1.5.4, avem:

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} 2y_0 dt + \int_{y_0}^{y} 2x dt = 2y_0 (x - x_0) + 2x(y - y_0) = 2xy - 2x_0 y_0 = 2xy + C \, ,$$

unde C este o constantă arbitrară reală. Rezultă:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + i(2xy + C) \, .$$

Din condiția $f(0) = 0$ găsim că $C = 0$. Aşadar, funcția olomorfă f este:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 = z^2 \, .$$

d) Verificăm dacă u este funcție armonică, adică dacă $\Delta u = 0$. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \, , \; \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 2 \, , \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \, , \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \, ,$$

deci $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$. Folosind consecința 1.5.4, avem:

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} (6ty_0 + 2) dt + \int_{y_0}^{y} (3x^2 - 3t^2) dt = 3x^2 y + 2x - y^3 - 3x_0^2 y_0 - 2x_0 + y_0^2 = 3x^2 y + 2x - y^3 + C \, ,$$

unde C este o constantă arbitrară reală. Rezultă:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2y + i(3x^2 y + 2x - y^3 + C) \, .$$

Din condiția $f(0) = 0$ găsim că $C = 0$. Aşadar, funcția olomorfă f este:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2y + i(3x^2 y + 2x - y^3) \, .$$

e) Verificăm dacă v este funcție armonică, adică dacă $\Delta v = 0$. Avem:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + 1,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \sin y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \sin y,$$

deci $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Folosind consecința 1.5.5, avem:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(e^t \cos y_0 + 1\right) dt - \int_{y_0}^{y} e^x \sin t dt = e^x \cos y + x - e^{x_0} \cos y_0 - x_0 = e^x \cos y + x + C,$$

unde C este o constantă arbitrară reală. Rezultă:

$$f(x,y) = e^x \cos y + x + C + i\left(e^x \sin y + y\right).$$

Din condiția $f(0) = 1$ găsim că $C = 0$. Aşadar, funcția olomorfă f este:

$$f(x,y) = e^x \cos y + x + i\left(e^x \sin y + y\right) = e^z + z.$$

1.6 Reguli de calcul pentru derivatele funcțiilor monogene

Propoziția 1.6.1 a) Dacă f şi g sunt monogene într-un punct $z_0 \in D$, atunci funcțiile $f + g$ şi $f \cdot g$ sunt monogene în z_0 şi avem relațiile:

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \tag{1.6.1}$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0). \tag{1.6.2}$$

b) În condițiile de mai sus, dacă $g(z_0) \neq 0$, funcția $\dfrac{f}{g}$ este monogenă în z_0 şi derivata sa este dată de expresia

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}. \tag{1.6.3}$$

Propoziția 1.6.2 Dacă f este monogenă într-un punct $z_0 \in D$ şi k este constantă, atunci funcția $k \cdot f$ este monogenă în z_0 şi derivata sa este

$$(k \cdot f)'(z_0) = k f'(z_0). \tag{1.6.4}$$

Observația 1.6.3 Orice constantă derivată este zero, adică

$$k' = 0.$$

Propoziția 1.6.4 Dacă f este monogenă în punctul $z_0 \in D$, iar g este monogenă în punctul $f(z_0)$, atunci funcția compusă $F(z) = g(f(z))$ este monogenă în z_0 şi derivata ei este

$$F'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0). \tag{1.6.5}$$

Observația 1.6.5 Regula derivării funcției putere rămâne valabilă:

$$\left(z^n\right)' = n z^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.6.6}$$

Observația 1.6.6 Din relațiile (1.6.5) şi (1.6.6) rezultă formula:

$$\left(f^n(z)\right)' = n f^{n-1}(z) f'(z),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.6.7}$$

Exemplul 1.6.7 Să se deriveze funcțiile monogene:
a) $f(z)=3z^4-5z^3+2z$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2}{4z+1}$;

c) $f(z)=\left(iz^2+3z\right)^5$.

Soluție. Folosind regulile de mai sus, obținem:
a) $f'(z)=3\cdot 4z^3-5\cdot 3z^2+2\cdot 1=12z^3-15z^2+2$;

b) $f'(z)=\dfrac{2z\cdot(4z+1)-z^2\cdot 4}{(4z+1)^2}=\dfrac{4z^2+2z}{(4z+1)^2}$;

c) $f'(z)=5\cdot\left(iz^2+3z\right)^4\cdot\left(iz^2+3z\right)'=5\cdot\left(iz^2+3z\right)^4\cdot(2i\cdot z+3)$.

1.7 Integrala curbilinie în complex. Definiție. Proprietăți

Fie curba C de ecuații parametrice reale

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[a,b],$$

sau de ecuație parametrică complexă

$$z=z(t),\ t\in[a,b],\ \text{cu}\ z(t)=x(t)+iy(t).$$

Definiția 1.7.1 Curba $C:\ z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in[a,b]$, se numeşte *curbă închisă* dacă punctul inițial $z(a)$ coincide cu punctul terminal $z(b)$, adică $z(a)=z(b)$.

Definiția 1.7.2 Curba $C:\ z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in[a,b]$, se numeşte *curbă simplă* dacă pentru orice $t_1,t_2\in[a,b]$, cu $t_1\neq t_2$, avem $z(t_1)\neq z(t_2)$, adică dacă nu se autointersectează.

Definiția 1.7.3 Curba $C:\ z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in[a,b]$, se numeşte *curbă netedă* dacă derivata sa $z'(t)$, $t\in[a,b]$ este continuă şi $z'(t)\neq 0$, $t\in[a,b]$.

Definiția 1.7.4 Curba $C:\ z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in[a,b]$, se numeşte *curbă netedă pe porțiuni* (sau *drum, sau contur*) dacă derivata sa $z'(t)$ este continuă pe porțiuni.

Definiția 1.7.5 Fie curba netedă $C:\ z(t)=x(t)+iy(t),\ t\in[a,b]$, şi $f(z)$ o funcție complexă continuă pe C. Integrala funcției $f(z)$ se defineşte prin egalitatea

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{1.7.1}$$

Observația 1.7.6 Fie $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ o funcție complexă continuă pe curba netedă C: $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$. Dacă notăm $u=u(x(t),y(t))$ şi $v=v(x(t),y(t))$, $dx=x'(t)dt$ şi $dy=y'(t)dt$, avem

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt=\int_a^b (u+iv)(dx+idy)=$$

$$=\int_a^b udx-vdy+i\int_a^b udy+vdx. \tag{1.7.2}$$

Propoziția 1.7.7 (Liniaritate) Dacă $f(z)$ şi $g(z)$ sunt funcții continue pe curba netedă C şi $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ două constante, atunci

$$\int_C\left(\lambda f(z)+\mu g(z)\right)dz=\lambda\int_C f(z)dz+\mu\int_C g(z)dz\ . \tag{1.7.3}$$

Propoziția 1.7.8 (Aditivitate în raport cu drumul) Fie curba netedă C: $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$ şi C_1 şi C_2 restricțiile curbei C la subintervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$, $a<c<b$. Dacă $f(z)$ este o funcție continuă pe C, atunci

$$\int_{C_1\cup C_2} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz\ . \tag{1.7.4}$$

Propoziția 1.7.9 (Evaluarea modulului integralei) Fie C o curbă netedă cu lungimea L şi $f(z)$ o funcție continuă pe C, cu $|f(z)|\le M$ pe C. Atunci

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C|f(z)||dz|\le M\cdot L\ . \tag{1.7.5}$$

Exemplul 1.7.10 Să se calculeze integrala $I=\int_\gamma \bar{z}dz$, unde γ este pătratul $ABCD$ parcurs în sensul $A\to B\to C\to D\to A$, vârfurile fiind $A(1+i)$, $B(-1+i)$, $C(-1-i)$, $D(1-i)$.

Soluție. Observăm că funcția $f(z)=\bar{z}$ este continuă pe mulțimea $\mathbb{C}$ şi că avem egalitatea

$$I=\int_{[AB]}\bar{z}dz+\int_{[BC]}\bar{z}dz+\int_{[CD]}\bar{z}dz+\int_{[DA]}\bar{z}dz\ .$$

Ecuațiile parametrice ale acestor patru segmente sunt:

$$[AB]:\begin{cases}x(t)=t,\\ y(t)=1,\end{cases}\quad t\in[-1,1]\text{ , deci } z(t)=-t+i\text{ , iar } z'(t)=-1,$$

$$[BC]:\begin{cases}x(t)=-1,\\ y(t)=-t,\end{cases}\quad t\in[-1,1]\text{ , deci } z(t)=-1-it\text{ , iar } z'(t)=-i,$$

$$[CD]:\begin{cases}x(t)=t,\\ y(t)=-1,\end{cases}\quad t\in[-1,1]\text{ , deci } z(t)=t-i\text{ , iar } z'(t)=1,$$

$$[DA]:\begin{cases}x(t)=1,\\ y(t)=t,\end{cases}\quad t\in[-1,1]\text{ , deci } z(t)=1+it\text{ , iar } z'(t)=i\ .$$

Aplicând definiția integralei, obținem:

$$I=\int_{[AB]}\bar{z}dz=\int_{-1}^{1}(-t-i)(-1)dt=2i\ ,\ I=\int_{[BC]}\bar{z}dz=\int_{-1}^{1}(-1+it)(-i)dt=2i\ ,$$

$$I=\int_{[CD]}\bar{z}dz=\int_{-1}^{1}(t+i)dt=2i\ ,\ I=\int_{[DA]}\bar{z}dz=\int_{-1}^{1}(1-it)idt=2i\ .$$

Deci, $I=8i$.

Exemplul 1.7.11 Să se calculeze integralele curbilinii în complex:

a) $I = \int\limits_{|z|=r} z^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$;

b) $I = \int\limits_{|z|=r} \overline{z} dz$;

c) $I = \int\limits_{\Gamma} zdz$, unde Γ este sfertul de elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuprins în primul cadran.

Soluție. a) Fie $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, parametrizarea cercului $|z| = r$. Deci, $dz = r \cdot ie^{it} dt$. Conform formulei de calcul (1.7.1), avem:

$$I = \int_0^{2\pi} r^n e^{ni \cdot t} rie^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i \cdot t} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} \left(\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t \right) dt .$$

Pentru $n \neq -1$, avem:

$$I = \int\limits_{|z|=r} z^n dz = 0 .$$

Pentru $n = -1$, avem:

$$I = \int\limits_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

Se observă că valoarea acestei integrale este independentă de raza cercului.

b) Cu aceeaşi parametrizare a cercului ca în exemplul precedent, avem:

$$I = \int\limits_{|z|=r} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot ire^{it} dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi ir^2 .$$

c) Sfertul de elipsă din primul cadran are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Folosind formula (1.7.2), integrala devine:

$$I = \int\limits_{\Gamma} zdz = \int\limits_{\Gamma} (x+iy)(dx+idy) = \int\limits_{\Gamma} (x+iy)(dx+idy) = \int\limits_{\Gamma} (xdx - ydy) + i \int\limits_{\Gamma} (ydx + xdy) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left(a^2 + b^2\right) \sin t \cos t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ab\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) dt = -\frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Observația 1.7.12 Se poate observa că rezultatul obținut la punctul a) poate fi generalizat. Astfel,

$$I = \int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, \ n \neq -1 \\ 2\pi i, n = -1. \end{cases}$$

1.8 Teorema lui Cauchy

Teorema 1.8.1 (*Teorema lui Cauchy pentru domenii simplu conexe)*

Dacă f este olomorfă în domeniul simplu conex D, atunci

$$\oint\limits_{C} f(z) dz = 0 , \qquad (1.8.1)$$

oricare ar fi C curbă netedă pe porțiuni, simplă închisă conținută în D.

Demonstrație. În ipoteza suplimentară că derivata lui f să fie o funcție continuă în D (deci, $f \in C^1(D)$), demonstrația este o consecință imediată a formulei lui Green şi a ecuațiilor Cauchy – Riemann. Reamintim formula lui Green:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy ,$$

unde $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ este domeniul având frontieră curba simplă, închisă şi netedă pe porțiuni C, iar P şi Q sunt funcții continue pe $\overline{\Delta}$ astfel încât $\frac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}$ există şi sunt continue pe $\overline{\Delta}$.

Acum, deoarece $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ are derivata continuă, rezultă că $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y}$ sunt continue. După cum arătat şi mai sus în relația (1.7.2), avem

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i\oint_C v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Deci, aplicând formula lui Green integralelor din membrul din dreapta, obținem

$$\oint_C f(z) dz = \iint_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i\iint_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy .$$

Cum f este o funcție olomorfă în D, funcțiile reale u şi v verifică relațiile Cauchy – Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ în orice punct din D. Aşadar, cele două integrale sunt nule şi demonstrația este completă.

Exemplul 1.8.2 Să se calculeze $I = \oint_C \frac{dz}{z^2}$, unde C este elipsa $(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-5)^2 = 1$.

Soluție. Funcția rațională $f(z) = \frac{1}{z^2}$ este olomorfă în orice punct cu excepția lui $z = 0$. Dar, punctul $z = 0$ nu este punct interior elipsei C. Deci, din teorema de mai sus, avem:

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2} = 0 .$$

Exemplul 1.8.3 Să se calculeze $I = \int_{|z|=2} \left(\overline{z} + e^z \sin z\right) dz$.

Soluție. Integrala se mai scrie

$$I = \int_{|z|=2} \overline{z} dz + \int_{|z|=2} e^z \sin z dz .$$

Parametrizarea cercului $|z| = 2$ este $z(t) = 2e^{it}dt$, $t \in [0, 2\pi]$. Aplicând formula (1.7.1), avem:

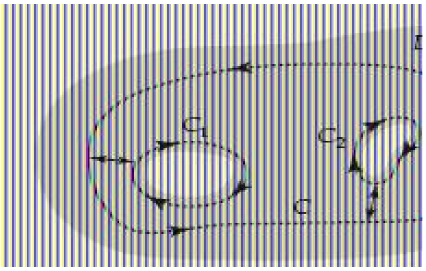
$$\int_{|z|=2} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it} \cdot 2ie^{it} dt = 4i \int_0^{2\pi} dt = 8i\pi .$$

Funcția $e^z \sin z$ este olomorfă în interiorul cercului $|z| = 2$, deci

$$\int_{|z|=2} e^z \sin z dz = 0 .$$

Aşadar, $I = 8\pi i$.

Teorema 1.8.4 (*Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe)*
Fie D un domeniu multiplu conex, cu ordinul de conexiune $n+1$, delimitat de curbele C_1, C_2, ..., C_n, unde C_1, C_2, ..., C_n sunt exterioare între ele şi interioare unei curbe C (vezi figura alăturată pentru cazul $n=2$). Dacă $f(z)$ este olomorfă în domeniul D, atunci



$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz. \tag{1.8.2}$$

Exemplul 1.8.5 Să se calculeze $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}dz$.

Soluție. Funcția $f(z) = \frac{1}{z-1}$ este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Aşadar, avem un domeniu dublu conex. Deci,

$$I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}dz = \int_{|z|=r} \frac{1}{z-1}dz, \ r<1.$$

Conform observației 1.7.12, $I = 2\pi i$.

1.9 Formula integrală a lui Cauchy

Teorema 1.9.1 (*Formula integrală a lui Cauchy)* Fie $f(z)$ o funcție olomorfă într-un domeniu simplu conex D care conține curba simplă închisă C. Dacă z_0 este un punct oarecare interior lui C, atunci

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{1.9.1}$$

Observația 1.9.2 Formula integrală a lui Cauchy exprimă faptul că dacă o funcție este olomorfă în interiorul unei curbe simple închise şi pe curbă, atunci valorile funcției în interiorul curbei sunt complet determinate de valorile ei pe curbă.

Teorema 1.9.3 (*Formulele integrale ale lui Cauchy pentru derivate)* Fie $f(z)$ o funcție olomorfă într-un domeniu simplu conex D care conține curba simplă închisă C. Dacă z_0 este un punct oarecare interior lui C, atunci derivatele funcției $f(z)$ de toate ordinele există şi au următoarea reprezentare integrală:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \ n \in \mathbb{N}_+. \tag{1.9.2}$$

Exemplul 1.9.4 Să se calculeze integrala $I_k = \int_{C_k} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$, unde $C_1 : |z| = \frac{1}{4}$, $C_2 : |z-1| = \frac{1}{4}$, $C_3 : |z| = 2$.

Soluție. Avem:

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(1-z)^3}}{z} dz = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i \text{, unde } f_1(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3},$$

$$I_2 = -\int_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{z}}{(z-1)^3} dz = -\frac{2\pi i}{2!} f_2''(1) = -\pi e i \text{, unde } f_1(z) = \frac{e^z}{z},$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \pi i(2-e).$$

Exemplul 1.9.5 Să se calculeze: $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)(z^2+5)} dz$.

Soluție. Se observă că singurul punct în care se anulează numitorul situat în cercul $|z| = 2$ este $\frac{\pi}{2}$.

Funcția $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+5}$ este olomorfă în interiorul cercului $|z| = 2$ şi pe cercul $|z| = 2$. Aplicând formula integrală a lui Cauchy, obținem:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z - \frac{\pi}{2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)(z^2+5)} dz.$$

Deci, $I = 2\pi i \cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \cdot \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}+5} = \dfrac{8\pi i}{\pi^2+20}$.

Exemplul 1.9.6 Să se calculeze: $I = \displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z - 3\cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz$.

Soluție. Funcția $f(z) = z - 3\cos z$ este olomorfă în interiorul şi pe cercul $|z| = 3$. Calculăm $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Cum $f'(z) = 1 + 3\sin z$, rezultă că $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + 3 = 4$.

Aplicând formula integrală a lui Cauchy pentru $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{|z|=3} \frac{f(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz.$$

Deci, $I = 2\pi i \cdot f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 8\pi i$.

Exemplul 1.9.7 Să se calculeze: $I = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4 + 2iz^3} dz$.

Soluție. Punctele în care funcția de sub integrală nu este olomorfă sunt $z = 0$ şi $z = -2i$, dar numai $z = 0$ se găseşte în interiorul $|z| = 1$. Funcția de sub integrală se mai scrie

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3}=\frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3},$$

şi identificăm $z_0=0$, $n=2$ şi $f(z)=\frac{z+1}{z+2i}$. Calculăm $f''(z)$. Avem:

$$f'(z)=\frac{2i-1}{(z+2i)^2},\ f''(z)=\frac{2-4i}{(z+2i)^3}.$$

Deci,

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz=\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^3}dz=\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z+1}{z^3(z+2i)}dz.$$

Aşadar,

$$I=\pi i\cdot f''(0)=\pi i\cdot\frac{2i-1}{4i}=\frac{\pi}{4}(2i-1).$$

Exemplul 1.9.8 Să se calculeze integralele:

a) $I=\int_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$;

b) $I=\int_C\frac{e^z}{(z-\pi i)^3}dz$, unde C este curba simplă închisă care conține punctul $z_0=\pi i$ în interiorul său;

c) $I=\int_{|z-2i|=4}\frac{z}{z^2+9}dz$.

Soluție. a) Punctele în care se anulează numitorul sunt: $z_1=3$, $z_2=-3$ şi $z_3=-i$, dar numai z_1 şi z_2 se află în interiorul cercului $|z|=2$. Funcția $f(z)=\frac{z}{9-z^2}$ este olomorfă în interiorul cercului $|z|=2$ şi pe cercul $|z|=2$. Aplicând formula lui Cauchy, obținem:

$$f(-i)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}dz.$$

Deci, $I=2\pi i f(-i)=2\pi i\frac{-i}{10}=\frac{\pi}{5}$.

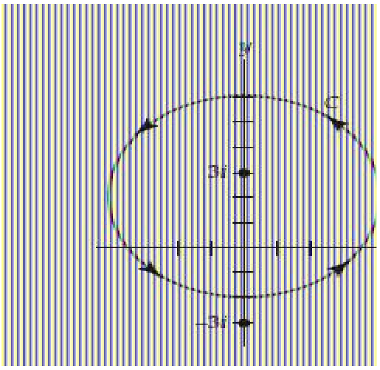
b) Aplicăm formula integrală a lui Cauchy pentru funcția $f(z)=e^z$ şi obținem:

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{2+1}}dz.$$

Astfel,

$$I=\int_C\frac{e^z}{(z-\pi i)^3}dz=\pi i e^{i\pi}=-\pi i.$$

c) Rădăcinile numitorului sunt $z_1 = -3i$ şi $z_2 = 3i$, dar numai z_1 se află în interiorul cercului



$|z-2i| = 4$ (vezi figura alăturată). Aplicâm formula integrală a lui Cauchy pentru funcția $f(z) = \dfrac{z}{z+3i}$ care este o funcție olomorfă în interiorul şi pe cercul $|z-2i| = 4$, obținem:

$$I = \int_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}\,dz = \int_{|z-2i|=4} \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}\,dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i}.$$

Deci, $I = \pi i$.

1.10 Şiruri şi serii de numere complexe

Definiția 1.10.1 Se numeşte *şir de numere complexe* o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$. Vom nota şirul definit mai sus: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(z_n)_n$ sau (z_n).

Observația 1.10.2 Dacă $(z_n)_n$ este un şir de numere complexe, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul z_n poate fi reprezentat sub forma $z_n = x_n + iy_n$. Aşadar, şirului de numere complexe $(z_n)_n$ îi corespund două şiruri de numere reale $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$.

Definiția 1.10.3 Spunem că $(z_n)_n$ este un *şir mărginit* dacă există o constantă $C \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $|z_n| \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definiția 1.10.4 Spunem că $(z_n)_n$ este un *şir convergent* dacă există un $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|z_n - z| < \varepsilon$, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$.

Propoziția 1.10.5 Şirul de numere complexe $(z_n)_n$, cu $z_n = x_n + iy_n$, este convergent dacă şi numai dacă şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente. În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Definiția 1.10.6 Spunem că $(z_n)_n$ este un *şir Cauchy (fundamental)* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$.

Propoziția 1.10.7 Şirul $(z_n)_n$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt şiruri Cauchy.

Exemplul 1.10.8 Să se studieze convergența şirurilor de numere complexe cu termenul general:

a) $z_n = \dfrac{1}{2^n} + i\dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $z_n = (-1)^n + i\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$;

Soluție. a) Observăm că $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ şi $y_n = \dfrac{n}{n+1}$. Deoarece şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente, rezultă că şirul $(z_n)_n$ este convergent. Mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$.

b) Observăm că $x_n = (-1)^n$ şi $y_n = \frac{1}{n}$. Deoarece şirul $(x_n)_n$ este divergent, rezultă că şirul $(z_n)_n$ este divergent.

Definiția 1.10.9 Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ este *convergentă* şi are suma $s \in \mathbb{C}$, dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$, unde $s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$, este convergent şi are limita s.

Observația 1.10.10 Dacă $z_n = x_n + iy_n$, atunci seria de numere complexe poate fi scrisă $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Propoziția 1.10.11 Fie seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente.

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ are suma s dacă şi numai dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ au sumele s_1 şi s_2, respectiv, unde $s = s_1 + is_2$.

Propoziția 1.10.12 (*Condiția necesară de convergență*) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Definiția 1.10.13 Spunem că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este *absolut convergentă*, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă.

Definiția 1.10.14 Spunem că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este *semi–convergentă*, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă, iar $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este divergentă.

Propoziția 1.10.15 Dacă o serie de numere complexe este absolut convergentă, atunci seria este şi convergentă.

Observația 1.10.16 Pentru studiul convergenței absolute a seriilor de numere complexe se utilizează criteriile de convergență pentru serii cu termeni pozitivi. Pentru studiul naturii seriilor de numere complexe pot fi utilizate criteriile de convergență pentru seriile de numere reale.

Exemplul 1.10.17 Să se studieze convergența seriilor de numere complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{n^2} \right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i\frac{1}{n^2} \right)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{n}$.

Soluție. a) Seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{1}{n^2}\right)$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Deoarece cele două serii de numere reale sunt convergente, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{1}{n^2}\right)$ este convergentă.

b) Seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2}\right)$ îi ataşăm seriile numerice reale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Deoarece seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2}\right)$ este divergentă.

c) Facem notația $z_n=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Observăm că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $|z_n|=\frac{1}{n^2}$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ este absolut convergentă.

d) Facem notația $z_n=i\frac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{(-1)^n}{n}$ nu este absolut convergentă. Pe de altă parte, seriei de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{(-1)^n}{n}$ îi ataşăm seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ în care

$$x_n=0 \text{ şi } y_n=\frac{(-1)^n}{n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Deoarece cele două serii de numere reale sunt convergente, rezultă că seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă.

1.11 Şiruri şi serii de funcții în complex

1.11.1 Şiruri de funcții

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcții complexe definite pe mulțimea $E\subseteq\mathbb{C}$, $f_n:E\to\mathbb{C}$. Pentru orice $z\in E$, şirul $(f_n(z))_{n\geq 0}$ este un şir numeric care poate fi convergent sau divergent. Fie A mulțimea punctelor $z\in E$ în care $(f_n(z))_{n\geq 0}$ este convergent, mulțime care se numeşte *mulțimea de convergență a şirului* $(f_n)_{n\geq 0}$.

Definiția 1.11.1 Un şir de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge punctual* la o funcție f pe mulțimea A (*converge simplu* pe A) dacă $\forall z\in A$ şi $\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon,z)\in\mathbb{N}$ astfel încât, pentru $n\geq N(\varepsilon,z)$, să avem $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

Funcția limită este definită de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$, $\forall z\in A$.

Definiția 1.11.2 Dacă în definiția precedentă numărul N depinde numai de ε, nu şi de z, vom spune că şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ este *uniform convergent* pe A către f, adică:

Un şir de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniform* la o funcție f pe mulțimea A dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât, pentru $n\geq N(\varepsilon)$, să avem $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$, $\forall z\in A$.

1.11.2 Serii de funcții

Definiția 1.11.3 Fie $E\subset\mathbb{C}$ şi $(f_n)_n$ un şir de funcții, $f_n:E\to\mathbb{C}$. Seria notată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ care are proprietatea că pentru fiecare $z\in E$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ este o serie de numere complexe, se numeşte *serie de funcții complexe* pe mulțimea E

Definiția 1.11.4 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este *convergentă punctual* în punctul $z\in E$ către f dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$, $s_n=f_1+\ldots+f_n$, converge punctual în $z\in E$ către f.

Definiția 1.11.5 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este *uniform convergentă* pe mulțimea $E_1\subset E$ către f, $f:E_1\to\mathbb{C}$, dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ converge uniform pe E_1 către f.

Definiția 1.11.6 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|$ este convergentă.

Propoziția 1.11.7 (Criteriul lui Weierstrass) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este o serie de funcții pe mulțimea $E\subset\mathbb{C}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este o serie de numere pozitive astfel încât $|f_n(z)|\leq a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi $\forall z\in E$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea E.

Exemplul 1.11.8 Să se studieze convergența seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pe mulțimea D, unde $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$ şi $f_n:D\to\mathbb{C}$, $f_n(z)=\dfrac{z^n}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție. Observăm că $|f_n(z)|\le\dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, conform criteriului lui Weierstrass rezultă că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea D.

1.11.3 Serii de puteri

Definiția 1.11.9 Se numeşte *serie de puteri* o serie de forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots, \tag{1.11.1}$$

unde $a,\ z,\ c_n\in\mathbb{C}$, $n\ge 0$.

Pentru $a=0$, seria de puteri (1.11.1) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z+\ldots+c_n z^n+\ldots. \tag{1.11.2}$$

Definiția 1.11.10 Fie $f:E\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă şi $a\in E$ un punct arbitrar. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{1.11.3}$$

se numeşte *seria Taylor a funcției* f *în jurul punctului* a.

Teorema 1.11.11 Dacă $f:E\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ este olomorfă în E şi $a\in E$, atunci f se poate reprezenta în orice disc din E, $|z-a|<R$, prin seria Taylor

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{1.11.4}$$

Observația 1.11.12 Din (1.9.2) şi (1.11.4) rezultă că

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Observația 1.11.13 Seria Taylor în jurul punctului $a=0$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \tag{1.11.5}$$

se numeşte *seria MacLaurin*.

Exemplul 1.11.14 Serii MacLaurin importante:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{1.11.6}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{1.11.7}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{1.11.8}$$

Propoziția 1.11.15 (*Teorema lui Abel*) Pentru orice serie de puteri (1.11.2) există un unic număr $R \in [0, \infty]$, numit *rază de convergență*, care are următoarele proprietăți:

i) pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < R$, seria de puteri (1.11.2) este absolut convergentă;

ii) pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > R$, seria de puteri (1.11.2) este divergentă;

iii) pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| \le r < R$, seria de puteri (1.11.2) este uniform convergentă.

Definiția 1.11.16 Discul deschis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ se numeşte discul de *convergență al seriei de puteri*.

Observația 1.11.17 Teorema lui Abel nu dă nicio indicație cu privire la natura seriei în punctele cercului $|z| = R$. Din acest motiv, natura seriei în aceste puncte se va studia separat, folosind criteriile de convergență cunoscute.

Ca şi în cazul seriilor de puteri reale, raza de convergență se determină conform următoarei teoreme.

Teorema 1.11.18 (*Teorema Cauchy – Hadamard*) Fie seria de puteri (1.11.2) şi R raza sa de convergență.

i) Dacă $\exists \lim \sqrt[n]{|c_n|} = L$, atunci $R = \begin{cases} \frac{1}{L}, 0 < L < \infty, \\ \infty, L = 0, \\ 0, L = \infty. \end{cases}$

ii) Dacă $\exists \lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$, atunci $R = \begin{cases} \frac{1}{L}, 0 < L < \infty, \\ \infty, L = 0; \\ 0, L = \infty. \end{cases}$

Exemplul 1.11.19 Să se studieze natura seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Soluție. Aplicând formula de mai sus găsim că raza de convergență este

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 1.$$

Pentru $z = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ şi este o serie convergentă (criteriul lui Leibniz pentru serii alternate). Pentru $z = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ şi este o serie convergentă (serie armonică generalizată $\alpha = 2 > 1$). Deci, seria de puteri din enunț este convergentă pentru $z \in [-1, 1]$.

Exemplul 1.11.20 Să se studieze natura seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Soluție. Calculăm raza de convergență şi găsim

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1.$$

În punctul $z=-1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ şi este o serie convergentă, iar în punctul $z=1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ şi este o serie divergentă.

Exemplul 1.11.21 Să se studieze natura seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$.

Soluție. Calculăm raza de convergență şi găsim

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=0.$$

Deci, seria este convergentă numai pentru $z=0$.

Exemplul 1.11.22 Să se studieze natura seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$.

Soluție. Aplicând teorema Cauchy – Hadamard, avem:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0,$$

deci $R=\infty$. Cu alte cuvinte, seria converge în orice punct $z\in\mathbb{C}$.

Exemplul 1.11.23 Să se studieze natura seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}(z-1-i)^n$.

Soluție. Identificând $c_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Deci, raza de convergență este $R=\infty$. Aşadar, seria de puteri în jurul punctului $a=1+i$ este convergentă absolut pentru orice z, adică pentru $|z-1-i|<\infty$.

Exemplul 1.11.24 Să se studieze natura seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n(z-2i)^n$.

Soluție. Identificând $c_n=\left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{2n+5}=3.$$

Deci, raza de convergență este: $R=\frac{1}{3}$. Aşadar, seria de puteri este absolut convergentă pentru $|z-2i|<\frac{1}{3}$.

Exemplul 1.11.25 Să se dezvolte în serie MacLaurin funcția $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$.

Soluție. Seria MacLaurin a funcției este $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$, deci putem calcula coeficienții folosind această formulă. În acest caz, vom evita această metodă şi vom face apel la câteva cunoştințe cunoscute. Astfel, ştim că, pentru $|z|<1$, avem:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots.$$

Diferențiind termen cu termen această relație, obținem:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{d}{dz}1+\frac{d}{dz}z+\frac{d}{dz}z^2+\frac{d}{dz}z^3+\ldots,$$

adică

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.$$

Raza de convergență a acestei serii de puteri este $R=1$.

Exemplul 1.11.26 Să se dezvolte în serie Taylor funcția $f(z)=\frac{1}{1-z}$ în jurul punctului $a=2i$.

Soluție. Vom folosi şi aici seria geometrică de mai sus. Astfel,

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z+2i-2i}=\frac{1}{1-2i-(z-2i)}=\frac{1}{1-2i}\frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}.$$

Aşadar, dezvoltarea în serie Taylor a funcției a lui $\frac{1}{1-z}$ în jurul punctului $a=2i$ este:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-2i}\frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}=\frac{1}{1-2i}\left(1+\frac{z-2i}{1-2i}+\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^3+\ldots\right)$$

sau

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{(1-2i)^2}(z-2i)+\frac{1}{(1-2i)^3}(z-2i)^2+\frac{1}{(1-2i)^4}(z-2i)^3+\ldots.$$

1.11.3 Serii Laurent

Definiția 1.11.27 O expresie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{1.11.9}$$

se numeşte *serie Laurent*.

Observația 1.11.28 Seria Laurent generalizează noțiunea de serie de puteri.

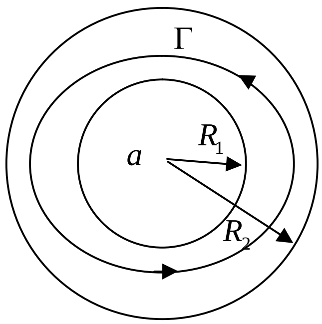
Observația 1.11.29 Expresia din (1.11.9) se mai poate scrie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

Definiția 1.11.30 Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ se numeşte *partea principală a seriei Laurent*.

Definiția 1.11.31 Seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ se numeşte *partea întreagă sau tayloriană a seriei Laurent.*

Teorema 1.11.32 (*Teorema lui Laurent*) Dacă o funcție $f(z)$ este olomorfă într-o coroană circulară $R_1 < |z-a| < R_2$ (vezi figura alăturată), atunci $f(z)$ are reprezentarea în serie Laurent



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \; R_1 < |z-a| < R_2. \tag{1.11.10}$$

Coeficienții c_n sunt unic determinați de expresia

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.11.11}$$

unde Γ este cercul $|\xi - a| = r$, cu $R_1 < r < R_2$.

Exemplul 1.11.33 Să se dezvolte în serie de puteri în jurul punctelor 0 şi -1 funcția $f(z) = \frac{2z^2 + 3z - 1}{z^3 + z^2 - z - 1}$.

Soluție. Funcția din enunț se mai scrie astfel:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Ştim că au loc egalitățile

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \; |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \; |z| < 1.$$

Din ultima egalitate deducem că

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) z^n, \; |z| < 1.$$

Punctul $z = 0$ este un punct în care funcția f este monogenă. Funcția f are următoarea dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului $z = 0$ în domeniul simplu conex $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1 + (-1)^n + (-1)^n (n+1)\right] z^n.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n, \; |z+1| < 2.$$

Vom obține o dezvoltare în serie Laurent în jurul punctului $z = -1$, în domeniul $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 2\}$, a cărei parte principală este $\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}$:

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n .$$

Exemplul 1.11.34 Să se dezvolte funcția $f(z)=\dfrac{2z^2-3z-3}{z^3-2z^2+z-2}$ într-o serie de puteri în domeniul $D=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ şi apoi în domeniul . $E=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$.

Soluție. Funcția din enunț se mai scrie astfel:

$$f(z)=\frac{2z^2-3z-3}{z^3-2z^2+z-2}=\frac{-\frac{1}{5}}{z-2}+\frac{\frac{11}{5}z}{1+z^2}+\frac{\frac{7}{5}}{1+z^2}$$

sau

$$f(z)=\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{11}{5z}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}+\frac{7}{5z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}.$$

Astfel, din ultima relație, rezultă că:

$$f(z)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\frac{11}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}+\frac{7}{5z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}},\ z\in D$$

sau

$$f(z)=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{11}{z^{2n+1}}+\frac{7}{z^{2n+2}}\right)+\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n},\ z\in D.$$

În cel de-al doilea caz, domeniul este simplu conex. Dezvoltarea în serie Taylor a funcției f este:

$$f(z)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\frac{11}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}+\frac{7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}},\ z\in E.$$

Exemplul 1.11.35 Să se dezvolte funcția $f(z)=\dfrac{8z+1}{z(1-z)}$ în serie Laurent în domeniul $D=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$.

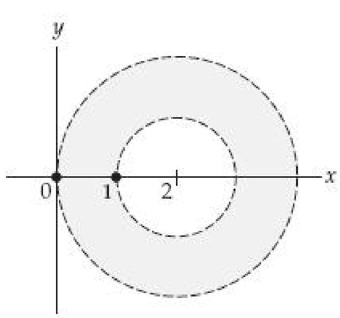
Soluție. Funcția f se rescrie astfel :

$$f(z)=\frac{8z+1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{9}{1-z}.$$

Deci, seria Laurent a funcției f pe domeniul D este:

$$f(z)=\frac{1}{z}+9+9z+9z^2+9z^3+\ldots,\ 0<|z|<1.$$

Exemplul 1.11.36 Să se dezvolte funcția $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ în serie Laurent în domeniul $D=\{z\in\mathbb{C}:1<|z-2|<2\}$.



Soluție. Domeniul D din enunț este reprezentat în figura alăturată. Funcția f se rescrie astfel:

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}=f_1(z)+f_2(z).$$

Acum,

$$f_1(z)=-\frac{1}{z}=-\frac{1}{2+z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-2}{2}+\frac{(z-2)^2}{2^2}-\frac{(z-2)^3}{2^3}+\dots\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{z-2}{2^2}-\frac{(z-2)^2}{2^3}+\frac{(z-2)^3}{2^4}+\dots.$$

Seria este convergentă pentru $\left|\frac{z-2}{2}\right|<1$, adică $|z-2|<2$. Mai departe,

$$f_2(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+z-2}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\left[1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^4}\dots,$$

serie convergentă pentru $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$, adică $1<|z-2|$.

Aşadar, pentru funcția din enunț avem:

$$f(z)=\dots-\frac{1}{(z-2)^4}+\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2}+\frac{z-2}{2^2}-\frac{(z-2)^2}{2^3}+\frac{(z-2)^3}{2^4}+\dots$$

pentru $1<|z-2|<2$.

1.12 Puncte singulare ale funcțiilor olomorfe

Fie D un domeniu din $\mathbb{C}$ şi $f:D\to\mathbb{C}$ o funcție complexă.

Definiția 1.12.1 Spunem că punctul $a\in D$ este un *punct ordinar* pentru f dacă există o vecinătate a sa în care f este olomorfă.

Definiția 1.12.2 Punctele care nu sunt puncte ordinare se numesc *puncte singulare* ale funcției, adică:

Spunem că punctul $a\in D$ este un *punct singular* al funcției f dacă în orice vecinătate a sa se găsesc atât puncte în care f este olomorfă, cât şi puncte în care f sau nu este olomorfă, sau nu este definită.

Definiția 1.12.3 Spunem că punctul $a\in D$ este un *punct singular izolat* al funcției f dacă există o vecinătate V a sa astfel încât f este olomorfă pe $V\setminus\{a\}$.

Definiția 1.12.4 Spunem că punctul singular izolat $a\in D$ este *pol simplu* al funcției f dacă există şi este infinită limita: $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

Definiția 1.12.5 Spunem că punctul $a\in D$ este un *pol de ordin* $n\in\mathbb{N}^*$ al funcției f dacă a este un punct singular pentru funcția f şi are loc relația:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},\ z\in D\setminus\{a\},$$

unde $\varphi : D\cup\{a\}\to\mathbb{C}$ este o funcţie pentru care a este un punct ordinar şi $\varphi(a)\neq 0$.

Definiția 1.12.6 Spunem că punctul $a\in D$ este un *punct singular esențial* al funcției $f : D\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ dacă a este un punct singular izolat pentru f şi nu există $\lim\limits_{x\to a} f(z)$.

Definiția 1.12.7 (*Punctul de la infinit*) Funcția $\psi:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, definită prin $\psi(z)=\dfrac{1}{z}$ este o bijecție. Prelungim această funcție ataşând lui $z=0$ un punct unic care se notează ∞ şi se numeşte *punctul de la infinit*. Mulțimea $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ se numeşte *planul complex extins*. Mulțimea $\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$ este vecinătate a punctului ∞. Punctul $z=\infty$ este un punct ordinar (respectiv, singular) pentru o funcție f dacă punctul $z=0$ este punct ordinar (respectiv, singular de aceeaşi natură) pentru funcția $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Exemplul 1.12.8 Să se studieze natura punctului de la infinit şi singularitățile din mulțimea $\mathbb{C}$ pentru funcțiile următoare:

a) $f(z)=z^2+1$;

b) $f(z)=\dfrac{z+2i}{z(z-1)^3}$;

c) $f(z)=\dfrac{z^{11}}{(z-1)^5(z^2+4)^2}$;

d) $f(z)=e^z$.

Soluție. a) Deoarece punctul $z=0$ este un pol de ordin 2 pentru funcția $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1+z^2}{z^2}$, rezultă că punctul $z=\infty$ este pol de ordin 2 pentru funcția f.

b) Punctul $z=0$ este pol simplu, iar punctul $z=1$ este pol triplu. Deoarece punctul $z=0$ este punct ordinar pentru funcția $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)=z^3\dfrac{1+2iz}{(1-z)^3}$, rezultă că punctul $z=\infty$ este punct ordinar pentru funcția f.

c) Punctul $z=1$ este pol de ordin 5, punctul $z=2i$ este pol dublu, iar punctul $z=-2i$ este, de asemenea, pol dublu. Punctul $z=\infty$ este pol dublu pentru f.

d) Punctul $z=0$ este punct singular izolat pentru funcția $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)=e^{\frac{1}{z}}$. Pe de altă parte,

$$g(z)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\frac{y}{x^2+y^2}-i\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} g\left(-\frac{1}{n},0\right)=\lim_{n\to\infty} e^{-n}=0,$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n},0\right)=\lim_{n\to\infty} e^{n}=\infty .$$

Deoarece nu există $\lim_{z\to 0} g(z)$, rezultă că punctul $z=0$ este punct singular esențial pentru funcția g.
În concluzie, $z=\infty$ este punct singular esențial pentru funcția f.

Exemplul 1.12.9 Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația:

$$\sin z = 10 .$$

Soluție. Ecuația devine

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=10,$$

sau

$$e^{iz}-e^{-iz}-20i=0,$$

adică

$$e^{2iz}-20ie^{iz}-1=0 .$$

Notând $e^{iz}=u$, ultima relație devine:

$$u^2-20iu-1=0,$$

cu soluțiile

$$u_{1,2}=\left(10\pm\sqrt{99}\right)i .$$

Relația $e^{iz}=\left(10+\sqrt{99}\right)i$ este echivalentă cu relația

$$e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)=\left(10+\sqrt{99}\right)i,$$

de unde se obține sistemul:

$$\begin{cases} e^{-y}\cos x=0, \\ e^{-y}\sin x=10+\sqrt{99}. \end{cases}$$

Din cea de-a doua ecuație a sistemului rezultă că $\sin x>0$. Deoarece, din prima ecuație, $\cos x=0$, rezultă că $\sin x=1$ şi, mai departe, că $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. De asemenea, din cea de-a doua ecuație, găsim că $y=\ln\left(10-\sqrt{99}\right)$. Aşadar, am obținut o primă familie de soluții, şi anume:

$$z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi+i\ln\left(10-\sqrt{99}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

În mod analog, din relația $e^{iz}=\left(10-\sqrt{99}\right)i$, găsim

$$z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi+i\ln\left(10+\sqrt{99}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Observăm că putem scrie familia tuturor soluțiilor sub forma

$$z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln\left(10+\sqrt{99}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

1.13 Teorema reziduurilor

Definiția 1.13.1 Fie a un punct singular izolat al funcției olomorfe f. Se numeşte *reziduul funcției* f *în* a, şi se notează $rez(f,a)$, coeficientul lui $(z-a)^{-1}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în $0<|z-a|<r$:

$$rez(f,a)=c_{-1}, \text{ adică } rez(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz. \tag{1.13.1}$$

Propoziția 1.13.2 Dacă $z=a$ este un pol de ordin n, atunci:

$$rez(f,a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}. \tag{1.13.2}$$

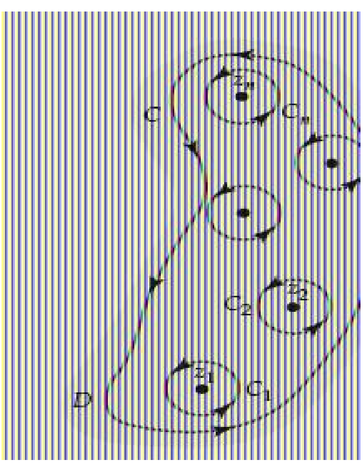
Propoziția 1.13.3 Dacă $z=a$ este un pol simplu al lui f, iar f este o funcție rațională, $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, cu g şi h funcții olomorfe într-o vecinătate a lui a, $g(a)\neq 0$, $h(a)=0$ şi $h'(a)\neq a$, atunci:

$$rez(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{1.13.3}$$

Teorema 1.13.4 (*Teorema reziduurilor*) Fie f o funcție olomorfă într-un domeniu simplu conex D şi C o curbă simplă închisă şi netedă pe porțiuni conținută în D. Dacă în interiorul domeniului mărginit de curba C, funcția f are un număr finit de puncte singulare izolate $a_1,\ldots,a_n$, atunci:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} rez(f,a_k). \tag{1.13.4}$$

Demonstrație. Pentru fiecare punct a_k vom considera un cerc C_k cu centrul în a_k şi cu raza suficient de mică astfel ca în interiorul lui C_k să nu se mai afle altă singularitate a lui f diferită de a_k şi astfel încât cercurile $C_1,\ldots,C_n$ să nu aibă puncte comune şi să fie conținute în interiorul mărginit de curba C. Din teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe rezultă:



$$\oint_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\ldots+\int_{C_n} f(z)dz. \tag{1.13.5}$$

Deoarece, din relația (1.13.1) avem: $\int_{C_k} f(z)dz=2\pi i\cdot rez(f,a_k)$, $k=\overline{1,n}$, prin înlocuire în (1.13.5), obținem:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} rez(f,a_k).$$

Exemplul 1.13.5 Să se calculeze integrala:

$$I=\int_C \frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}dz, \text{ unde } C:|z|=2.$$

Soluție. Determinăm polii funcției $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z}}{z^2+1}$. Pentru aceasta rezolvăm ecuația $z^2+1=0$. Aceasta are rădăcinile $z_1=-i$ și $z_2=i$. Se observă că ambii poli ai funcției se află în interiorul cercului $|z|=2$. Din teorema reziduurilor, obținem:

$$I=2\pi i\left(rez\left(f,z_1\right)+rez\left(f,z_2\right)\right).$$

Pentru calculul reziduurilor funcției f în punctele $z_1=-i$ şi, respectiv $z_2=i$, vom aplica formula din (1.13.3). Astfel, avem:

$$rez\left(f,-i\right)=\left.\frac{e^{i\pi z}}{2z}\right|_{z=-i}=\frac{e^{\pi}}{-2i} \text{ şi } rez\left(f,i\right)=\left.\frac{e^{i\pi z}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{e^{-\pi}}{2i}.$$

Aşadar, $I=\pi\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)$.

Exemplul 1.13.6 Să se calculeze integrala:

$$I=\int_{|z|=2}\frac{dz}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}.$$

Soluție. Singurul pol al funcției $f(z)=\dfrac{1}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}$ care se află în interiorul cercului $|z|=2$ este $z=1$. Aplicând teorema reziduurilor, avem:

$$I=\int_{|z|=2}\frac{dz}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}=2\pi i rez\left(f,i\right)=2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}i.$$

Exemplul 1.13.7 Să se calculeze integrala:

$$I=\int_{|z-i|=2}\frac{2z+6}{z^2+4}dz.$$

Soluție. Numitorul se descompune astfel: $z^2+4=\left(z-2i\right)\left(z+2i\right)$. Se observă astfel că funcția $f(z)=\dfrac{2z+6}{z^2+4}$ are polii simpli $z_1=2i$ și $z_2=-2i$. Deoarece numai polul $z_1=2i$ se află în interiorul cercului $|z-i|=2$, din teorema reziduurilor rezultă că:

$$I=\int_{|z-i|=2}\frac{2z+6}{z^2+4}dz=2\pi i\cdot rez\left(f,2i\right).$$

Dar,

$$rez\left(f,2i\right)=\lim_{z\to 2i}\left(z-2i\right)\frac{2z+6}{\left(z-2i\right)\left(z+2i\right)}=\frac{6+4i}{4i}=\frac{3+2i}{2i}.$$

Deci,

$$I=2\pi i\cdot\frac{3+2i}{2i}=\pi\left(3+2i\right).$$

Exemplul 1.13.8 Să se calculeze integrala:

$$I=\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^4+5z^3}dz.$$

Soluție. Deoarece numitorul se mai poate scrie: $z^4+5z^3=z^3(z+5)$, rezultă că funcția $f(z)=\dfrac{e^z}{z^4+5z^3}$ are polul simplu $z_1=-5$ şi polul triplu $z_2=0$, dar numai $z_2=0$ se află în interiorul cercului $|z|=2$. Din formulele (1.13.4) şi (1.13.2), rezultă:

$$I=\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^4+5z^3}dz=2\pi i\cdot rez(f,0)=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{e^z}{z^3(z+5)}\right]^{(2)}=$$

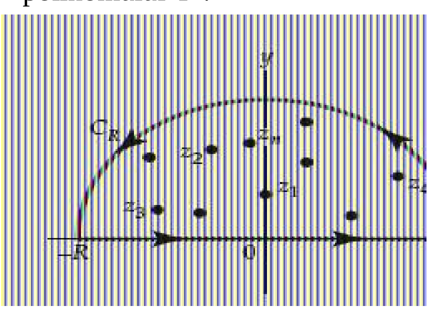
$$=\pi i\cdot\lim_{z\to 0}\frac{(z^2+8z+17)e^z}{(z+5)^3}=\frac{17\pi}{125}i.$$

1.14 Aplicații ale teoremei reziduurilor la calculul unor integrale reale

Lema 1.14.1 (Jordan) Dacă f este continuă în exteriorul unui cerc cu centrul în a, exceptând eventual punctul de la infinit, şi dacă $\lim_{|z-a|\to\infty}(z-a)f(z)=0$, atunci $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$, unde Γ este un arc de cerc cu centrul în a şi de rază R.

1.14.1 Integrale de tipul $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

unde P şi Q sunt polinoame cu $Q(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $grQ\geq 2+grP$, unde grP reprezintă gradul polinomului P.



Fie $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Integrăm funcția f pe curba C formată din segmentul $[-R,R]$ de pe axa reală şi semicercul C_R din semiplanul superior, cu raza aleasă astfel încât în interiorul lui C să fie toți polii funcției care se găsesc în semiplanul $y\geq 0$. Conform teoremei reziduurilor, avem:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}rez(f,z_k), \tag{1.14.1}$$

unde $z_1,\ldots,z_n$ sunt polii funcției $f(z)$, cu $\operatorname{Im} z_k>0$, $k=\overline{1,n}$. Dar,

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz. \tag{1.14.2}$$

Deci,

$$\int_{-R}^{R}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}rez(f,z_k). \tag{1.14.3}$$

Trecând la limită după $R\to\infty$ în ultima relație, obținem:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)dz + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n} rez(f, z_k)\right). \tag{1.14.4}$$

Dar, $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = I$. Cum $grQ \geq 2 + grP$, rezultă că $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = \lim_{|z|\to\infty}\frac{zP(z)}{Q(z)} = 0$.

Deci, din lema 1.14.1 avem că: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz$. Aşadar, relația (1.14.4) devine:

$$I = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} rez(f, z_k),\ \text{cu}\ \operatorname{Im} z_k > 0. \tag{1.14.5}$$

Exemplul 1.14.2 Utilizând teorema reziduurilor, să se calculeze următoarea integrală:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}.$$

Soluție. Vom aplica formula din relația (1.14.5). Pentru aceasta, trebuie să găsim polii funcției $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ cu partea imaginară mai mare decât zero. Rezolvând ecuația $z^4+1=0$, găsim rădăcinile

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),\ z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Dintre aceşti poli, numai z_0 şi z_1 au partea imaginară mai mare decât zero. Deci,

$$I = 2\pi i\left(rez(f, z_0) + rez(f, z_1)\right).$$

Calculăm cele două reziduuri aplicând formula din (1.13.3). Avem:

$$rez(f, z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)},$$

$$rez(f, z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}.$$

Aşadar,

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)} + \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exemplul 1.14.3 Utilizând teorema reziduurilor, să se calculeze integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Soluție. Fie $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$. Cum $(z^2+1)(z^2+9) = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)$, rezultă că polii funcției sunt: $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3i$ şi $z_4 = -3i$. Alegem doar polii cu partea imaginară mai mare decât zero, adică: $z_1 = i$ şi $z_3 = 3i$. Aplicând formula (1.14.5), avem că:

$$I = 2\pi i \cdot \left[rez\left(f,i \right) + rez\left(f,3i \right) \right] = 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i} \right] = \frac{\pi}{12}.$$

Exemplul 1.14.4 Utilizând teorema reziduurilor, să se calculeze integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}.$$

Soluție. Fie $f\left(z\right) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$. Observăm că funcția f are polii simpli $z_1 = -i$ şi $z_2 = i$.

Aplicând formula (1.14.5), obținem:

$$I = 2\pi i \cdot rez\left(f,i \right).$$

Aplicând formula (1.13.2) pentru calculul reziduului unui pol multiplu, obținem:

$$rez\left(f,i \right) = \lim_{z\to i} \frac{1}{3!}\left[\left(z-i\right)^4 \frac{1}{\left(z^2+1\right)^4} \right]^{(3)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{3!}\left[\left(z-i\right)^4 \frac{1}{\left(z-i\right)^4\left(z+i\right)^4} \right]^{(3)} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{3!}\left[\frac{1}{\left(z+i\right)^4} \right]^{(3)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{6}\left[-\frac{4}{\left(z+i\right)^5} \right]^{(2)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{6}\left[\frac{4\cdot 5}{\left(z+i\right)^6} \right]' =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{6}\left[\frac{-4\cdot 5\cdot 6}{\left(z+i\right)^7} \right] = -\frac{20}{2^7 i^7} = \frac{5}{32i}.$$

Deci, $I = 2\pi i \cdot \dfrac{5}{32i} = \dfrac{5\pi}{16}$.

1.14.2 Integrale de tipul $I = \int_0^{2\pi} R\left(\sin\theta, \cos\theta\right) d\theta$

unde R este o funcție rațională de $\sin\theta$ şi $\cos\theta$.

Efectuând schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$, când θ parcurge intervalul $\left[0, 2\pi\right]$, z descrie cercul $\left|z\right| = 1$. Din formula lui Euler, avem

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ şi } e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Din aceste formule, obținem expresiile lui $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ în funcție de $e^{i\theta}$, şi anume:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \text{ şi } \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Deci,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ şi } \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \qquad (1.14.6)$$

Prin diferențierea relației $z = e^{i\theta}$, rezultă:

$$d\theta = \frac{1}{iz}dz. \qquad (1.14.7)$$

Prin înlocuire, integrala devine:

$$I=\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1} R_1(z)dz=2\pi i\sum_k rez(R_1,a_k),$$

unde a_k sunt polii lui R_1 care se află în interiorul cercului $|z|=1$.

Exemplul 1.14.5 Utilizând teorema reziduurilor, să se calculeze integrala:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\theta}{5+4\sin\theta}d\theta .$$

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $z=e^{i\theta}$. Din cele de mai sus, rezultă:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{5+4\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{z^2+2z+1}{2z\left(2z^2+5iz-2\right)}dz .$$

Funcția $f(z)=\frac{z^2+2z+1}{2z\left(2z^2+5iz-2\right)}$ are polii $z_1=0$, $z_2=-2i$ şi $z_3=-\frac{i}{2}$. Dintre aceştia doar z_1 şi z_3 se află în interiorul cercului $|z|=1$. Deci,

$$I=\int_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i\left(rez(f,z_1)+rez(f,z_3)\right).$$

Calculând reziduurile, obținem:

$$rez(f,0)=-\frac{1}{4},\ rez\left(f,-\frac{i}{2}\right)=\frac{3-4i}{12}.$$

Aşadar,

$$I=2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{3-4i}{12}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Exemplul 1.14.6 Utilizând teorema reziduurilor, să se calculeze integrala:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}.$$

Soluție. Facând schimbarea de variabilă $z=e^{i\theta}$, avem $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, deci:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}=\int_{|z|=1}\frac{1}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}dz .$$

Funcția $f(z)=\frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}$ are polii $z_1=-2-\sqrt{3}$ şi $z_2=-2+\sqrt{3}$, dar doar $z_2=-2+\sqrt{3}$ se află în interiorul cercului $|z|=1$. Deci,

$$\int_{|z|=1}\frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}dz=2\pi i\cdot rez(f,z_2).$$

Dar,

$$rez\left(f,-2+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{6\sqrt{3}},$$

deci,

$$\int_{|z|=1}\frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi i}{3\sqrt{3}}.$$

Aşadar,

$$I=\frac{4}{i}\frac{\pi i}{3\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exemplul 1.14.7 Utilizând teorema reziduurilor, să se calculeze integrala:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta,\ a>1,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Soluție. Să considerăm şi integrala

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta.$$

Ne propunem să calculăm valoarea expresiei $I+iJ$. Avem:

$$I+iJ=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta.$$

Facând schimbarea de variabilă $z=e^{i\theta}$, avem:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\ \text{ şi }\ d\theta=\frac{1}{iz}dz.$$

Astfel,

$$I+iJ=\int_0^{2\pi}\frac{\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{z^n}{1-2a\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+a^2}\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{az^2-\left(1+a^2\right)z+a}dz.$$

Observăm că funcția $f(z)=\dfrac{z^n}{az^2-\left(1+a^2\right)z+a}$ are polii simpli $z_1=\dfrac{1}{a}$ şi $z_2=a$, dar numai punctul $z_1=\dfrac{1}{a}$ se află în interiorul cercului $|z|=1$. Aplicând teorema reziduurilor, avem că:

$$\int_{|z|=1}\frac{z^n}{az^2-\left(1+a^2\right)z+a}dz=2\pi i\cdot rez\left(f,\frac{1}{a}\right),$$

şi folosind formula (1.13.3), obținem:

$$\int_{|z|=1}\frac{z^n}{az^2-\left(1+a^2\right)z+a}dz=2\pi i\cdot\frac{\frac{1}{a^n}}{1-a^2}.$$

Aşadar,

$$I + iJ = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{1-a^2} = \frac{2\pi}{a^n\left(1-a^2\right)},$$

de unde,

$$I = \frac{2\pi}{a^n\left(1-a^2\right)} \text{ şi } J = 0\,.$$

CUPRINS

2. TEORIA CÂMPURILOR

2.1 Introducere

Pentru început vom reaminti câteva noțiuni generale despre *sistemele simetrice*.

Definiția 2.1.1 Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi se numeşte *sistem simetric* dacă are forma

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{P_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,\dots,x_n)}, \tag{2.1.1}$$

unde funcțiile $P_k(x_1,\dots,x_n)$, $k=\overline{1,n}$, nu se anulează simultan pentru $(x_1,\dots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$.

Soluția generală a sistemului (2.1.1) este de forma

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n)=C_1 \\ F_2(x_1,\dots,x_n)=C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=C_{n-1}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

unde $F_1,F_2,\dots,F_{n-1}$ sunt continue cu derivatele parțiale de ordinul întâi continue în $D\subset\mathbb{R}^n$.

Orice relație $F_k(x_1,\dots,x_n)=C_k$, $k=\overline{1,n-1}$, se numeşte *integrală primă*. Din cele de mai sus, rezultă că dacă se cunosc $n-1$ integrale ale sistemului (2.1.1), se cunoaşte soluția generală a sistemului (2.1.1).

Din (2.1.1) avem egalitatea

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\dots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+\dots+\lambda_n dx_n}{\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\dots+\lambda_n P_n}, \tag{2.1.3}$$

unde $\lambda_k(x_1,\dots,x_n)$, $k=\overline{1,n}$, sunt funcții arbitrare continue în D.

Definiția 2.1.2 Un sistem de n funcții $\lambda_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\lambda_n(x_1,\dots,x_n)$ continue în D care îndeplinesc condițiile

$$\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+\dots+\lambda_n dx_n=d\Phi$$
$$\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\dots+\lambda_n P_n=0,$$

pentru orice $(x_1,\dots,x_n)\in D$, se numeşte o combinație integrabilă a sistemului (2.1.1) în D.

Funcția $\Phi(x_1,\dots,x_n)=C$ a cărei diferențială totală în D este $\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+\dots+\lambda_n dx_n$ este o *integrală primă* a sistemului (2.1.1). Dacă se determină $n-1$ combinații integrabile distincte, se obțin $n-1$ integrale prime, care dau *soluția generală* a sistemului (2.1.1) sub forma (2.1.2).

Exemplul 2.1.3 Folosind metoda combinațiilor integrabile, să se determine soluția sistemului:

$$\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_3}=\frac{dx_3}{x_2-x_1}.$$

Soluție. Sistemul dat poate fi scris sub forma

$$\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_3}=\frac{dx_3}{x_2-x_1}=\frac{dx_1+dx_2+dx_3}{0}=\frac{x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3}{0}.$$

De aici, rezultă că $dx_1+dx_2+dx_3=0$ şi $x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3=0$. Soluția generală va fi formată din două integrale prime: $x_1+x_2+x_3=C_1$ şi $x_1^2+x_2^2+x_3^2=C_2$.

Exemplul 2.1.4 Să se rezolve sistemul simetric:

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}.$$

Soluție. Avem:

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}=\frac{dx+dy+dz}{0}=\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{0}$$

şi prin integrare obținem:

$$x+y+z=C_1,\ xyz=C_2.$$

Exemplul 2.1.5 Să se rezolve sistemul simetric:

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{x(2-y)}=\frac{dz}{1+z^2}.$$

Soluție. Din prima şi ultima fracție, obținem prima integrală primă:

$$arctgx-arctgz=C_1,$$

iar din primele două:

$$\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{dy}{2-y},\text{ adică }\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=-\ln(2-y)+C_2,$$

deci, a doua integrală primă este:

$$\left(1+x^2\right)(2-y)^2=C_2.$$

2.2 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare şi omogene

Definiția 2.2.1 O relație de forma

$$P_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{2.2.1}$$

cu $P_k(x_1,\dots,x_n)$, $k=\overline{1,n}$ continue şi care nu se anulează simultan într-un domeniu $D\subset\mathbb{R}^n$, se numeşte *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniară și omogenă* dacă se cere să se determine funcția $u=u(x_1,\dots,x_n)$ având derivatele parțiale de ordinul întâi continue care verifică relația (2.2.1).

Definiția 2.2.2 Sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{P_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,\dots,x_n)} \tag{2.2.2}$$

definit în D se numeşte *sistem caracteristic* al ecuației cu derivate parțiale (2.2.1).

Observația 2.2.3 Problema integrării ecuației cu derivate parțiale (2.2.1) se reduce la problema integrării sistemului caracteristic (2.2.2), aşa după cum reiese din următoarea teoremă.

Teorema 2.2.4 Dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)=C$ este o integrală primă a sistemului caracteristic (2.2.2), atunci funcția $u=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (2.2.1).

Demonstrație. Integrala primă $\varphi(x_1,\dots,x_n)=C$ are diferențiala nulă de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (2.2.2)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{2.2.3}$$

Însă, de-a lungul unei curbe integrale, diferențialele $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sunt proporționale cu $P_1, P_2, \ldots, P_n$ conform relațiilor (2.2.2). Aşadar, egalitatea (2.2.3) mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} P_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} P_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} P_n = 0, \tag{2.2.4}$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n)$ situat pe o curbă integrală a sistemului (2.2.2). Egalitatea (2.2.4) fiind adevărată pentru orice constantă C, este adevărată pentru orice curbă integrală a sistemului (2.2.2) situată în D. Prin urmare, $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (2.2.1).

Teorema 2.2.5 Fie ecuația cu derivate parțiale (2.2.1) şi fie $n-1$ integrale prime (independente) ale sistemului caracteristic (2.2.2), $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = C_k$, $k = \overline{1, n-1}$. Funcția $u(x_1, \ldots, x_n)$ dată de

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \Phi\left(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (2.2.1), unde Φ este o funcție arbitrară, $\Phi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$.

Exemplul 2.2.6 Să se determine soluția generală a ecuației:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție. Sistemul caracteristic corespunzător acestei ecuații este:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

care are integrala primă $x^2 - y^2 = C$, deci soluția generală a ecuației este

$$u(x, y) = \Phi\left(x^2 - y^2\right),$$

unde Φ este o funcție arbitrară, $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$.

Exemplul 2.2.7 Să se determine soluția generală a ecuației:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Soluție. Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2}.$$

Din $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy}$, adică $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$, rezultă integrala primă $xy = C_1$. Din a doua egalitate $\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2}$ şi ținând cont de prima integrală, obținem $y^3 + 3xyz = C_2$. Aşadar, soluția generală a ecuației este

$$u(x, y) = \Phi\left(xy, y^3 + 3xyz\right),$$

unde Φ este o funcție arbitrară, $\Phi \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Exemplul 2.2.8 Să se determine soluția generală a ecuației:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Soluție. Sistemul caracteristic corespunzător este:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Din primele două, rezultă:

$$\ln x = \ln y + C_1,$$

adică,

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Amplificând cu x prima fracție şi cu y a doua fracție, avem:

$$\frac{xdx}{x^2} = \frac{ydy}{y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{zdz}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

de unde,

$$\frac{d\left(x^2 + y^2\right)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = zdz.$$

Deci, a doua integrală primă este:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - z^2 = C_2.$$

2.3 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare

Definiția 2.3.1 O relație de forma

$$P_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + P_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u), \qquad (2.3.1)$$

cu $P_k(x_1,\ldots,x_n,u)$, $k = \overline{1,n+1}$, continue şi care nu se anulează simultan într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, se numeşte *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară* dacă se cere să se determine funcția $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ având derivatele parțiale de ordinul întâi continue care verifică relația (2.3.1).

Pentru determinarea soluțiilor unei ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare (2.3.1) se procedează astfel:

i) se scrie sistemul caracteristic corespunzător ecuației (2.3.1), adică:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_{n+1}}. \qquad (2.3.2)$$

ii) folosind metoda combinațiilor integrabile se determină cele n integrale prime:

$$F_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = C_k,\ k = \overline{1,n}. \qquad (2.3.3)$$

iii) soluția generală a ecuației cvasiliniare (2.3.1) este dată sub forma implicită de relația:

$$\Phi(F_1,F_2,\ldots,F_n) = 0.\ \Phi \in C^1(\mathbb{R}^n). \qquad (2.3.4)$$

Exemplul 2.3.2 Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale:

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x} + x^2y\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 + y^2\right)\cdot u.$$

Soluție. Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{du}{\left(x^2 + y^2\right)u}.$$

Din $\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{x^2y}$, adică $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$, rezultă integrala primă $x^2-y^2=C_1$. Pentru a doua integrală primă procedăm în felul următor:

$$\frac{ydx}{xy^3}=\frac{xdy}{x^3y}=\frac{ydx+xdy}{xy^3+x^3y}=\frac{ydx+xdy}{xy\left(x^2+y^2\right)}=\frac{du}{\left(x^2+y^2\right)u}.$$

Deci,

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$$

şi prin integrare, obținem a doua integrală primă:

$$\frac{xy}{u}=C_1.$$

Aşadar, soluția generală a ecuației este:

$$\Phi\left(x^2-y^2,\frac{xy}{u}\right)=0,$$

unde Φ este o funcție arbitrară, $\Phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Exemplul 2.3.3 Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale:

$$2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2\frac{\partial z}{\partial y}+6x^2y=0.$$

Soluție. Sistemul caracteristic corespunzător ecuației cvasiliniare din enunț este:

$$\frac{dx}{2y}=\frac{dy}{3x^2}=\frac{dz}{-6x^2y}.$$

Din prima egalitate rezultă:

$$3x^2dx=2ydy,$$

deci obținem integrala primă:

$$x^3-y^2=C_1.$$

Din prima şi ultima fracție, obținem:

$$-3x^2dx=dz,$$

adică cea de-a doua integrală primă:

$$x^3+z=C_2.$$

Soluția generală a ecuației este funcția $z=z(x,y)$ dată implicit de ecuația:

$$\Phi\left(x^3-y^2,x^3+z\right)=0,$$

unde Φ este o funcție arbitrară, $\Phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Exemplul 2.3.4 Să se determine suprafața dată de ecuația:

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2,$$

care conține curba

$$\Gamma:\begin{cases}x=2\\ y^2+z^2=y.\end{cases}$$

Soluție. Vom găsi mai întâi curbele caracteristice, adică soluțiile sistemul simetric:

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}.$$

Din primele două rapoarte rezultă imediat că:

$$\frac{y}{x}=C_1.$$

Amplificând prima fracție cu x, a doua cu y şi a treia cu z, obținem:

$$\frac{xdx}{2x^2z}=\frac{ydy}{2y^2z}=\frac{zdz}{z^3-x^2z-y^2z}=\frac{xdx+ydy+zdz}{z^3+x^2z+y^2z},$$

deci,

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2z\left(x^2+y^2+z^2\right)},$$

adică

$$\frac{dx}{x}=\frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Aşadar, a doua integrală primă este:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x}=C_2.$$

Pentru a găsi suprafața care trece prin curba Γ formăm sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=C_1\\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x}=C_2\\ x=2\\ y^2+z^2=y.\end{cases}$$

Eliminând necunoscutele x,y,z se obține condiția de compatibilitate

$$C_2-C_1=2,$$

care conduce la

$$x^2+y^2+z^2-y-2x=0.$$

2.4 Câmp scalar. Câmp vectorial

Definiția 2.4.1 Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu. Se numeşte *câmp scalar* o funcție $\varphi:D\to\mathbb{R}$.

Observația 2.4.2 Pentru valoarea câmpului φ în punctului $P\in D$ scriem $\varphi(P)$ sau $\varphi(x,y,z)$ dacă (x,y,z) reprezintă coordonatele punctului P.

Definiția 2.4.3 Se numeşte *suprafață de nivel* a câmpului scalar φ mulțimea tuturor punctelor din D în care φ ia aceeaşi valoare. Ecuația unei suprafețe de nivel este, în general:

$$\varphi(x,y,z)=C, \tag{2.4.1}$$

iar ecuația unei suprafețe de nivel care conține punctul $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)\in D$ este:

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(x_0,y_0,z_0). \tag{2.4.2}$$

Pornind dintr-un punct P_0 al suprafeței de nivel $\varphi(P)=\varphi(P_0)$ şi deplasând punctul P, el va descrie un arc de curbă P_0P despre care presupunem că admite o tangentă determinată în punctul P_0.

Fie $\vec{s}$ versorul acestei tangente:

$$\vec{s}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}.$$

Definiția 2.4.4 Se numeşte *derivată a câmpului scalar* φ *pe direcția versorului* $\vec{s}$ următoarea limită:

$$\lim_{l_{P_0P}\to\infty}\frac{\varphi(P)-\varphi(P_0)}{l_{P_0P}}\overset{not.}{=}\left(\frac{d\varphi}{d\vec{s}}\right)_{P_0}, \tag{2.4.3}$$

unde l_{P_0P} reprezintă lungimea arcului P_0P.

Teorema 2.4.5 Dacă $\varphi\in C^1(D)$, atunci există derivata câmpului φ după direcția $\vec{s}$, expresia acesteia fiind:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}=\cos\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2.4.4}$$

unde toate derivatele sunt calculate în punctul P_0.

Observația 2.4.6 Relația (2.4.4) se numeşte *expresia carteziană a derivatei câmpului scalar* φ *după direcția* $\vec{s}$.

Teorema 2.4.7 Dacă $\vec{n}$ este normala la suprafața de nivel S a câmpului scalar $\varphi\in C^1(D)$ în punctul P_0, iar θ este unghiul dintre normala $\vec{n}$ şi o direcție $\vec{s}$, atunci:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}=\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\cos\theta, \tag{2.4.5}$$

unde derivatele sunt considerate în punctul P_0.

Exemplul 2.4.8 Se consideră câmpul scalar $\varphi(x,y,z)=2x^3-3y^2+6xyz$.

i) Să se afle valoarea câmpului φ în punctul $A(1,-1,0)$ şi suprafața de nivel care trece prin A.

ii) Să se determine derivatele funcției φ în punctul A după direcțiile axelor de coordonate şi după direcția $\overrightarrow{AB}$, unde $B(4,-2,3)$.

Soluție. i) $\varphi(A)=\varphi(1,-1,0)=-1$. Ecuația suprafeței de nivel care trece prin A este $\varphi(x,y,z)=\varphi(1,-1,0)$, adică $2x^3-3y^2+6xyz=-1$.

ii) Direcțiile axelor de coordonate au versorii $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, deci:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{i}}\right)_A=\cos\alpha\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_A=\left(6x^2+6yz\right)_A=6,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{j}}\right)_A=\cos\beta\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_A=\left(-6y+6xz\right)_A=6,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{k}}\right)_A=\cos\gamma\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_A=\left(6xy\right)_A=-6.$$

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, cu norma $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$. Aşadar, direcţia $\vec{s}$ a vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{19}}\overrightarrow{AB}$. Deci, cosinusurile directoare ale direcţiei sunt: $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{19}}$, $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{19}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{19}}$.

Aşadar, $\left.\frac{d\varphi}{d\vec{s}}\right|_A = \cos\alpha \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_A + \cos\beta \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_A + \cos\gamma \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_A = -\frac{6}{\sqrt{19}}$.

Definiția 2.4.9 Fie φ un câmp scalar, $\varphi \in C^1(D)$. Se numeşte *gradientul câmpului scalar* φ în punctul $P \in D$ vectorul:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}, \tag{2.4.6}$$

unde derivatele parțiale sunt calculate în punctul P.

Definiția 2.4.10 Funcția φ al cărui gradient este $\vec{v} = grad\varphi$ se numeşte *funcția de forță* a vectorului $\vec{v}$, iar funcția $\psi = -\varphi$ se numeşte *potențialul vectorului* $\vec{v}$.

Exemplul 2.4.11 Câmpul vectorial

$$\vec{v} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$$

este câmp de potențial, deoarece $\vec{v} = grad\varphi$, unde $\varphi(x,y,z) = xy^2z^3$.

Teorema 2.4.12 Derivata unui câmp scalar $\varphi \in C^1(D)$ după o direcție $\vec{s}$ este egală cu proiecția gradientului pe acea direcție, adică:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}} = \vec{s} \cdot grad\varphi. \tag{2.4.7}$$

Vectorul $grad\varphi$ are direcția şi sensul normalei $\vec{n}$ la suprafața de nivel în punctul considerat şi modulul egal cu $\frac{d\varphi}{d\vec{n}}$, adică:

$$grad\varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \cdot \vec{n}. \tag{2.4.8}$$

Exemplul 2.4.13 Se consideră câmpul scalar $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

i) Să se afle calculeze $grad\,\varphi$.

ii) Să se calculeze derivata câmpului scalar φ după direcția vectorului $\vec{s} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$ în punctul $(1,2,3)$.

Soluție. i) Conform definiției 2.4.9, avem:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

ii) Din teorema 2.4.12 avem:

$$\left.\frac{d\varphi}{d\vec{s}}\right|_{(1,2,3)} = \vec{s} \cdot grad\varphi\big|_{(1,2,3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)\left(2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}\right) = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Proprietăți de calcul ale gradientului

i) Fie φ și ψ două câmpuri scalare din $C^1(D)$, $\psi \neq 0$ și $a \in \mathbb{R}$ o constantă. Atunci, într-un punct din D avem:

- $grad(\varphi+\psi) = grad\varphi + grad\psi$,
- $grad\, a = 0$, $grad(a\varphi) = a \cdot grad\varphi$,
- $grad(\varphi\psi) = \psi grad\varphi + \varphi grad\psi$,
- $grad\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right) = \dfrac{\psi grad\varphi - \varphi grad\psi}{\psi^2}$.

ii) Dacă $F \in C^1(D)$, atunci $gradF(\varphi) = F'(\varphi) grad\varphi$.

iii) Fie $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ este vectorul de poziție al lui $P(x,y,z)$ și r este modulul său, adică: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Avem:

$$grad\, r = \frac{\vec{r}}{r},\ d\varphi = grad\varphi \cdot d\vec{r},$$

unde $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Definiția 2.4.14 Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu. Se numeşte *câmp vectorial* pe domeniul D o funcție vectorială $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(P) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k},\ P(x,y,z) \in D. \tag{2.4.9}$$

Definiția 2.4.15 Se numeşte *linie de câmp* o curbă C din D, care are proprietatea că în fiecare punct P al său, vectorul $\vec{v}(P)$ este tangent curbei.

Observația 2.4.16 Direcția tangentei la curbă este dată de $d\vec{r}$. Condiția ca $\vec{v}$ să fie tangent curbei este echivalentă cu condiția de coliniaritate a vectorilor $\vec{v}$ și $d\vec{r}$, adică produsul lor vectorial să fie nul:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0. \tag{2.4.10}$$

Ecuația (2.4.10) se numeşte *ecuația vectorială a liniilor de câmp*. Deci, cei doi vectori au componentele proporționale, adică

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}. \tag{2.4.11}$$

Sistemul (2.4.11) are integralele prime:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = C_1 \\ F_2(x,y,z) = C_2, \end{cases} \tag{2.4.12}$$

care reprezintă *forma implicită a ecuațiilor liniilor de câmp*.

Definiția 2.4.17 Se numeşte *suprafață de câmp* o suprafață generată de liniile de câmp. Ecuația unei suprafețe de câmp este de forma:

$$\Phi\big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)\big) = 0, \tag{2.4.13}$$

sau

$$\Phi(C_1, C_2) = 0,$$

unde C_1 și C_2 sunt constantele din expresia integralelor prime, legătura Φ fiind stabilită prin condiții suplimentare (de exemplu, suprafața să treacă printr-o curbă Γ care nu este linie de câmp).

Exemplul 2.4.18 Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial definit de vectorii:

$$\vec{v} = \left(xy - 2z^2\right)\vec{i} + \left(4xz - y^2\right)\vec{j} + \left(yz - 2x^2\right)\vec{k} .$$

Soluție. Liniile de câmp ale câmpului vectorial $\vec{v}$ sunt date de următorul sistem de ecuații diferențiale (sistem simetric):

$$\frac{dx}{xy - 2z^2} = \frac{dy}{4xz - y^2} = \frac{dz}{yz - 2x^2} .$$

Aplicăm metoda combinațiilor integrabile. Astfel, amplificând prima fracție cu y, a doua cu x şi a treia cu $2z$, obținem:

$$\frac{ydx}{xy^2 - 2z^2 y} = \frac{xdy}{4x^2 z - xy^2} = \frac{2zdz}{2yz^2 - 4x^2 z} = \frac{ydx + xdy + 2zdz}{0} = \frac{d\left(xy\right) + d\left(z^2\right)}{0} .$$

Deci, prima ecuație a liniilor de câmp este:

$$xy + z^2 = C_1 .$$

Apoi, amplificând prima fracție cu $2x$, a doua cu z şi a treia cu y, obținem:

$$\frac{2xdx}{2x^2 y - 4xz^2} = \frac{zdy}{4xz^2 - y^2 z} = \frac{ydz}{y^2 z - 2x^2 y} = \frac{2xdx + zdy + ydz}{0} = \frac{d\left(x^2\right) + d\left(yz\right)}{0},$$

deci, cea de-a doua ecuație a liniilor de câmp este:

$$x^2 + yz = C_2 .$$

Exemplul 2.4.19 Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial:

$$\vec{v} = \left(zx - y\right)\vec{i} + \left(x - zy\right)\vec{j} + \left(x^2 - y^2\right)\vec{k} ,$$

şi apoi să se găsească suprafețele de câmp care conțin curba:

$$\Gamma : \begin{cases} xy = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Soluție. Liniile de câmp ale lui $\vec{v}$ sunt soluțiile sistemului simetric:

$$\frac{dx}{zx - y} = \frac{dy}{x - zy} = \frac{dz}{x^2 - y^2} .$$

Formăm combinații liniare în acest sistem în vederea obținerii unei rezolvări simple:

$$\frac{dx + dy}{zx - y + x - zy} = \frac{d\left(x + y\right)}{\left(x - y\right)\left(z + 1\right)} = \frac{dz}{\left(x - y\right)\left(x + y\right)} ,$$

adică

$$\frac{d\left(x + y\right)}{\left(z + 1\right)} = \frac{dz}{\left(x + y\right)} ,$$

echivalent cu

$$\left(x + y\right)d\left(x + y\right) = \left(z + 1\right)dz .$$

Integrând, obținem prima ecuație a liniilor de câmp:

$$\left(x + y\right)^2 - \left(z + 1\right)^2 = C_1 .$$

Folosind acelaşi raționament, avem:

$$\frac{dx - dy}{zx - y - x + zy} = \frac{d\left(x - y\right)}{\left(x + y\right)\left(z - 1\right)} = \frac{dz}{\left(x - y\right)\left(x + y\right)}$$

adică

$$\frac{d(x-y)}{(z-1)}=\frac{dz}{(x-y)}$$

sau

$$(x-y)d(x-y)=(z-1)dz$$

şi integrând, obţinem:

$$(x-y)^2-(z-1)^2=C_2.$$

Pentru a determina suprafeţele de câmp formăm următorul sistem:

$$\begin{cases}(x+y)^2-(z+1)^2=C_1\\(x-y)^2-(z-1)^2=C_2\\xy=1\\z=1.\end{cases}$$

Eliminând necunoscutele x, y, z se obţine condiţia de compatibilitate:

$$C_1=C_2,$$

care conduce la

$$(x+y)^2-(z+1)^2=(x-y)^2-(z-1)^2,$$

adică

$$xy=z.$$

Definiţia 2.4.20 Se numeşte *derivată a câmpului vectorial* $\vec{v}$ pe direcţia versorului $\vec{s}$ într-un punct $P_0\in D$, vectorul obţinut prin limita:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}\right)_{P_0}\overset{not.}{=}\lim_{l_{P_0P}\to\infty}\frac{\vec{v}(P)-\vec{v}(P_0)}{l_{P_0P}},\qquad(2.4.14)$$

unde l_{P_0P} este lungimea arcului P_0P, iar tangenta în P_0 la acest arc de curbă are direcţia $\vec{s}$.

Propoziţia 2.4.21 Fie $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă $C^1(D)$ şi fie direcţia $\vec{s}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$. Atunci există derivata câmpului vectorial $\vec{v}$ după direcţia $\vec{s}$, expresia acesteia fiind:

$$\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}=\vec{i}\frac{dv_1}{d\vec{s}}+\vec{j}\frac{dv_2}{d\vec{s}}+\vec{k}\frac{dv_3}{d\vec{s}},\qquad(2.4.15)$$

sau

$$\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}=\cos\alpha\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}.\qquad(2.4.16)$$

Exemplul 2.4.22 Să se calculeze derivata câmpului vectorial

$$\vec{v}=(y+xz)\vec{i}+(x+yz)\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)\vec{k}$$

după direcţia vectorului $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

Soluţie. Vom aplica formula din relaţia (2.4.15). Pentru a calcula $\frac{dv_1}{d\vec{u}}$, $\frac{dv_2}{d\vec{u}}$ şi $\frac{dv_3}{d\vec{u}}$ vom aplica formula din (2.4.7). Astfel,

$$v_1 = y + xz\,,\ \frac{dv_1}{d\vec{u}} = \vec{u}\cdot grad v_1 = \left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)\left(z\vec{i}+\vec{j}+x\vec{k}\right) = z+2+2x\,,$$

$$v_2 = x + yz\,,\ \frac{dv_2}{d\vec{u}} = \vec{u}\cdot grad v_2 = \left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)\left(\vec{i}+z\vec{j}+y\vec{k}\right) = 1+2z+2y\,,$$

$$v_3 = x^2 - y^2\,,\ \frac{dv_3}{d\vec{u}} = \vec{u}\cdot grad v_3 = \left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)\left(2x\vec{i}-2y\vec{j}\right) = 2x-4y\,.$$

Definiția 2.4.23 Fie $\vec{v}(P) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(D)$. Se numeşte *divergența* câmpului vectorial $\vec{v}$ şi se notează $div\vec{v}$, scalarul (funcția scalară):

$$div\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\,. \tag{2.4.17}$$

Definiția 2.4.24 Se numeşte *rotorul* câmpului vectorial de clasă $C^1(D)$, $\vec{v}(P) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$, vectorul notat cu simbolul $rot\,\vec{v}$ a cărui expresie analitică în coordonate carteziene este:

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{2.4.18}$$

determinant simbolic care se dezvoltă după elementele primei linii, obținându-se:

$$rot\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\,. \tag{2.4.19}$$

Observația 2.4.25 (*Interpretarea fizică a divergenței*) Divergența este un operator care măsoară cât de mult un câmp vectorial iese din sau intră într-un punct. Pentru un câmp vectorial care reprezintă viteza de expandare a aerului atunci când acesta este încălzit, divergența câmpului de viteze are o valoare pozitivă deoarece aerul se dilată. Dacă aerul se răceşte şi se contractă, divergența este negativă.

Observația 2.4.26 (*Interpretarea fizică a rotorului*) Rotorul este un operator vectorial care scoate în evidență rata de rotație a unui câmp vectorial, adică direcția axei de rotație şi magnitudinea rotației.

Observația 2.4.27 Dacă introducem *operatorul nabla* ∇ *al lui Hamilton* care are caracter diferențial şi vectorial şi a cărui expresie analitică este:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,, \tag{2.4.20}$$

atunci deducem următoarele formule:

$$grad\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi = \nabla\varphi\,, \tag{2.4.21}$$

$$div\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\right) = \nabla\cdot\vec{v}\,, \tag{2.4.22}$$

$$rot\,\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\right) = \nabla\times\vec{v}\,. \tag{2.4.23}$$

Proprietăţi de calcul ale divergenţei şi rotorului

a) Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ două câmpuri vectoriale de clasă $C^1(D)$, iar φ un câmp scalar de clasă $C^1(D)$. În punctul curent din D au loc următoarele relaţii:

i) $div\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=div\,\vec{u}+div\,\vec{v}$;

ii) $rot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=rot\,\vec{u}+rot\,\vec{v}$;

iii) $div\left(\varphi\vec{v}\right)=\vec{v}\cdot grad\,\varphi+\varphi div\,\vec{v}$;

iv) $rot\left(\varphi\vec{v}\right)=\varphi rot\,\vec{v}-\vec{v}\times grad\,\varphi$;

v) $div\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=\vec{v}\cdot rot\,\vec{u}-\vec{u}\cdot rot\,\vec{v}$;

vi) $rot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot div\,\vec{v}-\vec{v}\cdot div\,\vec{u}+\dfrac{d\vec{u}}{d\vec{v}}-\dfrac{d\vec{v}}{d\vec{u}}$.

b) Dacă $\vec{r}$ este vectorul de poziţie, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, şi $\vec{a}$ este un vector constant, atunci avem:

i) $div\,\vec{a}=0$; iv) $rot\,\vec{a}=0$;

ii) $div\,\vec{r}=3$; v) $rot\,\vec{r}=0$;

iii) $div\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)=0$; vi) $rot\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)=2\vec{a}$.

Observaţia 2.4.28 Dacă φ este un câmp de clasă $C^2(D)$, iar $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă $C^2(D)$, atunci au sens următoarele cinci combinaţii:

$$grad\left(div\,\vec{v}\right),\ div\left(grad\,\varphi\right),\ div\left(rot\,\vec{v}\right),\ rot\left(grad\,\varphi\right)\ \text{şi}\ rot\left(rot\,\vec{v}\right).$$

Propoziţia 2.4.29 Dacă φ este un câmp scalar de clasă $C^2(D)$ şi $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă $\vec{v}$, atunci au loc relaţiile:

$$div\left(rot\,\vec{v}\right)=0, \tag{2.4.24}$$

$$rot\left(grad\,\varphi\right)=0, \tag{2.4.25}$$

$$div\left(grad\,\varphi\right)=\Delta\varphi, \tag{2.4.26}$$

$$rot\left(rot\,\vec{v}\right)=grad\left(div\,\vec{v}\right)-\Delta\vec{v}, \tag{2.4.27}$$

unde Δ este *operatorul lui Laplace*,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial z}. \tag{2.4.28}$$

Exemplul 2.4.30 Se dau câmpurile:

$$\vec{v}=\left(xyz+x^3\right)\vec{i}+\left(y^2+y^3\right)\vec{j}+\left(xz^2+z^3\right)\vec{k},$$

$$\vec{w}=\left(yz+xy^2\right)\vec{i}+\left(xyz+yz^2\right)\vec{j}+\left(3xy+x^2z\right)\vec{k}.$$

Să se calculeze $grad\left(div\,\vec{v}\right)$ şi $rot\left(rot\,\vec{w}\right)$

Soluţie. Folosim definiţiile gradientului, divergenţei şi rotorului date mai sus. Avem:

$$div\,\vec{v}=yz+3x^2+2y+3y^2+2xz+3z^2,$$

deci

$$grad\left(div\vec{v}\right)=\left(6x+2z\right)\vec{i}+\left(6y+z+2\right)\vec{j}+\left(6z+y+2x\right)\vec{k}\ ,$$

şi

$$rot\,\vec{w}=\left(3x-xy-2yz\right)\vec{i}+\left(-2y-2xz\right)\vec{j}+\left(yz-z-2xy\right)\vec{k}\ ,$$

deci

$$rot\left(rot\,\vec{w}\right)=z\vec{i}+x\vec{k}\ .$$

2.5 Fluxul şi circulația

Fie Σ o suprafață conținută în domeniul $D\subset\mathbb{R}^3$ în care este definit câmpul vectorial $\vec{v}$ şi fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața Σ orientat în sens pozitiv.

Definiția 2.5.1 Se numeşte *fluxul* vectorului $\vec{v}$ prin suprafața Σ, mărimea:

$$\Phi\left(\Sigma\right)=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma\ . \tag{2.5.1}$$

Față de reperul cartezian ortogonal, avem:

$$\Phi\left(\Sigma\right)=\iint_{\Sigma}\left(v_1\cos\alpha+v_2\cos\beta+v_3\cos\gamma\right)d\sigma=\iint_{\Sigma}v_1dydz+v_2dzdx+v_3dxdy\ , \tag{2.5.2}$$

unde $\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$.

Observația 2.5.2 Pentru o suprafață închisă, normala o vom considera totdeauna dirijată spre exteriorul domeniului.

Observația 2.5.3 Fluxul Φ reprezintă diferența dintre cantitatea de fluid ieşită din suprafața Σ care delimitează un volum Ω şi cea inițială în unitatea de timp. Fluxul Φ reprezintă cantitatea de fluid produsă de volumul Ω în unitatea de timp, deci Φ este productivitatea volumului Ω.

Exemplul 2.5.4 Un fluid oarecare curge în spațiu cu viteza

$$\vec{v}=3x\vec{i}+3y\vec{j}+z\vec{k}\ .$$

Să se găsească fluxul total Φ al fluidului prin suprafața superioară a paraboloidului

$$\left(S^+\right):z=9-x^2-y^2$$

situată în semiplanul superior $z\geq 0$.

Soluție. Folosind definiția 2.5.1, avem de calculat următoarea integrala de suprafață:

$$\Phi=\iint_{S^+}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma\ ,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața S^+:

$$\vec{n}=\frac{\nabla F\left(x,y,z\right)}{\left\|\nabla F\left(x,y,z\right)\right\|}\ ,$$

unde

$$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z-9\ .$$

Deci,

$$\vec{n}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\ .$$

Aşadar,

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\ \cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

Aplicând formula de calcul, obținem:

$$\Phi=\iint_{S^+}\left(v_1\cos\alpha+v_2\cos\beta+v_3\cos\gamma\right)d\sigma=$$

$$=\iint_{S^+}\left(\frac{6x^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}+\frac{6y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right)d\sigma.$$

Dar, din ecuația suprafeței si din definiția elementului de suprafața, avem:

$$d\sigma=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy,\ (x,y)\in D,$$

unde D este proiecția suprafeței pe planul xOy:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2-9\le 0\right\}.$$

Înlocuind în expresia de mai sus, avem

$$\Phi=\iint_D\left(\frac{6x^2+6y^2+9-x^2-y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\iint_D\left(5x^2+5y^2+9\right)dxdy.$$

Integrala dublă o calculăm folosind trecerea la coordonatele polare r şi t, unde:

$$\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases},\ r\in[0,3],\ t\in[0,2\pi].$$

Având în vedere că jacobianul transformării care se utilizează la schimbarea de variabile de mai sus este egal cu r şi folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obținem:

$$\Phi=\int_0^{2\pi}dt\int_0^3 r\left(5r^2+9\right)dr=\frac{567\pi}{2}.$$

Exemplul 2.5.5 Să se calculeze fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z^4\vec{k}$$

prin suprafața exterioară a semisferei

$$(\Sigma):\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z\ge 0.\end{cases}$$

Soluție. Conform relației (2.5.2), avem:

$$\Phi(\Sigma)=\iint_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_\Sigma\left(v_1\cos\alpha+v_2\cos\beta+v_3\cos\gamma\right)d\sigma,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața Σ:

$$\vec{n}=\frac{\nabla F(x,y,z)}{\left\|\nabla F(x,y,z)\right\|},$$

unde

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9.$$

Deci,

$$\vec{n}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{3}.$$

Aşadar,

$$\cos\alpha = \frac{x}{3},\ \cos\beta = \frac{y}{3},\ \cos\gamma = \frac{z}{3}.$$

Înlocuind în formula de mai sus, obținem:

$$\Phi(\Sigma) = \iint_{\Sigma} (v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta + v_3 \cos\gamma) d\sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(x \cdot \frac{x}{3} + y \cdot \frac{y}{3} + z^4 \cdot \frac{z}{3} \right) d\sigma = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} \left(x^2 + y^2 + z^5 \right) d\sigma.$$

Pentru găsirea elementului de suprafață $d\sigma$ folosim următoarea parametrizare a sferei:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = 3\sin\theta\cos\varphi \\ y = 3\sin\theta\sin\varphi \\ z = 3\cos\theta \end{cases},\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

După cum se știe, elementul de suprafață se calculează cu formula

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\varphi,$$

unde coeficienții E, G, F sunt dați de

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

Prin calcul, obținem că

$$d\sigma = 9\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Așadar,

$$\Phi(\Sigma) = \frac{1}{3}\iint_{D} \left(9\sin^2\theta\cos^2\varphi + 9\sin^2\theta\sin^2\varphi + 243\cos^5\theta\right) 9\sin\theta d\theta d\varphi,\ \ D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi],$$

deci

$$\Phi(\Sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} \left(27\sin^3\theta + 729\sin\theta\cos^5\theta\right) d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(27\sin^3\theta + 729\sin\theta\cos^5\theta\right) d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta + 2\pi \cdot 729 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^5\theta d\theta.$$

Pentru prima integrală folosim formula trigonometrică

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

și obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}.$$

Pentru a doua integrală, facem schimbarea de variabilă

$$\cos\theta = u\ ,\ -\sin\theta = d\theta,$$

şi obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^5\theta d\theta = \frac{1}{6}.$$

Aşadar,

$$\Phi(\Sigma) = 2\pi\cdot 27\cdot\frac{2}{3} + 2\pi\cdot 729\cdot\frac{1}{6} = 279\pi.$$

Definiţia 2.5.6 Se numeşte *circulaţia* vectorului $\vec{v}$ de-a lungul curbei închise conţinute în domeniul D de definiţie a câmpului $\vec{v}$, valoarea integralei curbilinii:

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{v}d\vec{r}. \qquad (2.5.3)$$

Faţă de reperul cartezian, avem:

$$\mathcal{C} = \oint_C v_1(x,y,z)dx + v_2(x,y,z)dy + v_3(x,y,z)dz. \qquad (2.5.4)$$

Exemplul 2.5.7 Să se calculeze circulaţia câmpul vectorial

$$\vec{v} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$$

pe frontiera domeniului

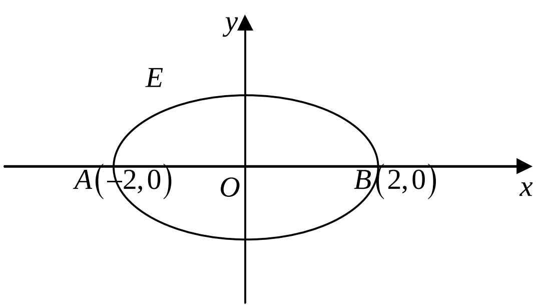
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+4y^2 \le 4, y \ge 0\right\}$$

parcursă în sens trigonometric.

Soluţie. Fie C frontiera domeniului D, parcursă în sens trigonometric. Conform relaţiilor (2.5.3) – (2.5.4) avem:

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{v}d\vec{r} = \oint_C -y^2dx + x^2dy.$$

Curba C este jumătatea superioară E a elipsei $x^2+4y^2=4$, completată cu diametrul mare al său $[AB]$ pe care ea se sprijină şi este parcursă în sens trigonometric (ca în figura alăturată).



Aşadar, avem:

$$\mathcal{C} = \int_{[AB]} -y^2dx + x^2dy + \int_E -y^2dx + x^2dy.$$

Folosind reprezentările parametrice ale celor două curbe,

$$[AB]:\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t\in[-2,2],$$

$$(E):\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta\in[0,\pi],$$

cele două integrale curbilinii devin:

$$I_1 = \int_{[AB]} -y^2dx + x^2dy = 0,$$

$$I_2 = \int_E -y^2dx + x^2dy = \int_0^{\pi}\left(2\sin^3\theta + 4\cos^3\theta\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 3\theta + \cos 3\theta + 3\cos\theta\right)d\theta = \frac{8}{3}.$$

Deci,

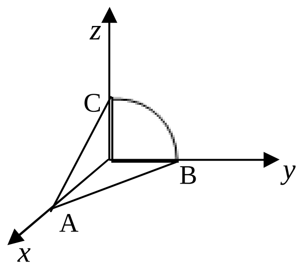
$$\mathcal{C} = I_1 + I_2 = \frac{8}{3}.$$

Exemplul 2.5.8 Să se calculeze circulația câmpul vectorial

$$\vec{v} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} - yz\vec{k}$$

de-a lungul curbei $ABCA$, unde $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, AC şi AB sunt segmente de dreaptă, iar BC este un sfert din cercul cu centrul în origine şi de rază 1, din planul yOz.

Soluție. Fie curba $ABCA$ reprezentată în figura alăturată. Aplicând definiția 2.5.6, avem:



$$\mathcal{C} = \oint_{ABCA} \vec{v}d\vec{r} = \oint_{ABCA} x^2dx + xydy - yzdz = \int_{AB} \vec{v}d\vec{r} + \int_{BC} \vec{v}d\vec{r} + \int_{CA} \vec{v}d\vec{r}.$$

Dreapta AB are parametrizarea

$$AB: \begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}, y \in [0,1],$$

deci

$$\int_{AB} \vec{v}d\vec{r} = \int_{AB} x^2dx + xydy = \int_0^1 -(1-y)^2 dy + \int_0^1 (1-y)ydy = -\frac{1}{6}.$$

Parametrizarea arcului BC este:

$$BC: \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos t \\ z = \sin t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

deci

$$\int_{BC} \vec{v}d\vec{r} = \int_{BC} -yzdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2 t \sin t dt.$$

Făcând substituția $\sin t = \theta$, obținem: $\int_{BC} \vec{v}d\vec{r} = -\frac{1}{3}$.

Dreapta CA are parametrizarea

$$CA: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 1 - x \end{cases}, x \in [0,1],$$

deci

$$\int_{CA} \vec{v}d\vec{r} = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}.$$

Aşadar,

$$\mathcal{C} = \int_{AB} \vec{v}d\vec{r} + \int_{BC} \vec{v}d\vec{r} + \int_{CA} \vec{v}d\vec{r} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

2.6 Formule integrale

2.6.1 Formula flux – divergență (a lui Gauss – Ostrogradski)

Fie Ω un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ care are ca frontieră o suprafață Σ închisă simplă, netedă sau netedă pe porțiuni. Versorul $\vec{n}$ al normalei exterioare într-un punct al suprafeței Σ are expresia:

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

unde α, β şi γ sunt unghiurile pe care acest versor le face cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai reperului $Oxyz$.

Teorema 2.6.1 (*Formula integrală Gauss – Ostrogradski*) În ipotezele de mai sus, dacă $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă $C^1(\Omega \cup \Sigma)$, $\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$, atunci are loc:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_\Sigma \left(v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta + v_1 \cos\gamma \right) d\sigma . \tag{2.6.1}$$

Observația 2.6.2 Folosind expresia divergenței câmpului vectorial $\vec{v}$, deducem că formula (2.6.1) se poate scrie în forma vectorială:

$$\iiint_\Omega div\vec{v}\, dxdydz = \iint_\Sigma \vec{v}\vec{n}\, d\sigma \tag{2.6.2}$$

şi exprimă fluxul printr-o suprafață în direcția normalei exterioare, prin integrala divergenței pe domeniul mărginit de acea suprafață. Acesta este şi motivul pentru care această formulă se mai numeşte şi *formula flux – divergență*.

Observația 2.6.3 (*Interpretare fizică*) Dacă $\vec{v}$ este viteza de curgere a unui fluid din domeniul Ω prin suprafața Σ care mărgineşte domeniul, în direcția normalei, atunci fluxul este integrala proiecțiilor lui $\vec{v}$ pe normală.

Exemplul 2.6.4 Fie Ω regiunea mărginită de emisfera

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9,\ 1 \le z \le 3$$

şi planul $z = 1$. Să se verifice teorema flux – divergență dacă

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k}.$$

Soluție. Calculăm mai întâi divergența vectorului $\vec{v}$ şi apoi integrala triplă din aceasta. Avem:

$$div\vec{v} = 3$$

şi

$$\iiint_\Omega div\vec{v}\, dxdydz = 3\iiint_\Omega dxdydz = 3 \cdot \frac{2\pi \cdot 27}{3} = 54\pi .$$

În ultimul calcul am folosit faptul că integrala triplă din membrul secund este volumul emisferei de rază $R = 3$ care este egal cu $2\pi R^3/3$.

Calculăm acum direct integrala de suprafață care apare în formula flux – divergență. Observăm mai întâi că suprafața Σ este formată din reuniunea a două suprafețe: Σ_1 şi Σ_2, unde Σ_1 este fața superioară a emisferei de rază 3 situată deasupra planului $z = 1$, iar Σ_2 este fața inferioară a porțiunii din planul $z = 1$ limitată de cercul de rază 3 cu centrul în punctul $(0,0,1)$ aflat în acest plan.

Deci,

$$\iint_\Sigma \vec{v}\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \vec{v}\vec{n_1}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \vec{v}\vec{n_2}\, d\sigma ,$$

unde $\overrightarrow{n_1}$ este normala unitară la fața Σ_1, iar $\overrightarrow{n_2}$ este normala unitară la fața Σ_2:

$$\overrightarrow{n_1}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}=\frac{x}{3}\vec{i}+\frac{y}{3}\vec{j}+\frac{z-1}{3}\vec{k},\ \overrightarrow{n_2}=-\vec{k}.$$

Aşadar,

$$\iint_{\Sigma}\vec{v}\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\Sigma_1}3\,d\sigma+\iint_{\Sigma_2}(-z+1)\,d\sigma=3\iint_{\Sigma_1}d\sigma=54\pi,$$

deoarece

$$\iint_{\Sigma_1}d\sigma=aria\Sigma_1=2\pi R^2=18\pi,$$

şi

$$\iint_{\Sigma_2}(-z+1)\,d\sigma=0$$

deoarece pe suprafața pe care efectuăm integrarea, z este egal cu 1 şi deci integrantul este nul şi ca atare şi rezultatul integrării este nul. Prin urmare,

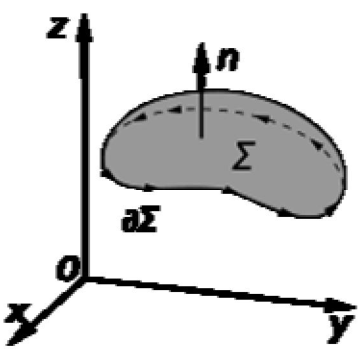
$$\iint_{\Sigma}\vec{v}\vec{n}\,d\sigma=54\pi,$$

ceea ce arată că formula flux – divergență se verifică.

2.6.2 Formula lui Stokes

Fie Σ o suprafață deschisă, netedă, mărginită de un domeniu Ω din $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.6.5 (*Formula integrală a lui Stokes*) Fie Σ suprafața de mai sus şi Γ o curbă netedă care mărgineşte suprafața Σ. Dacă $\vec{v}$ este un câmp vectorial de clasă $C^1(D)$, $\vec{v}(x,y,z)=v_1(x,y,z)\vec{i}+v_2(x,y,z)\vec{j}+v_3(x,y,z)\vec{k}$, D fiind un domeniu din $\mathbb{R}^3$ care conține suprafața Σ, atunci are loc formula:



$$\int_{\Gamma}v_1(x,y,z)dx+v_2(x,y,z)dy+v_3(x,y,z)dz=$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma.$$

Observația 2.6.6 Utilizând expresia analitică a rotorului unui câmp vectorial, $rot\,\vec{v}$, şi ținând cont că diferențiala vectorului de poziție $\vec{r}$ este

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k},$$

deducem că formula integrală a lui Stokes se poate scrie în forma vectorială:

$$\int_{\Gamma}\vec{v}d\vec{r}=\iint_{\Sigma}rot\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma. \qquad (2.6.3)$$

Observația 2.6.7 (*Interpretare fizică*) Formula integrală a lui Stokes exprimată prin (2.6.3) arată că circulația câmpului vectorial $\vec{v}$ pe frontiera Γ a unei suprafețe orientate Σ este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{v}$ prin acea suprafață.

Exemplul 2.6.8 Fie Γ curba situată la intersecția cilindrului

$$x^2+y^2=a^2,$$

cu planul $z=1$, parcursă în sens direct. Să se verifice formula integrală a lui Stokes dacă

$$\vec{v}(x,y,z)=-\frac{y^3z^2}{3}\vec{i}+\left(\frac{x^3z}{3}+2\right)\vec{j}+xyz\vec{k}.$$

Soluție. Calculăm $rot\,\vec{v}$ şi obținem:

$$rot\,\vec{v}=\left(xz-\frac{x^3}{3}\right)\vec{i}+\left(-\frac{2y^3z}{3}-yz\right)\vec{j}+\left(x^2z+y^2z^2\right)\vec{k}.$$

De asemenea,

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\ \gamma=0,$$

deci

$$\vec{n}=\vec{k}.$$

Aşadar,

$$\iint_{\Sigma} rot\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\Sigma}\left(x^2z+y^2z^2\right)d\sigma=\iint_{D}\left(x^2z+y^2z^2\right)dxdy,$$

deoarece suprafața Σ se află în planul $z=1$. Folosind coordonatele polare pentru calculul integralei duble, obținem:

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Mai departe calculăm integrala

$$\int_{\Gamma}\vec{v}d\vec{r}=\int_{\Gamma}-\frac{y^3z^2}{3}dx+\left(\frac{x^3z}{3}+2\right)dy+xyzdz,$$

unde Γ este cercul $x^2+y^2=a^2$ aflat în planul $z=1$. Aşadar,

$$I=\int_{\Gamma}\vec{v}d\vec{r}=\int_{\Gamma}-\frac{y^3}{3}dx+\left(\frac{x^3}{3}+2\right)dy.$$

Trecând la coordonatele polare $r=a$ şi t, unde:

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases},\ t\in[0,2\pi],$$

obținem:

$$I=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}a^3\sin^3 t\cdot(-a\sin t)+\left(\frac{a^3\cos^3 t}{3}+2\right)a\cos t\right]dt=$$

$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)dt+2a\int_0^{2\pi}\cos tdt.$$

Dar,

$$\int_0^{2\pi}\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left[1-2\left(\sin t\cos t\right)^2\right]dt=\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2dt=$$

$$=2\pi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=2\pi-\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{3\pi}{2}$$

şi cum

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = \sin t\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

atunci

$$I = \frac{a^4}{3}\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

2.7 Câmpuri particulare importante

2.7.1 Câmpuri irotaționale

Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^3$.

Definiția 2.7.1 Un câmp vectorial $\vec{v}$ de clasă $C^1(D)$ se numeşte *irotațional* în D dacă $rot\,\vec{v} = 0$ în orice punct al domeniului D.

Definiția 2.7.2 Un câmp vectorial $\vec{v}$ se numeşte *câmp potențial* în D dacă există un câmp scalar $\varphi \in C^1(D)$ astfel încât $grad\varphi = \vec{v}$ în fiecare punct al domeniului D.

Teorema 2.7.3 Fie D un domeniu simplu conex din $\mathbb{R}^3$ şi $\vec{v}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(D)$.

i) Circulația unui câmp irotațional $\vec{v}$ pe orice curbă închisă din D este nulă.
ii) Circulația unui câmp irotațional $\vec{v}$ pe un arc de curbă AB din domeniul D depinde doar de extremitățile curbei şi nu depinde de drumul care le uneşte.
iii) Orice câmp irotațional $\vec{v}$ într-un domeniu D este un câmp potențial în acel domeniu şi reciproc, adică:

$$rot\,\vec{v} = 0 \iff \vec{v} = grad\varphi,\ \varphi \in C^2(D).$$

Funcția de forță φ a unui câmp irotațional $\vec{v}$ se poate exprima printr-o integrală curbilinie independentă de drum:

$$\varphi(P) = \int_{AP} \vec{v}d\vec{r}, \tag{2.7.1}$$

unde $A(x_0, y_0, z_0)$ este un punct fix, iar $P(x, y, z)$ un punct oarecare.

Exemplul 2.7.4 Să se arate că $\vec{v} = 2\frac{x}{z}\vec{i} + 2\frac{y}{z}\vec{j} - \frac{x^2+y^2}{z^2}\vec{k}$ este un câmp irotațional în semiplanul $z > 0$ şi apoi să se determine funcția de forță.

Soluție. Arătăm că $rot\,\vec{v} = 0$. Astfel,

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\frac{x}{z} & 2\frac{y}{z} & -\frac{x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix} = \left(-2\frac{y}{z^2} + \frac{2y}{z^2}\right)\vec{i} + \left(-2\frac{x}{z^2} + \frac{2x}{z^2}\right)\vec{j} + (0+0)\vec{k} = 0.$$

Câmpul $\vec{v}$ fiind irotațional, rezultă că funcția de forță se poate exprima printr-o integrală curbilinie independentă de drum:

$$\varphi(P)=\int_{AP}\vec{v}d\vec{r}=\int_{AP}\left(2\frac{x}{z}dx+2\frac{y}{z}dy-\frac{x^2+y^2}{z^2}dz\right)=$$
$$=\int_{x_0}^{x}2\frac{t}{z_0}dt+\int_{y_0}^{y}2\frac{t}{z_0}dt-\int_{z_0}^{z}\frac{x^2+y^2}{t^2}dt=\frac{x^2+y^2}{z}+C,$$
cu $A(x_0,y_0,z_0)$ este un punct fix, iar $P(x,y,z)$ un punct oarecare.

Exemplul 2.7.5 Să se arate că $\vec{v}=(2x-\sin x)\vec{i}-2y\vec{j}+4z\vec{k}$ este un câmp irotațional şi apoi să se determine funcția de forță.

Soluție. Evident $rot\,\vec{v}=0$. Pentru a găsi funcția de forță aplicăm relația (2.7.1) şi obținem:
$$\varphi(P)=\int_{AP}\vec{v}d\vec{r}=\int_{AP}\left((2x-\sin x)dx-2ydy+4zdz\right)=$$
$$=\int_{x_0}^{x}(2t-\sin t)dt-\int_{y_0}^{y}2tdt+\int_{z_0}^{z}4tdt=x^2+\cos x-y^2+2z^2+C,$$
cu $A(x_0,y_0,z_0)$ este un punct fix, iar $P(x,y,z)$ un punct oarecare.

2.7.2 Câmpuri solenoidale

Definiția 2.7.6 Un câmp vectorial $\vec{v}$ de clasă $C^1(D)$ se numeşte *solenoidal* în D dacă $div\,\vec{v}=0$ în orice punct al domeniului D.

Definiția 2.7.7 Câmpul vectorial $\vec{w}$ se numeşte *potențial vector* al câmpului solenoidal $\vec{v}$ dacă $rot\,\vec{w}=\vec{v}$.

Teorema 2.7.8 Fie $\vec{v}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(D)$.

i) Fluxul câmpului solenoidal $\vec{v}$ prin orice suprafață închisă Σ conținută în D este nul.
ii) Fluxul câmpului solenoidal $\vec{v}$ prin orice suprafață deschisă Σ_1 conținută în D şi mărginită de curba C depinde doar de curba C şi nu depinde de Σ_1.
iii) Orice câmp solenoidal în D este un câmp de rotori şi reciproc, adică:
$$div\,\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{v}=rot\,\vec{w},\ \vec{w}\in C^2(D).$$

Exemplul 2.7.9 Fie câmpul vectorial $\vec{v}=\varphi(r)\vec{r}+\vec{a}\times\vec{r}$, unde $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ şi $\vec{a}$ este un câmp vectorial constant. Să se determine funcția φ astfel ca $\vec{v}$ să fie solenoidal.

Soluție. Deoarece $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{a}\times\vec{r}=(a_2z-a_3y)\vec{i}+(a_3x-a_1z)\vec{j}+(a_1y-a_2x)\vec{k}$, atunci
$$\vec{v}=(\varphi(r)x+a_2z-a_3y)\vec{i}+(\varphi(r)y+a_3x-a_1z)\vec{j}+(\varphi(r)z+a_1y-a_2x)\vec{k}.$$
Din relația (2.4.17), avem:
$$div\,\vec{v}=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(r)x+a_2z-a_3y)+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(r)y+a_3x-a_1z)+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi(r)z+a_1y-a_2x)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(r)x)+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(r)y)+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi(r)z).$$
În acest moment, folosind metoda derivării funcțiilor compuse, obținem:

$$div\vec{v} = \frac{\partial r}{\partial x}\varphi'(r)x + \varphi(r) + \frac{\partial r}{\partial y}\varphi'(r)y + \varphi(r) + \frac{\partial r}{\partial z}\varphi'(r)z + \varphi(r) =$$

$$= \left(x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial r}{\partial z}\right)\varphi'(r) + 3\varphi(r) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r).$$

Câmpul vectorial $\vec{v}$ este solenoidal dacă $div\vec{v} = 0$, deci $r\varphi'(r) + 3\varphi(r) = 0$, adică $r^3\varphi(r) = C$. Aşadar,

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^3}.$$

2.7.3 Câmpuri biscalare

Definiția 2.7.10 Un câmp vectorial $\vec{v}$ de clasă $C^1(D)$ se numeşte *biscalar* în D dacă există două funcții scalare independente λ şi F, $\lambda \in C^1(D)$, $F \in C^2(D)$ astfel încât să avem: $\vec{v} = \lambda \cdot gradF$ în orice punct din D.

Teorema 2.7.11 Fie un câmp biscalar în D, $\vec{v} = \lambda \cdot gradF$. Atunci, au loc afirmațiile:

i) Câmpul $\vec{v}$ este perpendicular pe rotorul său, $\vec{v} \cdot rot\vec{v} = 0$.

ii) Câmpul $\vec{v}$ admite o familie de suprafețe, care depind de un parametru, ortogonale liniilor de câmp. Ecuația suprafețelor ortogonale liniilor de câmp este: $F(x, y, z) = C$.

Teorema 2.7.12 Fie $\vec{v}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(D)$. Dacă în orice punct al domeniului avem:

$$\vec{v} \cdot rot\vec{v} = 0 \text{ şi } rot\vec{v} \neq 0, \tag{2.7.2}$$

atunci $\vec{v}$ este un câmp biscalar.

Observația 2.7.13 Suprafețele ortogonale liniilor de câmp trebuie căutate printre suprafețele de câmp ale câmpului $rot\vec{v}$. Suprafețele de câmp ale vectorului $rot\vec{v}$ se mai numesc şi *suprafețe de vârtej*, iar liniile de câmp ale vectorului $rot\vec{v}$ se numesc *linii de vârtej*.

Exemplul 2.7.14 Se dă câmpul vectorial $\vec{v} = yz(y+z)\vec{i} + xz(x+z)\vec{j} + xy(x+y)\vec{k}$. Să se afle suprafețele ortogonale liniilor de câmp ale lui $\vec{v}$ şi să se scrie $\vec{v}$ sub forma: $\vec{v} = \lambda \cdot gradF$.

Soluție. Arătăm că $\vec{v}$ este câmp biscalar aplicând teorema 2.7.12. Astfel,

$$rot\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz(y+z) & xz(x+z) & xy(x+y) \end{vmatrix} = 2x(y-z)\vec{i} + 2y(z-x)\vec{j} + 2z(x-y)\vec{k} \neq 0,$$

şi

$$\vec{v} \cdot rot\vec{v} = 2xyz(y^2 - z^2) + 2xyz(z^2 - x^2) + 2xyz(x^2 - y^2) = 0.$$

Teorema fiind verificată, rezultă că $\vec{v}$ este biscalar, deci $\vec{v}$ admite o familie de suprafețe ortogonale liniilor de câmp. Căutăm aceste suprafețe printre suprafețele de câmp ale lui $rot\vec{v}$. Astfel, ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp ale lui $rot\vec{v}$ sunt:

$$\frac{dx}{2x(y-z)}=\frac{dy}{2y(z-x)}=\frac{dz}{2z(x-y)}.$$

Rezolvând acest sistem cu ajutorul metodei combinațiilor integrabile, obținem ecuațiile liniilor de câmp ale lui $rot\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 \\ xyz=C_2. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Ştim că gradientul este un vector care are direcția şi sensul normalei $\vec{n}$ la suprafață. Din definiția liniei de câmp, avem că $rot\,\vec{v}$ este tangent curbelor din relațiile (2.7.3). Așadar, avem relațiile:

$$\begin{cases} rot\,\vec{v}\cdot grad\,(x+y+z)=0 \\ rot\,\vec{v}\cdot grad\,(xyz)=0 \\ \vec{v}\cdot rot\,\vec{v}=0. \end{cases}$$

De aici, rezultă că vectorul $\vec{v}$ este coplanar cu vectorii $grad\,(x+y+z)$ şi $grad\,(xyz)$. Deci,

$$\vec{v}=\alpha grad\,(x+y+z)+\beta grad\,(xyz). \tag{2.7.4}$$

Calculăm cei doi gradienți şi identificăm elementele celor doi vectori. Astfel, se obține sistemul:

$$\begin{cases} \alpha+\beta yz=yz(y+z) \\ \alpha+\beta xz=zx(z+x) \\ \alpha+\beta xy=xy(x+y) \end{cases}$$

cu soluțiile $\alpha=-xyz$ şi $\beta=x+y+z$. Aşadar, relația (2.7.4) devine:

$$\vec{v}=-xyzgrad\,(x+y+z)+(x+y+z)grad\,(xyz),$$

relație echivalentă cu

$$\vec{v}=(x+y+z)^2\,grad\,\frac{xyz}{x+y+z}.$$

Deci,

$$\lambda=(x+y+z)^2 \text{ şi } F=\frac{xyz}{x+y+z}.$$

Aşadar, ecuația suprafețelor ortogonale liniilor de câmp este:

$$\frac{xyz}{x+y+z}=C.$$

CUPRINS

3. SERII FOURIER. INTEGRALA FOURIER. TRANSFORMATA FOURIER. TRANSFORMATA LAPLACE

3.1 Serii Fourier

Funcțiile periodice constituie una din clasele de funcții care, datorită proprietăților lor, intervin frecvent în diverse probleme teoretice şi practice. Un mijloc de reprezentare şi studiu al acestor funcții îl constituie dezvoltarea în serie Fourier. Termenii unei serii Fourier sunt funcții periodice cu care se pot descrie fenomenele oscilatorii din electrotehnică, mecanica undelor şi orice procese vibratorii periodice.

Definiția 3.1.1 O funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există un număr real $T\neq 0$ astfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$ să avem:

$$f(x+T)=f(x).$$

Deoarece orice multiplu întreg kT, $k\in\mathbb{Z}$, este de asemenea perioadă pentru f, cea mai mică perioadă pozitivă $T>0$ se numeşte *perioadă principală* a funcției f. În continuare, prin perioada unei funcții vom înțelege totdeauna perioada principală a funcției f.

Propoziția 3.1.2 Dacă $f(x)$ este periodică, de perioadă T, atunci $f(\alpha\cdot x)$ este periodică, cu perioada $\dfrac{T}{\alpha}$.

Exemplul 3.1.3 Funcțiile $\sin x$ şi $\cos x$ sunt periodice, de perioadă 2π. Funcțiile $\sin kx$ şi $\cos kx$ sunt periodice, de perioadă $T=\dfrac{2\pi}{k}$. Perioada comună a familiei $\{\sin k\omega x,\cos k\omega x\}_{k\in\mathbb{N}}$ este $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Propoziția 3.1.4 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică, de perioadă T, integrabilă pe un interval de lungime T. Atunci pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$, avem:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx=\int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

Definiția 3.1.5 Se numeşte *serie trigonometrică* o serie de funcții de forma:

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right),\ x\in\mathbb{R}, \tag{3.1.1}$$

unde coeficienții a_0, a_k, b_k, $k\in\mathbb{N}$, sunt constante reale.

Sumele parțiale ale seriei (3.1.1) se numesc *polinoame trigonometrice,* iar constanta ω se numeşte *pulsație*.

Observația 3.1.6 Deoarece sumele parțiale ale seriei trigonometrice sunt funcții periodice, de perioadă $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, este suficient să studiem convergența unor astfel de serii pe un interval de lungime T, de exemplu $[\alpha,\alpha+T]$.

Proprietățile sumelor unor astfel de serii trigonometrice punctual convergente sunt sintetizate în următoarea teoremă.

Teorema 3.1.7 Presupunem că seria trigonometrică (3.1.1) este punctual convergentă pe $[\alpha, \alpha+T]$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ şi fie $S(x)$ suma acestei serii. Atunci:

i) Funcţia $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică, de perioadă T.

ii) Dacă seria (3.1.1) este uniform convergentă pe $[\alpha, \alpha+T]$, atunci S este continuă pe $\mathbb{R}$ şi, în acest caz, au loc relaţiile:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\,dx,\quad a_k=\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\cos k\omega x\,dx,\quad b_k=\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\sin k\omega x\,dx,\ k\ge 1.$$

Demonstraţie.

i) Fie $(S_n)_{n\ge 1}$ şirul sumelor parţiale ale seriei (3.1.1). În baza ipotezei, şirul $(S_n)_{n\ge 1}$ converge punctual către S şi, cum toate funcţiile S_n sunt periodice, de perioadă T, aceeaşi proprietate o are şi S.

ii) Deoarece seria (3.1.1) este o serie uniform convergentă de funcţii continue, suma ei S este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem:

$$S(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right). \tag{3.1.2}$$

Continuitatea lui S şi uniform convergenţa seriei ne permit integrarea termen cu termen a relaţiei (3.1.2):

$$\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\,dx=\int_\alpha^{\alpha+T} a_0\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_\alpha^{\alpha+T}\cos k\omega x\,dx+b_k\int_\alpha^{\alpha+T}\sin k\omega x\,dx\right). \tag{3.1.3}$$

Dar,

$$\int_\alpha^{\alpha+T}\cos k\omega x\,dx=\frac{1}{k\omega}\sin k\omega x\Big|_\alpha^{\alpha+T}=0,\quad \int_\alpha^{\alpha+T}\sin k\omega x\,dx=-\frac{1}{k\omega}\cos k\omega x\Big|_\alpha^{\alpha+T}=0.$$

Deci, relaţia (3.1.3) devine:

$$\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\,dx=a_0\,x\Big|_\alpha^{\alpha+T}=a_0T\ \Rightarrow\ a_0=\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\,dx.$$

Înmulţim relaţia (3.1.2) cu funcţia mărginită $\cos p\omega x$. Convergenţa uniformă se păstrează şi seria obţinută poate fi integrată termen cu termen pe $[\alpha, \alpha+T]$. Obţinem:

$$\int_\alpha^{\alpha+T} S(x)\cos p\omega x\,dx=a_0\int_\alpha^{\alpha+T}\cos p\omega x\,dx+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_\alpha^{\alpha+T}\cos k\omega x\cos p\omega x\,dx+b_k\int_\alpha^{\alpha+T}\sin k\omega x\cos p\omega x\,dx\right). \tag{3.1.4}$$

Dar,

$$\int_\alpha^{\alpha+T}\cos p\omega x\,dx=\frac{1}{p\omega}\sin p\omega x\Big|_\alpha^{\alpha+T}=0,$$

$$\int_\alpha^{\alpha+T}\cos k\omega x\cos p\omega x\,dx=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+T}\cos(k+p)\omega x\,dx+\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+T}\cos(k-p)\omega x\,dx=$$

$$=\begin{cases}0, & k\neq p\\ \dfrac{T}{2}, & k=p,\end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin k\omega x\cos p\omega x dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin\left(k+p\right)\omega x dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin\left(k-p\right)\omega x dx=0,\ \forall k,p\in\mathbb{N}.$$

Deci, relația (3.1.4) devine:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}S\left(x\right)\cos p\omega x dx=\frac{T}{2}a_p,\text{ deci } a_k=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}S\left(x\right)\cos k\omega x dx.$$

Coeficienții $b_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T}S\left(x\right)\sin k\omega x dx$ se obțin în mod analog, înmulțind relația (3.1.2) cu $\sin p\omega x$.

Definiția 3.1.8 Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică, de perioadă T, continuă pe porțiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$, cu limitele laterale finite în orice punct. Considerăm coeficienții:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f\left(x\right)dx,\quad a_k=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f\left(x\right)\cos k\omega x dx,\quad b_k=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f\left(x\right)\sin k\omega x dx,\ k\geq 1,\qquad (3.1.5)$$

unde $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$. În acest mod, oricărei funcții f cu proprietățile menționate i se asociază seria trigonometrică (3.1.1), numită *seria Fourier* a lui f; coeficienții a_0,a_k,b_k de mai sus se numesc *coeficienții Fourier* ai lui f.

Observația 3.1.9 Condițiile suficiente pentru ca o funcție periodică să poată fi reprezentată prin seria Fourier asociată ei au fost date de Dirichlet şi se mai numesc *condițiile lui Dirichlet*.

Definiția 3.1.10 Spunem că funcția f îndeplineşte *condițiile lui Dirichlet* pe intervalul $\left[a,b\right]$ dacă:

i) f este mărginită şi are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță (limitele laterale finite).

ii) f este monotonă pe porțiuni (adică, intervalul $\left[a,b\right]$ poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale astfel încât pe fiecare subinterval f să fie monotonă).

În legătură cu convergența seriei Fourier şi cât de bine aproximează ea funcția f se poate da următoarea teoremă.

Teorema 3.1.11 Dacă funcția f, periodică de perioadă T, îndeplineşte condițiile lui Dirichlet pe un interval $\left[\alpha,\alpha+T\right]$, atunci seria sa Fourier este convergentă punctual pe $\mathbb{R}$. Suma $S\left(x\right)$ a seriei Fourier în fiecare punct de continuitate este egală cu valoarea funcției f în acel punct. În punctele de discontinuitate, valoarea sumei $S\left(x\right)$ este egală cu media aritmetică a limitelor laterale corespunzătoare punctului de discontinuitate, adică:

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), & \text{în orice punct de continuitate al lui } f\\ \dfrac{f\left(c-0\right)+f\left(c+0\right)}{2}, & c-\text{punct de discontinuitate.}\end{cases}$$

Observația 3.1.12 Determinarea seriei Fourier a unei funcții f se reduce la calculul coeficienților Fourier dați de formulele din (3.1.5).

Observația 3.1.13 Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor periodice se simplifică dacă pe intervalul $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ funcția este pară sau impară.

Propoziția 3.1.14 Dacă f este o funcție pară pe $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, atunci seria sa Fourier este:

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega x,$$

unde $\omega=\frac{2\pi}{T}$, $a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)dx$, $a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\cos k\omega x dx$, $k\ge 1$.

Propoziția 3.1.15 Dacă f este o funcție impară pe $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, atunci seria sa Fourier este:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\omega x,$$

unde $\omega=\frac{2\pi}{T}$, $b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\sin k\omega x dx$, $k\ge 1$.

Observația 3.1.16 Dacă f este o funcție definită pe intervalul $[a,b]$, neperiodică, dar care îndeplinește condițiile lui Dirichlet pe $[a,b]$, atunci ea poate fi prelungită prin periodicitate cu perioada $T=b-a$ la funcția F definită pe toată axa reală. Dezvoltarea în serie Fourier a funcției F pe $\mathbb{R}$ este o reprezentare în serie Fourier a lui f pe $[a,b]$.

Exemplul 3.1.17 Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi,\pi]$ funcția $f(x)=x^2$ și apoi să se deducă suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Soluție. Funcția f reprezintă restricția funcției periodice F, de perioadă $T=2\pi$, la intervalul $[-\pi,\pi]$. Condițiile lui Dirichlet sunt îndeplinite deoarece funcția f pe intervalul $[-\pi,\pi]$ este monotonă și mărginită. Deoarece $f(x)=x^2$ este funcție pară, dezvoltarea ei în serie Fourier este:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega x,$$

unde $\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$, iar

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

și

$$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\cos k\omega x dx=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\left(\frac{\sin kx}{k}\right)'dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\cdot 2x dx=\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos kx}{k}\right)'\cdot x dx=$$

$$=\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos kx}{k}\right)'x dx=\frac{4}{k\pi}\frac{\cos kx}{k}x\bigg|_0^{\pi}-\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx=$$

$$= \frac{4}{k\pi}\frac{\cos k\pi}{k}\pi - \frac{4}{k^2\pi}\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^\pi = \frac{4}{k^2}(-1)^k .$$

Deci,

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx ,\ \forall x \in [-\pi,\pi] .$$

În particular, pentru $x = \pi$ obținem:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} ,$$

deci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Exemplul 3.1.18 Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția periodică de perioadă $T = \pi$ dată prin

$$f(x) = e^{-ax},\ x \in (0,\pi) .$$

Soluție. Funcția f fiind periodică cu perioada $T = \pi$, rezultă că $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. Deci seria Fourier atașată funcției f este:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2kx + b_k \sin 2kx) ,$$

unde $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$, $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos 2kxdx$ și $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin 2kxdx$, $k \geq 1$. Calculăm coeficientul a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-ax}dx = \frac{1}{a\pi}\left(1 - e^{-a\pi}\right) .$$

Pentru găsirea coeficienților a_k și b_k, calculăm suma $a_k + ib_k$ după care vom identifica partea reală cu a_k și partea imaginară cu b_k. Așadar,

$$a_k + ib_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-ax}(\cos 2kx + \sin 2kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-ax}e^{2kx\cdot i}dx = \frac{2}{\pi}\frac{-1}{a+2ki}\left(e^{-(a+2ki)\pi} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{a+2ki}\left(1 - e^{-a\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{a-2ki}{a^2+4k^2}\left(1 - e^{-a\pi}\right).$$

Deci,

$$a_k = \frac{2a\left(1-e^{-a\pi}\right)}{\pi}\frac{1}{a^2+4k^2} \text{ și } b_k = \frac{4\left(1-e^{-a\pi}\right)}{\pi}\frac{k}{a^2+4k^2} ,\ k \geq 1 .$$

3.2 Forma complexă a seriilor Fourier

Înlocuim în termenul general al seriei Fourier, funcțiile trigonometrice cu expresiile lor complexe:

$$\cos k\omega x = \frac{e^{ik\omega x} + e^{-ik\omega x}}{2} \text{ și } \sin k\omega x = \frac{e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}}{2i} .$$

Deci,

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ik\omega x}+e^{-ik\omega x}}{2}+b_k\frac{e^{ik\omega x}-e^{-ik\omega x}}{2i}\right)=$$
$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_ke^{ik\omega x}+a_ke^{-ik\omega x}-ib_ke^{ik\omega x}+ib_ke^{-ik\omega x}}{2}\right)=$$
$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ik\omega x}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ik\omega x}\right).$$

Fie $c_0=a_0$, $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$ şi $c_k^*=\frac{a_k+ib_k}{2}$. Deci, din (3.1.5), avem:

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)\cos k\omega x dx-i\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)\sin k\omega x dx\right)=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)e^{-ik\omega x}dx,$$
$$c_k^*=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)e^{ik\omega x}dx.$$

Aşadar,

$$f(x)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_ke^{ik\omega x}+c_k^*e^{-ik\omega x}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ik\omega x},\tag{3.1.6}$$

unde

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)e^{-ik\omega x}dx,\ k\in\mathbb{Z}.\tag{3.1.7}$$

Observația 3.2.1 Expresia (3.1.6) se numeşte *formа complexă a seriei Fourier*. Dacă funcția periodică f de perioadă T satisface condițiile lui Dirichlet, atunci considerând coeficienții Fourier (3.1.7), rezultă că seria (3.1.6) este punctual convergentă către $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Exemplul 3.2.2 Să se determine forma complexă a seriei Fourier pentru funcția periodică $f:[0,l]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{l}.$$

Soluție. Deoarece $T=l$, găsim că $\omega=\frac{2\pi}{l}$. Aşadar, forma complexă a seriei Fourier este

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{\frac{2\pi ikx}{l}}.$$

Coeficienții dezvoltării sunt

$$c_0=\frac{1}{l}\int_0^l\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)dx=0,$$

iar pentru $k\neq 0$, obținem:

$$c_k=\frac{1}{l}\int_0^l\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)e^{-\frac{2\pi ikx}{l}}dx=-\frac{1}{2l}\frac{l}{2k\pi i}e^{-\frac{2\pi ikx}{l}}\Big|_0^l+\frac{1}{2k\pi il}\int_0^l x\left(e^{-\frac{2\pi ikx}{l}}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{2k\pi il}\left[xe^{-\frac{2\pi ikx}{l}}\Big|_0^l+\frac{1}{2k\pi i}e^{-\frac{2\pi ikx}{l}}\Big|_0^l\right]=-\frac{i}{2k\pi}.$$

Aşadar, pentru orice punct de continuitate $x\in\mathbb{R}$ avem:

$$f(x)=-\frac{i}{2\pi}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{\frac{2\pi ikx}{l}}.$$

3.3 Integrala Fourier

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neperiodică. Funcția f nu poate fi reprezentată printr-o serie Fourier pe $\mathbb{R}$. În schimb, în anumite condiții, f poate fi reprezentată printr-o integrală dublă improprie care prezintă o oarecare analogie cu seria Fourier.

3.3.1 Forma complexă a integralei Fourier

Teorema 3.3.1 Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

i) îndeplineşte condițiile lui Dirichlet în orice interval de lungime finită,
ii) în fiecare punct c de discontinuitate, valoarea funcției este egală cu media aritmetică a limitelor laterale în acel punct,
iii) este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, adică este convergentă integrala $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$,

atunci există egalitatea

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt, \qquad (3.3.1)$$

care se numeşte *formula lui Fourier* care reprezintă dezvoltarea funcției f în *integrală Fourier* sub formă complexă.

3.3.2 Forma reală a integralei Fourier

Integrala (3.3.1) poate fi scrisă şi sub formă reală dacă se înlocuieşte $e^{iu(x-t)}$ cu expresia

$$e^{iu(x-t)}=\cos u(x-t)+i\sin u(x-t).$$

Astfel, obținem:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\big(\cos u(x-t)+i\sin u(x-t)\big)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dt+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin u(x-t)dt. \qquad (3.3.2)$$

Considerăm funcțiile

$$g(u,x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dt \text{ şi } h(u,x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin u(x-t)dt.$$

Se observă că:

$$g(-u,x)=g(u,x) \text{ şi } h(-u,x)=-h(u,x).$$

Deci,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u,x)du = 2\int_{0}^{\infty} g(u,x)du \text{ şi } \int_{-\infty}^{\infty} h(u,x)du = 0.$$

Relația (3.3.2) devine:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt, \tag{3.3.3}$$

egalitate care se numeşte *forma reală a formulei Fourier*, iar integrala dublă improprie din dreapta se numeşte *forma reală a integralei Fourier*.

Observația 3.3.2 Dezvoltând $\cos u(x-t)$ după formula

$$\cos u(x-t)=\cos ux\cos ut+\sin ux\sin ut,$$

relația (3.3.3) devine

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos ux\cos ut+\sin ux\sin ut)dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos ux du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin ux du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut dt. \tag{3.3.4}$$

Aşadar, dacă f este o funcție pară pe $\mathbb{R}$, atunci

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos ux du\int_{0}^{\infty} f(t)\cos ut dt, \tag{3.3.5}$$

iar dacă f este o funcție impară pe $\mathbb{R}$, atunci

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin ux du\int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut dt. \tag{3.3.6}$$

Exemplul 3.3.3 Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția:

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ \frac{1}{2}, & x=\pm a\\ 0, & |x|>0.\end{cases}$$

Soluție. Din relația (3.3.1) avem $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt$. Calculăm integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt$ după care vom introduce rezultatul în formulă. Avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt=\int_{-a}^{a}1\cdot e^{iu(x-t)}dt=\left.\frac{e^{iu(x-t)}}{-iu}\right|_{-a}^{a}=\frac{1}{-iu}\left(e^{iu(x-a)}-e^{iu(x+a)}\right)=-\frac{e^{iux}}{iu}\left(e^{-iua}-e^{iua}\right)=$$

$$=\frac{e^{iux}}{iu}\frac{e^{iua}-e^{-iua}}{2i}\cdot 2i=\frac{e^{iux}}{iu}\cdot\sin ua\cdot 2i=\frac{2}{u}e^{iux}\sin ua.$$

Deci,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{u}e^{iux}\sin ua du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ua}{u}(\cos ux+i\sin ux)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ua\cos ux}{u}du+\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ua\sin ux}{u}du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ua\cos ux}{u}du .$$

Exemplul 3.3.4 Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Soluție. Din relația (3.3.1) avem $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt$. Calculăm integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt=e^{iux}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt .$$

Pentru aceasta, vom aplica teorema reziduurilor (vezi §1.14.1) şi vom obține că

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iut}}{1+t^2}dt=\pi e^{-|u|} .$$

Aşadar, avem:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\pi e^{-|u|}du=\int_{0}^{\infty}e^{-u}\cos ux du .$$

Exemplul 3.3.5 Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

şi să se deducă apoi valoarea integralei improprii

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\frac{u\pi}{2}}{1-u^2}du .$$

Soluție. Deoarece funcția f este pară, din relația (3.3.5) avem că $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos ux du\int_{0}^{\infty}f(t)\cos ut dt$. Rămâne să calculăm

$$\int_{0}^{\infty}f(t)\cos ut dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos ut dt=\frac{1}{1-u^2}\cos\frac{u\pi}{2} .$$

În concluzie, f se reprezintă prin integrala

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ux}{1-u^2}\cos\frac{u\pi}{2}du .$$

În particular, pentru $x=0$, găsim

$$1=f(0)=\frac{2}{\pi}I .$$

Deci,

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos\frac{u\pi}{2}}{1-u^2}du=\frac{\pi}{2}.$$

3.4 Transformata Fourier

Pornim de la forma complexă a formulei integrale a lui Fourier (3.3.1) care poate fi scrisă şi astfel:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iux}e^{-iut}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt. \tag{3.4.1}$$

Definim funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx. \tag{3.4.2}$$

Deci, relația (3.3.7) devine

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{iux}du. \tag{3.4.3}$$

Definiția 3.4.1 Funcțiile $g(u)$ şi $f(x)$ din relațiile (3.3.8) şi, respectiv, (3.3.9) se numesc *una transformata Fourier a celeilalte.*

Observația 3.4.2 Pentru funcțiile definite pe $(0,\infty)$ se folosesc aşa numitele *transformate Fourier prin cosinus şi sinus*. Pentru ca transformatele Fourier să funcționeze oricare ar fi x real, funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ se poate prelungi la o funcție pară sau impară pe $\mathbb{R}$.

Relația (3.3.5) poate fi scrisă sub forma:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos uxdu\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos utdt. \tag{3.4.4}$$

Dacă se notează

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos utdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos uxdx, \tag{3.4.5}$$

atunci

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos uxdu. \tag{3.4.6}$$

Definiția 3.4.3 Funcțiile $g(u)$ şi $f(x)$ din relațiile (3.4.5) şi, respectiv, (3.4.6) se numesc *una transformata Fourier prin cosinus a celeilalte.*

Analog, pornind de la (3.3.6), obținem:

Definiția 3.4.4 Funcțiile $g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin uxdx$ şi $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\sin uxdu$ se numesc *una transformata Fourier prin sinus a celeilalte.*

Exemplul 3.4.5 Să se determine transformatele Fourier prin cosinus şi sinus ale funcției $f(x)=e^{-ax}$, $x>0$, $a>0$.

Soluție. Funcția $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\overline{f}(x)=e^{-a|x|}=\begin{cases}e^{-ax},\ x>0\\ e^{ax},\ x\le 0\end{cases}$$

este prelungirea prin pariate a funcției $f(x)$, iar funcția $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}(x)=e^{-a|x|}\operatorname{sgn}x=\begin{cases}e^{-ax},\ x>0\\ 0,\ x=0\\ -e^{ax},\ x<0\end{cases}$$

este prelungirea prin imparitate a funcției $f(x)$.

Fie g_c - transformata Fourier prin cosinus şi g_s - transformata Fourier prin sinus. Avem:

$$g_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos ux dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos ux dx,$$

$$g_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin ux dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\sin ux dx.$$

Vom calcula simultan cele două funcții astfel:

$$g_c(u)+ig_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}(\cos ux+i\sin ux)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}e^{iux}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{(-a+iu)x}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left.\frac{e^{(-a+iu)x}}{-a+iu}\right|_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a-iu}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a+iu}{a^2+u^2}.$$

Deci,

$$g_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+u^2}\ \text{ şi }\ g_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{a^2+u^2}.$$

Exemplul 3.4.6 Să se determine transformata Fourier a funcției

$$f(x)=\frac{1}{x^2+a^2},\ x\in\mathbb{R},\ a>0.$$

Soluție. Transformata Fourier a lui f este:

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iux}}{x^2+a^2}dx.$$

Pentru calculul ultimei integrale vom aplica teorema reziduurilor (§1.14.1) şi obținem:

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{a}e^{ua}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ua}}{a}.$$

Exemplul 3.4.7 Să se rezolve ecuația integrală:

$$\int_0^\infty g(u)\sin ux du=\varphi(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ x>1.\end{cases}$$

Soluție. Forma membrului din dreapta a ecuației ne indică faptul că în rezolvarea ecuației apare transformata Fourier prin sinus. Astfel,

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\sin ux du=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ x>1.\end{cases}$$

Deci,

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin ux dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\sin ux dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin ux dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\left(-\frac{\cos ux}{u}\right)' dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\cos ux}{-u}x\Big|_0^1+\frac{2}{\pi u}\int_0^1\cos ux dx=\frac{2}{\pi}\frac{\cos u}{-u}+\frac{2}{\pi u}\frac{\sin ux}{u}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{\cos u}{-u}+\frac{2}{\pi u^2}\sin u=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\sin u-u\cos u}{u^2}.$$

3.5 Transformata Laplace

3.5.1 Definiții. Exemple

Definiția 3.5.1 Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f=f(t)$ se numeşte *funcție original* dacă:

i) $f(t)=0,\ \forall t<0$;

ii) f este derivabilă pe porțiuni;

iii) există două numere $M>0$ şi $s_0\geq 0$ astfel încât

$$|f(t)|\leq Me^{s_0 t}. \tag{3.5.1}$$

Numărul s_0 se numeşte *indicele de creştere* al funcției original.

Exemplul 3.5.2 Cea mai simplă funcție original este *funcția unitate a lui Heaviside*:

$$\eta(t)=\begin{cases}0,\ t<0\\ \frac{1}{2},\ t=0\\ 1,\ t>0\end{cases},\ s_0=0.$$

Alte exemple de funcții original: k; t^n, $n\in\mathbb{N}$; $e^{\lambda t}$, $\lambda\in\mathbb{C}$; $\sin\omega t$; $\cos\omega t$; $sh\,\omega t$; $ch\,\omega t$.

Propoziția 3.5.3 Suma şi produsul a două funcții original sunt funcții original.

Definiția 3.5.4 Fie f o funcție original. Funcția F de variabilă complexă definită prin

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,\ p=s+i\sigma, \tag{3.5.2}$$

se numeşte *imaginea după Laplace* a funcției f sau *transformata Laplace* a funcției f.

Notații. Vom nota funcțiile original cu literă mică $f,g,h,...$ şi imaginile lor cu litera mare corespunzătoare $F,G,H,...$. Transformata Laplace (3.5.2) o vom nota prescurtat:

$$F=\mathcal{L}(f) \text{ sau } F(p)=\mathcal{L}(f(t)).$$

Observația 3.5.5

i) Deoarece prima condiție din definiția 3.5.1 nu este în general îndeplinită, în calculul transformatei Laplace, vom considera că orice funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ este în prealabil înmulțită cu funcția unitate η şi notată apoi tot cu f.

ii) Domeniul în care funcția F este definită precum şi proprietatea ei de a fi funcție derivabilă sunt precizate în următoarea teoremă.

Teorema 3.5.6 (*Teorema de caracterizare a transformatei Laplace*) Transformata Laplace a unei funcții original f există şi este o funcție olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>s_0$, unde s_0 este indicele de creştere al funcției original f . Derivata sa $F'(p)$ se obține din (3.5.2) derivând sub semnul de integrare:

$$F'(p)=\int_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt\ . \tag{3.5.3}$$

3.5.2 Proprietăți ale transformatei Laplace

Propoziția 3.5.7 Transformata Laplace este un operator liniar, adică dacă f şi g sunt două funcții original şi a şi b sunt două constante, atunci:

$$\mathcal{L}(af+bg)=a\mathcal{L}(f)+b\mathcal{L}(g). \tag{3.5.4}$$

Exemplul 3.5.8

i) Imaginea după Laplace a funcției unitate a lui Heaviside:

$$\mathcal{L}(\eta(t))=\int_0^\infty \eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt=\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^\infty=\frac{1}{p},\ \operatorname{Re}p>0\ .$$

ii) Imaginea după Laplace a funcției exponențiale:

$$\mathcal{L}\left(e^{\lambda t}\right)=\int_0^\infty e^{\lambda t}e^{-pt}dt=\left.\frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p}\right|_0^\infty=\frac{1}{p-\lambda},\ \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\lambda>0\ .$$

iii) Imaginea după Laplace ale funcțiilor trigonometrice:

$$\mathcal{L}(\sin\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right)-\mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}\right)\right]=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\ .$$

$$\mathcal{L}(\cos\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2},\ \operatorname{Re}p>0$$

$$\mathcal{L}(sh\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ \mathcal{L}(ch\omega t)=L\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2},\ \operatorname{Re}p>\omega\ .$$

Propoziția 3.5.9 (*Teorema asemănării*) Fie f o funcție original şi a o constantă strict pozitivă. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}(f(at))=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right). \tag{3.5.5}$$

Demonstrație. Facem schimbarea de variabilă $at=z$. Deci, $dt=\frac{1}{a}dz$. Avem:

$$\mathcal{L}(f(at))=\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(z)e^{-\frac{p}{a}z}dz=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Propoziția 3.5.10 (*Teorema întârzierii*) Fie f o funcție original şi $t_0>0$. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}(f(t-t_0))=e^{-pt_0}F(p). \tag{3.5.6}$$

Demonstrație. Facem schimbarea de variabilă $t-t_0=z$. Deci, $dt=dz$. Avem:

$$\mathcal{L}(f(t-t_0))=\int_0^\infty f(t-t_0)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(z)e^{-p(z+t_0)}dz=e^{-pt_0}\mathcal{L}(f(t)).$$

Propoziția 3.5.11 (*Teorema deplasării*) Fie f o funcție original şi q o constantă astfel încât $\operatorname{Re}(p-q)>s_0$. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left(e^{qt}f(t)\right)=F(p-q). \tag{3.5.7}$$

Demonstrație. Avem:

$$\mathcal{L}\left(e^{qt}f(t)\right)=\int_0^\infty e^{qt}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(z)e^{-(p-q)t}dt=F(p-q).$$

Propoziția 3.5.12 (*Teorema derivării originalului*) Dacă f şi derivatele sale $f', f'',..., f^{(n)}$ sunt funcții original şi $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}(f'(t))=pF(p)-f(0), \tag{3.5.8}$$

$$\mathcal{L}(f''(t))=p^2F(p)-\left[pf(0)+f'(0)\right], \tag{3.5.9}$$

sau, în general:

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)=p^nF(p)-\left[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\ldots+f^{(n-1)}(0)\right], \tag{3.5.10}$$

unde prin $f(0), f'(0),\ldots, f^{(n)}(0)$ se înțeleg limitele la dreapta ale funcțiilor respective pentru $t\to 0$ şi $\operatorname{Re} p>s_0$.

Demonstrație. Aplicând integrarea prin părți, obținem:

$$\mathcal{L}(f'(t))=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f'(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+pF(p),$$

deoarece $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-pt}f(t)=0$ pentru $\operatorname{Re} p>s_0$.

Pentru a obține relația (3.5.9), aplicăm formula (3.5.8) pentru funcția f':

$$\mathcal{L}(f''(t))=\mathcal{L}\left(\left(f'(t)\right)'\right)=p\mathcal{L}(f'(t))-f'(0)=p\left(pF(p)-f(0)\right)-f'(0)=$$
$$=p^2F(p)-\left[pf(0)+f'(0)\right].$$

Analog se obține şi relația (3.5.10).

Propoziția 3.5.13 (*Teorema derivării imaginii*) Fie f este o funcție original. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right)=F^{(n)}(p). \tag{3.5.11}$$

Demonstrație. Formula (3.5.3) din teorema de caracterizare se mai poate scrie astfel:

$$F'(p)=\mathcal{L}(-tf(t))$$

care reprezintă de fapt formula (3.5.11) pentru $n=1$. Funcția F fiind olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>s_0$, admite derivate de orice ordin în acest semiplan, iar integrala (3.5.3) fiind absolut şi uniform convergentă pentru $\operatorname{Re} p>s_0$ poate fi derivată în raport cu p sub semnul integrală, obținându-se astfel (3.5.11) pentru $n=2$, $n=3$ etc.

Propoziția 3.5.14 (*Teorema integrării originalului*) Fie f este o funcție original. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{F(p)}{p}. \qquad (3.5.12)$$

Demonstrație. Funcția $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ este o funcție original cu același indice de creștere ca și $f(t)$, adică s_0. Aplicăm teorema derivării originalului:

$$\mathcal{L}(g'(t))=p\mathcal{L}(g(t))-g(0).$$

Dar, $g'(t)=f(t)$ și $g(0)=0$. Deci,

$$\mathcal{L}(f(t))=p\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right), \text{ adică } \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{F(p)}{p}.$$

Propoziția 3.5.15 (*Teorema integrării imaginii*) Fie f este o funcție original. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_p^\infty F(q)dq. \qquad (3.5.13)$$

Demonstrație. Funcția F este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>s_0$, deci admite o primitivă Φ în acest semiplan. Dacă Φ are în punctul de la infinit un punct ordinar, atunci:

$$G(p)=\int_p^\infty F(q)dq=\Phi(q)\Big|_p^\infty=\Phi(\infty)-\Phi(p),$$

deci

$$G'(p)=-\Phi'(p)=-F(p).$$

Dacă $g(t)$ este originalul lui $G(p)$, atunci din teorema derivării imaginii, avem:

$$G'(p)=\mathcal{L}(-t\cdot g(t)).$$

Așadar,

$$F(p)=\mathcal{L}(t\cdot g(t)). \qquad (3.5.14)$$

Cum $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, din (3.5.14) avem că $g(t)=\frac{f(t)}{t}$, deci $G(p)=\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$.

Definiția 3.5.16 Fie f și g două funcții original. Se numește *produs de convoluție* al funcțiilor f și g și se notează $f*g$ funcția definită prin relația:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (3.5.15)$$

Teorema 3.5.17 (*Proprietăți ale produsului de convoluție*)

i) $f*g=g*f$, oricare ar fi funcțiile original f și g;

ii) $(f_1+f_2)*g=(f_1*g)+(f_2*g)$, oricare ar fi funcțiile original f_1, f_2 și g;

iii) $f*g$ este funcție original, oricare ar fi funcțiile original f și g.

Teorema 3.5.18 (*Teorema lui Borel – produsul a două imagini*)

Fie f și g două funcții original. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$ și $\mathcal{L}(g(t))=G(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)=F(p)G(p), \tag{3.5.16}$$

adică

$$\mathcal{L}\big((f*g)(t)\big)=\mathcal{L}\big(f(t)\big)\mathcal{L}\big(g(t)\big). \tag{3.5.17}$$

Demonstrație. Înmulțim relația $\mathcal{L}\big(f(t)\big)=F(p)$ cu $G(p)$ şi folosim definiția (3.5.2) a transformatei Laplace. Obținem:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big)=F(p)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\Big|\cdot G(p)\ \Rightarrow\ F(p)G(p)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}G(p)d\tau.$$

Aplicând teorema întârzierii, ultima relație devine:

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty f(\tau)\mathcal{L}\big(g(t-\tau)\big)d\tau.$$

Folosind din nou definiția transformatei Laplace, ultima relație devine:

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Deoarece g este funcție original, avem că $g(t-\tau)=0$ pentru $t-\tau<0$, de unde:

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty (f*g)(t)e^{-pt}dt=\mathcal{L}\big((f*g)(t)\big),$$

deci

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big)\mathcal{L}\big(g(t)\big)=\mathcal{L}\big((f*g)(t)\big).$$

Observația 3.5.19 În continuare, ne punem problema determinării originalului $f(t)$ când se cunoaşte imaginea sa $F(p)$.

Teorema 3.5.20 (*Formula de inversare Mellin – Fourier*) Dacă f este o funcție original având indicele de creştere s_0, iar $F(p)$ este imaginea sa, atunci în toate punctele de continuitate $t>0$ ale lui f avem:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp,\ a>s_0. \tag{3.5.18}$$

Demonstrație. Fie funcția $\varphi(t)=e^{-at}f(t)$. Funcția φ îndeplineşte următoarele condiții:

i) este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

ii) este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ pentru că $\varphi(t)=0$, pentru $t<0$, iar pentru $t>0$ avem:

$$|\varphi(t)|=e^{-at}|f(t)|\le M\cdot e^{-(a-s_0)t}$$

pentru $a>s_0$

$$\int_0^\infty Me^{-(a-s_0)t}dt$$

este convergentă, deci φ este absolut integrabilă pe $(0,\infty)$.

Pe baza proprietăților de mai sus, funcția φ se poate reprezenta printr-o integrală Fourier şi avem:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\sigma\int_0^\infty f(\tau)e^{-a\tau}e^{i\sigma(t-\tau)}d\tau.$$

De aici obținem:

$$e^{at}\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+i\sigma)t}d\sigma\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-(a+i\sigma)\tau}d\tau .$$

Facând schimbarea de variabilă $a+i\sigma=p$, obținem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}dp\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-p\tau}d\tau=e^{at}\varphi(t)=f(t),$$

deci,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp .$$

Egalitatea (3.5.18) se numeşte *formula lui Mellin – Fourier* şi reprezintă inversa transformării (3.5.2) şi se notează cu $\mathcal{L}^{-1}$. Adică, dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, atunci $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p))$. Mai mult, oricare ar fi $F(p)$ şi $G(p)$ ale căror inversă există, avem

$$\mathcal{L}^{-1}(aF(p)+bG(p))=a\mathcal{L}^{-1}(F(p))+b\mathcal{L}^{-1}(G(p)),\ a,\ b \text{ - constante.}$$

Deci, inversa transformatei Laplace este un operator liniar.

Observația 3.5.21 În fiecare punct c de discontinuitate, valoarea funcției din membrul drept este egală cu:

$$\frac{1}{2}\left[f(c-0)+f(c+0)\right].$$

Observația 3.5.22 Teorema 3.5.20 oferă un mijloc de calcul pentru determinarea originalului f când se cunoaşte imaginea sa, dar nu cunoaştem în ce condiții o funcție F este imaginea unei funcții original f. Teorema următoare conține condiții suficiente pentru ca o funcție F să fie o imagine.

Teorema 3.5.23 Dacă o funcție F de variabilă complexă $p=s+i\sigma$ îndeplineşte următoarele condiții:

i) este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p=s>s_0$, unde $s_0\geq 0$;

ii) $\lim\limits_{|p|\to\infty}F(p)=0$ limita fiind uniformă în raport cu argumentul lui p;

iii) integrala $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)dp$ este absolut convergentă,

atunci funcția f dată de

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)e^{pt}dp,\ t>0$$

este o funcție original şi imaginea sa este F.

Propoziția 3.5.24 (*Produsul a două originale*)

Fie f şi g două funcții original. Dacă $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$ şi $\mathcal{L}(g(t))=G(p)$, atunci:

$$\mathcal{L}(f(t)g(t))=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)G(p-q)dq, \tag{3.5.19}$$

unde $a>s_1$, s_1 fiind indicele de creştere al funcției f.

Demonstrație. Vom scrie formula lui Mellin – Fourier pentru funcția f şi înmulțim egalitatea cu $g(t)$. Obținem:

$$f(t)g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)e^{qt}g(t)dq\,,\ a>s_1\,.$$

Din teorema deplasării, avem:

$$\mathcal{L}\left(e^{qt}g(t)\right)=G(p-q),$$

deci

$$e^{qt}g(t)=\mathcal{L}\left(G(p-q)\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}G(p-q)e^{pt}dp\,,$$

unde $b>s_2+\operatorname{Re}q$, s_2 fiind indicele de creştere al lui g.

Înlocuind $e^{qt}g(t)$ mai sus şi schimbând ordinea de integrare, obținem:

$$f(t)g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)dq\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}G(p-q)e^{pt}dp\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F(q)G(p-q)dq\right]e^{pt}dp\,,$$

de unde, pe baza formulei Mellin – Fourier, deducem că

$$\mathcal{L}\left(f(t)g(t)\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)G(p-q)dq\,.$$

Observația 3.5.25 Pentru determinarea originalului $f(t)$ când se cunoaşte imaginea sa $F(p)$ se folosesc deseori următoarele teoreme (numite *teoreme de dezvoltare*).

Teorema 3.5.26 Dacă $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ este o funcție rațională, unde $gr(A)<gr(B)$, iar $B(p)$ are toate rădăcinile simple $p_0,p_1,p_2,\ldots,p_n$, atunci originalul funcției $F(p)$ este:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}\,. \tag{3.5.20}$$

Demonstrație. Din ipotezele din enunț, $F(p)$ admite o descompunere de forma

$$F(p)=\frac{a_0}{p-p_0}+\frac{a_1}{p-p_1}+\ldots+\frac{a_n}{p-p_n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{p-p_k}\,,$$

unde coeficientul a_k se poate determina integrând funcția $F(p)$ pe un cerc γ_k cu centrul în p_k şi de rază suficient de mică astfel încât în interiorul cercului să nu mai fie alt pol al funcției F. Avem:

$$\int_{\gamma_j}F(p)dp=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{\gamma_j}\frac{1}{p-p_k}dp\,.$$

Conform teoremei lui Cauchy integralele din membrul drept sunt nule, exceptând una singură,

$$\int_{\gamma_k}\frac{1}{p-p_k}dp=2\pi i\,.$$

Rezultă că

$$\int_{\gamma_k}F(p)dp=2\pi i a_k\,.$$

Pe de altă parte, folosind teorema reziduurilor şi formula pentru reziduul relativ la un pol simplu, obținem:

$$\int_{\gamma_k} F(p)dp = 2\pi i \cdot rez(F, p_k) = 2\pi i \cdot \frac{A(p_k)}{B'(p_k)},$$

de unde deducem că

$$a_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}.$$

Prin urmare,

$$F(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Aplicând inversa $\mathcal{L}^{-1}$ şi ținând cont de liniaritatea acestui operator, precum şi de faptul că $e^{p_k t} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p - p_k}\right)$, rezultă

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Consecința 3.5.27 Dacă una din rădăcinile polinomului B este nulă, de exemplu, $p_0 = 0$, notând cu $B(p) = pR(p)$, avem:

$$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{R'(p_k)} \frac{e^{p_k t}}{p_k}. \tag{3.5.21}$$

Egalitatea (3.5.21) se numeşte *formula lui Heaviside*.

Demonstrație. Din $B'(p) = R(p) + pR'(p)$, obținem

$$B'(0) = R(0) \text{ şi } B'(p_k) = p_k R'(p_k).$$

Descompunerea lui F va fi de forma

$$F(p) = \frac{A(p)}{pR(p)} = \frac{A(0)}{R(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{p_k R'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

La fel cum am procedat şi mai sus, obținem:

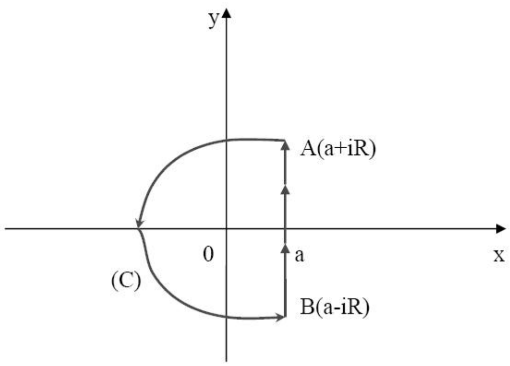
$$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{R'(p_k)} \frac{e^{p_k t}}{p_k}.$$

Consecința 3.5.28 Dacă $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ este o funcție rațională, unde $gr(A) < gr(B) - 2$, iar $B(p)$ are toate rădăcinile multiple p_k cu ordinul de multiplicitate m_k, $k = \overline{0,n}$ $m_0 + m_1 + \ldots + m_k = n + 1$, atunci originalul funcției $F(p)$ este:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \left[(p - p_k)^{m_k} F(p) e^{pt} \right]^{(m_k - 1)}. \tag{3.5.20}$$

Demonstrație. *Indicație*. În acest caz, vom aplica teorema reziduurilor pentru funcția $R(p) = F(p)e^{pt}$ care apare în formula lui Mellin – Fourier, pe curba $\Gamma = C \cup BA$ din figură şi trecând la limită pentru $R \to \infty$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \sum_k rez\left(R(p), p_k\right).$$



Teorema 3.5.29 Dacă $F(p)$ este olomorfă în exteriorul unui cerc γ cu centrul în origine şi de rază r, inclusiv punctul de la infinit, atunci $F(p)$ admite dezvoltarea în serie Laurent

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \ |p| > r \tag{3.5.22}$$

iar originalul său este

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}. \tag{3.5.23}$$

Observația 3.5.30 Funcția original $f(t)$ se poate determina chiar şi fără aplicarea acestor teoreme. Astfel, dacă imaginea sa $F(p)$ poate fi descompusă într-o sumă de funcții

$$F(p) = F_1(p) + \ldots + F_n(p),$$

ale căror funcții original sunt cunoscute, $f_1, \ldots, f_n$, atunci aplicând inversa $\mathcal{L}^{-1}$, obținem:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_1(p)\right) + \ldots + \mathcal{L}^{-1}\left(F_n(p)\right) = f_1(t) + \ldots + f_n(t) = f(t).$$

3.5.3 Exemple

i) $f(t) = \cos^3 t$, $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = ?$

Soluție. Cum $\cos^3 t = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t)$, din liniaritatea transformatei Laplace, obținem:

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(\cos^3 t\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t)\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}(\cos 3t) + \frac{3}{4}\mathcal{L}(\cos t) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{4}\left(\frac{1}{p^2+9} + \frac{3}{p^2+1}\right).$$

ii) $f(t) = e^{\lambda t}t^n$, $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = ?$

Soluție. Aplicăm teorema deplasării pentru funcția original $g(t)=t^n$, $\mathcal{L}(g(t))=G(p)$, $\mathcal{L}(e^{\lambda t}g(t))=G(p-\lambda)$. Pentru calculul imaginii lui $g(t)=t^n$, folosim integrala gamma a lui Euler:

$$\mathcal{L}(g(t))=\mathcal{L}(t^n)=\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt=\int_0^\infty \frac{1}{p^n}x^n e^{-x}\frac{dx}{p}=\frac{1}{p^{n+1}}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\frac{1}{p^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Deci,

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}t^n)=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}.$$

iii) $f(t)=\dfrac{\sin\omega t}{t}$, $\mathcal{L}(f(t))=?$

Soluție. Aplicăm teorema integrării imaginii: $\mathcal{L}\left(\dfrac{g(t)}{t}\right)=\displaystyle\int_p^\infty G(q)dq$, $g(t)=\sin\omega t$. Cum $\mathcal{L}(\sin\omega t)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, avem:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)=\int_p^\infty \frac{\omega}{q^2+\omega^2}dq=arctg\left.\frac{q}{\omega}\right|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{p}{\omega}.$$

iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=?$

Soluție. Din definiția transformatei Laplace și teorema integrării imaginii, obținem:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt=\int_p^\infty F(q)dq,$$

de unde, pentru $p=0$ avem:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp. \tag{3.5.24}$$

În cazul nostru, $f(t)=\sin t$, deci $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$. Înlocuind în (3.5.24), obținem:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=\int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}dp=arctgp\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}.$$

v) $f(t)=\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$, $\mathcal{L}(f(t))=?$

Soluție. Aplicăm teorema integrării originalului: $\mathcal{L}\left(\displaystyle\int_0^t g(\tau)d\tau\right)=\dfrac{G(p)}{p}$, unde $g(t)=\dfrac{\sin t}{t}$. Avem: $\mathcal{L}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)=\dfrac{\pi}{2}-arctgp$. Deci,

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right)=\frac{\frac{\pi}{2}-arctgp}{p}.$$

vi) $F(p)=\frac{30}{p^7}+\frac{8}{p-4}$, $f(t)=?$

Soluție. Știm că $\mathcal{L}\left(t^6\right)=\frac{6!}{p^7}$ și $\mathcal{L}\left(e^{4t}\right)=\frac{1}{p-4}$. Deci,

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{30}{p^7}+\frac{8}{p-4}\right)=30\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^7}\right)+8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-4}\right)=$$

$$=30\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{6!}\frac{6!}{p^7}\right)+8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-4}\right)=\frac{30}{6!}t^6+8e^{4t}=\frac{1}{24}t^6+8e^{4t}.$$

vii) $F(p)=\frac{1}{p^2+p-6}$, $f(t)=?$

Soluție. Vom descompune în fracții simple imaginea:

$$\frac{1}{p^2+p-6}=\frac{1}{(p-2)(p+3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+3},$$

unde $A=\frac{1}{5}$ și $B=-\frac{1}{5}$. Deci, utilizând această descompunere și liniaritatea inversei transformatei Laplace, obținem:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+p-6}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/5}{p-2}+\frac{-1/5}{p+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right)-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)=\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}.$$

viii) $F(p)=\frac{3p+1}{p^4+p^2}$, $f(t)=?$

Soluție. Ca și mai sus, vom descompune în fracții simple imaginea:

$$\frac{3p+1}{p^4+p^2}=\frac{3p+1}{p^2\left(p^2+1\right)}=\frac{Ap+B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1},$$

unde $A=3$, $B=1$, $C=-3$ și $D=-1$. Utilizând această descompunere și liniaritatea inversei transformatei Laplace, obținem:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p+1}{p^4+p^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p+1}{p^2}+\frac{-3p-1}{p^2+1}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(3\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-3\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+1}\right)=$$

$$=3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)-3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)-3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)=3+t-3\cos t-\sin t.$$

ix) $F(p)=\frac{1}{p^2-8p+25}$, $f(t)=?$

Soluție. Vom scrie numitorul fracției astfel:

$$p^2-8p+25=(p-4)^2+9.$$

Deci,

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-4)^2+9}\right).$$

Utilizând teorema deplasării şi faptul că $\mathcal{L}(\sin 3t)=\dfrac{3}{p^2+9}$, avem că

$$f(t)=\frac{1}{3}e^{4t}\sin 3t .$$

3.5.4 Integrarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

În general, prin aplicarea transformatei Laplace, ecuaţiile diferenţiale şi integro–diferenţiale devin ecuaţii algebrice, a căror rezolvare este mult mai simplă.

Ne punem problema determinării soluţiei $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ a ecuaţiei diferenţiale

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)=f(t) \qquad (3.5.25)$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$y(0)=y_0,y'(0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}. \qquad (3.5.26)$$

Coeficienţii $a_0,a_1,\ldots,a_n$ sunt constante reale, $y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}$ sunt numere reale date. Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ este de asemenea cunoscută.

În continuare, vom presupune că $f(t)$ este o funcţie original şi că soluţia $y(t)$ a ecuaţiei (3.5.25) cu condiţiile iniţiale (3.5.26) îndeplineşte condiţiile impuse originalelor împreună cu derivatele lor până la ordinul n inclusiv (funcţia $\eta(t)y(t)$ care verifică (3.5.25) şi (3.5.26) este o funcţie original).

Vom aplica transformata Laplace ecuaţiei (3.5.25). Notăm: $\mathcal{L}(y(t))=Y(p)$, $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$.
Ţinând cont de proprietatea de liniaritate a operatorului $\mathcal{L}$, din (3.5.25) deducem:

$$a_0\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t)\right)+a_1\mathcal{L}\left(y^{(n-1)}(t)\right)+\ldots+a_{n-1}\mathcal{L}\left(y'(t)\right)+a_n\mathcal{L}\left(y(t)\right)=\mathcal{L}\left(f(t)\right), \qquad (3.5.27)$$

Folosind teorema derivării originalului şi ţinând seama de condiţiile iniţiale (3.5.26), avem:

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right)=pY(p)-y(0)=pY(p)-y_0,$$
$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right)=p^2Y(p)-\left[py(0)+y'(0)\right]=p^2Y(p)-(py_0+y_1),$$
$$\mathcal{L}\left(y^{(n-1)}(t)\right)=p^{n-1}Y(p)-\left[p^{n-2}y(0)+p^{n-3}y'(0)+\ldots+py^{(n-1)}(0)+y^{(n-2)}(0)\right]=$$
$$=p^{n-1}Y(p)-\left[p^{n-2}y_0+p^{n-3}y_1+\ldots+py_{n-1}+y_{n-2}\right],$$
$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t)\right)=p^nY(p)-\left[p^{n-1}y(0)+p^{n-2}y'(0)+\ldots+py^{(n-2)}(0)+y^{(n-1)}(0)\right]=$$
$$=p^nY(p)-\left[p^{n-1}y_0+p^{n-2}y_1+\ldots+py_{n-2}+y_{n-1}\right].$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia (3.5.27) şi ordonând termenii convenabil, obţinem:

$$\left(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\right)Y(p)-G(p)=F(p), \qquad (3.5.28)$$

unde $G(p)$ provine din termenii din paranteză din membrul stâng care nu conţin $Y(p)$. Dacă notăm cu $P(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$, atunci ecuaţia (3.5.28) devine

$$P(p)Y(p)-G(p)=F(p) \qquad (3.5.29)$$

şi se numeşte *ecuația operațională* corespunzătoare ecuației (3.5.25) cu condițiile inițiale (3.5.26). Din (3.5.29) găsim că

$$Y(p)=\frac{F(p)+G(p)}{P(p)}. \tag{3.5.30}$$

Soluția ecuației (3.5.25) cu condițiile inițiale (3.5.26) este $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p))$ şi se determină folosind descompuneri convenabile ale funcției $Y(p)$, teoreme de dezvoltare sau, în ultimă instanță, folosind formula lui Mellin–Fourier.

Exemplul 3.5.31 Să se integreze ecuația

$$y''-7y'+10y=3e^t,\ t>0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-3.$$

Soluție. Fie $\mathcal{L}(y(t))=Y(p)$. Ştim că $\mathcal{L}(e^t)=\dfrac{1}{p-1}$. Din cele expuse mai sus, avem

$$\mathcal{L}(y'')-7\mathcal{L}(y')+10\mathcal{L}(y)=3\mathcal{L}(e^t).$$

Din teorema derivării originalului, avem

$$\mathcal{L}(y'(t))=pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$
$$\mathcal{L}(y''(t))=p^2Y(p)-[py(0)+y'(0)]=p^2Y(p)-p+3.$$

Înlocuind în ecuația de mai sus, obținem:

$$p^2Y(p)-p+3-7pY(p)+7+10Y(p)=\frac{3}{p-1},$$

adică

$$(p^2-7p+10)Y(p)-p+10=\frac{3}{p-1} \Leftrightarrow (p^2-7p+10)Y(p)=\frac{3}{p-1}+p-10.$$

Deci,

$$(p-2)(p-5)Y(p)=\frac{3}{p-1}+p-10 \Leftrightarrow Y(p)=\frac{3}{(p-1)(p-2)(p-5)}+\frac{p-10}{(p-2)(p-5)},$$

sau

$$Y(p)=\frac{p^2-11p+13}{(p-1)(p-2)(p-5)}=\frac{3/4}{p-1}+\frac{5/3}{p-2}+\frac{-17/3}{p-5}.$$

Aplicând $\mathcal{L}^{-1}$, obținem

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(p))=3/4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)+5/3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right)-17/3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-5}\right)=\frac{3}{4}e^t+\frac{5}{3}e^{2t}-\frac{17}{3}e^{5t}.$$

3.5.5 Integrarea sistemelor de ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Metoda prezentată anterior se poate aplica şi sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. Aplicând transformata Laplace ecuațiilor sistemului, vom obține un sistem de ecuații operaționale, sistem algebric, liniar în imaginile funcțiilor necunoscute. Rezolvând acest sistem algebric obținem imaginile funcțiilor necunoscute, iar originalele acestora constituie soluția căutată a sistemului.

Exemplul 3.5.32 Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases}, \ x(0) = 3, \ y(0) = 15, \ x = x(t), \ y = y(t).$$

Soluție. Fie $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ şi $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Din teorema derivării originalului, obținem

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0) = pY(p) - 3, \ \mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 15.$$

Prin aplicarea transformatei Laplace, sistemul devine

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x') + 4\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y) = 0 \\ \mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(x) + 6\mathcal{L}(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p+4)X(p) + 4Y(p) = 3 \\ 2X(p) + (p+6)Y(p) = 15 \end{cases}.$$

Pentru rezolvarea acestui sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute aplicăm metoda lui Cramer. Astfel,

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ şi } Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+4 & 4 \\ 2 & p+6 \end{vmatrix} = (p+2)(p+8), \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 15 & p+6 \end{vmatrix} = 3p - 42, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+4 & 3 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 15p + 54.$$

Deci,

$$X(p) = \frac{3p-42}{(p+2)(p+8)} = \frac{-8}{p+2} + \frac{11}{p+8} \text{ şi } Y(p) = \frac{15p+54}{(p+2)(p+8)} = \frac{4}{p+2} + \frac{11}{p+8}$$

şi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p)) = -8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) + 11\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+8}\right) = -8e^{-2t} + 11e^{-8t},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) + 11\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+8}\right) = 4e^{-2t} + 11e^{-8t}.$$

3.5.6 Rezolvarea unor ecuații integrale

O altă aplicație a transformatei Laplace o întâlnim la rezolvarea ecuației integrale Volterra, anume:

$$A \cdot y(t) + B \cdot \int_0^t y(\tau) k(t-\tau) d\tau = C \cdot f(t), \ t > 0, \tag{3.5.31}$$

unde A, B, C sunt constante, f şi k sunt funcții original continue, iar y este funcția necunoscută, tot original.

Notăm cu F, K şi Y imaginile funcțiilor original f, k şi y. Aplicăm transformata Laplace ecuației (3.5.31) şi folosim proprietatea de liniaritate a operatorului $\mathcal{L}$:

$$A \cdot \mathcal{L}(y(t)) + B \cdot \mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau) k(t-\tau) d\tau\right) = C \cdot \mathcal{L}(f(t)). \tag{3.5.32}$$

Din teorema lui Borel (produsul a două imagini) şi folosind notațiile de mai sus, relația (3.5.32) devine:

$$A \cdot Y(p) + B \cdot Y(p) K(p) = C \cdot F(p) \ \Leftrightarrow \ (A + B \cdot K(p)) Y(p) = C \cdot F(p).$$

Deci,

$$Y(p) = \frac{C \cdot F(p)}{A + B \cdot K(p)}. \tag{3.5.33}$$

Originalul lui $Y(p)$ din (3.5.33) reprezintă soluția ecuației (3.5.31).

Exemplul 3.5.33 Să se integreze ecuația

$$y(t) = e^t - \int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau) d\tau .$$

Soluție. Fie $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Folosind cele expuse mai sus, avem

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(e^t) - \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau) d\tau\right) \Leftrightarrow \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(e^t) - \mathcal{L}\left(e^{2t} * y(t)\right),$$

adică,

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} \cdot Y(p) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) Y(p) = \frac{1}{p-1} \Leftrightarrow \frac{p-1}{p-2} Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Deci,

$$Y(p) = \frac{p-2}{(p-1)^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2},$$

de unde, prin aplicarea inversei $\mathcal{L}^{-1}$, avem:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right) = e^t - te^t .$$

Am folosit faptul că

$$\mathcal{L}(e^t t) = \frac{1}{(p-1)^2} \text{ (din teorema deplasării).}$$

Exemplul 3.5.34 Să se integreze ecuația

$$y(t) = \sin t - \int_0^t y(\tau) d\tau .$$

Soluție. Fie $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Știm că $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$ și $\mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau) d\tau\right) = \frac{Y(p)}{p}$ (teorema integrării originalului). Avem:

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(\sin t) - \mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau) d\tau\right) \Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p} Y(p).$$

Deci,

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right) Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \Leftrightarrow \frac{p+1}{p} Y(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

adică

$$Y(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{-1/2}{p+1} + \frac{1/2\, p + 1/2}{p^2+1}.$$

Prin aplicarea inversei $\mathcal{L}^{-1}$, avem:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Deci,

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

3.5.7 Rezolvarea unor ecuații integro–diferențiale

Fie ecuația integro–diferențială liniară

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(n-i)}(t) + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} y^{(i)}(\tau) k_i(t-\tau)\, d\tau = f(t), \tag{3.5.34}$$

cu condițiile inițiale

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \tag{3.5.35}$$

unde $a_0, \ldots, a_n$, $y_0, \ldots, y_{n-1}$ sunt constante, iar $k_0, \ldots, k_n$ şi f sunt funcţii date. Presupunem că funcţiile $k_0, \ldots, k_n$, f, precum şi funcţia necunoscută y sunt funcţii original. Notăm imaginile Laplace corespunzătoare acestor funcţii original cu $K_0, \ldots, K_n$, F şi Y. Aplicând transformata Laplace ecuației (3.5.34) şi ținând cont de liniaritatea operatorului $\mathcal{L}$, de teorema derivării originalului şi de teorema lui Borel, obținem ecuația operațională:

$$Y(p)\left[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n + \sum_{i=0}^{n} K_i(p) p^i\right] = A(p), \tag{3.5.36}$$

unde $A(p)$ este o funcție cunoscută. Rezolvând ecuația operațională se obținem $Y(p)$ al cărei original este soluția ecuației integro–diferențiale (3.5.34) cu condițiile inițiale (3.5.35).

Exemplul 3.5.35 Să se rezolve ecuația integro – diferențială:

$$y''(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau) sh(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t y'(\tau) ch(t-\tau)\, d\tau = ch t,$$

cu condițiile inițiale $y(0) = y'(0) = 0$.

Soluție. Fie $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Ştim că $\mathcal{L}(sh t) = \frac{1}{p^2-1}$ şi $\mathcal{L}(ch t) = \frac{p}{p^2-1}$. Aplicând transformata Laplace ecuației şi ținând cont de liniaritatea operatorului $\mathcal{L}$, obținem

$$\mathcal{L}(y''(t)) + \mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau) sh(t-\tau)\, d\tau\right) + \mathcal{L}\left(\int_0^t y'(\tau) ch(t-\tau)\, d\tau\right) = \mathcal{L}(ch t). \tag{3.5.36}$$

Din teorema derivării originalului, avem: $\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p)$, $\mathcal{L}(y''(t)) = p^2 Y(p)$, iar din teorema lui Borel, avem că:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t sh(t-\tau) y(\tau)\, d\tau\right) = \mathcal{L}(y(t))\mathcal{L}(sh t) = Y(p)\frac{1}{p^2-1},$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t ch(t-\tau) y'(\tau)\, d\tau\right) = \mathcal{L}(y'(t))\mathcal{L}(ch t) = pY(p)\frac{p}{p^2-1}.$$

Înlocuind în (3.5.36), obținem ecuația operațională

$$p^2 Y(p) + Y(p) + \frac{1}{p^2-1}Y(p) + \frac{p^2}{p^2-1}Y(p) = \frac{p}{p^2-1},$$

cu soluția

$$Y(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}.$$

Aplicând inversa $\mathcal{L}^{-1}$, avem:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(p))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)=1-\cos t.$$

CUPRINS

4. Ecuațiile fizice matematice

4.1 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea

Studiul ecuațiilor cu derivate parțiale îşi are originea în secolul al XVIII–lea şi a fost inspirat de modelele concrete din mecanică (elasticitate, câmp gravitațional). Ulterior, acest studiu a fost impulsionat de probleme de teoria difuziei, electrostatică, electricitate sau magnetism. Prima ecuație cu derivate parțiale studiată a fost *ecuația coardei vibrante*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

unde $u = u(x,t)$ reprezintă elongația în punctul x şi la momentul t, iar constanta pozitivă a semnifică raportul dintre presiunea constanta exercitată asupra coardei şi densitatea ei.

Studiul unor fenomene fizice ca: vibrațiile firelor şi membranelor, propagarea căldurii, propagarea undelor electromagnetice şi altele, conduc la ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Aceste ecuații descriu în timp (t) şi spațiu (x) evoluția fenomenului respectiv, pe lângă care sunt date şi condiții suplimentare concrete în care s-a realizat fenomenul, care asigură în general existența şi unicitatea soluției problemei cercetate.

În general, prin ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea în n variabile independente se înțelege o ecuație care leagă valorile celor n variabile independente de valorile funcției necunoscute şi ale unor derivate parțiale ale acesteia până la ordinul al doilea. Cu alte cuvinte, avem următoarea definiție.

Definiția 4.1.1 Se numeşte *ecuație cu derivate parțiale (EDP) de ordinul al doilea* o ecuație de forma

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0, \tag{4.1.1}$$

unde $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ este funcția necunoscută, $u \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ domeniu, iar F este o funcție dată.

Exemplul 4.1.2 *Ecuația lui Laplace*

$$\Delta u = 0, \text{ unde } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \tag{4.1.2}$$

Această ecuație a fost studiată pentru prima oară de către Laplace în cercetările sale cu privire la câmpul potențial gravitațional în jurul anului 1780.

Exemplul 4.1.3 *Ecuația lui Poisson*

$$\Delta u = f(x). \tag{4.1.3}$$

Această ecuație a apărut pentru prima oară în anul 1813, cu ocazia studierii de către Poisson a unor probleme de elasticitate şi magnetism.

Exemplul 4.1.4 *Ecuația lui Helmholtz*

$$\Delta u = -\lambda \cdot u. \tag{4.1.4}$$

Această ecuație a fost dedusă în anul 1860 şi a apărut ca urmare a studiului unor probleme de acustică.

Exemplul 4.1.5 *Ecuația undelor*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t). \tag{4.1.5}$$

Ecuația a fost introdusă şi analizată de către D'Alembert în anul 1752 ca un model care descrie mişcarea coardei vibrante.

Exemplul 4.1.6 *Ecuația căldurii*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f\left(x,t\right). \tag{4.1.6}$$

Ecuația a fost introdusă de către Fourier în celebrul său memoriu din 1822, "*Teoria analitică a căldurii*".

Definiția 4.1.7 Se numeşte *soluție* (clasică) a ecuației (4.1.1) o funcție $u \in C^2\left(D\right)$ care satisface identic ecuația. Mulțimea tuturor acestor soluții se numeşte *soluția generală* a ecuației (4.1.1). *A integra* ecuația (4.1.1) înseamnă a afla soluția ei generală.

Definiția 4.1.8 Prin *problema Cauchy* a unei EDP de ordinul al doilea se înțelege problema determinării soluției $u = u\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ a acestei ecuații care verifică anumite *condiții inițiale*, adică condiții care se referă la variabila t.

De exemplu, dacă ecuația în raport cu t este de ordinul întâi (vezi exemplul 4.1.6), atunci se dă valoarea funcției $u\left(x,t_0\right) = u_0\left(x\right)$ la momentul inițial $t = t_0$. Dacă ecuația în raport cu t este de ordinul al doilea (vezi exemplul 4.1.5), atunci la momentul inițial $t = t_0$ se cunosc $u\left(x,t_0\right) = u_0\left(x\right)$ şi $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t_0\right) = u_1\left(x\right)$.

În continuare, ne vom ocupa de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea pentru funcții de două variabile:

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{4.1.7}$$

Observația 4.1.9 În unele cărți se mai pot întâlni şi notațiile:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

numite *notațiile lui Monge*.

Definiția 4.1.10 Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este soluție pe D a ecuației (4.1.7), atunci suprafața $u = u\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right) \in D$ se numeşte *suprafață integrală* a ecuației (4.1.7).

4.2 EDP cvasiliniare de ordinul al doilea. Forma canonică

4.2.1 EDP cvasiliniare

Definiția 4.2.1 O EDP de ordinul al doilea, liniară în raport cu derivatele parțiale de ordinul al doilea se numeşte *ecuație cvasiliniară*. Forma generală a acestei ecuației este:

$$a\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{4.2.1}$$

unde coeficienții a,b,c, precum şi funcția necunoscută u se consideră funcții de clasă $C^2\left(D\right)$, iar a,b şi c nu trebuie să fie nuli simultan, adică $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ pe D.

Definiția 4.2.2 O EDP liniară în raport cu funcția necunoscută şi toate derivatele sale parțiale se numeşte *ecuație liniară*. Aşadar, o ecuație liniară are forma din relația (4.2.1), cu d având forma:

$$d\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma(x,y)u+\delta(x,y), \qquad (4.2.2)$$

cu $\alpha,\beta,\gamma,\delta : D \to \mathbb{R}$ funcții continue.

Definiția 4.2.3 Se numeşte *curbă caracteristică* a ecuației (4.2.1) orice curbă plană de clasă $C^1(D)$, $\Gamma \subset D$, de ecuație $\varphi(x,y)=0$, cu $grad\,\varphi(x,y)\neq 0$ care satisface ecuația:

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0. \qquad (4.2.3)$$

Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct fixat al curbei caracteristice Γ. Din condiția $grad\,\varphi(x,y)\neq 0$, presupunem că $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite, în vecinătatea punctului M_0, curba are ecuația $y=y(x)$. Din relația $\varphi(x,y(x))=0$, rezultă că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot y'(x)=0,$$

deci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot y'(x). \qquad (4.2.4)$$

Înlocuind (4.2.4) în ecuația (4.2.3), obținem:

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot y'(x)\right)^2-2b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot y'(x)\frac{\partial \varphi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0,$$

adică

$$a(x,y)\left(y'(x)\right)^2-2b(x,y)y'(x)+c(x,y)=0. \qquad (4.2.5)$$

Definiția 4.2.4 Ecuația (4.2.5) se numeşte *ecuația diferențială a curbelor caracteristice* ale ecuației (4.2.1).

Observația 4.2.5 După cum se vede, ecuația (4.2.5) este o ecuație de gradul al doilea în $y'(x)$.

Fie

$$y'(x)=\lambda(x,y) \qquad (4.2.6)$$

o soluție a ecuației (4.2.5) şi $\varphi(x,y)=C$ soluția generală a ecuației (4.2.6).

Definiția 4.2.6 Curbele integrale $\varphi(x,y)=C$ se numesc *curbe caracteristice* ale ecuației (4.2.1).

Rezolvând ecuația (4.2.5), obținem:

$$y'(x)=\frac{b(x,y)\pm\sqrt{b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)}}{a(x,y)}.$$

În funcție de semnul lui $\Delta=b^2-ac$, putem avea trei cazuri:

i) $\Delta>0$, deci avem două familii de curbe integrale, reale şi distincte. În acest caz, spunem că avem o *ecuație de tip hiperbolic*.

ii) $\Delta=0$, deci avem două familii de curbe integrale, reale şi confundate. În acest caz, spunem că avem o *ecuație de tip parabolic*.

iii) $\Delta<0$, deci avem două familii de curbe integrale, complex conjugate. În acest caz, spunem că avem o *ecuație de tip eliptic*.

Să considerăm schimbarea de variabile

$$\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y),\ \xi,\eta \in C^2(D), \tag{4.2.7}$$

cu proprietatea

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{ în } D,$$

ceea ce asigură posibilitatea determinării lui x şi y din (4.2.7).

Deoarece $u(x,y) = u(\xi(x,y),\eta(x,y))$, în baza formulelor de derivare a funcțiilor compuse, avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația (4.2.1), obținem:

$$a^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d^*\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{4.2.8}$$

unde

$$\begin{aligned} a^*(\xi,\eta) &= a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \\ b^*(\xi,\eta) &= a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ c^*(\xi,\eta) &= a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Se constată că

$$\Delta^* = \left(b^*(x,y)\right)^2 - a^*(x,y)c^*(x,y) = \left(b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)\right)\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}^2. \tag{4.2.10}$$

Aşadar, în urma schimbării de variabile, expresiile Δ^* şi Δ păstrează acelaşi semn sau sunt în acelaşi timp nule. În consecință, ecuația (4.2.1) nu-şi modifică tipul.

4.2.2 Reducerea la forma canonică

Rezolvarea diferitelor probleme care conduc la EDP de ordinul al doilea este strâns legată de reducerea acestor ecuații la forme mai simple printr-o schimbare a variabilelor independente. Aceste forme ireductibile la altele mai simple le vom numi *forme canonice*.

În cazul ecuațiilor hiperbolice, ecuația (4.2.5) are două familii de curbe integrale, reale şi distincte. Adică,

$$y'(x) = \frac{b(x,y) + \sqrt{\Delta}}{a(x,y)},\ y'(x) = \frac{b(x,y) - \sqrt{\Delta}}{a(x,y)},$$

sau

$$y'(x) = \mu_1(x,y),\ y'(x) = \mu_2(x,y),$$

de unde, prin integrare, se obțin cele două familii de curbe caracteristice

$$\varphi_1(x,y) = C_1,\ \varphi_2(x,y) = C_2. \tag{4.2.11}$$

Propoziția 4.2.7 Ecuația (4.2.1) de tip hiperbolic în D, prin schimbarea de variabile

$$\xi = \varphi_1(x,y),\ \eta = \varphi_2(x,y), \tag{4.2.12}$$

cu φ_1 şi φ_2 din (4.2.11), se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{4.2.13}$$

În cazul ecuațiilor parabolice, ecuația (4.2.5) are două familii de curbe integrale, reale şi confundate. Adică,

$$y'(x) = \frac{b(x,y)}{a(x,y)},$$

sau

$$y'(x) = \mu(x,y),$$

de unde, prin integrare, se obține familia de curbe caracteristice

$$\varphi(x,y) = C. \tag{4.2.14}$$

Propoziția 4.2.8 Ecuația (4.2.1) de tip parabolic în D, prin schimbarea de variabile

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = h(x,y), \tag{4.2.15}$$

cu φ dat în relația în (4.2.14) şi h o funcție arbitrară (independentă de φ), se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Phi_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{4.2.16}$$

Observația 4.2.9 În general, alegem funcția h cât mai simplă, şi anume $h(x,y)=x$ sau $h(x,y)=y$.

În cazul ecuațiilor eliptice, ecuația (4.2.5) are două familii de curbe integrale complex conjugate. Adică,

$$y'(x)=\frac{b(x,y)+i\sqrt{\Delta}}{a(x,y)},\ y'(x)=\frac{b(x,y)-i\sqrt{\Delta}}{a(x,y)},$$

de unde, prin integrare se obțin cele două familii de curbe caracteristice

$$\varphi_1(x,y)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=C_1,\ \varphi_2(x,y)=\alpha(x,y)-i\beta(x,y)=C_2. \qquad (4.2.17)$$

Propoziția 4.2.10 Ecuația (4.2.1) de tip eliptic în D, prin schimbarea de variabile

$$\xi=\alpha(x,y),\ \eta=\beta(x,y), \qquad (4.2.18)$$

cu α şi β din relația (4.2.17), se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (4.2.19)$$

Exemplul 4.2.11 Să se aducă la forma canonică şi să se integreze ecuația:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2y\frac{\partial u}{\partial y}-2ax^2=0.$$

Soluție. Deoarece, $a(x,y)=x^2$, $b(x,y)=-xy$, $c(x,y)=y^2$, avem că: $\Delta=0$. Deci, avem o ecuație de tip parabolic. Ecuația caracteristică ataşată este:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}+y^2=0,$$

sau

$$\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)^2=0\ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Obținem familia de soluții

$$xy=k.$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases}\xi=xy,\\ \eta=x.\end{cases}$$

După cum am procedat şi mai sus, efectuăm următoarele calcule:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}.$$

Ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=2a,$$

care reprezintă forma canonică a ecuației din enunț. Pentru a găsi soluția generală a ecuației, integrăm de două ori în raport cu η forma canonică şi obținem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=2a\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial\eta}=2a\eta+\varphi(\xi)\ \Rightarrow\ u(\xi,\eta)=a\eta^2+\eta\varphi(\xi)+\psi(\xi).$$

Revenind la variabilele inițiale, obținem soluția generală a ecuației noastre:

$$u(x,y) = ax^2 + x\varphi(xy) + \psi(xy),$$

unde φ şi ψ sunt funcții arbitrare de clasă C^2 de o variabilă.

4.2.3 Ecuații liniare şi omogene în raport cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți

Definiția 4.2.12 Forma generală a unei *ecuații liniare şi omogene în raport cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți* este

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4.2.20}$$

unde a,b,c sunt constante.

Ne propunem să reducem ecuația (4.2.20) la forma canonică şi să determinăm soluția ei generală.
Ecuația caracteristică ataşată ecuației (4.2.20) este

$$a\left(y'(x)\right)^2 - 2by'(x) + c = 0. \tag{4.2.21}$$

Rădăcinile μ_1 şi μ_2 ale ecuației (4.2.21) sunt constante:

$$y'(x) = \mu_1,\ y'(x) = \mu_2,$$

sau, echivalent

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1,\ \frac{dy}{dx} = \mu_2,$$

relații care se mai scriu

$$dy - \mu_1 dx = 0,\ dy - \mu_2 dx = 0.$$

Prin integrare, obținem

$$y - \mu_1 x = C_1,\ y - \mu_2 x = C_2. \tag{4.2.22}$$

Cazul I. În cazul ecuațiilor de tip hiperbolic, $\Delta = b^2 - ac > 0$, rădăcinile μ_1 şi μ_2 sunt reale şi distincte. Cu schimbarea de variabile

$$\xi = y - \mu_1 x,\ \eta = y - \mu_2 x, \tag{4.2.23}$$

obținem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\mu_1\mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \mu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în relația (4.2.20), avem

$$a\mu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2a\mu_1\mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a\mu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2b\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} -$$

$$-2b(\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2b\mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

sau

$$\left(a\mu_1^2-2b\mu_1+c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\left(2a\mu_1\mu_2-2b\mu_1-2b\mu_2+2c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left(a\mu_2^2-2b\mu_2+c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0 .$$

Acum, ținând cont că μ_1 şi μ_2 sunt rădăcinile ecuației (4.2.21), avem

$$2\left(a\mu_1\mu_2-b\left(\mu_1+\mu_2\right)+c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 ,$$

iar din relațiile lui Viète, $\mu_1+\mu_2=\frac{2b}{a}, \mu_1\mu_2=\frac{c}{a}$, obținem

$$4\frac{ac-b^2}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 ,$$

de unde obținem forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 . \qquad (4.2.24)$$

Ecuația (4.2.24) se integrează imediat. Într-adevăr, scrisă sub forma $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, se obține $\frac{\partial u}{\partial\eta}=\varphi(\eta)$. Integrând această ultimă ecuație, obținem $u=\int\varphi(\eta)d\eta+f(\xi)$, adică $u=f(\xi)+g(\eta)$, cu f şi g funcții arbitrare. Revenind la vechile variabile, soluția generală a ecuației (4.2.20) este

$$u(x,y)=f\left(y-\mu_1 x\right)+g\left(y+\mu_1 x\right). \qquad (4.2.25)$$

Cazul II. În cazul ecuațiilor de tip parabolic, $\Delta=b^2-ac=0$, rădăcinile μ_1 şi μ_2 sunt reale şi confundate, deci $\mu_1=\mu_2=\frac{b}{a}$, $a\neq 0$. Ecuația (4.2.21) se reduce la $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$, cu integrala generală

$$ay-bx=C . \qquad (4.2.26)$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi=ay-bx ,\ \eta=x , \qquad (4.2.27)$$

obținem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=b^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2b\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în relația (4.2.20), avem

$$ab^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2ab^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a^2c\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0 ,$$

sau

$$\left(ab^2-2ab^2+a^2c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0 \iff a\left(b^2-ac\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0 ,$$

adică,

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,$$

de unde obținem forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0. \tag{4.2.28}$$

Pentru integrarea ecuației (4.2.28) observăm că putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

deci

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=f(\xi)$$

şi integrând încă o dată, obținem

$$u=\eta f(\xi)+g(\xi).$$

Revenind la variabilele inițiale, soluția generală a ecuației (4.2.20) este

$$u(x,y)=xf(ay-bx)+g(ay-bx). \tag{4.2.29}$$

Cazul III. În cazul ecuațiilor de tip eliptic, $\Delta=b^2-ac<0$, rădăcinile μ_1 şi μ_2 sunt complex conjugate, adică

$$\mu_{1,2}=\frac{b}{a}\pm i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}.$$

Deci,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}+i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a},$$

sau, echivalent

$$ady=\left(b+i\sqrt{ac-b^2}\right)dx,$$

cu integrala generală

$$ay-\left(b+i\sqrt{ac-b^2}\right)x=C \text{ sau } bx-ay+i\sqrt{ac-b^2}\,x=C. \tag{4.2.30}$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi=bx-ay,\ \eta=\sqrt{ac-b^2}\,x, \tag{4.2.31}$$

ecuația (4.2.20) se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0, \tag{4.2.32}$$

adică funcția u este o funcție armonică arbitrară de ξ şi η. Soluția generală a ecuației (4.2.20) este

$$u(x,y)=\Phi\left(bx-ay,\sqrt{ac-b^2}\,x\right), \tag{4.2.33}$$

unde Φ este o funcție armonică arbitrară.

Exemplul 4.2.13 Să se determine soluția ecuației:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

care verifică următoarele condiții

$$\begin{cases} u(0,y) = 9y^3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y^2. \end{cases}$$

Soluție. În acest caz, avem că: $a = 2$, $b = -\dfrac{7}{2}$ şi $c = 3$, deci, $\Delta = \dfrac{25}{4} > 0$. Aşadar, avem o ecuație de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică ataşată ecuației noastre este:

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} + 3 = 0,$$

cu soluțiile

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \text{ şi } \frac{dy}{dx} = -3.$$

Obținem familiile de soluții

$$2y + x = C_1 \text{ şi } y + 3x = C_2.$$

Considerăm schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = 2y + x, \\ \eta = y + 3x. \end{cases}$$

Fiind o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, omogenă, cu coeficienți constanți, forma sa canonică este:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

iar aceasta din urmă are soluția generală

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Rezultă că ecuația noastră are soluția generală

$$u(x,y) = \varphi(2y + x) + \psi(y + 3x).$$

Din condiția $u(0,y) = 9y^3$, obținem:

$$\varphi(2y) + \psi(y) = 9y^3.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \varphi'(2y + x) + 3\psi'(y + 3x),$$

deci

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \varphi'(2y) + 3\psi'(y).$$

Din cea de-a doua condiție, obținem:

$$\varphi'(2y) + 3\psi'(y) = y^2.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \varphi(2y) + \psi(y) = 9y^3, \\ \varphi'(2y) + 3\psi'(y) = y^2, \end{cases}$$

obținem

$$\begin{cases} \varphi'(2y) = 16y^2, \\ \psi'(y) = -5y^2, \end{cases}$$

de unde rezultă că

$$\begin{cases} \varphi(y) = \dfrac{4}{3}y^3 + C_1, \\ \psi(y) = -\dfrac{5}{3}y^3 + C_2. \end{cases}$$

Aşadar,

$$u(x,y) = \frac{4}{3}(2y+x)^3 - \frac{5}{3}(y+3x)^3 + C.$$

Deoarece $u(0,y) = 9y^3$, deducem că $C = 0$, deci soluția generală a ecuației este:

$$u(x,y) = \frac{4}{3}(2y+x)^3 - \frac{5}{3}(y+3x)^3.$$

4.3 Coarda finită. Metoda separării variabilelor (D. Bernoulli şi J.Fourier)

Problema matematică la care conduce studiul vibrațiilor libere ale unei coarde finite, de lungime l, cu capetele fixe, se poate formula în următorul mod.

Să se determine funcția $u(x,t)$, $u \in C^2(D)$, $D = [0,l] \times [0,\infty)$ care să verifice ecuația cu derivate parțiale:

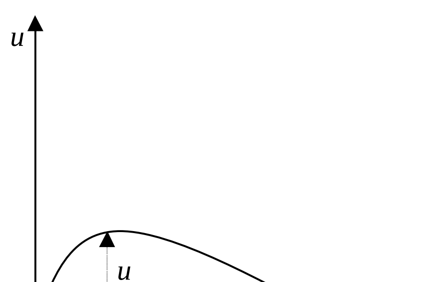
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; x \in [0,l], \; t \ge 0 \text{ (ecuația coardei)} \tag{4.3.1}$$

cu condițiile inițiale

$$u(x,0) = f(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \; \forall x \in [0,l] \tag{4.3.2}$$

şi condițiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \; \forall t \ge 0. \tag{4.3.3}$$



Aşadar, avem o coardă de lungime l care în poziția de echilibru este situată pe axa Ox, având un capăt în origine şi celălalt capăt în $A(l)$. Asupra coardei nu acționează forțe exterioare. Coarda, în acest caz, execută vibrații libere descrise de ecuația (4.3.1). Condițiile inițiale (4.3.2) indică starea în care se află coarda la momentul inițial de timp, precum şi viteza fiecărui punct al coardei la acelaşi moment. Conform condițiilor la limită (4.3.3) capetele coardei sunt fixe. Funcțiile f şi g sunt date şi presupuse nenule şi de clasă C^1 pe $[0,l]$. Pentru compatibilitatea condițiilor (4.3.2) şi (4.3.3) trebuie să avem: $f(0) = f(l) = 0$ şi $g(0) = g(l) = 0$. Pentru rezolvarea problemei enunțate mai sus, vom folosi *metoda separării variabilelor a lui Fourier*. Această metodă constă în a căuta pentru ecuația (4.3.1) soluții de forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4.3.4}$$

care verifică condițiile (4.3.2) şi (4.3.3). Din (4.3.3) avem că:

$$X(0)T(t) = 0 \text{ şi } X(l)T(t) = 0, \; \forall t > 0.$$

Deci, $X(0)=X(l)=0$, deoarece, dacă $T(t)=0$, $\forall t>0$, ar rezulta că $u(x,t)=0$ ceea ce ar contravine condițiilor (4.3.3). Derivăm funcția u din (4.3.4) şi introducem în (4.3.1):

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t),\ x\in[0,l],\ t\geq 0,$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}\ x\in[0,l],\ t\geq 0.$$

Ultima relație ne spune că o funcție de t coincide cu o funcție de x, acest lucru fiind posibil numai dacă ambele sunt egale cu o aceeaşi constantă reală, pe care o vom nota cu λ. Aşadar,

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda,$$

de unde obținem două ecuații diferențiale:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0, \tag{4.3.5}$$

$$T''(t)-\lambda a^2T(t)=0. \tag{4.3.6}$$

Pentru început, determinăm soluția ecuației (4.3.5) cu condițiile $X(0)=X(l)=0$. Astfel, ecuația caracteristică a ecuației diferențiale liniare (4.3.5) este

$$r^2-\lambda=0\ \Leftrightarrow\ r^2=\lambda. \tag{4.3.7}$$

Dacă $\lambda>0$, ecuația (4.3.7) are rădăcinile $r_1=\sqrt{\lambda}$ şi $r_2=-\sqrt{\lambda}$, deci soluția generală a ecuației (4.3.5) este:

$$X(x)=C_1e^{x\sqrt{\lambda}}+C_2e^{-x\sqrt{\lambda}}.$$

Din $X(0)=0$, avem: $C_1+C_2=0$, iar din $X(l)=0$, avem: $C_1e^{l\sqrt{\lambda}}+C_1e^{-l\sqrt{\lambda}}=0$. Din aceste relații rezultă că $C_1=C_2=0$ şi, deci, $X(x)=0$, adică $u(x,t)=0$, soluție care nu corespunde problemei.
Dacă $\lambda=0$, soluția generală a ecuației (4.3.5) este:

$$X(x)=C_1x+C_2.$$

Din condiția $X(0)=0$, avem $C_2=0$, iar din $X(l)=0$, avem $C_1l+C_2=0$, adică $C_1=0$. Aşadar, vom avea tot soluția banală.
Dacă $\lambda<0$, atunci rădăcinile ecuației caracteristice (4.3.7) sunt $r_{1,2}=\pm i\sqrt{-\lambda}$, şi, deci, soluția generală a ecuației (4.3.5) este:

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{-\lambda}x+C_2\sin\sqrt{-\lambda}x. \tag{4.3.8}$$

Din $X(0)=0$, avem $C_1=0$, iar din $X(l)=0$, avem $C_2\sin\sqrt{-\lambda}l=0$. Pentru a nu obține din nou soluția banală, vom lua $C_2\neq 0$ şi $\sin\sqrt{-\lambda}l=0$, adică $\sqrt{-\lambda}l=n\pi$, $n\in\mathbb{N}^*$. Deci, $-\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. În final, rezultă că ecuația (4.3.5) are o infinitate de soluții:

$$X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{4.3.9}$$

Înlocuind $-\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ în (4.3.6), obținem:

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2T(t)=0,$$

cu ecuația caracteristică

$$r^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 = 0 \iff r_{1,2} = \pm \frac{an\pi}{l} i$$

şi, deci, are soluția generală:

$$T_n(t) = D_n \cos\frac{an\pi}{l}t + E_n \sin\frac{an\pi}{l}t,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

unde D_n şi E_n sunt constante arbitrare.

Dacă notăm $A_n = C_n \cdot D_n$ şi $B_n = C_n \cdot E_n$, obținem soluția ecuației (4.3.1) cu condițiile la limită (4.3.3):

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Aplicăm *principiul suprapunerii efectelor* care afirmă că, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este convergentă, atunci suma sa, $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, este, de asemenea, soluție pentru problema noastră. Vom presupune, în plus, că această serie este şi derivabilă termen cu termen de două ori în raport cu x şi respectiv cu t. Aşadar,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4.3.10}$$

verifică ecuația (4.3.1) şi condițiile la limită (4.3.3).

Vom determina constantele A_n şi B_n din condițiile inițiale (4.3.2). Astfel,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{an\pi}{l}x$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

deci

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Vom presupune că funcțiile f şi g îndeplinesc condițiile lui Dirichlet, deci pot fi dezvoltate în serie Fourier de sinusuri pe intervalul $(0,l)$. Prelungind prin imparitate funcțiile f şi g pe intervalul $(-l,0)$, perioada prelungirilor este $T = 2l$, pulsația $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$, iar coeficienții au valorile cunoscute:

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin n\omega x dx = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \tag{4.3.11}$$

$$B_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \frac{l}{an\pi} g(x)\sin n\omega x dx = \frac{2}{an\pi}\int_0^{l} g(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{4.3.12}$$

Prin urmare, soluția problemei (4.3.1) cu condițiile (4.3.2) şi (4.3.3) este funcția $u(x,t)$ definită în (4.3.10), unde coeficienții A_n şi B_n sunt dați de formulele (4.3.11) şi (4.3.12).

Exemplul 4.3.1 Să se integreze ecuația coardei $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, cu condițiile:

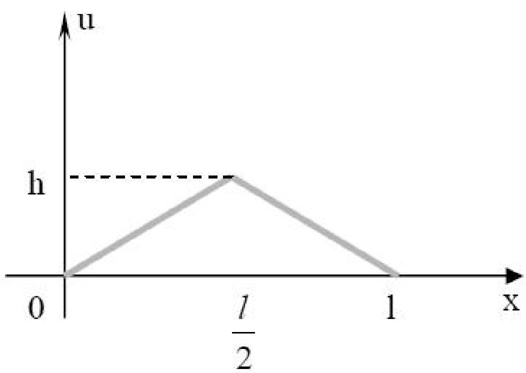
$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ şi } u(x,0) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x,\ 0 \le x \le \frac{l}{2}, \\ \frac{2h}{l}(l-x),\ \frac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$$

Soluție. Soluția ecuației date este

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

unde

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \text{ şi } B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$



În cazul nostru, $f(x) = u(x,0)$ şi $g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.

Observăm că $B_n = 0$ şi

$$A_n = \frac{4h}{l^2} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right).$$

Integrând prin părți, obținem:

$$A_{2n+1} = \frac{8h}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Aşadar, soluția ecuației este:

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{a(2n+1)\pi}{l} t \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

4.4 Ecuația propagării căldurii

Problema matematică la care conduce studiul propagării căldurii în bara omogenă, izotropă şi nemărginită se poate formula în felul următor.

Să se determine soluția $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a ecuației

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.4.1}$$

care satisface condiția inițială

$$u(x,0) = f(x),\ f \in C(\mathbb{R}), \tag{4.4.2}$$

cu $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, unde k este coeficientul de conductibilitate termică, c este căldura specifică, iar ρ este densitatea.

Observația 4.4.1 $u(x,t)$ reprezintă temperatura într-un punct x la momentul t.

Aplicăm metoda separării variabilelor căutând soluții ale ecuației (4.4.1) de forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4.4.3}$$

Derivând şi înlocuind în (4.4.1), obținem:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Eliminăm soluția banală şi împărțim relația la $X(x)T(t)$ şi obținem:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu\,,\ \mu - \text{constantă reală.}$$

Cele două rapoarte egale se reduc la o constantă μ deoarece x şi t sunt variabile independente. Obținem ecuațiile diferențiale:

$$X''(x) - \mu X(x) = 0, \tag{4.4.4}$$

$$T'(t) - \mu a^2 T(t) = 0. \tag{4.4.5}$$

Ecuația (4.4.5) fiind o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi, soluția ei generală este:

$$T(t) = Ce^{\int \mu a^2 dt}\,,\ C \ - \text{constantă.}$$

Putem avea 3 cazuri.

Dacă $\mu > 0$, atunci $|T(t)| \to \infty$, când $t \to \infty$, deci aceeaşi proprietate ar avea-o şi $|u(x,t)|$, fapt inacceptabil din punct de vedere fizic.

Dacă $\mu = 0$, atunci $T(t) = C$, adică temperatura în fiecare punct al barei nu depinde de timp, fapt de asemenea inacceptabil.

Aşadar $\mu < 0$ şi notăm $\mu = -\lambda^2$, $\lambda > 0$. Soluțiile generale ale ecuațiilor (4.4.4) şi (4.4.5) sunt:

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x,$$

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}\,,\ C\,,\ C_1\,,\ C_2 \ - \text{constante.}$$

Deci, soluțiile (4.4.3) ale ecuației (4.4.1) sunt:

$$u(x,t;\lambda) = X(x)T(t) = \big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big)e^{-\lambda^2 a^2 t}, \tag{4.4.6}$$

unde $A(\lambda) = C \cdot C_1$ şi $B(\lambda) = C \cdot C_2$.

Deoarece condițiile la limită lipsesc, toate valorile $\lambda > 0$ sunt acceptabile.

Vom încerca să determinăm soluția problemei sub forma:

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;\lambda)\,d\lambda \tag{4.4.7}$$

care înlocuieşte seria de funcții din cazul coardei. Condiția inițială (4.4.2) ne dă:

$$\int_0^\infty u(x,0;\lambda)\,d\lambda = f(x),$$

sau, ținând cont de (4.4.6),

$$\int_0^\infty \big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big)d\lambda = f(x). \tag{4.4.8}$$

Vom determina $A(\lambda)$ şi $B(\lambda)$ din (4.4.8) în ipoteza că funcția $f(x)$ poate fi reprezentată prin integrala Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cos\lambda(x-\tau)\,d\tau,$$

relație care se mai scrie:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^\infty f(\tau)(\cos\lambda x\cos\lambda\tau+\sin\lambda x\sin\lambda\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cos\lambda\tau d\tau+\sin\lambda x\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\sin\lambda\tau d\tau\right]d\lambda .$$

Comparând cu (4.4.8), observăm că:

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cos\lambda\tau d\tau ,\ B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\sin\lambda\tau d\tau . \tag{4.4.9}$$

Introducând relațiile din (4.4.9) în (4.4.6), obținem:

$$u(x,t;\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\tau)d\tau . \tag{4.4.10}$$

Deci, soluția (4.4.7) a ecuația (4.4.1) devine:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^\infty f(\tau)e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\tau)d\tau .$$

Folosind integrala Poisson: $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$, soluția ecuației (4.4.1) cu condiția inițială (4.4.2) este:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}}d\tau .$$

4.5 Problema lui Dirichlet pentru cerc

Fie $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x^2+y^2<r^2\right\}$ şi $\gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x^2+y^2=r^2\right\}$ frontiera domeniului D. Aşadar, $\overline{D}=D\cup\gamma$ reprezintă discul cu centrul în origine şi de rază r. Problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace constă în a determina funcția de clasă C^2 $u:\overline{D}\to\mathbb{R}$ care satisface ecuația

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 ,\ \forall(x,y)\in D \tag{4.5.1}$$

cu condiția la frontieră

$$u\big|_\gamma=f , \tag{4.5.2}$$

unde f este o funcție dată, continuă pe γ.

Vom folosi metoda separării variabilelor pentru a găsi soluția acestei probleme. Din cauza simetriei centrale față de origine a problemei, vom trece la coordonatele polare.

Fie ρ şi θ coordonatele polare ale punctului (x,y). Deci,

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=y\sin\theta,\end{cases}\text{ cu } \rho\in[0,r),\ \theta\in[0,2\pi). \tag{4.5.3}$$

Deci,

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ \text{ şi }\ \theta=arctg\frac{y}{x}+k\pi ,\ k=0,1,2 . \tag{4.5.4}$$

Observăm că

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho},\ \frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-y}{\rho^2},\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{\rho^2}.$$

Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse, obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{y}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{x}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{\rho-x\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{x}{\rho}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{2y\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{y}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{x^2}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}-$$

$$-\frac{xy}{\rho^3}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}+\frac{2xy}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{xy}{\rho^3}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}+\frac{y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{x}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{\rho-y\frac{\partial\rho}{\partial y}}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{y}{\rho}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{2x\rho\frac{\partial\rho}{\partial y}}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{x}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{y^2}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+$$

$$+\frac{xy}{\rho^3}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}-\frac{2xy}{\rho^4}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{xy}{\rho^3}\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}+\frac{x^2}{\rho^4}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația (4.5.1), obținem:

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{x^2+y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\left(\frac{-2xy}{\rho^3}+\frac{-2xy}{\rho^3}\right)\frac{\partial^2u}{\partial\theta\partial\rho}+$$

$$+\left(\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}+\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}-\left(\frac{2xy}{\rho^4}-\frac{2xy}{\rho^4}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$$

sau

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{x^2+y^2}{\rho^4}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{2\rho^2-\left(x^2+y^2\right)}{\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\rho}=0$$

sau

$$\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=0$$

sau, după înmulțirea cu ρ^2,

$$\rho^2\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0\,. \tag{4.5.5}$$

Astfel, problema (4.5.1) – (4.5.2) se reformulează după cum urmează: să se determine funcția $u(\rho,\theta)$, $u:[0,r)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}$ care satisface ecuația (4.5.5) şi condiția pe frontieră

$$u(\rho,\theta)\big|_{\rho=r} = f(\theta), \tag{4.5.6}$$

soluția fiind evident periodică, cu perioada 2π în raport cu variabila θ.
Conform metodei separării variabilelor, căutăm soluțiile ecuației (4.5.5) de forma

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta), \tag{4.5.7}$$

unde funcțiile R şi T sunt de clasă C^2. În plus, funcția T este presupusă periodică de perioadă 2π. Punând condiția ca funcția u din (4.5.7) să verifice ecuația (4.5.5), obținem:

$$\rho^2R''(\rho)T(\theta)+\rho R'(\rho)T(\theta)=-R(\rho)T''(\theta)$$

sau

$$\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=k, \tag{4.5.8}$$

unde k este o constantă.
Din (4.5.8) rezultă următoarele ecuații diferențiale:

$$T''(\theta)+kT(\theta)=0, \tag{4.5.9}$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-kR(\rho)=0. \tag{4.5.10}$$

Ecuația (4.5.9) este o ecuație diferențială liniară, omogenă cu coeficienți constanți. Ecuația sa caracteristică este:

$$\lambda^2+k=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-k}.$$

Caz I. $k<0 \Rightarrow T(\theta)=C_1e^{\theta\sqrt{-k}}+C_2e^{-\theta\sqrt{-k}}$. Această funcție este periodică numai pentru $C_1=C_2=0$, adică doar dacă $T\equiv 0$, ceea ce ar însemna că şi u este nulă.

Caz II. $k=0 \Rightarrow T''(\theta)=0$, adică $T(\theta)=C_1\theta+C_2$. Căutăm acum C_1 şi C_2 astfel încât $T(\theta)$ să fie periodică de perioadă 2π:

$$T(\theta+2\pi)=T(\theta)\Rightarrow C_1\theta+2C_1\pi+C_2=C_1\theta+C_2 \Rightarrow C_1=0.$$

Deci, $T(\theta)=C_2$, C_2 - constantă, o soluție banală inacceptabilă.

Caz III. $k>0 \Rightarrow T(\theta)=C_1\cos\theta\sqrt{k}+C_2\sin\theta\sqrt{k}$. Dar, $T(\theta)=T(\theta+2\pi)$, deci

$$C_1\cos\theta\sqrt{k}+C_2\sin\theta\sqrt{k}=C_1\cos(\theta+2\pi)\sqrt{k}+C_2\sin(\theta+2\pi)\sqrt{k},$$

sau

$$C_1\left(\cos\theta\sqrt{k}-\cos(\theta+2\pi)\sqrt{k}\right)+C_2\left(\sin\theta\sqrt{k}-\sin(\theta+2\pi)\sqrt{k}\right)=0,$$

de unde,

$$(\theta+2\pi)\sqrt{k}-\theta\sqrt{k}=2n\pi \text{ sau } 2\pi\sqrt{k}=2n\pi \text{ sau } k=n^2.$$

Deci,

$$k_n=n^2,\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.5.11}$$

Aşadar, soluția generală a ecuației (4.5.9) este:

$$T_n(\theta)=C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta,\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.5.12}$$

Înlocuind (4.5.11) în ecuația (4.5.10), obținem:

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^2R(\rho)=0, \tag{4.5.13}$$

care este o ecuație de tip Euler. Pentru integrarea acestei ecuații vom folosi schimbarea de variabilă $\rho = e^t$. De aici, $t = \ln \rho$, $d\rho = e^t dt$, $\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\rho}$. Aşadar,

$$R'(\rho) = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dt}\frac{dt}{d\rho} = e^{-t}\frac{dR}{dt},$$

$$R''(\rho) = \frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{d\rho}\right) = \frac{d}{d\rho}\left(e^{-t}\frac{dR}{dt}\right)\frac{dt}{d\rho} = \left(-e^{-t}\frac{dR}{dt} + e^{-t}\frac{d^2R}{dt^2}\right)e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right).$$

Înlocuind în ecuația (4.5.13), obținem:

$$\rho^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right) + \rho e^{-t}\frac{dR}{dt} - n^2 R(t) = 0$$

sau

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2 R(t) = 0. \tag{4.5.14}$$

Ecuația diferențială (4.5.14) este o ecuație liniară omogenă cu coeficienți constanți având ecuația caracteristică $r^2 - n^2 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm n$, deci soluția generală a ecuației (4.5.14) este:

$$R_n(t) = E_n e^{nt} + F_n e^{-nt},$$

sau, revenind la notația în ρ:

$$R_n(\rho) = E_n \rho^n + F_n \rho^{-n}, \tag{4.5.15}$$

unde, E_n şi F_n sunt constante oarecare.

Dacă $F_n \neq 0$, rezultă că $R_n(\rho) \to \pm\infty$, când $\rho \to 0$, deci funcția $u_n(\rho,\theta)$ ar tinde la infinit spre centrul cercului, ceea ce ar contrazice faptul că funcția $u_n(\rho,\theta) = R_n(\rho)T_n(\theta)$ este continuă. În consecință, $F_n = 0$, deci soluția ecuației (4.5.14) este:

$$R_n(\rho) = E_n \rho^n. \tag{4.5.16}$$

Aşadar, din (4.5.12) şi (4.5.16), obținem:

$$u_n(\rho,\theta) = E_n \rho^n (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta),$$

şi, notând $A_n = E_n C_n$ şi $B_n = E_n D_n$, avem:

$$u_n(\rho,\theta) = \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{4.5.17}$$

Conform principiului suprapunerii forțelor, în ipoteza convergenței, seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho,\theta)$ va fi soluția problemei Dirichlet. Vom presupune că această serie este convergentă şi este derivabilă termen cu termen de două ori în raport cu ρ şi respectiv cu θ. Fie, deci:

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n. \tag{4.5.18}$$

Este uşor de verificat că această funcție satisface ecuația (4.5.5). Condiția la frontieră (4.5.6) va fi satisfăcută dacă şi numai dacă:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n = f(\theta). \tag{4.5.19}$$

În relația (4.5.19) avem dezvoltarea în serie Fourier trigonometrică a funcției periodice f, de perioadă 2π. Coeficienții acestei dezvoltări se obțin astfel:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\,, \tag{4.5.20}$$

$$r^n A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt\,, \text{ deci } A_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt\,, \tag{4.5.21}$$

$$r^n B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt\,, \text{ deci } B_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt dt\,. \tag{4.5.22}$$

Prin urmare, soluția problemei (4.5.5) – (4.5.6) este dată de (4.5.18), unde coeficienții A_n, $n \in \mathbb{N}$, B_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt dați de relațiile (4.5.20) – (4.5.22).

În cele ce urmează vom scrie soluția (4.5.18) sub o altă formă, utilizată frecvent în aplicații.

Înlocuim expresiile coeficienți în (4.5.18) şi obținem:

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\cos n\theta dt + \frac{1}{\pi}\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\sin n\theta dt\right)\rho^n =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n(\cos nt\cos n\theta + \sin nt\sin n\theta)\right] f(t)\,dt.$$

Deci,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n(t-\theta)\right] f(t)\,dt\,. \tag{4.5.23}$$

Pentru a prelucra această formulă, să remarcăm că suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha$, cu $|a| < 1$, este partea reală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{in\alpha}$ care este o serie geometrică cu rația $q = ae^{i\alpha}$, unde $|\rho| < 1$. În consecință,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{in\alpha} = \frac{ae^{i\alpha}}{1-ae^{i\alpha}} = \frac{a}{e^{-i\alpha}-a} = \frac{a}{\cos\alpha - i\sin\alpha - a} = \frac{a}{(\cos\alpha - a) - i\sin\alpha} =$$

$$= a\frac{\cos\alpha - a + i\sin\alpha}{(\cos\alpha - a)^2 + \sin^2\alpha}.$$

Deci,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha = \frac{a\cos\alpha - a^2}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}.$$

Aşadar,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n(t-\theta) = \frac{\frac{\rho}{r}\cos\alpha - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}{1 - 2\frac{\rho}{r}\cos\alpha + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{\rho r\cos(t-\theta) - \rho^2}{r^2 - 2\rho r\cos(t-\theta) + \rho^2}.$$

Înlocuind în (4.5.23), obținem:

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + \frac{2\rho\left(r\cos(t-\theta) - \rho\right)}{r^2 - 2\rho r\cos(t-\theta) + \rho^2}\right] f(t)\,dt$$

sau

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\cos(t-\theta)+\rho^2}\right]f(t)\,dt\ . \tag{4.5.24}$$

Formula (5.4.24) se numeşte *formula lui Poisson.*

CUPRINS

5. FUNCȚII SPECIALE

5.1 Polinoame Legendre

Ecuația diferențială a lui Legendre

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+a\left(a+1\right)y=0 \tag{5.1.1}$$

unde a este o constantă reală, apare în probleme diverse cum ar fi problema fluxului unui fluid ideal la trecerea printr-o sferă, determinarea câmpului electric generat de o sferă încărcată şi determinarea distribuției temperaturii într-o sferă când se dă temperatura la suprafață.
Vom arăta că dacă parametrul real a este un întreg nenegativ n, atunci una dintre soluțiile ecuației (5.1.1) se reduce la un polinom de grad n. Aceste soluții polinomiale sunt cunoscute sub numele de *polinoame Legendre*. Vom obține reprezentarea explicită a acestor polinoame şi vom discuta câteva dintre proprietățile lor.
Deoarece funcțiile

$$p_1\left(x\right)=-\frac{2x}{1-x^2} \text{ şi } p_2\left(x\right)=\frac{a\left(a+1\right)}{1-x^2}$$

sunt analitice pentru $\left|x\right|<1$, rezultă că $x=x_0=0$ este un punct ordinar pentru (5.1.1). Deci, soluția ei $y\left(x\right)$ este unică şi analitică în x_0. Adică , $y\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ este o serie convergentă pentru $\left|x\right|<1$.
Pentru a găsi această soluție, înlocuim direct în (5.1.1) şi obținem:

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)\left(k+2\right)c_{k+2}x^k-2x\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)c_{k+1}x^k+a\left(a+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

sau, echivalent

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k+1\right)\left(k+2\right)c_{k+2}-\left(\left(k-1\right)k+2k-a\left(a+1\right)\right)c_k\right]x^k=0$$

sau

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k+1\right)\left(k+2\right)c_{k+2}+\left(a+k+1\right)\left(a-k\right)c_k\right]x^k=0\,.$$

Ultima relație este adevărată dacă şi numai dacă

$$\left(k+1\right)\left(k+2\right)c_{k+2}+\left(a+k+1\right)\left(a-k\right)c_k=0\,,\ k=0,1,\ldots$$

adică

$$c_{k+2}=-\frac{\left(a+k+1\right)\left(a-k\right)}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}c_k\,,\ k=0,1,\ldots \tag{5.1.2}$$

şi relația de recurență care ne dă coeficienții c_k.
Efectuând anumite calcule, obținem

$$c_{2k}=\frac{\left(-1\right)^k\left(a+2k-1\right)\left(a+2k-3\right)\ldots\left(a+1\right)a\left(a-2\right)\ldots\left(a-2k+2\right)}{\left(2k\right)!}c_0$$

sau

$$c_{2k}=\left(-1\right)^k\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a+k+\frac{1}{2}\right)2^{2k}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a-k+1\right)\left(2k\right)!}c_0\,,\ k=1,2,\ldots \tag{5.1.3}$$

şi

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k (a+2k)(a+2k-1)\ldots(a+1)(a-1)(a-3)\ldots(a-2k+1)}{(2k+1)!} c_1$$

sau

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a+k+1\right)2^{2k+1}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}a+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}a-k+\frac{1}{2}\right)(2k+1)!} c_1,\ k=1,2,\ldots. \tag{5.1.4}$$

Aşadar, soluţia ecuaţiei (5.1.1) se poate scrie astfel:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0\left[1-\frac{(a+1)a}{2!}x^2+\frac{(a+3)(a+1)a(a-2)}{4!}x^4-\ldots\right]+ \\ &\quad + c_1\left[x-\frac{(a+2)(a-1)}{3!}x^3+\frac{(a+4)(a+2)(a-1)(a-3)}{5!}x^5-\ldots\right] \\ &= c_0 y_1(x)+c_1 y_2(x). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Evident $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei lui Legendre.

Dacă în ecuaţia (5.1.1) , $a=2n$, atunci din (5.1.3) rezultă că $c_{2n+2}=c_{2n+4}=\ldots=0$, adică $y_1(x)$ se reduce la un polinom de grad $2n$. Analog, dacă $a=2n+1$, atunci $y_2(x)$ se reduce la un polinom de grad $2n+1$ care conţine doar impare ale lui x. Cum $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sunt soluţii ale ecuaţiei (5.1.1), rezultă că ecuaţia diferenţială Legendre are o soluţie polinomială pentru orice valoare întreagă nenegativă a lui a.

În continuare vrem să obţinem aceste polinoame în ordinea descendentă a puterilor lui x. Pentru aceasta, relaţia (5.1.2) se mai poate scrie:

$$c_s = -\frac{(s+1)(s+2)}{(n-s)(n+s+1)} c_{s+2},\ s \le n-2, \tag{5.1.6}$$

unde am luat drept indice pe s şi pe a ca fiind întregul n. Cu ajutorul relaţiei (5.1.6) putem exprima toţi coeficienţii nenuli în funcţie de coeficientul c_n al celei mai mari puteri a lui x. De obicei se alege

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!} \tag{5.1.7}$$

astfel încât soluţia polinomială a ecuaţiei (5.1.1) să aibă valoarea 1 în punctul $x=1$.

Din (5.1.6) şi (5.1.7) se obţine:

$$c_{n-2k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!},\ \text{când } n-2k \ge 0. \tag{5.1.8}$$

Definiţia 5.1.1 Soluţia rezultată a ecuaţiei (5.1.1) se numeşte *polinom Legendre de grad* n şi se notează cu $P_n(x)$. Din (5.1.8), această soluţie se scrie astfel:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n m!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}. \tag{5.1.9}$$

Observaţia 5.1.2 Din (5.1.9) se obţine că:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\ P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right).$$

Polinoamele Legendre $P_n(x)$ pot fi reprezentate într-o formă compactă după cum se arată în teorema următoare.

Teorema 5.1.3 (*Formula lui Rodrigues*)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n. \tag{5.1.10}$$

Demonstrație. Fie $v=\left(x^2-1\right)^n$. Deci,

$$\left(x^2-1\right)\frac{dv}{dx}=2nxv. \tag{5.1.11}$$

Derivând relația (5.1.11) de $n+1$ ori după formula lui Leibniz, obținem:

$$\left(x^2-1\right)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}}+2(n+1)x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}+n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n}=2n\left[x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}+(n+1)\frac{d^n v}{dx^n}\right],$$

sau

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}}-2x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}+n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n}=0. \tag{5.1.12}$$

Dacă facem substituția $z=\dfrac{d^n v}{dx^n}$, atunci (5.1.12) devine:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2 z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0,$$

care este, de fapt, identică cu ecuația (5.1.1) pentru $a=n$. Aşadar, este necesar ca

$$z=\frac{d^n v}{dx^n}=cP_n(x),$$

unde c este o constantă. Cum $P_n(1)=1$, avem:

$$c=\left(\frac{d^n v}{dx^n}\right)_{x=1}=\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\Big|_{x=1}=\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n(x+1)^n\Big|_{x=1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k\Big|_{x=1}=2^n n!.$$

Aşadar, am obținut că

$$P_n(x)=\frac{1}{c}\frac{d^n v}{dx^n}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

Definiția 5.1.4 Fie $\{f_n(x)\}$ un şir de funcții pe un interval oarecare I. O funcție $F(x,t)$ se numeşte *funcție generatoare a lui* $\{f_n(x)\}$ dacă

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n.$$

Următoarea teoremă ne dă funcția generatoare a şirului polinoamelor Legendre $\{L_n(x)\}$.

Teorema 5.1.5 (*Funcția generatoare*)

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(x\right)t^n\ . \tag{5.1.13}$$

Demonstrație. Dacă $|x|\le r$, r - arbitrar, și $|t|<\left(1+r^2\right)^{\frac{1}{2}}-r$, atunci avem că:

$$\left|2xt-t^2\right|\le 2|x||t|+\left|t^2\right|<2r\left(1+r^2\right)^{\frac{1}{2}}-2r^2+1+r^2+r^2-2r\left(1+r^2\right)^{\frac{1}{2}}=1\,.$$

Aşadar, putem scrie funcția $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ în forma:

$$\left(1-t\left(2x-t\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t\left(2x-t\right)+\frac{1}{2}\frac{3}{4}t^2\left(2x-t\right)^2+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot\left(2n\right)}t^n\left(2x-t\right)^n+\ldots\,.$$

Coeficientul lui t^n din această expresie este

$$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot\left(2n\right)}\left(2x\right)^n-\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2n-3\right)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot\left(2n-2\right)}\frac{\left(n-1\right)}{1!}\left(2x\right)^{n-2}+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2n-5\right)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot\left(2n-4\right)}\frac{\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{2!}\left(2x\right)^{n-4}-\ldots=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{n!}\left[x^n-\frac{n\left(n-1\right)}{\left(2n-1\right)!1\cdot 2}x^{n-2}+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)2\cdot 4}x^{n-4}-\ldots\right]=P_n\left(x\right).$$

Teorema 5.1.6 (*Relația de recurență*)

$$\left(n+1\right)P_{n+1}\left(x\right)=\left(2n+1\right)xP_n\left(x\right)-nP_{n-1}\left(x\right),\ n=1,2,\ldots\,. \tag{5.1.14}$$

Demonstrație. Derivând relația (5.1.13) în raport cu t, obținem:

$$\left(x-t\right)\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n\left(x\right)t^{n-1}\,,$$

sau

$$\left(x-t\right)\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n\left(x\right)t^{n-1}\,,$$

sau

$$\left(x-t\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(x\right)t^n=\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n\left(x\right)t^{n-1}$$

Identificând coeficienții lui t^n, rezultă:

$$xP_n\left(x\right)-P_{n-1}\left(x\right)=\left(n+1\right)P_{n+1}\left(x\right)-2nxP_n\left(x\right)+\left(n-1\right)P_{n-1}\left(x\right),$$

relație echivalentă (5.1.14).

Observația 5.1.7 Cum $P_0\left(x\right)=1$ şi $P_1\left(x\right)=x$, relația (5.1.14) poate fi utilizată la găsirea polinoamelor Legendre de grad mare.

Definiția 5.1.8 Sistemul de funcții $\left\{f_n\right\}$ este un *sistem ortogonal* pe $\Omega\subseteq\mathbb{R}^p$, dacă:

$$\left\langle f_m,f_n\right\rangle=\int_{\Omega}f_m\left(x\right)f_n\left(x\right)dx=\begin{cases}0,\ m\ne n\\ C_n>0,\ m=n.\end{cases} \tag{5.1.15}$$

Dacă pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem $C_n=1$, atunci sistemul de funcții $\left(f_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *ortonormat.*

Propoziția 5.1.9 Polinoamele Legendre sunt funcții ortogonale pe intervalul $[-1,1]$ şi

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, \ m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, \ m = n. \end{cases}$$

Exemplul 5.1.10 Să se verifice următoarea relație de recurență pentru polinoamele Legendre:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \quad (5.1.16)$$

Soluție. Derivând relația (5.1.13) în raport cu x, obținem:

$$\frac{t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n ,$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n = \frac{t}{1-2xt+t^2}\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^n , \quad (5.1.17)$$

adică

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} .$$

Identificând coeficienții lui t^n, rezultă:

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x). \quad (5.1.18)$$

Acum, derivând relația (5.1.13) în raport cu t, obținem:

$$(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} ,$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \frac{x-t}{1-2xt+t^2}\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^n .$$

Din (5.1.17), ultima relație devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \frac{x-t}{t}\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n ,$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n = (x-t)\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} xP'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1}$$

şi, identificând coeficienții lui t^n, obținem:

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x). \quad (5.1.19)$$

Din (5.1.18) şi (5.1.19), rezultă:

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2\left(nP_n(x) + P'_{n-1}(x)\right) + P'_{n-1}(x),$$

care este echivalentă cu relația din enunț.

Exemplul 5.1.11 Să se arate că:

i) $P_n(1)=1$; ii) $P_n(-1)=(-1)^n$; iii) $P_{2n}(0)=(-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$; iv) $P_{2n+!}(0)=0$.

Soluție. i) Din teorema 5.1.5, pentru $x=1$, obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n\ ,$$

adică

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n\ .$$

Dar, se ştie că:

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\ .$$

Aşadar,

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n\text{ , pentru orice } t \text{ cu } |t|<1\,.$$

de unde

$$P_n(1)=1\,.$$

ii) Analog, ca la punctul i).
iii), iv) Din teorema 5.1.5, pentru $x=0$, obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)t^n\ .$$

Dezvoltând $\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ în serie binomială, obținem:

$$\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(t^2\right)^2+\ldots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(t^2\right)^n+\ldots,$$

adică

$$\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot2n}{2^n\cdot n!\cdot2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)2n}t^{2n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!\cdot2^n\cdot n!}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}t^{2n}\,.$$

Aşadar, avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)t^n\ .$$

Identificând coeficienții, obținem:

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \text{ şi }\ P_{2n+1}(0)=0\,.$$

Exemplul 5.1.12 Să se calculeze $\int_{-1}^{1}xP_{n-1}(x)P_n(x)dx$.

Soluție. Înmulțim relația de recurență (5.1.14) cu $P_{n-1}(x)$ şi integrăm apoi pe intervalul $[-1,1]$. Avem:

$$(n+1)\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx=(2n+1)\int_{-1}^{1}xP_{n-1}(x)P_n(x)dx-n\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx\,.$$

Ținând cont de propoziția 5.1.9, ultima expresie devine:

$$0=(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx-n\frac{2}{2(n-1)+1},$$

deci

$$\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx=\frac{2n}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{2n}{4n^2-1}.$$

Exemplul 5.1.13 Să se arate că $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$.

Soluție. Pornim de la funcția generatoare a polinoamelor Legendre şi obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n(-x)t^n .$$

Deci,

$$P_n(x)=(-1)^n P_n(-x)$$

şi, înmulțind cu $(-1)^n$, rezultă relația din enunț.

Exemplul 5.1.14 Să se dezvolte funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, într-o serie de polinoame Legendre.

Soluție. Aşadar, trebuie să scriem funcția f de forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x). \tag{5.1.20}$$

Pentru a găsi coeficienții c_n vom înmulți relația (5.1.20) cu $P_m(x)$ și vom integra pe $[-1,1]$. Obținem:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x)\right)P_m(x)dx.$$

Ținând cont de propoziția 5.1.9, avem:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx=c_n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx=c_n\frac{2}{2n+1},$$

deci

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx,\ n=0,1,2,\dots. \tag{5.1.21}$$

Funcția $f(x)=x^2$ fiind un polinom de gradul al doilea, atunci vom avea că:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{2} c_nP_n(x),$$

adică

$$x^2=c_0P_0+c_1P_1+c_2P_2 .$$

Deci,

$$x^2=c_0+c_1x+\frac{1}{2}c_2\left(3x^2-1\right).$$

Aplicând (5.1.21), obținem că:

$$c_0=\frac{1}{3},\ c_1=0 \text{ şi } c_2=\frac{2}{3}.$$

Aşadar,

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x).$$

5.2 Polinoame Cebâşev

Fie ecuația diferențială a lui Cebâşev

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+n^2y=0. \tag{5.2.1}$$

Făcând substituția $x=\cos\theta$, obținem:

$$\left(1-\cos^2\theta\right)\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{dy}{d\theta}\right)+\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}+n^2y=0,$$

echivalentă cu

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0.$$

Această ultimă ecuație diferențială are soluțiile $\sin n\theta$ şi $\cos n\theta$. Deci, soluțiile ecuației (5.2.1) sunt $\sin\left(n\cos^{-1}x\right)$ şi $\cos\left(n\cos^{-1}x\right)$.

Definiția 5.2.1 Soluția $T_n(x)=\cos n\theta=\cos\left(n\cos^{-1}x\right)$ este un polinom de gradul n în x şi se numeşte *polinom Cebâşev de speța I.*

Aşadar, avem $T_n:[-1,1]\to[-1,1]$.

Pentru a găsi reprezentarea sa explicită, avem nevoie de următoarea relație de recurență.

Teorema 5.2.2 (*Relația de recurență*)

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ n\ge 1. \tag{5.2.2}$$

Demonstrație. Folosind identitatea

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$$

şi înlocuind $\theta=\arccos x$ rezultă recurența (5.2.2).

Observația 5.2.3 Deoarece $T_0(x)=\cos(0)=1$, $T_1(x)=\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x$, atunci folosind relația de recurență (5.2.2) rezultă:

$$T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1.$$

Propoziția 5.2.4

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k C_n^{2k}x^{n-2k}\left(1-x^2\right)^k,\ n\ge 1. \tag{5.2.3}$$

Demonstrație. Din formula lui de Moivre obținem

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

iar din formula lui Newton avem că:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k.$$

Egalând părțile reale din cele două formule, obținem:

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \ldots = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta .$$

Cum $x=\cos\theta$, deci $\theta=\arccos x$, expresia devine:

$$\cos(n\arccos x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k C_n^{2k}x^{n-2k}\left(1-x^2\right)^k ,$$

adică relația (5.2.3) este verificată.

Teorema 5.2.5 (*Formula lui Rodrigues*)

$$T_n(x) = (-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} . \tag{5.2.4}$$

Teorema 5.2.6 (*Funcția generatoare*)

$$\frac{1-rx}{1-2xr+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)r^n . \tag{5.2.5}$$

Demonstrație. Ştim că seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ cu $|z|<1$ este convergentă, având ca limită funcția $f(z)=\frac{1}{1-z}$. Dacă $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ cu $r<1$ şi $\theta\in[0,2\pi]$, atunci putem scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty}r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\theta + i\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\theta ,$$

iar

$$f\left(r(\cos\theta+i\sin\theta)\right) = \frac{1}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)} = \frac{1}{1-r\cos\theta-ir\sin\theta} = \frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} + i\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Deci,

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} ,$$

şi cum $x=\cos\theta$, avem că

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)r^n = \frac{1-rx}{1-2rx+r^2} .$$

Definiția 5.2.7 Sistemul de funcții $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este ortogonal cu *ponderea* $p(x)$ pe Ω, dacă:

$$\left\langle f_m(x), p(x)f_n(x)\right\rangle = \int_\Omega p(x)f_m(x)\overline{f_n(x)}dx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ C_n>0, & m=n.\end{cases} \tag{5.2.6}$$

Propoziția 5.2.8 Polinoamele Cebâşev sunt funcții ortogonale pe intervalul $[-1,1]$ cu ponderea $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, adică avem:

$$\int_{-1}^{1} p(x)T_n(x)T_m(x)dx = \begin{cases} 0, \; n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2}, n = m \neq 0, \\ \pi, \; n = m = 0. \end{cases}$$

Exemplul 5.2.9 Să se arate că $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

Soluție. Avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) r^n = \frac{1-rx}{1-2xr+r^2} = \frac{1-(-r)(-x)}{1-2(-x)(-r)+(-r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(-x)(-r)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_n(-x) r^n \; ,$$

deci

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x) r^n,$$

adică

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Exemplul 5.2.10 Să se arate că:

i) $T_n(1) = 1$; ii) $T_n(-1) = (-1)^n$; iii) $T_{2n}(0) = (-1)^n$; iv) $T_{2n+1}(0) = 0$.

Soluție. i) Din definiția 5.2.1, avem: $T_n(1) = \cos\left(n\cos^{-1} 1\right) = \cos(n \cdot 0) = \cos 0 = 1$.

ii) Din exemplul 5.2.9, avem: $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n$.

iii) Din definiția 5.2.1, avem:

$$T_{2n}(0) = \cos\left(2n \cdot \cos^{-1} 0\right) = \cos\left(2n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

iv) Din definiția 5.2.1, avem:

$$T_{2n+1}(0) = \cos\left((2n+1) \cdot \cos^{-1} 0\right) = \cos\left((2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Exemplul 5.2.11 Să se dezvolte funcția $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, într-o serie de polinoame Cebâşev.

Soluție. Aşadar, trebuie să scriem funcția f de forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x). \tag{5.2.7}$$

Pentru a găsi coeficienții a_n, înmulțim relația (5.2.7) cu $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)$ şi apoi integrăm pe intervalul $[-1,1]$. Avem:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) dx,$$

sau

$$a_n \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n^2(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Din propoziția 5.2.8, rezultă:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \; \text{şi} \; a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \; n \geq 1. \tag{5.2.8}$$

Funcția $f(x)=x^2$ fiind un polinom de gradul al doilea, atunci vom avea că:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{2}a_nT_n(x),$$

adică

$$x^2=c_0T_0(x)+c_1T_1(x)+c_2T_2(x).$$

Deci,

$$x^2=a_0+a_1x+a_2\left(2x^2-1\right).$$

Aplicând (5.2.8), obținem:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2},\ a_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{4}{\pi}\frac{3\pi}{8}-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

Deci,

$$x^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(2x^2-1\right).$$

Observația 5.2.12 O altă metodă de a dezvolta în serie de polinoame Cebâșev o funcție de forma x^n, este următoarea. Se rescrie relația de recurență (5.2.2), astfel:

$$xT_0(x)=T_1(x)\ \text{și}\ xT_n(x)=\frac{1}{2}\left[T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)\right],\ n\geq 1.$$

Verificăm acum dezvoltarea din exemplul 5.2.11:

$$x^2=xT_1(x)=\frac{1}{2}\left[T_2(x)+T_0(x)\right]=\frac{1}{2}T_0(x)+\frac{1}{2}T_2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(2x^2-1\right).$$

Analog, pentru $f(x)=x^4$:

$$x^4=x^2\left(xT_1(x)\right)=\frac{x^2}{2}\left[T_2(x)+T_0(x)\right]=\frac{x}{2}\left(xT_2(x)\right)+\frac{x}{2}\left(xT_0(x)\right)=$$

$$=\frac{x}{4}\left[T_3(x)+T_1(x)\right]+\frac{x}{2}T_1(x)=\frac{x}{4}\left[T_3(x)+3T_1(x)\right]=\frac{1}{4}xT_3(x)+\frac{3}{4}xT_1(x)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[T_4(x)+T_2(x)\right]+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[T_2(x)+T_0(x)\right]=\frac{1}{8}\left[T_4(x)+4T_2(x)+T_0(x)\right].$$

Deci,

$$x^4=\frac{1}{8}T_4(x)+\frac{1}{2}T_2(x)+\frac{3}{8}T_0(x).$$

5.3 Polinoame Hermite

Polinoamele Hermite reprezintă o importantă serie de funcții din clasa polinoamelor ortogonale care au fost introduse pentru prima oară în matematică în secolul al XIX-lea în cadrul studiului probabilităților. Expresia explicită a acestor polinoame se deduce pe cale analitică prin rezolvarea *ecuației diferențiale a lui Hermite*, și anume

$$y''-2xy'+2ny=0. \tag{5.3.1}$$

Această ecuație apare în mecanica cuantică pentru a studia poziția spațială a unei particule în mişcare care suferă a mişcare armonică în timp. În mecanica cuantică poziția exactă a unei particule la un moment dat nu poate fi precizată, spre deosebire de mecanica clasică.

Procedând în mod analog ca în cazul polinoamelor Legendre, presupunem că $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ este soluția ecuației (5.3.1) şi obținem relația de recurență

$$c_s = \frac{(s+2)(s+1)}{2(s-n)} c_{s+2}\,,\ s \le n-2\,.$$

Această relație, cu $c_n = 2^n$, ne dă

$$c_{n-2k} = \frac{(-1)^k n! 2^{n-2k}}{(n-2k)!k!}\,.$$

Astfel, obținem următoarea expresie.

Definiția 5.3.1 *Polinoamele Hermite de grad* n, notate cu $H_n(x)$, au următoarea reprezentare:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}\,. \tag{5.3.2}$$

Observația 5.3.2 Din (5.3.2), obținem că:

$$H_0(x)=1\,,\ H_1(x)=2x\,,\ H_2(x)=4x^2-2\,,\ H_3(x)=8x^3-12x\,,\ H_4(x)=16x^4-48x^2+12\,.$$

Teorema 5.3.3 (*Formula lui Rodrigues*)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),\ n \ge 0\,.$$

Demonstrație. Înmulțim ecuația (5.3.1) cu e^{-x^2} şi obținem:

$$e^{-x^2} y'' - 2xe^{-x^2} y' + 2ne^{-x^2} y = 0\,,$$

sau

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' + 2ne^{-x^2} y = 0\,. \tag{5.3.3}$$

Fie $y(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$. Deci,

$$y' = (-1)^n e^{x^2} \left(2x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) + \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx} e^{-x^2}\right)\right).$$

Înmulțind ultima expresie cu e^{-x^2} şi derivând apoi rezultatul, obținem:

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' = (-1)^n \left(2x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) + \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)\right)\right)' =$$

$$= (-1)^n \left(2 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) + 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2}\right) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)\right)\right) =$$

$$= (-1)^n \left(2 \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) + 2x \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)\right) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(-2xe^{-x^2}\right)\right) =$$

$$= 2n(-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = -2ne^{-x^2} y\,.$$

Deci, $(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ şi $H_n(x)$ sunt ambele soluții ale ecuației (5.3.1). Acest lucru este posibil doar dacă $H_n(x)=c(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$, unde c este o constantă. Identificând coeficienții lui x^n din ambele părți, obținem că $c=1$.

Teorema 5.3.4 (*Funcția generatoare*)

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{5.3.4}$$

Demonstrație. Dacă dezvoltăm funcția $f(x,t)=e^{2xt-t^2}=e^{x^2}e^{-(t-x)^2}$ în serie Taylor în raport cu t, se obține relația (5.3.4), unde coeficienții $H_n(x)$ ai seriei de puteri (5.3.4) reprezintă polinoamele Hermite abstracție făcând de un factor de proporționalitate.

Teorema 5.3.5 (*Relația de recurență*)

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\ n\geq 1. \tag{5.3.5}$$

Demonstrație. Fie $u(x)=e^{-x^2}$. Deci, $u'(x)=-2xe^{-x^2}$ şi aplicând formula lui Leibniz, obținem:

$$u^{(n+1)}(x)=\left(-2xe^{-x^2}\right)^{(n)}=-2\left[nu^{(n-1)}(x)+xu^{(n)}(x)\right],$$

sau

$$u^{(n+1)}(x)=-2xu^{(n)}(x)-2nu^{(n-1)}(x).$$

Înmulțind ultima relație cu $(-1)^{n+1}e^{x^2}$ se obține formula de recurență (5.3.5).

Propoziția 5.3.6 Polinoamele Hermite sunt funcții ortogonale cu ponderea $p(x)=e^{-x^2}$ pe intervalul $(-\infty,\infty)$, adică avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)H_n(x)H_m(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & n=m.\end{cases}$$

Exemplul 5.3.7 Să se arate că $H_n(-x)=(-1)^n H_n(x)$.

Soluție. Din teorema 5.3.4, avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}=e^{2xt-t^2}=e^{2(-x)(-t)-(-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(-x)\frac{(-t)^n}{n!},$$

deci

$$H_n(x)\frac{t^n}{n!}=H_n(-x)\frac{(-1)^n}{n!},$$

adică

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x).$$

Exemplul 5.3.8 Să se arate că: $H_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}$ şi $H_{2n+1}(0)=0$.

Soluție. Din teorema 5.3.4, pentru $x=0$, obținem:

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(0)\frac{t^n}{n!}.$$

Dar, dezvoltând în serie de puteri e^{-t^2}, obținem:

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}.$$

Deci,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(0)\frac{t^n}{n!}.$$

Identificând coeficienții lui t, obținem:

$$H_n(0)=0 \text{, dacă } n \text{ este impar,}$$

adică,

$$H_{2n+1}(0)=0,$$

şi

$$(-1)^n\frac{1}{n!}=H_{2n}\frac{1}{(2n)!},$$

adică,

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}.$$

Exemplul 5.3.9 Să se calculeze: $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$.

Soluție. Din teorema 5.3.5, rezultă:

$$xH_n(x)=nH_{n-1}(x)+\frac{1}{2}H_{n+1}(x).$$

Integrala devine:

$$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\left(nH_{n-1}(x)+\frac{1}{2}H_{n+1}(x)\right)H_m(x)dx=$$

$$=n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_{n-1}(x)H_m(x)dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_{n+1}(x)H_m(x)dx.$$

Dacă $m\neq n-1$ şi $m\neq n+1$, atunci $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=0$.

Dacă $m=n-1$, atunci $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=n\cdot 2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}$.

Dacă $m=n+1$, atunci $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}$.

Exemplul 5.3.10 Să se dezvolte în serie de polinoame Hermite funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$.

Soluție. Aşadar, trebuie să scriem funcția f de forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nH_n(x). \tag{5.3.6}$$

Pentru a găsi coeficienții c_n, înmulțim relația (5.3.6) cu $e^{-x^2}H_m(x)$ şi apoi integrăm pe intervalul $(-\infty,\infty)$. Avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_m(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)\right) e^{-x^2} H_m(x)dx,$$

sau

$$c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)dx.$$

Din propoziția 5.3.6, rezultă:

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)dx,\ n \geq 0. \tag{5.3.7}$$

Deoarece $f(x) = x^4$, atunci dezvoltarea în serie de polinoame Hermite este:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} c_{2n} H_{2n}(x),$$

adică

$$f(x) = c_0 H_0(x) + c_2 H_2(x) + c_4 H_4(x).$$

Deci,

$$f(x) = c_0 + c_2\left(4x^2 - 2\right) + c_4\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right).$$

Aplicând (5.3.7), obținem:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^4 dx = \frac{3}{4},\ c_2 = \frac{1}{2^2 2!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^4\left(4x^2 - 2\right)dx = \frac{3}{4},$$

$$c_4 = \frac{1}{2^4 4!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^4\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right)dx = \frac{1}{16}.$$

Deci,

$$x^4 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(4x^2 - 2\right) + \frac{1}{16}\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right).$$

5.4 Polinoame Laguerre

Polinoamele lui Laguerre sunt soluțiile canonice ale *ecuației diferențiale Laguerre* care apare în studiul oscilatorului armonic din mecanica clasică şi care are forma:

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, \tag{5.4.1}$$

unde n este un întreg nenegativ.

Definiția 5.4.1 *Polinoamele Laguerre* sunt polinoame de grad n, notate cu $L_n(x)$, şi au următoarea reprezentare:

$$L_n(x) = \Gamma(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{C_n^k}{n!\Gamma(k+1)} x^k. \tag{5.4.2}$$

Teorema 5.4.2 (*Formula lui Rodrigues*)

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right),\ n \geq 0. \tag{5.4.3}$$

Observația 5.4.3 Primele polinoame Laguerre sunt:

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = -x + 1,\ L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right),\ L_3(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right),$$

$$L_4(x)=\frac{1}{24}\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right).$$

Teorema 5.4.4 (*Relația de recurență*)

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x),\ n\geq 1, \tag{5.4.4}$$

cu $L_0(x)=1$ şi $L_1(x)=-x+1$.

Teorema 5.4.5 (*Funcția generatoare*)

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n\ . \tag{5.4.5}$$

Propoziția 5.4.6 Polinoamele Laguerre sunt funcții ortogonale cu ponderea $p(x)=e^{-x}$ pe intervalul $(0,\infty)$, adică avem:

$$\int_0^{\infty}p(x)L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n.\end{cases} \tag{5.4.6}$$

Exemplul 5.4.7 Să se arate că:

i) $L_n(0)=1$; ii) $L_n'(0)=-n$.

Soluție. i) Din teorema 5.4.5, pentru $x=0$, obținem:

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(0)t^n\ .$$

Dar, ştim că

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\ ,$$

deci

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n(0)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\ .$$

Aşadar,

$$L_n(0)=1.$$

ii) După cum am menționat mai sus, polinoamele Laguerre $L_n(x)$ satisfac ecuația diferențială (5.4.1). Deci, avem:

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n(x)+(1-x)\frac{d}{dx}L_n(x)+nL_n(x)=0.$$

Punând $x=0$ în această expresie, obținem:

$$L_n'(0)+nL_n(0)=0,$$

şi, cum $L_n(0)=1$, rezultă:

$$L_n'(0)=-n.$$

Exemplul 5.4.8 Să se arate că:

i) $xL_n'(x)=nL_n(x)-nL_{n-1}(x)$; ii) $L_n'(x)=-\sum_{m=0}^{n-1}L_m(x)$.

Soluție. i) Derivăm relația (5.4.5) în raport cu x şi obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n=-\frac{t}{1-t}\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=-\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n\ . \tag{5.4.7}$$

Deci,

$$\left(1-t\right)\sum_{n=0}^{\infty} L_n'\left(x\right)t^n = -t\sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(x\right)t^n .$$

Aşadar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'\left(x\right)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n'\left(x\right)t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} L_n\left(x\right)t^{n+1} ,$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'\left(x\right)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}'\left(x\right)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}\left(x\right)t^n .$$

Identificând coeficienții lui t^n, obținem:

$$L_n'\left(x\right) - L_{n-1}'\left(x\right) = -L_{n-1}\left(x\right),\ n \geq 1 . \tag{5.4.8}$$

Derivând relația de recurență (5.4.4) în raport cu x, obținem:

$$\left(n+1\right)L_{n+1}'\left(x\right) = -L_n\left(x\right) + \left(2n+1-x\right)L_n'\left(x\right) - nL_{n-1}'\left(x\right) . \tag{5.4.9}$$

Rescriind relația (5.4.8) în formele:

$$L_{n+1}'\left(x\right) = L_n'\left(x\right) - L_n\left(x\right) \text{ şi } L_{n-1}'\left(x\right) = L_n'\left(x\right) + L_{n-1}\left(x\right),$$

şi înlocuind în (5.4.9), obținem:

$$\left(n+1\right)\left(L_n'\left(x\right) - L_n\left(x\right)\right) = -L_n\left(x\right) + \left(2n+1-x\right)L_n'\left(x\right) - n\left(L_n'\left(x\right) + L_{n-1}\left(x\right)\right),$$

sau

$$xL_n'\left(x\right) = nL_n\left(x\right) - nL_{n-1}\left(x\right).$$

ii) Dacă în relația (5.4.7) scriem

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k ,$$

obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'\left(x\right)t^n = -t\sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{m=0}^{\infty} L_m\left(x\right)t^m = -\sum_{k,m=0}^{\infty} L_m t^{k+m+1} ,$$

deci $L_n'\left(x\right)$ este dat de coeficientul lui t^n din membrul drept al ecuației. Pentru o valoare fixată a lui m, luând $m+k+1=n$, adică $k=n-m-1$, şi deci, coeficientul lui t^n este $-L_m\left(x\right)$. Obținem coeficientul lui t^n prin însumarea după valorile lui m. Deoarece am presupus $k \geq 0$, rezultă că $n-m-1 \geq 0$, adică $m \leq n-1$.

Aşadar,

$$coeficient\ t^n = \sum_{m=0}^{n-1} -L_m\left(x\right),$$

adică

$$L_n'\left(x\right) = -\sum_{m=0}^{n-1} L_m\left(x\right).$$

Exemplul 5.4.9 Să se arate că:

$$\int_x^{\infty} e^{-t} L_n\left(t\right)dt = e^{-x}\left[L_n\left(x\right) - L_{n-1}\left(x\right)\right].$$

Soluție. Folosind integrarea prin părți şi exemplul 5.4.8 ii) de mai sus, obținem:

$$\int_x^\infty e^{-t}L_n(t)dt=\int_x^\infty\left(-e^{-t}\right)' L_n(t)dt=-e^{-t}L_n(t)\Big|_x^\infty+\int_x^\infty e^{-t}L_n'(t)dt=-e^{-x}L_n(x)-\int_x^\infty e^{-t}\left(\sum_{m=0}^{n-1}L_m(t)\right)dt .$$

Astfel,

$$\int_x^\infty e^{-t}L_n(t)dt+\sum_{m=0}^{n-1}\int_x^\infty e^{-t}L_m(t)dt=e^{-x}L_n(x),$$

şi, prin urmare,

$$\sum_{m=0}^{n}\int_x^\infty e^{-t}L_m(t)dt=e^{-x}L_n(x).$$

Deci,

$$\int_x^\infty e^{-t}L_n(t)dt=\sum_{m=0}^{n}\int_x^\infty e^{-t}L_m(t)dt-\sum_{m=0}^{n-1}\int_x^\infty e^{-t}L_m(t)dt=e^{-x}L_n(x)-e^{-x}L_{n-1}(x)=$$
$$=e^{-x}\left[L_n(x)-L_{n-1}(x)\right].$$

Exemplul 5.4.10 Să se dezvolte în serie de polinoame Laguerre funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, unde $f(x)=x^2$.

Soluție. Aşadar, trebuie să scriem funcția f de forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nL_n(x). \tag{5.4.10}$$

Pentru a găsi coeficienții c_n, înmulțim relația (5.4.10) cu $e^{-x}L_m(x)$ şi apoi integrăm pe intervalul $(0,\infty)$. Avem:

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)L_m(x)dx=\int_0^\infty\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nL_n(x)\right)e^{-x}L_m(x)dx,$$

sau

$$c_n\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)dx=\int_0^\infty e^{-x}f(x)L_n(x)dx.$$

Din propoziția 5.4.6, rezultă:

$$c_n=\int_0^\infty e^{-x}f(x)L_n(x)dx,\ n\geq 0. \tag{5.4.11}$$

Deoarece $f(x)=x^2$, atunci dezvoltarea în serie de polinoame Laguerre este:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{2}c_nL_n(x),$$

adică

$$f(x)=c_0L_0(x)+c_1L_1(x)+c_2L_2(x).$$

Deci,

$$f(x)=c_0+c_1(-x+1)+\frac{1}{2}c_2\left(x^2-4x+2\right).$$

Aplicând (5.4.11), obținem:

$$c_0=\int_0^\infty e^{-x}x^2dx=2,\ c_1=\int_0^\infty e^{-x}x^2(-x+1)dx=-4,\ c_2=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}x^2\left(x^2-4x+2\right)dx=2.$$

Deci,

$$f(x)=2L_0(x)-4L_1(x)+2L_2(x).$$

5.5 Funcții Bessel

Ecuația diferențială a lui Bessel,

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0, \tag{5.5.1}$$

apare în lucrările lui Euler şi Bernoulli, în timp ce *funcțiile Bessel* au fost introduse de Bessel, în 1824, în studiul unei probleme de astronomie dinamică. Multe dintre problemele fizicii matematice se reduc la ecuația Bessel.

Definiția 5.5.1 Se numesc *funcții Bessel* soluțiile canonice ale ecuației (5.5.1).

Observația 5.5.2 Funcțiile Bessel se mai numesc şi *funcții cilindrice* sau *armonice cilindrice* deoarece ele apar soluția *ecuației Laplace în coordonate cilindrice*.

Se caută soluția ecuației (5.5.1) de forma:

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m, \tag{5.5.2}$$

cu r şi c_m astfel încât seria (5.5.2) să verifice ecuația (5.5.1).

Aşadar,

$$y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(m+r)x^{m+r-1},\ y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2}.$$

Prin înlocuire în ecuația (5.5.1), obținem:

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m(m+r)x^{m+r}+\left(x^2-n^2\right)\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r}=0,$$

sau

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m\left((m+r)^2-n^2\right)x^m=-\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+2}.$$

Identificând coeficienții, obținem:

$$c_0(r+n)(r-n)=0,\ c_1(1+r+n)(1+r-n)=0,\ c_m(m+r+n)(m+r-n)=-c_{m-2},\ m\geq 2. \tag{5.5.3}$$

Presupunând $c_0\neq 0$, rezultă că $(r+n)(r-n)=0$, deci, $r=n$ şi $r=-n$.

Cazul I. Fie $r=n$. Deci, $c_1(1+2n)=0$. Cum coeficientul apare în ecuația (5.5.1) la pătrat, atunci dacă n este real putem considera $n\geq 0$, deci $1+2n\neq 0$ şi $c_1=0$. Dacă n este complex, atunci evident $1+2n\neq 0$ şi $c_1=0$. În concluzie, putem considera întotdeauna $c_1=0$. Din (5.5.3), rezultă:

$$c_m\left((m+n)^2-n^2\right)=-c_{m-2},\ m\geq 2.$$

Deci,

$$c_1=c_3=\ldots=c_{2m+1}=\ldots=0,\ m\geq 0.$$

Pentru coeficienții de ordin par, considerăm $m=2k$ şi obținem:

$$c_{2k}\left((2k+n)^2-n^2\right)=-c_{2k-2},\ k\geq 1,$$

sau

$$4k(k+n)c_{2k}=-c_{2k-2},\ k\geq 1. \tag{5.5.4}$$

Dând valori lui k şi înmulțind aceste relații termen cu termen, obținem:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\dots(n+k)}. \tag{5.5.5}$$

Deoarece $\Gamma(z+n+1) = z(z+1)\dots(z+n)\Gamma(z)$ şi $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, atunci avem că:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0 \Gamma(n+1)}{2^{2k} k!\Gamma(n+k+1)}, \ k \geq 0. \tag{5.5.6}$$

Deoarece c_0 este arbitrar, considerăm că $c_0\Gamma(n+1) = 2^{-n}$, şi astfel obținem:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k!\Gamma(n+k+1)}. \tag{5.5.7}$$

Aşadar, soluția ecuației (5.5.1) este:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{5.5.8}$$

Definiția 5.5.3 Funcția definită în expresia (5.5.8) se numeşte *funcția Bessel de speța I şi ordin* (indice) n şi se notează $J_n(x)$. Deci,

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{5.5.9}$$

Cazul II. Fie $r = -n$. Dacă n nu este număr întreg şi pozitiv, atunci toți coeficienții de ordin impar sunt nuli, iar cei de ordin par se obțin din (5.5.5) înlocuind pe n cu $-n$. Considerând $c_0\Gamma(n+1) = 2^{-n}$, obținem:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{5.5.10}$$

Definiția 5.5.4 Funcția definită în expresia (5.5.10) se numeşte *funcția Bessel de speța I şi ordin* (indice) $-n$ şi se notează $J_{-n}(x)$. Deci,

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{5.5.11}$$

Observația 5.5.5 Cele două soluții ale ecuației (5.5.1) sunt liniar independente. În consecință, soluția generală a ecuației Bessel este:

$$y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x),$$

unde A şi B sunt constante arbitrare.

Teorema 5.5.6 (*Relații de recurență*)

i) $\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$; ii) $\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$; iii) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$.

Demonstrație.

i) $$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n (2k+2n)}{k!\Gamma(n+k+1)} \frac{x^{2k+2n-1}}{2^{2k+2n}} =$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n 2(k+n)}{k!(n+k)\Gamma(n+k)} \frac{x^{2k+n-1}}{2^{2k+2n}} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1} = x^n J_{n-1}(x).$$

ii) Analog cu i).

iii) Folosim cele două relații de mai sus:

$$\left(x^n J_n(x)\right)' = x^n J_{n-1}(x) \Rightarrow \ nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x) \Rightarrow$$

$$nx^{-1}J_n(x) + J_n'(x) = J_{n-1}(x) \qquad (5.5.12)$$

şi

$$\left(x^{-n} J_n(x)\right)' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \ \Rightarrow \ -nx^{-n-1}J_n(x) + x^{-n} J_n'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \ \Rightarrow$$

$$nx^{-1}J_n(x) - J_n'(x) = J_{n+1}(x). \qquad (5.5.13)$$

Adunând relațiile (5.5.12) şi (5.5.13), obținem:

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x).$$

Teorema 5.5.7 (*Funcția generatoare*)

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \ . \qquad (5.5.14)$$

Demonstrație. Dezvoltăm $e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ în serie de puteri ale lui t şi vom arăta că, coeficientul lui t^n este $J_n(x)$. Adică,

$$e^{\frac{1}{2}xt} e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(xt)^r}{2^r r!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{s+r} \frac{t^{s-r}}{s!r!} = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r x^r t^r (-1)^s \left(\frac{1}{2}\right)^s x^s t^{-s}}{r!s!} =$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{2}\right)^{r+s} \frac{x^{r+s} t^{r-s}}{r!s!}.$$

Fie $n \ge 0$. Dacă r este fixat, atunci pentru a obține puterea n a lui t, trebuie să avem: $s = r - n$. Deci, pentru această valoare particulară a lui r, coeficientul lui t^n este:

$$(-1)^{r-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n} \frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}.$$

Vom obține coeficientul total al lui t^n prin însumarea după toate valorile lui r. Cum $s = r - n$, şi impunem $s \ge 0$, trebuie să avem: $r \ge n$. Aşadar, coeficientul total al lui t^n este:

$$\sum_{r=n}^{\infty} (-1)^{r-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n} \frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!} \underset{p=r-n}{=} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!\,p!} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{\Gamma(p+n+1)!\,p!} = J_n(x).$$

Definiția 5.5.8 Se numeşte *funcție Bessel de speța a doua*, funcția notată cu Y_n şi definită de relația:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}, \qquad (5.5.15)$$

unde $n \notin \mathbb{Z}$, $n \ne k + \frac{1}{2}$.

Exemplul 5.5.9 Să se arate că:

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Soluție. Deoarece $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$, din (5.5.9), avem:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Derivând ultima relație, obținem:

$$J_n'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+n)}{k!(n+k)!}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1}.$$

Deci,

$$xJ_n'(x)=n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1}=$$

$$=nJ_n(x)+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!(n+k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n+1}=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x).$$

Exemplul 5.5.10 Să se arate că $J_n(-x)=(-1)^n J_n(x)$, $n\in\mathbb{N}_+$.

Soluție. Din teorema 5.5.7, avem:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(-x)t^n=e^{\frac{1}{2}(-x)\left((-t)-\frac{1}{(-t)}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)(-t)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_n(x)t^n.$$

Identificând coeficienții lui t^n, obținem:

$$J_n(-x)=(-1)^n J_n(x).$$

Exemplul 5.5.11 Să se scrie dezvoltarea funcției $J_0(x)$ şi apoi calculați : $J_0(0)$.

Soluție. Din definiția 5.5.3, avem:

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\ldots.$$

Deci,

$$J_0(0)=1.$$

Exemplul 5.5.12 Să se calculeze $\mathcal{L}(J_0(t))$.

Soluție. Ştim că: $J_0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}t^{2n}$. Deci,

$$\mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}t^{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}\mathcal{L}\left(t^{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}\frac{(2n)!}{p^{2n+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\frac{1}{p^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\cdot2^n}\left(p^{-2}\right)^n=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^{-2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Exemplul 5.5.13 Să se determine soluția corespunzătoare ecuației:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

Soluție. Observăm că $n = \pm\frac{1}{2}$. Deci, soluția generală a ecuației este:

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Calculăm funcțiile Bessel corespunzătoare:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1} x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}}{k!(2k+1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot \sqrt{\pi}\, 2^{2k+1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ultima serie reprezintă dezvoltarea în serie a funcției sinus. Aşadar,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x .$$

Analog, avem:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k x^{2k} \sqrt{2}}{k!(2k-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot \sqrt{\pi}\, 2^{2k} \sqrt{x}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Aşadar, soluția ecuației este:

$$y(x) = c_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x .$$

Exemplul 5.5.14 Să se calculeze:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} J_0\left(\sqrt{kx}\right) dx ,\ k > 0 .$$

Soluție. Avem că: $J_0\left(\sqrt{kx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n x^n}{(n!)^2 2^{2n}}$. Înmulțind cu e^{-ax^2} şi integrând, obținem:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} J_0\left(\sqrt{kx}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n}{(n!)^2 2^{2n}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^n dx .$$

Prin schimbarea de variabilă $t = ax^2$, integrala se reduce la o integrală Euler (gamma). Aşadar,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} J_0\left(\sqrt{kx}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n n!}{(n!)^2 2^{2n} a^{2(n+1)}} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{k}{4a^2}\right)^n = \frac{1}{a^2} e^{-\frac{k}{4a^2}} .$$

BIBLIOGRAFIE

1. Appleby, J., *Calculus of several variables and Fourier series*, School of Mathematical Sciences, Dublin, Ireland, 2001
2. Bălan, T., *Capitole de matematici aplicate – analiza Fourier*, Editura Universitaria, Craiova, 1998
3. Bell, W.W., *Special functions for scientists and engineers*, London, 1968
4. Boyce, W., DiPrima, R., *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, Inc, New York, USA, 2001
5. Corduneanu, S.-O., *Matematici speciale*, curs, Univ. Tehnică “Gh. Asachi”, Iaşi
6. Crăciun, I., *Analiză matematică – calcul integral*, Editura PIM, Iaşi, 2007
7. Iovanov, M., *Matematici speciale – curs*, Univ. Constantin Brâncuşi, Tg. Jiu, 2008
8. Iovanov, M., Pecingă, O., *Matematici speciale – probleme*, Univ. Constantin Brâncuşi, Tg. Jiu, 2008
9. Lebedev, N.N., *Special functions and their applications*, London, 1965
10. Păltineanu G., Matei, P., *Ecuații diferențiale şi ecuații cu derivate parțiale cu aplicații*, Bucureşti, 2007
11. Polyanin, A., *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*, Chapman & Hall/CRC, USA, 2002
12. Radomir, I., Ovesea, H., *Matematici speciale*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2001