

2. CÂMPUL ELECTROSTATIC

Așa cum s-a mai arătat (v. §1.1.1.), câmpul electromagnetic este un câmp unitar, ale cărui aspecte: electric și magnetic sunt interdependente, fapt exprimat de legile inducției electromagnetice (1.81) și circuitului magnetic (1.83), și deci –în principiu– nu pot fi separate.

Totuși, în regim static (v. §1.1.1.), atunci când mărimile de stare ale câmpului electromagnetic și mărimile de stare electrică și magnetică ale corpurilor din câmp sunt invariabile în timp, iar în sistemul fizic electromagnetic nu există nici un transfer de energie, *fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice*, ceea ce permite studierea separată ale celor două aspecte: câmp electric și câmp magnetic.

Prezentul capitol are ca subiect tocmai acest fapt, mai precis studiul câmpului electric în regim static, caz în care câmpul se denumește **câmp electrostatic**.

2.1. Regimul electrostatic

Despre un sistem electromagnetic se spune -prin definiție- că se află în *regim electrostatic* atunci când sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

1⁰ *corpurile din sistem sunt imobile unul față de altul;*

2⁰ *mărimile de stare ale câmpului electromagnetic din sistem sunt invariabile în timp;*

3⁰ *în sistem nu există nici un fel de transformări energetice și nici transferuri energetice cu alte sisteme;*

4⁰ *în sistem nu există corpuri magnetizate permanent, adică $\overline{m}_p = 0$ și $\overline{M}_p = 0$.*

Condiția 4. este redundantă, însă ea permite să se afirme direct că în condițiile 1⁰ ... 4⁰ în sistemul astfel definit nu există decât aspectul electric al câmpului electromagnetic, adică numai câmp electric, numit –în acest caz– **câmp electrostatic** (ca un caz particular, în condițiile 1⁰ ... 4⁰, al câmpului electromagnetic).

La regimul electrostatic se ajunge printr-o perioadă existentă anterior (un regim tranzitoriu), prin care forțe și cupluri de forțe –de natură electrică sau / și neelectrică– (exercitate pe seama unor transferuri sau /și transformări de energie) realizează un echilibru în sistem ce îndeplinește condițiile 1., 2. și 3. După aceea, atâta timp cât aceste condiții sunt îndeplinite, sistemul rămâne în regim electrostatic, ca regim permanent (până la producerea unei modificări a condițiilor 1⁰ ... 4⁰).

În regim permanent electrostatic, câmpul electrostatic este caracterizat de mărimi de stare și de material, precum și de modele specifice –care decurg din cele generale, descrise în capitolul 1, în condițiile 1⁰ ... 4⁰ – și care vor fi prezentate pe scurt în paragrafele următoare.

2.1.1. Mărimi de stare și de material în regim electrostatic

Mărimile de stare a câmpului electromagnetic (v. §1.2.2.) care prezintă interes în regim electrostatic sunt:

- intensitatea câmpului electric în vid (\overline{E}_0) și în corpuri (\overline{E}) care sunt mărimi invariante în timp, pe un interval $[t_1, t_2]$ cât durează regimul electrostatic, adică:

$$\overline{E}_0(t) = \text{const.} \quad \text{și} \quad \overline{E}(t) = \text{const.} \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2]$$

sau:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \overline{E}_0}{\partial t} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0 \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2],$$

situație în care câmpul se numește *câmp coulombian* (v.subcap.2.2.) și se notează, generic, cu \overline{E}_c . Componenta solenoidală \overline{E}_s a câmpului electric este nulă ($\overline{E}_s = 0$) căci în condițiile $1^0 \rightarrow$

$$\overline{w} = 0 \quad \text{și} \quad 2^0 \rightarrow \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{adică} \quad \mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{și} \quad \text{deci:} \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad \text{astfel că, în}$$

$$\text{conformitate cu ecuațiile lui Maxwell (1.105M2'), și} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad \text{ceea ce}$$

implică $\overline{E}_s = 0$ sau $\overline{E}_s = \text{const}$, ultimul caz fiind posibil în situația în care aspectul magnetic al câmpului este nul;

- inductia electrică \overline{D} , ce respectă condițiile:

$$(2.2.) \quad \overline{D}(t) = \text{const.} \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = 0 \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2];$$

- fluxul electric ψ , v.(1.34), care îndeplinește condițiile

$$(2.3.) \quad \psi(t) = \text{const.} \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2];$$

- potențialul electric, în orice punct $P \in \Omega$ (caracterizat de raza vectorie $\overline{r} \subset \Omega$), $V(P) \equiv V(\overline{r})$, ce satisface condițiile:

$$(2.4.) \quad V(P, t) = \text{const.} \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2];$$

denumit *potențial electrostatic* (v.§2.2.3.);

- tensiunea electrică, notată în regim electrostatic U , nu depinde de drum (v.§2.2.3.) și atunci tensiunea electrică în lungul firului (1.43') este egală cu tensiunea electrică la borne (1.43''), adică $U_f = U_b = U$;

- tensiunea electromotoare, notată în regim electrostatic cu E , nu depinde decât de câmpul electric imprimat E_i , adică - conform definiției (1.48), relației (1.49) și faptului că $\overline{E}_s \Big|_{\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0, \overline{w} = 0}$, $E = \oint_{\Gamma} \overline{E}_i \cdot d\overline{l} = \int_{\Gamma_a} \overline{E}_i \cdot d\overline{l}$, însă ea nu prezintă interes în regim electrostatic, fiind

„pasivă”, pentru că –așa cum se va arata mai încolo– în regim electrostatic $i=0$ și $\overline{J} = 0$.

Mărimile de stare magnetică ale câmpului electromagnetic, adică $\overline{B}_0, \overline{B}, \overline{H}, \varphi, F_m, u_m$ etc., în regim electrostatic nu prezintă interes deoarece se referă la aspectul magnetic al câmpului, care –prin condițiile $1^0 \dots 4^0$ – a fost separat și anulat.

Mărimile de stare electrică a corpurilor în regim electrostatic, în orice punct P al domeniului Ω (sau pentru orice raza vectorie $\overline{r} \subset \Omega$ asociată punctului P) sunt caracterizate de:

- mărimile stării de electrizare:

$$(2.5) \quad \{q(t), q_v(t), q_\Sigma(t)\} = \text{const.} \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad \left\{ \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q_v}{\partial t}, \frac{\partial q_\Sigma}{\partial t} \right\} = 0 \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2];$$

- mărimile stării de polarizare:

$$\{\overline{p}(t), \overline{P}(t)\} = \text{const.} \quad \text{și} \quad \text{deci} \quad \left\{ \frac{\partial \overline{p}}{\partial t}, \frac{\partial \overline{P}}{\partial t} \right\} = 0 \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2]; \quad (2.6)$$

- mărimile stării electrocinetice, adică intensitatea curentului electric de conducție i și densitatea curentului electric de conducție \bar{J} sunt nule, în orice corp și în orice punct al sistemului electrostatic, adică:

$$i = 0 \quad \text{și} \quad \bar{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall P \in \Omega \\ \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases}, \quad (2.7)$$

deoarece conform condiției 3^o, densitatea de volum a puterii transformate, p , în câmp electrostatic este nulă, peste tot în Ω și în regim electrostatic, adică:

$$p(\bar{r}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall r \in \Omega \\ \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases}, \quad (2.8)$$

ceea ce - în condițiile legii transformării de energie (1.103):

$$p = \bar{E} \cdot \bar{J} = 0 \quad \text{și} \quad \text{la} \quad \bar{E} \neq 0 \Rightarrow \bar{J} = 0 \quad (2.9)$$

sau (știind că $\bar{E}_s = 0$):

$$p = \rho \bar{J}^2 - \bar{E}_i \bar{J} = 0 \Rightarrow \bar{J} = 0 \quad \text{dacă} \quad \rho \neq 0 \cup E_i \neq 0,$$

însemnând și:

$$\bar{J} = 0 \Rightarrow i = \int_{\Sigma}^D \bar{J} \cdot d\bar{A} = 0, \quad \text{pentru} \quad \forall \Sigma \subset \Omega. \quad (2.10)$$

Prin urmare, în regim electrostatic corpurile nu se pot găsi în stare electrocinetică (ea fiind exclusă prin definiție). Aceasta ar putea fi considerată - în mod explicit - o condiție suplimentară 5^o a regimului electrostatic (deși această nouă condiție rezultă implicit din condiția 3^o).

Mărimile de stare magnetică a corpurilor, adică \bar{m} și \bar{M} , nu prezintă interes în regim electrostatic deoarece se referă la aspectul magnetic al câmpului, care -prin condițiile 1^o... 4^o- a fost separat și anulat.

Mărimile de material care în regim electrostatic au însemnătate sunt: permitivitatea absolută ϵ , susceptivitatea electrică χ_e și câmpul electric imprimat \bar{E}_i . Celelalte mărimi: magnetice (μ , χ_m) și electrocinetice (γ , ρ , α etc.) nu prezintă interes deoarece în regim electrostatic câmpul magnetic este separat și considerat nul, iar starea electrocinetică este exclusă prin definiție.

Câmpul electric imprimat, mărime de material caracteristică numai în cazul conductoarelor neomogene sau/și cu neuniformități de accelerație, temperatură, cu deformații și iradiere etc. - definită prin relația (1.28i) din §1.2.2- care se poate localiza într-un întreg domeniu spațial (câmpuri imprimate de volum) sau numai pe anumite suprafețe de discontinuitate (câmpuri imprimate pe interfețe sau de contact), ce va fi prezentat pe larg în subcapitolul 4.3., este o mărime vectorială \bar{E}_i produsă de fenomene fizice de natură neelectromagnetică, care determină în conductori o repartitie a sarcinilor electrice între care exista câmpul imprimat cu sensul de la punctele cu sarcini negative spre cele cu sarcini pozitive. Concomitent cu această repartitie a sarcinilor electrice determinate de cauze (fenomene) neelectrice, între punctele cu sarcini electrice pozitive și cele cu sarcini electrice negative (cu sensul de la + spre -, deci contrar câmpului imprimat \bar{E}_i) se produce câmpul electric coulombian \bar{E}_c -definit prin (1.28C)- ce echilibrează câmpul imprimat, moment în care ne mai variind repartițiile de sarcini electrice (ceea ce înseamnă

$\frac{dq_v}{dt} = 0$ sau $\frac{dq_s}{dt} = 0$) se ajunge în regim electrostatic (cu $\bar{J} = 0$). În acest moment, intensitățile celor două câmpuri se anulează:

$$\bar{E}_i + \bar{E}_c = 0 \Rightarrow \bar{J} = 0,$$

ceea ce constituie *condiția de echilibru electrostatic* (v. §2.2.3) sau, altfel:

$$(2.11) \quad \bar{E}_i = -\bar{E}_c \Big|_{\bar{J}=0},$$

în conductorii neomogeni sau cu neuniformități de accelerație etc.. În dielectrici \bar{E}_i nu are sens ($\bar{E}_i = 0$), iar în conductorii omogeni și cu accelerație etc. uniforme nu se produce câmp electric imprimat (deci $\bar{E}_i = 0$).

2.1.2. Legile câmpului electromagnetic în regim electrostatic

În regim electrostatic –definit prin condițiile 1⁰... 4⁰–, legile teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic iau forma:

- legea fluxului electric:

$$\int_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A} = q_{v_s} \quad \Leftarrow \forall \Sigma \subset \Omega$$

și (local):

$$(2.12) \quad \text{div} \bar{D} = q_v \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega;$$

- legea fluxului magnetic nu prezintă interes, în sistem existând numai aspectul electric al câmpului electromagnetic, adică numai câmp electrostatic;

- legea legăturii dintre \bar{D} , \bar{E} și \bar{P} : $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}_p \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega$;

- legea legăturii dintre \bar{B} , \bar{H} și \bar{M} nu poate interveni în cazul numai al unui câmp electrostatic;

- legea polarizației electrice temporare:

$$\bar{P}_t = \epsilon_0 \chi_e \bar{E} = \text{const} \quad \Leftarrow \forall t \in [t_1, t_2];$$

sau:

$$(2.13) \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E} + \bar{P}_p,$$

deoarece în regim electrostatic $\bar{E}(t) = \text{const.}$, ceea ce implică și o polarizație electrică temporară

$\bar{P}_t(t) = \text{const.}$ cu $\frac{d\bar{P}_t}{dt} = 0$, iar polarizația electrică permanentă, dacă există, este dată și constantă

în timp;

- legea magnetizației temporare nu prezintă interes în regim electrostatic;

- legea inducției electromagnetice:

$$(2.14) \quad e \left(-\frac{d\phi}{dt} \right) = 0, \quad \oint_{\Gamma} \text{rot} \bar{E}_s \cdot d\bar{l} = 0 \quad \text{și} \quad \text{rot} \bar{E}_s = 0 \quad (\text{pentru domeniile de continuitate}),$$

iar în condițiile ecuației a doua a lui Maxwell (1.105 M2') $\bar{E}_s = 0$ în regim electrostatic;

- legea circuitului magnetic devine $\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = 0$ și $\text{rot} \bar{H} = 0$, însă ea nu intervine în regim electrostatic, aspectul magnetic al câmpului electromagnetic fiind nul în condițiile 1⁰ ... 4⁰;

- legea conservării sarcinii electrice $-\frac{dq}{dt}\Big|_{\Sigma} (=i_{\Sigma})=0$, căci în regim electrostatic starea de electrizare nu variază în timp, adică $\frac{dq}{dt}=0$ și deci $i_{\Sigma}=0$, ca și $\bar{J}=0$, deoarece din forma locală a legii $\text{div}\bar{J}=-\frac{dq_v}{dt}=0$, deoarece și $\frac{dq_v}{dt}=0$, prin condiția 2°;

- legea conducției electrice:

$$\bar{J}=\gamma\bar{E}, \text{ la } \bar{J}=0 \Rightarrow \gamma\bar{E}=0 \text{ în conductori;} \quad (2.15)$$

- legea transformării de energie în conductori, în condiția 3° a câmpului electrostatic, înseamnă:

$$W\left(=\int_{t_1}^{t_2} Ri^2 dt\right)=0, \text{ ceea ce, la } R \neq 0, \text{ implica } i=0,$$

iar local:

$$p(=\bar{E} \cdot \bar{J})=0 \text{ are implicația că, la } \bar{E} \neq 0, \bar{J}=0;$$

- legea electrolizei (1.104) nu are sens în electrostatică, deoarece $i=0$ și deci $m=k\int_{t_1}^{t_2} idt=0$.

2.2. Teoremele câmpului electrostatic

În cadrul acestui subcapitol vor fi prezentate principalele relații utilizate în calculul și determinarea câmpului electrostatic, relații deduse din legile generale ale teoriei electromagnetice în condițiile regimului electrostatic (v.§2.1.2) și care –în unele cazuri– poartă denumirea de teoreme, iar –în altele– ecuații sau formule, multe dintre ele având restricții specifice de aplicabilitate.

Teoremele fundamentale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic (prezentate în subcapitolul 1.5) au și ele un specific aparte în cazul câmpului electrostatic și vor fi analizate spre sfârșitul acestui subcapitol (teoremele de unicitate și superpoziție) tocmai pentru a putea evidenția aceste particularități, iar teorema energiei va face obiectul unui subcapitol aparte (v.subcap.2.6).

2.2.1 Teorema lui Gauss

Se referă la fluxul vectorului \bar{E}_0 (intensitatea câmpului electric în vid), având următorul enunț: fluxul vectorului \bar{E}_0 prin orice suprafață închisă Σ dintr-un domeniu vid Ω_0 este proporțională cu sarcina electrică $q_{v_{\Sigma}}$ a corpurilor situate în interiorul suprafeții Σ , ce închide un volum v_{Σ} , factorul de proporționalitate fiind $\frac{1}{\epsilon_0}$ (adică inversul permitivității vidului) și următorul model:

$$\oint_{\Sigma} \bar{E}_0 \cdot \overline{dA} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{v_{\Sigma}} \quad \Leftarrow \forall \Sigma \subset \Omega_0, \quad (2.16)$$

relație general valabilă, dar numai în vid și cu \bar{E}_0 de tip coulombian (v.§2.2.3), definit prin relația (1.25).

Teorema (2.16) se demonstrează simplu, utilizându-se legea fluxului electric (1.65'), scrisă pentru un domeniu cu mediu vid, în care se înlocuiește vectorul inducției electrice \bar{D} prin legea polarizației electrice temporare în vid sub forma relației (1.77), adică $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}_0$. Astfel:

$$\oint_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A} = q_{v_{\Sigma}} \rightarrow \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \bar{E}_0 \cdot d\bar{A} = q_{v_{\Sigma}} \rightarrow \epsilon_0 \oint_{\Sigma} \bar{E}_0 \cdot d\bar{A} = q_{v_{\Sigma}} \rightarrow \oint_{\Sigma} \bar{E}_0 \cdot d\bar{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{v_{\Sigma}},$$

adică teorema lui Gauss.

Teorema lui Gauss poate fi extinsă și la mediile uniforme (omogene și izotrope), liniare, deci cu permitivitatea $\epsilon = \epsilon(\bar{r}, t) = \text{const.}$ în $\forall \bar{r} \subset \Omega$ și $t \in [t_1, t_2]$ al regimului electrostatic și fără polarizație permanentă ($\bar{P}_p = 0$), caz în care legea (1.77), adică $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$, este valabilă. În acest caz, și numai în acest caz, se poate scrie:

$$(2.17) \quad \oint_{\Sigma} \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{1}{\epsilon} q_{v_{\Sigma}} \leftarrow \epsilon(\bar{r}, t) = \text{const.},$$

care poate fi scrisă și în forma locală, adică în orice punct P din mediul uniform, liniar și fără polarizație permanentă, pentru care se cunoaște densitatea de volum q_{v_p} a sarcinii electrice, adică:

$$(2.17') \quad \text{div} \bar{E} = \frac{q_{v_p}}{\epsilon},$$

care rezultă din forma locală a legii fluxului electric (1.66') în care se înlocuiește \bar{D} prin expresia sa (1.77): $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$, astfel că:

$$\text{div} \bar{D} = q_{v_p} \rightarrow \text{div} \epsilon \bar{E} = q_{v_p} \rightarrow \begin{cases} \epsilon \text{div} \bar{E} = q_{v_p} \\ \epsilon = \text{const}_{E,r} \end{cases} \rightarrow \text{div} \bar{E} = \frac{1}{\epsilon} q_{v_p}.$$

2.2.2. Teorema lui Coulomb

Această teoremă stabilește un model pentru *calculul intensității câmpului electric \bar{E}_0 produs în vid de către un singur corp punctiform*, cu sarcina electrică q , situat într-un domeniu Ω_0 considerat infinit extins (în toate direcțiile, în jurul corpului punctiform). Pentru calculul lui \bar{E}_0 în această situație, într-un punct P , se aplică teorema (2.16) a lui Gauss pentru o suprafață închisă sferică Σ_{sf} , cu raza r , având în centrul său C corpul punctiform cu sarcina electrică q și pe suprafața sa punctul P , în care se va calcula $\bar{E}_0(P)$. Distanța de la centrul C al sferei la punctul P de pe suprafața ei este, evident egală cu raza r a sferei, care se orientează de la C la P : $\overrightarrow{CP} = \bar{r}$ și are versorul $\bar{r}_0 = \bar{r}/r$ (fig. 2.1).

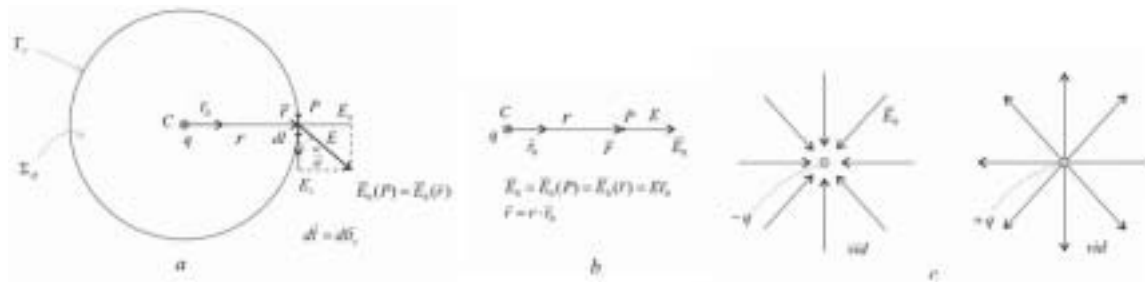


Fig. 2.1

Din cauza simetriei sferice a sistemului din figura 2.1, toate punctele $P \in \Sigma_{sf}$ sunt situate la aceeași distanță r față de centrul C , unde este corpul punctiform cu sarcina electrică q și mediul fiind peste tot același (vid), rezultă că pe $\forall P \in \Sigma_{sf}$ intensitatea câmpului electric $\vec{E}_0(P)$, are aceeași valoare absolută $E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2}$, unde E_n este *componenta normală la suprafața sferei a intensității câmpului electric* $\vec{E}_0(P)$ cu $P \in \Sigma_{sf}$ și E_t este componenta tangențială la Σ_{sf} în punctul P al câmpului $\vec{E}_0(P)$. Rezultă, deci că $E_t = \sqrt{E^2 - E_n^2} = \text{const.}$ (în $\forall P \in \Sigma_{sf}$). Deoarece, după cum se va vedea, $\vec{E}_0(P)$ va depinde de raza orientată a sferei \vec{r} , este mai adecvat ca funcția de punct $\vec{E}_0(P)$ să se exprime $\vec{E}_0(\vec{r})$, deoarece pe baza definiției suprafeții sferice, ca loc geometric al tuturor punctelor P din spațiu situat la aceeași distanță r de un punct C –numit centrul sferei–, adică:

$$\Sigma_{sf} = \{P | \vec{CP} = \vec{r}\},$$

fiecărui punct P , ce poate aparține unei suprafețe sferice de rază r , i se poate atașa raza vectorie \vec{r} . În acest fel fiecare punct P va fi reprezentat (indicat) de raza vectorie \vec{r} , existând identitatea $\vec{E}_0(P) \equiv \vec{E}_0(\vec{r})$.

În aceste condiții și în cazul din figura 2.1a, aplicîndu-se legea inducției electromagnetice sub forma (2.14) din regim electrostatic, după orice contur circular $\Gamma_c \in \Sigma_{sf}$, rezultă :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \rightarrow \oint_{\Gamma_c} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_c} \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{t}_c dl = \oint_{\Gamma_c} E(\vec{r}) l \cos \alpha \cdot dl = \\ &= \oint_{\Gamma_c} E \cos \alpha \cdot dl = \oint_{\Gamma_c} E_t dl = E_t \oint_{\Gamma_c} dl = E_t 2\pi \cdot r = 0, \end{aligned} \quad (\Gamma)$$

deoarece $E_t = \text{const.}$ (cum s-a arătat anterior). Integrala (Γ) fiind nulă, iar raza $r \neq 0$, rezultă că $E_t = 0$ și deci $E_n = E \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E\vec{r}_0$, cu alte cuvinte, în condițiile de la care s-a plecat (vezi fig. 2.1a) în toate punctele $P(\vec{r})$, de pe suprafața sferică Σ_{sf} , intensitatea câmpului electric produs în aceste puncte de corpul punctiform cu sarcina electrică q din centrul C al sferei, este un vector cu valoare absolută $|\vec{E}_0(\vec{r})| = \text{const.} = E$, avînd orientarea după direcția normalei la Σ_{sf} , deci după raza orientată a sferei \vec{r} , adică $\vec{E}_0(P) = \vec{E}_0(\vec{r}) = E\vec{r}_0$ (fig. 2.1b)

Rămîne să se mai determine această valoare absolută E . Teorema lui Gauss (2.16), aplicată cazului din figura 2.1a conduce la:

$$\oint_{\Sigma_{sf}} \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{v_{\Sigma_{sf}}} \rightarrow \oint_{\Sigma_{sf}} E\vec{r}_0 \cdot d\vec{A} = \oint_{\Sigma_{sf}} E \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{A} = \frac{E}{r} \oint_{\Sigma_{sf}} \vec{r} \cdot d\vec{A} = \frac{E}{r} \oint_{\Sigma_{sf}} r dA = E \oint_{\Sigma_{sf}} dA = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q, \quad (C)$$

deoarece $q_{v_{\Sigma_{sf}}} = q$. Atunci din egalitatea (C) se deduce :

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (2.18')$$

și

$$\vec{E}_0 = E\vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (2.18)$$

așa ca în fig. 2.1b.

Deoarece, conform relației (9.16), referitoare la derivata unei funcții scalare (aici $1/r$) în raport cu o direcție dată (aici \vec{r}), $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)_P = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{r}_0 = -\frac{1}{r^2}\vec{r}_0 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, rezultă că relația (2.18)

se poate scrie și în forma:

$$(2.18'') \quad \vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Toate expresiile (2,18) reprezintă modele ale *teoremei lui Coulomb*, care exprimă faptul că valoarea absolută a vectorului intensității câmpului electric în vid, produs de un corp punctiform încărcat cu sarcină electrică q , la distanța r de acest corp este, proporțională cu sarcina electrică q și invers proporțională cu pătratul distanței r . Vectorul \vec{E}_0 este pe direcția razei, cu sensul spre corp dacă q este negativă și cu sensul dinspre corp spre exterior dacă sarcina electrică q este pozitivă (fig. 2.1c).

Extinderea teoremei lui Coulomb

Se referă la aplicarea teoremelor (2,18) în care mediul este altul decât vidul. Acest lucru se poate face numai atunci când corpul punctiform încărcat cu sarcina electrică q este situat într-un *dielectric omogen și izotrop, fără alte sarcini electrice, fără polarizație electrică permanentă, caracterizat de permitivitatea absolută $\epsilon(\vec{r}) = \text{const.} = \epsilon$ și considerat (idealizat) infinit extins în toate direcțiile.*

În acest caz, intensitatea câmpului electric $\vec{E}(P) = E(\vec{r}) = \vec{E}$, în orice punct al domeniului definit anterior, se calculează direct cu relațiile (2,18) în care se înlocuiește ϵ_0 cu ϵ :

$$(2.19) \quad \vec{E} = E\vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

$$(2.19') \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2},$$

$$(2.19'') \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \text{grad}\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Potențialul electrostatic produs de un corp punctiform electrizat

După cum se știe (v. § 1.2.2, subparagraful “Potențialul electric”), starea electrică a unui câmp electromagnetic poate fi descrisă local și printr-o funcție scalară de punct $V(P) = V(\vec{r}) = V$, definită prin relațiile (1.38) sau (1.41). În câmp electrostatic acest potențial se numește **potențialul electrostatic** și se determină cu aceleași relații de definiție, aplicate cazurilor concrete avute în vedere.

Astefel, în cazul unui câmp electrostatic produs într-un mediu omogen, izotrop, liniar și extins la infinit (cu permitivitatea absolută ϵ) de către un singur corp punctiform încărcat cu sarcina electrică q , potențialul electrostatic $V(P) = V(\vec{r}) = V$ dintr-un punct $P(\vec{r})$ al domeniului se calculează astfel:

- folosindu-se definiția (1.38):

$$V(P) = V(P_0) - \int_{\vec{r}: P_0 \rightarrow P} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(P_0) - \int_{\vec{r}: P_0 \rightarrow P} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 \cdot d\vec{r} = V(P_0) - \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{\vec{r}: P_0 \rightarrow P} \frac{dr}{r^2} = V(P_0) + \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r},$$

în care integrala curbilinie care poate fi determinată după orice curbă $\Gamma \subset \Omega$, a fost calculată, fiind mai comod, după raza r (v. fig. 2.1). Dacă potențialul electrostatic al punctului P_0 , de referință, se

consideră (se ia) $V(P_0) = 0$, atunci potențialul electrostatic în orice punct $P(\vec{r})$ în condițiile arătate anterior se exprimă prin:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}; \quad (2.20)$$

- folosindu-se definiția (1.41):

$$\vec{E}(P) = -\text{grad}V(P) \quad (V')$$

și avându-se în vedere expresia (2.19'') a lui \vec{E} scrisă sub forma:

$$\vec{E}(P) = \text{grad} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r} + k \right) \Big|_P, \quad (V'')$$

unde k este o constantă, identificându-se cele două expresii ale lui $\vec{E}(P)$, adică (V') cu (V''), rezultă :

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} + k_{p_0},$$

unde constanta k_{p_0} reprezintă valoarea potențialului de referință $V(P_0)$ care dacă se consideră egal cu zero relația devine:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r},$$

adică aceeași ca la expresia (2.20).

Formula lui Coulomb

Exprimă forțele care se exercită între două corpuri punctiforme electrizate, aflate numai ele singure în vid. Se consideră figura 2.2, în care se arată că în punctele P_1 și P_2 situate la distanța orientată \vec{r}_{12} se află două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice q_1 –corpul din punctul P_1 și q_2 – corpul din P_2 asupra cărora se exercită forțele \vec{F}_{12} și \vec{F}_{21} .

În acest caz, fiecare corp punctiform se află în câmpul electric produs în punctul în care este situat el de către sarcina electrică a celuilalt corp; astfel, corpul din P_1 se află în câmpul

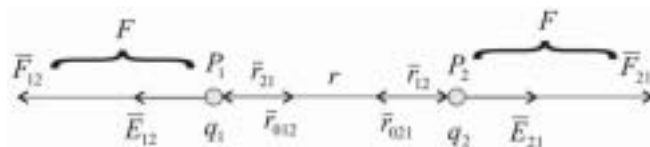


Fig. 2.2

\vec{E}_{12} și corpul din P_2 în câmpul \vec{E}_{21} . Ca urmare, în conformitate cu expresia forței lui Lorentz (1.31), rezultă următoarele formule de calcul a celor două forțe:

$$\vec{F}_{21} = q_2 \vec{E}_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}, \quad (2.21)$$

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_{12} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{21},$$

în care distanța dintre cele două corpuri este $r = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}|$. Cele două forțe sunt așa cum rezultă din formulele (2.21), egale și de sens opus, deoarece razele vectoare sunt în relația $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$.

În valoare absolută forțele se calculează cu formula:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.21')$$

care reprezintă *formula lui Coulomb*.

Formulele (2.21) se pot aplica și în cazul mediului omogen, izotrop, liniar, cu $\epsilon = \text{const.}$ extins la infinit, și având numai cele două corpuri punctiforme electrizate, prin înlocuirea lui ϵ_0 cu ϵ .

Formulele (2.21) arată că : dacă sarcinile electrice ale corpurilor au acelaș semn (deci $q_1 q_2 > 0$) forțele sunt de respingere a corpurilor, iar dacă sarcinile sunt de semne contrarii ($q_1 q_2 < 0$) forțele sunt de atracție a corpurilor.

2.2.3 Teorema potențialului electrostatic

Într-un mediu vid Ω_0 se consideră că există un câmp electrostatic cu intensitatea \vec{E}_0 , produs –de exemplu– de un corp electrizat constatnt în timp. Mediul fiind vid nu există câmp electric imprimat, deci $\vec{E}_i = 0$, iar sistemul fiind în regim electrostatic nu există nici câmp electric

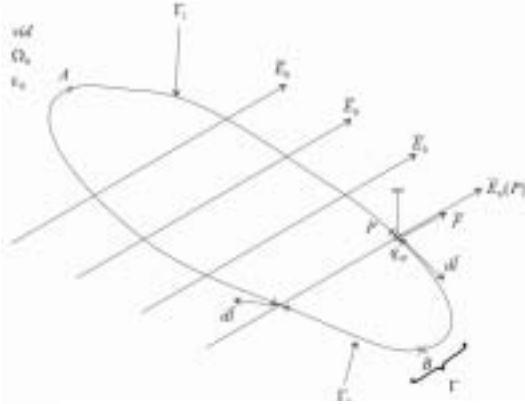


Fig. 2.3

solenoidal, deci $\vec{E}_s = 0$. Atunci conform expresiei generale a intensității câmpului electric (1.28E), câmpul electrostatic considerat nu are decât componenta zisă coulombiană \vec{E}_C (care aici este $\vec{E}_C = \vec{E}_0$), putându-se în continuare să se stabilească ce caracteristici are această componentă.

În câmpul electrostatic din Ω_0 , astfel considerat, alegem un contur închis oarecare $\Gamma \subset \Omega_0$ și pe el fixăm, arbitrar, două puncte A și B. Pe acest contur Γ se plasează un corp de probă fixat (ce nu se va putea deplasa), care are sarcina electrică q_{cp} . Atunci, conform expresiei (1.31) a forței lui Lorentz, asupra corpului de

probă se va exercita o forță $\vec{F} = q_{cp} \vec{E}_0(p) = q_{cp} \vec{E}_C(P)$, unde P este un punct oarecare de pe conturul Γ (fig 2.3).

Corpul de probă fiind fixat mecanic nu se va putea deplasa, deoarece în legăturile sale se produce o forță de reacțiune \vec{F}_r , care echilibrează dinamic forța electrică \vec{F} , corpul rămând imobil: deci $\vec{w} = 0$ și $\vec{F}_r = \vec{F}$ (sau $\vec{F}_r - \vec{F} = 0$), sistemul fiind prin urmare într-un perfect regim electrostatic (respectând condițiile $1^0 \dots 4^0$). În această situație, se realizează o deplasare „foarte lentă” a corpului de probă cu sarcina electrică, în câmpul electrostatic \vec{E}_C , atributul de „foarte lent” având semnificația că în fiecare moment regimul poate fi considerat electrostatic (se fac deplasări elementare $dl \subset \Gamma$, ale corpului de probă la intervale foarte mari de timp) – ceea ce, conform principiului conservării energiei, prin efectuarea unui ciclu închis Γ în câmpul coulombian nu se poate câștiga energie ($w_\Gamma = 0$), adică starea finală a sistemului fiind identică cu cea inițială. Parcurgându-se cu corpul de probă electrizat cu q_{cp} conturul închis Γ în așa fel încât în nici un moent să nu existe o abatere de la regimul electrostatic, rezultă că lucrul mecanic L_Γ efectuat de forța electrică \vec{F} , exercitată asupra corpului de proba, trebuie să fie nul:

$$L_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Înlocuindu-se aici forța cu expresia ei (1.31), adică $\vec{F} = q_{cp} \vec{E}_0$ se obține:

$$\oint_\Gamma q_{cp} \vec{E}_0 d\vec{l} = 0 \text{ sau } q_{cp} \oint_\Gamma \vec{E}_0 d\vec{l} = 0$$

și deoarece această ultimă relație nu are sens decât pentru $q_{cp} \neq 0$, rezultă :

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}_0 \cdot \bar{dl} = 0 \quad \Leftarrow \quad \forall \Gamma \subset \Omega_0, \quad (2.22)$$

care este una din formele teoremei potențialului electrostatic. Ea exprimă faptul că circulația intensității câmpului electrostatic în vid pe orice contur închis este nulă.

Local, dacă se aplică formula lui Stokes (9.28) expresiei (2.22) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}_0 \cdot \bar{dl} = \int_{\Sigma_r} \text{rot} \bar{E}_0 \cdot \bar{dl} = 0,$$

de unde rezultă o altă formă locală, a teoremei potențialului electrostatic și anume:

$$\text{rot} \bar{E}_0 = 0 \quad \Leftarrow \quad \forall P \in \Omega_0, \quad (2.22')$$

ceea ce înseamnă că în regim electrostatic câmpul electric este un câmp irotațional (de rotor zero), care derivă – deci – dintr-un potențial scalar.

Prin definiție, orice câmp electric, sau componentă a câmpului, pentru care intensitatea sa satisface relațiile (2.22) și (2.22') se numește *câmp coulumbian* și se notează cu \bar{E}_C . Prin urmare dacă $\text{rot} \bar{E} = 0$ atunci $\bar{E} = \bar{E}_C$ sau, reciprocă $\bar{E} = \bar{E}_C$ implică $\text{rot} \bar{E}_C = 0$.

Teorema potențialului electrostatic este valabilă nu numai în vid ci și în orice alt material, cu o singură condiție, sistemul trebuie să se afle în regim electrostatic și să nu aibă câmp electric imprimat. Ea se bazează pe faptul că un câmp electrostatic se menține fără aport de energie din exterior și –ca urmare– conform principiului conservării energiei forța de natură electrostatică nu poate produce lucru mecanic pe un contur închis. Dacă, în principiu un câmp electric are structura intensității sale : $\bar{E} = \bar{E}_C + \bar{E}_i + \bar{E}_s$ atunci, așa cum s-a mai arătat, în regim electrostatic $E_s = 0$ și ca urmare:

$$\oint_{\Gamma} q_{cp} \bar{E}_0 \cdot \bar{dl} = \oint_{\Gamma} (\bar{E}_C + \bar{E}_i) \cdot \bar{dl} = \oint_{\Gamma} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} + \oint_{\Gamma} \bar{E}_i \cdot \bar{dl} = 0 + e_i,$$

unde e_i este o tensiune electromotoare datorită prezenței pe conturul închis Γ a unui câmp electric imprimat produs de neomagnitățile de material și neuniformitățile de accelerație temperatură deformații etc. De aceea, teorema potențialului electric se formulează fie sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot \bar{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \bar{E}_i \cap \bar{E}_s \right\} = 0,$$

fie sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} = 0 \quad \text{sau} \quad \text{rot} \bar{E}_C = 0.$$

Oricum, în orice sistem electrostatic cu $\bar{E}_i = 0$ teorema potențialului electrostatic este valabilă.

Dacă se consideră conturul închis Γ ca fiind format din două porțiuni Γ_1 și Γ_2 cuprinse între punctele A și B ale conturului (fig. 2.3), cu $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2$, se va putea scrie:

$$\oint_{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} = \int_{\Gamma_1: A \rightarrow B} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} + \int_{\Gamma_2: B \rightarrow A} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Gamma_1: A \rightarrow B} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} = - \int_{\Gamma_2: B \rightarrow A} \bar{E}_C \cdot \bar{dl}$$

sau

$$\int_{\Gamma_1: A \rightarrow B} \bar{E}_C \cdot \bar{dl} = \int_{\Gamma_2: A \rightarrow B} \bar{E}_C \cdot \bar{dl}, \quad (2.23)$$

deoarece la același sens de referință pe întreg conturul Γ (deci și pe Γ_1 și pe Γ_2) al elementului de curbă orientat \bar{dl} , la schimbarea sensului de integrare curbilinie (a sensului de parcurs) semnul integralei se schimbă ; de aceea :

$$- \int_{\Gamma_2: B \rightarrow A} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = \int_{\Gamma_2: A \rightarrow B} \vec{E}_c \cdot \vec{dl}.$$

Egalitatea finală (2.23) este o nouă formă a teoremei potențialului electrostatic, care afirmă că în regim electrostatic *integrala curbilinie a intensității câmpului electric coulombian (sau a câmpului electrostatic) nu depinde de drum (de curba de integrare), ci numai de punctele între care se efectuează.*

Așa cum s-a mai arătat în paragraful §1.2.2, relația (1.43), integrala curbilinie a intensității câmpului electric între două puncte A și B se numește –prin definiție– tensiune electrică. În cazul câmpului electrostatic, tensiunea electrică se notează cu U_{AB} și este definită ca fiind integrala curbilinie între două puncte A și B din câmpul electrostatic:

$$U_{AB} \stackrel{D}{=} \int_{\Gamma: A \rightarrow B} \vec{E}_c \cdot \vec{dl}.$$

Din ultima egalitate (2.23) se constată că tensiunea U_{AB} este aceeași atât pe drumul Γ_1 cât și pe drumul Γ_2 :

$$(2.24) \quad U_{AB} = \int_{\Gamma_1: A \rightarrow B} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = \int_{\Gamma_2: A \rightarrow B} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = \int_{\Gamma: A \rightarrow B} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} \quad \Leftarrow \forall \Gamma \ni \{A, B\}$$

care este o altă formă a teoremei potențialului electrostatic potrivit căreia *în regim electrostatic tensiunea electrică dintre două puncte din câmp nu depinde de drumul ales între cele două puncte.*

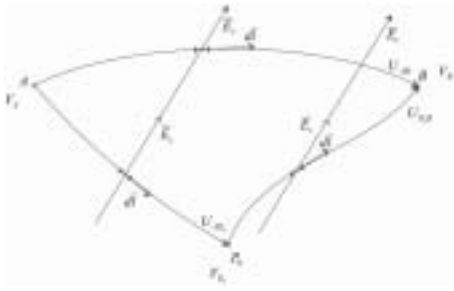


Fig. 2.4

Relația (2.24), ca și expresia (2.22'), arată că un câmp electrostatic (și –în general– un câmp irotațional) derivă dintr-un potențial (electric) scalar, ceea ce permite ca fiecărui punct P din câmp să i se atașeze o valoare scalară V_P , în raport cu un punct de referință P_0 .

În acest sens, se consideră două puncte A și B din câmpul electrostatic Ω , un punct de referință $P_0 \in \Omega$ și se calculează tensiunile electrice aferente lor după niște

drumuri oarecari Γ_{AB} , Γ_{AP_0} și Γ_{BP_0} (fig. 2.4).

Se va obține:

$$U_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl},$$

$$U_{AP_0} = \int_{\Gamma_{AP_0}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl},$$

$$U_{BP_0} = \int_{\Gamma_{BP_0}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl}.$$

Pentru că în câmpul electrostatic tensiunea electrică dintre două puncte (aici A și B) nu depinde de drum, se va mai putea scrie:

$$U_{AB} = \int_{\Gamma_{AP_0}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} + \int_{\Gamma_{P_0B}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} = \int_{\Gamma_{AP_0}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl} - \int_{\Gamma_{BP_0}} \vec{E}_c \cdot \vec{dl},$$

ceea ce înseamnă:

$$(2.25) \quad U_{AB} = U_{AP_0} - U_{BP_0}$$

sau, în cazul unui punct curent $P \in \Omega$ pentru care –prin definiție– tensiunea U_{PP_0} (față de punctul ales ca referință P_0) se notează cu V_P și se numește *potențialul electrostatic* (scalar) al câmpului electrostatic în punctul P (v. § 1.2.2, „Potențialul electric”), adică:

$$(2.26) \quad V_P \stackrel{D}{=} U_{P P_0} \stackrel{D}{=} V_P - V_{P_0} = \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow P} \overline{E}_c \cdot \overline{dl} \text{ sau } V_P \stackrel{D}{=} V_{P_0} - \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow P} \overline{E}_c \cdot \overline{dl},$$

ceea ce permite ca relația (2.25) să poată fi rescrisă în forma:

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (2.27)$$

în care:

$$V_A = U_{A P_0} = V_A - V_{P_0} = V_{P_0} - \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow A} \overline{E}_c \cdot \overline{dl} \text{ și } V_B = U_{B P_0} = V_B - V_{P_0} = V_{P_0} - \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow B} \overline{E}_c \cdot \overline{dl},$$

adică:

$$U_{AB} = V_A - V_{P_0} - (V_{P_0} - V_B) = V_A - V_B.$$

Relația (2.27) arată că în câmp electrostatic, tensiunea electrică dintre două puncte este egală cu diferența dintre potențialele celor două puncte.

Potențialul electrostatic, ca mărime scalară de punct, poate fi definit local așa cum s-a văzut în paragraful 1.2.2 (v. subpar. „Potențialul electric”) prin derivarea – în punctul P considerat – după o direcție \overline{l} a expresiei de definiție (2.36):

$$\frac{dV_P}{d\overline{l}} = \frac{d}{d\overline{l}} \left(V_{P_0} - \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow P} \overline{E}_c \cdot \overline{dl} \right)_P = \frac{dV_{P_0}}{d\overline{l}} - \frac{d}{d\overline{l}} \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow P} \overline{E}_c \cdot \overline{dl} = 0 - \overline{E}_c(P),$$

de unde rezultă că $\overline{E}_c = -dV/d\overline{l}$ în $\forall P \in \Omega$ sau – ținându-se seama de expresia derivatei unei funcții scalare în raport cu o direcție dată (9.16), precum și de relațiile (1.40) din § 1.2.2 – reiese că potențialul electrostatic se poate defini local prin:

$$\overline{E}_c = -\text{grad } V \iff \forall P \in \Omega. \quad (2.26')$$

Potențialul electrostatic al punctului de referință din câmp $V_0 = V(P_0)$ este o constantă pentru întreg câmpul: $V_0 = K$, ce reprezintă aproximația cu care sunt determinate potențialele electrostatice ale tuturor celorlalte puncte din câmp: $V = V(P) + K$ în $\forall P \in \{\Omega - P_0\}$. De aceea valoarea aleasă pentru constanta K poate fi oricăre deoarece câmpurile scalare V și, respectiv, $V + K$ au același gradient.

Forțe de natură electrostatică

Reprezintă forțele care se exercită asupra corpurilor electrizate care se găsesc fixate (imobilizate) într-un câmp electrostatic.

În cazul unui corp punctiform, încărcat cu sarcina electrică q_{cp} și fixat într-un punct în care câmpul electrostatic are intensitatea \overline{E} , expresia forței ce se exercită asupra acestui corp, determinată de starea de electrizare a corpului și de câmpul electrostatic (deci de natură electrostatică) este dată de relația (1.31) – forța lui Lorentz – adică:

$$\overline{F} = q_{cp} \overline{E} \text{ sau } \overline{F} = -\text{grad } V q_{cp}, \quad (2.28)$$

care este pe direcția vectorului intensității câmpului electrostatic. Corpul fiind fixat – imobil, nu se va putea deplasa sub acțiunea acestei forțe, sistemul rămânând în regim electrostatic.

Dacă corpul nu este punctiform, ci masiv, având starea de electrizare determinată de densitatea de volum a sarcinii electrice q_v și dacă este dintr-un material omogen (deci cu $\epsilon = \text{const.}$ în orice punct al corpului), atunci – fiind în regim electrostatic (deci cu $\epsilon = \text{const.}$ în timp și cu $\text{rot } \overline{E} = 0$) – se poate considera că în fiecare punct acționează o forță (ca densitate de volum, în N/m^3) dată de relația evidentă:

$$\overline{f}_v = q(P) \cdot \overline{E}(P) = \frac{dq}{dv} \Big|_P \overline{E}(P) = q_v \overline{E} \quad (2.29)$$

și dimensional:

$$\left[\frac{F}{L^3} \right] = \left[\frac{Q \cdot U \cdot L^{-1}}{L^3} \right],$$

care reprezintă *densitatea de volum a forței de natură electrostatică*. Această forță este de tip virtual, ea nu există (macroscopic, într-un mediu continuu, masiv și rigid) decât ca o componentă teoretică a unei forțe \bar{F} globală, ce se exercită asupra întregului corp ca rezultantă vectorială a vectorilor locali \bar{f}_v (de fapt, în natură nu există separat componente, ci numai o rezultantă a lor) și care este:

$$(2.30) \quad \bar{F} = \int_{v_\Omega} \bar{f} dv = \int_{v_\Omega} \bar{E} q_v dv = \int_{v_\Omega} (-\text{grad } V) q_v dv,$$

în care v_Ω este volumul corpului ce ocupă domeniul Ω . Dacă se are în vedere definiția (9.11) a gradientului, atunci forța electrostatică rezultantă va fi, în cazul particular al unui corp uniform electrizat ($q_v = \text{const.}$):

$$(2.30') \quad \bar{F} = q_v \oint_{\Sigma} V d\bar{A},$$

unde $\oint_{\Sigma} V d\bar{A}$ este integrala de inveliș relativă la scalarul potențial electrostatic și extinsă la suprafața ce mărginește corpul masiv.

Dacă, un corp punctiform încărcat cu sarcina electrică q_{cp} ce se află într-un punct A dintr-un câmp electrostatic cu intensitatea $\bar{E}(A)$, fiind supus forței $\bar{F}(A) = q_{cp} \bar{E}(A)$, va rămâne la un moment dat liber, atunci el se va deplasa în câmp și sistemul nu mai este electrostatic. În continuare, dacă același corp care se deplasează în câmp ajunge într-un punct B , în care intensitatea câmpului electrostatic este $\bar{E}(B)$ și aici va fi imobilizat – adică forța $\bar{F}(B) = q_{cp} \bar{E}(B)$ va fi echilibrată de o forță de reacție dintr-o legătură oarecare ce fixează corpul în punctul B – atunci sistemul va intra din nou în regim electrostatic, altul – în care s-a produs o variație de energie egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele ce deplasează corpul din punctul A în punctul B – adică de:

$$(2.31) \quad L_{AB} = \int_{\Gamma: A \rightarrow B} q_{cp} \bar{E} \cdot d\bar{l} = q_{cp} \int_{\Gamma: A \rightarrow B} \bar{E} \cdot d\bar{l} = q_{cp} U_{AB} = q_{cp} V_A - q_{cp} V_B,$$

considerându-se că s-a menținut aceeași stare de electrizare. În acest fel, dacă $V_A > V_B$ sau $U_{AB} > 0$ lucrul mecanic cheltuit $L = q U$ va proveni din energia electrică a sistemului care – în noul regim electrostatic în care corpul a ajuns în punctul B – va fi „mai sărac” cu energia $q_{cp} (V_A - V_B)$. În caz contrar, $V_A < V_B$ și deci $U_{AB} < 0$, o forță exterioară ce a „înving” forța de natură electrică $\bar{F} = q_{cp} \bar{E}$, va efectua un lucru mecanic pe care îl va ceda câmpului electric, care – în noul regim electrostatic (cu corpul fixat în punctul B) – va fi „mai bogat” cu energia $q_{cp} (V_A - V_B)$, ce va fi înmagazinată în dielectricul sistemului electrostatic.

Ecuțiile lui Poisson și Laplace

Plecându-se de la teorema lui Gauss (2.17'), scrisă sub formă locală, adică: $\text{div } \bar{E} = q_v / \varepsilon$, în care se înlocuiește \bar{E} prin definiția locală a potențialului electrostatic (2.26'), adică: $\bar{E} = -\text{grad } V$, rezultă:

$$\text{div} (-\text{grad } V) = q_v / \varepsilon \quad \text{sau} \quad \nabla \cdot (\nabla V) = -q_v / \varepsilon,$$

deci:

$$(2.32') \quad \nabla^2 V = -\frac{q_v}{\varepsilon},$$

în care ∇^2 este operatorul „nabla” la pătrat, care se notează cu Δ (operatorul denumit „laplacean”) astfel că ecuația (2.32') se poate scrie în forma:

$$\nabla V = -\frac{q_v}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \forall P \in \Omega, \quad (2.32)$$

sau, deoarece într-un sistem de coordonate cartezian $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, în forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{q_v}{\varepsilon}. \quad (2.32'')$$

Ecuațiile (2.32) sunt cunoscute sub numele de *ecuațiile lui Poisson*.

În punctele din câmpul electrostatic (din dielectric) în care densitatea de volum a sarcinii electrice q_v este zero, ecuațiile (2.32) devin:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta V = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2.33)$$

care se numesc *ecuațiile lui Laplace*.

După cum se vede, ecuațiile lui Poisson și Laplace sunt ecuații cu derivate parțiale liniare (dacă $\varepsilon = \text{const.}$) de ordinul al II-lea, care definesc câmpul scalar al potențialului electric în „interiorul” domeniului Ω . Aceste ecuații completate cu condiții la limită, pe suprafața $\Sigma = \text{Fr } \Omega$, formează probleme cu derivate parțiale cu condiții pe frontieră de tipul:

- *problema lui Dirichlet*, atunci când ecuațiile (2.32) sau (2.33) definite pe Ω sunt completate cu condiția la limită $V|_{\Sigma} = c$, unde valoarea c a potențialului pe frontieră este dată;

- *problema lui Neumann*, atunci când ecuațiile (2.32) sau (2.33) definite pe Ω sunt completate cu condițiile la limită $\frac{d}{dn} V|_{\Sigma} = c$, unde c este valoarea derivatei potențialului electric

pe direcția normalei la frontiera Σ , adică este componenta normală la Σ a câmpului electric (E_n) sau a inducției electrice ($D_n = \varepsilon E_n$);

- *problema mixtă (Fourier)*, atunci când ecuațiile (2.32) sau (2.33) definite pe Ω sunt completate cu condiția la limită $V + f \frac{d}{dn} V|_{\Sigma} = c$, unde f este o funcție oarecare.

Astfel de probleme, rezolvate prin procedee informatice (prin metoda numerică a diferențelor finite și cu aplicarea produsului-program MATLAB – v. subcap. 9.2 și 9.3), sunt prezentate în câteva aplicații introduse la finele acestui capitol (v. § 2.7.1).

2.2.4. Teorema unicității determinării câmpului electrostatic

Din cele prezentate până aici rezultă că un câmp electrostatic poate fi produs de corpurile electrizate imobile punctiforme care au sarcinile electrice invariabile (așa cum rezultă din teorema lui Coulomb), de corpurile „mari” imobile și electrizate care au densitatea de volum a sarcinii electrice, q_v , constantă în timp (așa cum rezultă din teorema lui Gauss), de frontiera ce mărginește domeniul câmpului electrostatic, dacă ea este imobilă și potențialul ei electrostatic V_{Σ} sau componenta normală la ea a inducției electrice D_n (ori a intensității câmpului electrostatic E_n) sunt date (așa cum rezultă din ecuațiile lui Poisson și Laplace, incluse în problema mixtă a lui Fourier). Așa cum se va arăta mai încolo, câmpul electrostatic poate fi produs și de corpurile imobile cu polarizare electrică permanentă (v. cap. 3) sau de suprafețele de discontinuitate din mediile dielectrice care au o densitate de suprafață a sarcinii electrice q_{Σ} dată (v. subcap. 2.4).

Teorema unicității determinării câmpului electrostatic stabilește condițiile (numite condiții de unicitate) în care un câmp electrostatic este determinat în mod univoc și poate fi formulată în felul următor:

câmpul electrostatic dintr-un mediu liniar (cu permitivitatea absolută ϵ constantă), aflat într-un domeniu Ω mărginit de o suprafață închisă $\Sigma = \text{Fr } \Omega$, și fără polarizație electrică permanentă ($\bar{P}_p = 0$), este univoc determinat dacă se cunosc:

i) potențialul V_Σ sau componenta normală D_n la Σ a inducției electrice pe frontiera Σ (care este, de fapt, condiția la limită a problemei mixte –Fourier– v. § 2.2.3, subpar. „Ecuatiile lui Poisson și Laplace”);

ii) sarcina electrică q_{cpj} ale celor n_{cp} corpuri punctiforme existente în Ω ($j = 1, 2, \dots, n_{cp}$);

iii) potențialul electrostatic V_{ck} sau sarcina q_{ck} ale celor n_c corpuri conductoare din Ω ($k = 1, 2, \dots, n_c$);

iu) potențialul V_p sau densitatea de volum a sarcinii electrice $q_v(P)$ în punctele $P \in \Omega_v \subset \Omega$ în care $q_v(P) \neq 0$.

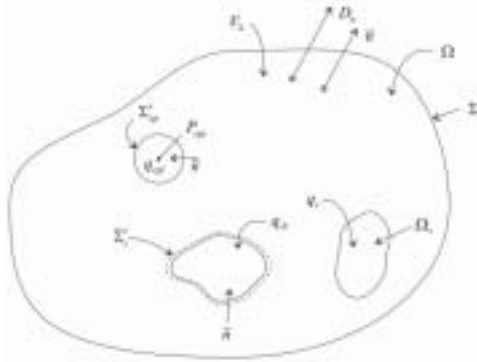


Fig. 2.5

Pentru a demonstra această teoremă se pleacă de la figura 2.5 în care au fost redată schematic cele patru condiții de unicitate ale teoremei, corpurile fiind considerate înconjurată de niște suprafețe Σ'_c și Σ'_{cp} , elementar vecine suprafeței corpurilor conductoare și, respectiv, care înconjoară corpurile punctiforme.

La fel ca în cazul general (v. § 1.5.1), se va considera că – în condițiile de unicitate identice – există, prin absurd, două soluții diferite pentru fiecare punct $P \in \Omega$ ale câmpului electrostatic V_1, \bar{D}_1 și V_2, \bar{D}_2 .

Pentru a vedea dacă ele sunt într-adevar diferite, se va calcula derivata, de la punct la punct, a diferențelor $V_1 - V_2$ și $\bar{D}_1 - \bar{D}_2$, extinsă pe întreg domeniul $\Omega_\epsilon \subset \Omega$, cu $\Omega_\epsilon = \left\{ \Omega - \Omega_v - \Omega_{ck} - P_{cpj} \mid k = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_{cp} \right\}$. Se va evalua, deci, expresia:

$$(U1) \quad \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \left[(V_1 - V_2) (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \right] dv = \int_{\Omega_\epsilon} (V_1 - V_2) \nabla \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) dv.$$

Aplicându-se expresiei (U1) formula lui Gauss-Ostrogradski (9.20) va rezulta, în condițiile i), ii), iii) și a figurii 2.5:

$$(U2) \quad \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \left[(V_1 - V_2) (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \right] dv = \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2) \left| (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \right|_{\Sigma} \cdot \bar{dA} + \\ + \sum_{j=1}^{n_{cp}} \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2) (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \cdot \bar{dA} + \sum_{k=1}^{n_c} \oint_{\Sigma} (V_{1ck} - V_{2ck}) (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \cdot \bar{dA},$$

unde însumarea se explică prin aplicarea teoremei superpoziției câmpurilor electrostatice (v. § 2.2.5), în condițiile în care mediul din Ω este liniar.

Fiecare termen al membrului drept din expresia (U2) se va evalua precum urmează:

$$(U3) \quad i') \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2) \left| (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \right|_{\Sigma} \cdot \bar{dA} = \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2)_{\Sigma} (\bar{D}_1 \cdot \bar{dA} - \bar{D}_2 \cdot \bar{dA})_{\Sigma} = \\ = \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2)_{\Sigma} (\bar{D}_1 \cdot \bar{n} dA - \bar{D}_2 \cdot \bar{n} dA)_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} (V_1 - V_2)_{\Sigma} (D_{n1} - D_{n2})_{\Sigma} dA = 0,$$

dată fiind condiția i);

$$\begin{aligned}
ii') \sum_{j=1}^{n_{cp}} \oint_{\sum_{cpj}} (V_1 - V_2) (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) \cdot d\overline{A} &= \sum_{j=1}^{n_{cp}} (V_{1cpj} - V_{2cpj}) \left[\underbrace{\oint_{\sum_{cpj}} -\overline{D}_1 \cdot d\overline{A}}_{q_{1cpj}} - \underbrace{\oint_{\sum_{cpj}} -\overline{D}_2 \cdot d\overline{A}}_{q_{2cpj}} \right] = \\
&= -\sum_{j=1}^{n_{cp}} (V_{1cpj} - V_{2cpj}) (q_{1cpj} - q_{2cpj}) = 0,
\end{aligned} \tag{U4}$$

în conformitate cu condiția ii);

$$iii') \sum_{k=1}^{n_c} \oint_{\sum_c} (V_{1ck} - V_{2ck}) (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) \cdot d\overline{A} = -\sum_{k=1}^{n_c} \oint_{\sum_c} (V_{1ck} - V_{2ck}) (q_{1ck} - q_{2ck}) = 0, \tag{U5}$$

ca urmare a condiției iii).

Deoarece fiecare termen din membrul drept al egalității (U1) este egal cu zero, atunci și expresia din membrul stâng (U1) este zero, adică:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla [(V_1 - V_2) (\overline{D}_1 - \overline{D}_2)] dv = 0.$$

(U6)

Pe de altă parte, membrul stâng al expresiei (U1) –în conformitate cu regulile de aplicare a operatorului liniar „nabla” ∇ – ia forma:

$$(U7) \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla [(V_1 - V_2) (\overline{D}_1 - \overline{D}_2)] dv = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla V_1 - \nabla V_2) (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) dv + \int_{\Omega_\varepsilon} (V_1 - V_2) (\nabla \overline{D}_1 - \nabla \overline{D}_2) dv$$

și deoarece: $\nabla V = \text{grad } V = -\overline{E}$, $\nabla \cdot \overline{D} = \text{div } \overline{D} = q_v$ și $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$ (dacă $\overline{P}_p = 0$ și $\varepsilon = \text{const.}$, cum s-a considerat în enunțul teoremei), relația (U7) se mai poate scrie în continuare:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla [(V_1 - V_2) (\overline{D}_1 - \overline{D}_2)] dv &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\overline{E}_1 - \overline{E}_2) (\varepsilon \overline{E}_1 - \varepsilon \overline{E}_2) dv + \int_{\Omega_\varepsilon} (V_1 - V_2) (q_{v1} - q_{v2}) dv = \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon (\overline{E}_1 - \overline{E}_2)^2 dv - \int_{\Omega_\varepsilon} (V_1 - V_2) (q_{v1} - q_{v2}) dv,
\end{aligned} \tag{U8}$$

în care ultimul termen este nul în temeiul condiției de unicitate iu) și ținându-se seama de egalitatea (U6) rezultă:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon (\overline{E}_1 - \overline{E}_2)^2 dv = 0. \tag{U9}$$

Deoarece $\varepsilon \neq 0$ și dv este oarecare, rezultă că:

$$(\overline{E}_1 - \overline{E}_2)^2 = 0 \quad \therefore \quad \overline{E}_1 - \overline{E}_2 = 0 \quad \therefore \quad \overline{E}_1 = \overline{E}_2 \quad \therefore \quad \overline{D}_1 = \overline{D}_2 \quad \text{și} \quad \text{grad } V_1 = \text{grad } V_2 \Rightarrow V_1 = V_2,$$

ceea ce înseamnă că presupusele soluții diferite V_1 , \overline{D}_1 și V_2 , \overline{D}_2 nu sunt posibile, existând o singură soluție $V_1 = V_2 = V$ și $\overline{D}_1 = \overline{D}_2 = \overline{D}$, astfel că teorema unicității determinării câmpului electrostatic a fost demonstrată.

2.2.5. Teorema superpoziției câmpurilor electrostatice

Această teoremă poate fi enunțată astfel:

„în orice mediu liniar ($\varepsilon = \text{const.}$), unor condiții de unicitate CU , date ca reuniune a mai multor grupuri de condiții de unicitate CU_1, CU_2, \dots, CU_n – adică $CU = CU_1 + CU_2 + \dots + CU_n$, le corespunde un câmp electrostatic ES egal cu suma câmpurilor electrostatice ES_1, ES_2, \dots, ES_n , determinate de fiecare grup de condiții de unicitate care ar fi acționat separat în același mediu”.

Această teoremă este o consecință a faptului că în câmp electrostatic, cu mediu liniar ($\epsilon = \text{const.}$), toate ecuațiile care descriu sistemul electrostatic sunt liniare (cu coeficienți constanți) și –ca urmare– admit superpoziția, cu proprietățile ei de asociativitate și distributivitate.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se va considera un sistem electrostatic (de exemplu, cel din figura 2.5) și un grup de condiții de unicitate i) ... iu) – v. § 2.2.4.:

$$(S1) \quad \left\{ (V_k)_{\Sigma}, q_{cpk}, V_{ck}, q_{vk} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

format din: potențialul pe $\Sigma = \text{Fr } \Omega$, sarcina corpurilor punctiforme, potențialul corpurilor conductoare și –respectiv– densitatea de volum a sarcinii electrice pentru domeniile $\Omega_v \subset \Omega$ care au electrizarea repartizată în interiorul domeniului.

Conform teoremei unicității determinării câmpului electrostatic, fiecare mulțime de condiții (S1) va determina –acționând „singură” în același domeniu Ω dat– un câmp electrostatic caracterizat de mulțimea mărimilor de stare:

$$(S2) \quad \left\{ V(P), \bar{E}(P), \bar{D}(P) \right\}_k \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega_{\epsilon},$$

domeniul Ω_{ϵ} fiind cel definit în paragraful precedent (v. § 2.2.4).

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \left\{ (V_1)_{\Sigma}, q_{cp1}, V_{c1}, q_{v1} \right\} &\rightarrow \left\{ V_1(P), \bar{E}_1(P), \bar{D}_1(P) \right\}, \\ \left\{ (V_2)_{\Sigma}, q_{cp2}, V_{c2}, q_{v2} \right\} &\rightarrow \left\{ V_2(P), \bar{E}_2(P), \dots, \bar{D}_2(P) \right\}, \\ &\vdots \\ \left\{ (V_n)_{\Sigma}, q_{cpn}, V_{cn}, q_{vn} \right\} &\rightarrow \left\{ V_n(P), \bar{E}_n(P), \bar{D}_n(P) \right\}, \end{aligned}$$

toate în același punct $P \in \Omega_{\epsilon}$.

O reuniune a mulțimilor de condiții va determina, în același punct P din Ω_{ϵ} , un câmp electrostatic ale cărui mărimi de stare va fi suma valorilor din mulțimea (S2):

$$\begin{aligned} \left\{ (V)_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n (V_k)_{\Sigma}, q_{cp} = \sum_{k=1}^n q_{cpk}, V_c = \sum_{k=1}^n V_{ck}, q_v = \sum_{k=1}^n q_{vk} \right\} &\rightarrow \\ \rightarrow \left\{ V(P) = \sum_{k=1}^n V_k(P), \bar{E}(P) = \sum_{k=1}^n \bar{E}_k(P), \bar{D}(P) = \sum_{k=1}^n \bar{D}_k(P) \right\}, \end{aligned}$$

ceea ce se demonstrează, în acest caz particular, conform demonstrației generale referitoare la superpoziția câmpurilor electromagnetice (v. § 1.5.2), știind că operatorii ∇ („nabla”) și \oint_{Σ}

(integrală de suprafață închisă), care intervin în modelele electrostatice sunt operatori liniari (deci asociativi), iar coeficientul ϵ este un coeficient constant în raport cu intensitatea \bar{E} a câmpului electrostatic.

2.3. Câmpul electrostatic în conductori

Din condițiile 1⁰...4⁰ (v. subcap. 2.1), ce definesc în general regimul electrostatic, rezultă că pentru mediile conductoare (caracterizate de mărimea de material “conductivitatea electrică” γ cu valori relativ mari, specifice conductorilor, $\gamma > 10^6 \text{ S/m}$) se poate scrie:

– densitatea de volum a puterii disipate p [W/m^3] este nulă conform condiției 3⁰:

$$p = \bar{J} \cdot \bar{E} = 0,$$

deoarece densitatea curentului electric de conducție \bar{J} este nulă (v. § 2.1.1., condiția suplimentară 5⁰). Conform legii conducției electrice, scrisă sub formă locală (1.95), adică $\bar{J} = \gamma \bar{E}$ și a structurii

generale a intensității câmpului electric (1.28 E), adică $\bar{E} = \bar{E}_c + \bar{E}_i + \bar{E}_s$ (în cazul regimului electrostatic câmpul electric solenoidal având intensitatea $\bar{E}_s = 0$), reiese:

$$\bar{J} = \gamma(\bar{E}_c + \bar{E}_i).$$

Dar, în condițiile în care $\bar{J} = 0$ și $\gamma \neq 0$, rezultă că, în regim electrostatic, în conductori intensitatea câmpului electric este nulă, adică:

$$\bar{E}_c + \bar{E}_i = 0, \Leftrightarrow \forall P \in \Omega_c, \quad (2.34)$$

unde Ω_c este domeniul ocupat de mediul conductor.

2.3.1. Condițiile de echilibru electrostatic

Se constată experimental că la atingerea stării de echilibru electrostatic, când $\bar{J}(P) = 0$, în $\forall P \in \Omega_c$, intensitatea câmpului electric se anulează în interiorul conductorilor omogeni sau fără accelerație și ia anumite valori – independente de câmpul electric exterior în care este plasat conductorul – dar determinate numai de starea fizico-chimică locală și de natura materialului, în conductoarele neomogene sau accelerate.

Valoarea pe care o ia intensitatea câmpului electric într-un punct P din interiorul unui conductor Ω_c la atingerea stării de echilibru electrostatic – când $\bar{J}(P) = 0$ constituie prin urmare o proprietate a materialului conductor în funcție și de condițiile fizico-chimice neelectrice locale: concentrație, temperatură, deformații (tensiuni mecanice), iradiere etc. Așa cum s-a mai arătat (v. § 1.2.3 și § 2.1.1), această proprietate se caracterizează cu ajutorul unei mărimi vectoriale de material numită intensitatea câmpului electric imprimat și notată cu \bar{E}_i , definită macroscopic prin relația (2.11), adică de valoarea cu semn schimbat a intensității câmpului electric care se stabilește în conductori la atingerea stării de echilibru electrostatic (câmp care se numește și câmp coulombian):

$$\bar{E}_i = -\bar{E}_{\substack{\text{echilibrului} \\ \text{electrostatic}}} = -\bar{E}_c \Big|_{\bar{J}=0}. \quad (2.34')$$

În concluzia celor arătate până acum, în conductorii omogeni și fără accelerație $\bar{E}_i = 0$, iar în conductorii neomogeni și cu accelerație $\bar{E}_i \neq 0$, valoarea sa fiind determinată de natura materialului, de neomogenitatea lui fizico-chimică și de neuniformitățile de accelerație locală, temperatură etc.

Aici, pentru a permite o înțelegere mai deplină a noțiunii de *câmp imprimat*, ne vom abate puțin de la teoria microscopică clasică pentru a prezenta un punct de vedere microscopic: în conductori există particule libere încărcate cu sarcină electrică (electronii în metale și ionii în electroliți), notată cu q_m (sarcina electrică a particulelor *microscopice*), asupra cărora se exercită o forță :

$$\bar{F}_a = q_m \bar{E}$$

electrică, atunci când conductorul se află într-un câmp macroscopic \bar{E} . În același timp, asupra particulelor se mai poate exercita și o forță de natură neelectrică (din punctul de vedere microscopic), \bar{F}_{neel} , datorită neomogenităților locale (acesta fiind, de exemplu, cazul necompensării ciocnirilor dintre particula considerată și celelalte particule) sau accelerării corpului (forțe de inerție, masice). Condiția microscopică de echilibru electrostatic (adică atunci când $\bar{J} = 0$) se explică macroscopic prin condiția statică de lipsă a unei mișcări ordonate a particulelor, adică de anulare a valorii medii (însemnată cu \sim) a forței rezultate exercitate asupra unei particule:

$$\bar{F}_{-a} + \bar{F}_{-neel} = 0 \text{ sau } q_m \bar{E}_c + \bar{F}_{-neel} = 0 \quad (2.35)$$

și împărțind cu q_m :

$$\bar{E}_c + \bar{E}_{-neel} \Big|_{q_m} = 0 \rightarrow \bar{E}_c + \bar{E}_i = 0, \text{ în care } \bar{E}_i \stackrel{D}{=} \frac{\bar{F}_{-neel}}{q_m}. \quad (2.35')$$

Ultima egalitate definește microscopic intensitatea câmpului electric imprimat, ca fiind forța neelectrică medie ce se exercită asupra unei particule libere cu sarcină electrică dintr-un conductor raportată la sarcina electrică q_m a particulei. Prin urmare, \bar{E}_i este o mărime ce exprimă în termeni electrici acțiunile neelectrice exercitate asupra particulelor elementare. (Această interpretare microscopică a fost preluată din cartea *Timotiu, A., Hortogon, V., 1964*).

Menținând, încă, interpretarea microscopică a fenomenelor electrice, procesul de conducție se explică prin faptul că într-un conductor o parte din particulele elementare ce sunt libere, putând avea o mișcare de ansamblu ordonată relativă la restul conductorului, se deplasează –ca efect al forțelor $\overline{F}_{-el} = q_m \overline{E}$, dintr-un câmp electric în care se află conductorul– determinând starea electrocinetică a conductorului, caracterizată, global, de intensitatea curentului electric de conducție i și, local, de densitatea de curent \overline{J} . Starea electrostatică este starea în care se îndeplinește condiția de anulare a mișcării ordonate a particulelor și deci a forței rezultante medii exercitate asupra lor, adică se îndeplinește condiția (2.35), ceea ce înseamnă și:

$$(2.36) \quad \overline{E}_c + \overline{E}_i = 0,$$

care reprezintă *condiția generală de echilibru electrostatic*, aici justificate printr-o interpretare microscopică. Relația (2.34), care este identică cu (2.36), a fost stabilită pe baza teoriei macroscopice prin aplicarea legii condiției electrice, în forma locală (1.95), în condițiile specifice regimului electrostatic; în acest fel, condiția (2.36) este o formă particulară a legii conducției electrice.

În cazul conductorilor omogeni și fără neuniformități de accelerație, fizico-chimice etc., situație întâlnită în numeroase aplicații tehnice, caz în care nu există câmp imprimat, deci $\overline{E}_i = 0$, condiția (2.36) devine :

$$(2.36') \quad \overline{E}_c = 0,$$

care este *condiția de echilibru electrostatic în cazul particular al conductorilor uniformi*.

2.3.2 Determinarea câmpului electrostatic în conductori

După cum se știe (v. § 1.2.2), aspectul electric al câmpului electromagnetic și –în particular câmpul electrostatic– este caracterizat de următoarele mărimi de stare: \overline{E} (intensitatea câmpului electric, aici electrostatic), \overline{D} (inducția electrică), U (tensiunea electrică), V (potențialul electric, aici electrostatic) și Ψ (fluxul electric).

Dintre acestea, pentru un corp conductor (în conductor) prezintă interes imediat: intensitatea câmpului electrostatic și potențialul electrostatic, care în regim electrostatic și ca urmare a condițiilor de echilibru electrostatic (2.36) au câteva particularități ce vor fi evidențiate în continuare.

Potențialul electrostatic al conductorilor

Deoarece, conform condițiilor (2.36'), în orice punct dintr-un conductor omogen în regim electrostatic $\overline{E} = \overline{E}_c = 0$, rezultă:

$$(V1) \quad \int_{r:A \rightarrow B} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \quad \Leftarrow \overline{E} = 0, \quad \Leftarrow \forall \Gamma \in \overline{\Omega}_c = \Omega_c \cup \Sigma_c,$$

unde $\Sigma_c = \text{Fr } \Omega_c$ este suprafața conductorului dincolo de care este un dielectric (deci un material neconductor electric, adică un “izolant”).

Însă, conform definiției sale, tensiunea electrică dintre punctele A și B ale unui $\overline{\Omega}_c$, adică U_{AB} este determinată de :

$$(V2) \quad U_{AB} = \int_{r:A \rightarrow B} \overline{E} \cdot d\overline{l} = V_A - V_B \quad \Leftarrow \forall \{A, B\} \in \overline{\Omega}_c,$$

unde V_A și V_B sunt potențialele scalare din cele două puncte.

Comparând relațiile (V1) și (V2) rezultă :

$$U_{AB} = 0 \quad \text{și} \quad V_A = V_B, \quad (2.36')$$

care, deoarece A și B sunt două puncte oarecare (oricare) din interiorul lui Ω_c sau de pe suprafața ce-l limitează Σ_c conduc la concluziile:

- în regim electrostatic, orice conductor omogen are același potențial electrostatic în toate punctele sale;

- volumul unui conductor omogen Ω_c în regim electrostatic este un volum echipotențial (electrostatic);

- suprafața unui conductor omogen Σ_c în regim electrostatic este o suprafață echipotențială (electrostatic);

- câmpul electrostatic produs de un conductor omogen electrizat în punctele de pe suprafața sa (mai precis din punctele din mediul dielectric ce înconjură suprafața Σ_c , înfinitesimal vecine) sunt perpendiculare pe suprafața conductorului aflat în regim electrostatic. Acest lucru se demonstrează prin faptul că, local (deci în fiecare punct al suprafeței conductorului Σ_c) există relația:

$$\vec{E}(P) = -\text{grad } V(P) \quad \leftarrow \forall P \in \Sigma_c,$$

ori –prin definiție– gradientul unui scalar este normal pe suprafața echiscalară a cărei îi aparține punctul (v. § 9.1.2), prin urmare $\vec{E}(P) = \vec{E}(P) \cdot \vec{n}$, unde \vec{n} este normala la Σ_c (v. fig. 2.6 în care $\vec{E}(P) \equiv \vec{E}_2$);

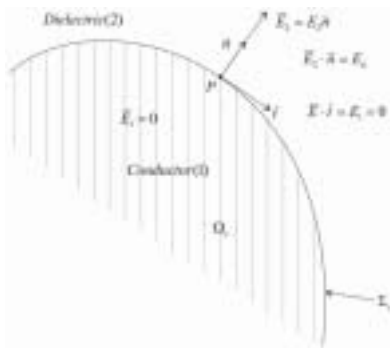


Fig. 2.6

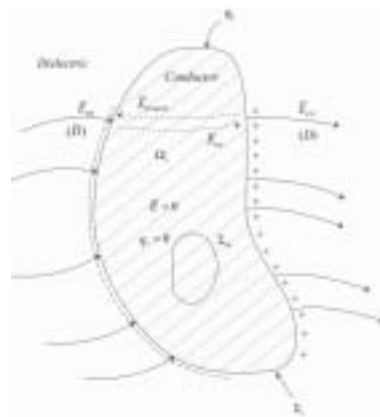


Fig. 2.7

- în același mod se explică și faptul că liniile de câmp ale unui câmp electric exterior, în care a fost plasat un corp conductor în regim electrostatic sunt perpendiculare pe suprafața conductorului (fig. 2.7)

Repartiția sarcinii electrice în cazul conductorilor aflat în regim electrostatic

În regim electrostatic, sarcina electrică q cu care se poate încărca un conductor omogen izolat se repartizează numai pe suprafața Σ_c care delimitează conductorul, cu o densitate de suprafață $q_\Sigma = dq/dA|_p$ în $\forall P \in \Sigma_c$, în interiorul conductorului –în Ω_c (v. fig. 2.7)– sarcina fiind nulă, adică în $\forall P \in \Omega_c$ densitatea de volum a sarcinii electrice este nulă ($q_v = 0$).

Acest fapt se demonstrează prin aceea că fluxul vectorului \vec{E} prin orice suprafață închisă din interiorul conductorului, $\Sigma_{in} \subset \Omega_c$ (v. fig. 2.7), este nul, deoarece în $\forall P \in \Omega_c \Rightarrow \vec{E} = 0$:

$$\oint_{\Sigma_{in} \subset \Omega_c} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \leftarrow \vec{E} = 0 \text{ în } \Omega_c \text{ sau } \text{div} \vec{E} = 0 \leftarrow \vec{E} = 0 \text{ în } \forall P \in \Omega_c.$$

Ca urmare, teorema lui Gauss –în formulele (2.17) și (2.17')– devine:

$$\oint_{\Sigma_{in} \subset \Omega_c} \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{v_{\Sigma_{in}}} / \epsilon = 0 \Rightarrow q_{v_{\Sigma_{in}}} = 0, \text{ deci } q_v = 0 \text{ peste tot în } \Omega_c,$$

$$\text{div} \vec{E} = q_v / \epsilon = 0 \Rightarrow q_v = 0 \text{ în } \forall P \in \Omega_c.$$

Conform definiției (1.5), densitatea de suprafață a sarcinii electrice de pe suprafața unui conductor omogen, încărcat cu sarcina electrică globală q , se poate determina cu relația:

$$(2.37) \quad q_{\Sigma} = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{r^2 d\Omega} \Big|_P \quad \Leftarrow \forall P \in \Sigma_c,$$

în care $d\Omega$ este unghiul solid elementar și r distanța de la un punct de referință P_0 din interiorul conductorului ($P_0 \in \Omega_c$) la punctul P (oricare) considerat pe suprafața Σ_c a conductorului. Rezultă că, în general, repartiția sarcinii globale q pe suprafața unui conductor omogen se face invers proporțional cu pătratul razei de curbură a suprafeței. Astfel, în cazul unui conductor cu o suprafață ce are o curbură neuniformă, cu $r = f(P)$, densitatea de suprafață a sarcinii electrice este cea mai mare la “vârfuri”, adică în punctele de pe suprafață cu raza de curbură cea mai mică (așa numitul *efect de vârf*).

În cazul unei sfere metalice omogene, cu rază R , densitatea de suprafață a sarcinii electrice este constantă:

$$q_{\Sigma_{sfera}}(P) = \text{const.} = \frac{q}{4\pi R^2} \quad \Leftarrow \forall P \in \Sigma_c,$$

iar în cazul unui elipsoid metalic omogen, cu semiaxele de revoluție a și b , densitatea de suprafață a sarcinii electrice în vârful A al elipsoidului, $q_{\Sigma}(A)$, este mai mare decât în punctele B de pe ecuatorul elipsoidului de revoluție, $q_{\Sigma}(B)$, relația dintre ele fiind:

$$q_{\Sigma}(A)/q_{\Sigma}(B) = a/b.$$

Dacă elipsoidul se lungeste foarte mult, adică $a \gg b$, $q_{\Sigma}(A)$ devine foarte mare, intensitatea câmpului electric produs pe suprafața conductorului electric crește (așa cum se va arăta în continuare), ceea ce provoacă ionizarea aerului (dacă elipsoidul metalic –vârful metalic– este în aer), însoțită de descărcări electrice (v. Fizica). Acest fenomen are numeroase aplicații tehnice (la protecția suporturilor izolanti, la paratonere/paratrăsnete, eclatoare, așa-zisele descărcătoare electrice ș.m.a).

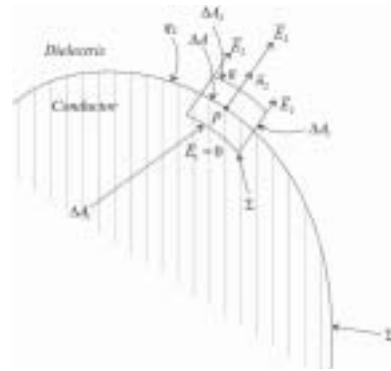


Fig. 2.8

Intensitatea câmpului electrostatic pe suprafața conductorilor

După cum s-a mai arătat (v. fig. 2.6), câmpul electrostatic al unui conductor omogen electricizat și aflat singur într-un dielectric (cu $\epsilon = \text{const.}$), are intensitatea nulă în interiorul conductorului ($\vec{E}_1 = 0$ în figura 2.6) și este normală pe suprafața Σ_c a conductorului ($\vec{E}_2 = E_2 \vec{n}$ sau $\vec{E}_2 \cdot \vec{n} = E_n$ în figura 2.6).

Rămâne ca –în continuare– să determinăm valoarea E_n (a normalei intensității câmpului electrostatic produs de un conductor omogen în puncte de pe suprafața lui, aflate –la limită– și în dielectricul din jurul conductorului).

Pentru aceasta, considerăm situația generală din figura 2.8, în care s-a ales un punct oarecare P pe suprafața conductorului și s-a “înconjurat” cu o suprafață cilindrică Σ formată dintr-o față ΔA_1 , situată în conductor, o altă față ΔA_2 situată în dielectric, imediat vecină suprafeței ΔA “decupată” de Σ pe Σ_c la “trecerea” ei din conductor în dielectric (astfel că $\Delta A_1 = \Delta A_2 = \Delta A$) și cu o suprafață laterală ΔA_l perpendiculară pe Σ_c . Atunci: $\Sigma = \Delta A_1 \cup \Delta A_2 \cup \Delta A_l \equiv \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_l$.

Această suprafață Σ “închide”, în interiorul ei, sarcina electrică $\Delta q = \Delta A q_{\Sigma}$, în care q_{Σ} este densitatea de suprafață a sarcinii electrice a conductorului, presupusă constantă (dacă nu este așa, se micșorează ΔA până ce $q_{\Sigma} = \text{const.}$ pe ΔA).

În aceste condiții din figura 2.8, teorema lui Gauss (2.17) conduce la:

$$\int_{\Sigma=\Delta A_1+\Delta A_2+\Delta A_3} \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q_{\Sigma} \Delta A}{\epsilon}, \quad (\text{TG1})$$

sau:

$$\int_{\Delta A_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dA} + \int_{\Delta A_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{dA} + \int_{\Delta A_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{dA} = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Delta A} q_{\Sigma} \vec{dA}. \quad (\text{TG2})$$

Deoarece :

$$\int_{\Delta A_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dA} = 0 \text{ pentru c\aa } \vec{E}_1=0 \text{ \textit{in} } \forall P \in \Delta A_1,$$

$$\int_{\Delta A_3} \vec{E}_3 \cdot \vec{dA} = \int_{\Delta A_3} E_3 dA \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ pentru c\aa } \cos(\pi/2)=0$$

\u015fi:

$$\int_{\Delta A_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{dA} = \int_{\Delta A_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n} dA = \int_{\Delta A_2} E_n dA \text{ pentru c\aa } \vec{E}_2 \cdot \vec{n} = E_n,$$

atunci rela\u021bia (TG2) devine:

$$\int_{\Delta A_2} E_n dA = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Delta A} q_{\Sigma} dA$$

\u015fi pentru c\aa $\Delta A \equiv \Delta A_2$ \u015fi dA este un element de arie oarecare, rezult\aa \textit{in} final:

$$E_n = \frac{1}{\epsilon} q_{\Sigma} \text{ sau } \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon} q_{\Sigma} \vec{n}, \quad (2.38)$$

precum \u015fi:

$$D_n = q_{\Sigma} \text{ sau } \vec{D}_2 = q_{\Sigma} \vec{n}, \quad (2.38')$$

adic\aa intensitatea c\amp;mpului electrostatic pe suprafa\u021a\aa unui conductor omogen \textit{in} regim electrostatic, precum \u015fi induc\u021bia electric\aa pe aceea\u021bi suprafa\u021a\aa, este normal\aa pe conductor (nu are component\aa tangen\u021bial\aa), are valoarea absolut\aa egal\aa cu $\frac{1}{\epsilon} q_{\Sigma}$ \u015fi –respectiv– q_{Σ} , sensul vectorilor \vec{E}_2 \u015fi \vec{D}_2 fiind spre exterior dac\aa $q_{\Sigma} > 0$ (pozitiv\aa) sau spre conductor dac\aa $q_{\Sigma} < 0$ (negativ\aa).

2.3.3. Influen\u021ba electrostatic\aa

Se nume\u021bte influen\u021ba electrostatic\aa (sau-mai bine-\textit{in}c\aarcarea electrostatic\aa prin influen\u021ba) fenomenul de electrizare local\aa superficial\aa, cu sarcini electrice de semne contrare, a diferitelor por\u021biuni ale unui conductor ini\u021bial neutru (neelectrizat) sub ac\u021biunea unui c\amp;mp electrostatic exterior \vec{E}_{ext} (v.fig. 2.7).

\textit{In}c\aarcarea electrostatic\aa prin influen\u021ba se face astfel \textit{inc\aa}t intensitatea c\amp;mpului electrostatic propriu ($\vec{E}_{propriu}$, normal\aa pe Σ_c) al reparti\u021biei de sarcin\aa electric\aa astfel ob\u021binut\aa s\aa compenseze complet intensitatea c\amp;mpului electric exterior, \textit{in} interiorul conductorului, atfel \textit{inc\aa}t regimul s\aa fie electrostatic ($\vec{E}_{interior} = \vec{E} = 0$), conform condi\u021biei de echilibru electrostatic (v.\u015f 2.3.1), rezult\aa $\vec{E}_{interior} = \vec{E}_{exterior} + \vec{E}_{propriu} = 0$.

Microscopic fenomenul se explic\aa prin faptul c\aa –sub ac\u021biunea c\amp;mpului exterior, cu intensitatea \vec{E}_{ext} – electronii liberi din interiorul corpului metalic (conductor) cu sarcin\aa electric\aa negativ\aa ($-q_e$), supu\u021bi fiecare unei for\u021be $\vec{F}_e = -q_e \vec{E}_{ext}$ (de sens contrar c\amp;mpului exterior) se deplaseaz\aa p\aa n\aa la limita Σ_c a conductorului. Dac\aa \vec{E}_{ext} este foarte mare, unii dintre electroni pot p\aa r\aa si conductorul, produc\aa ndu-se fenomene de ionizare, desc\aa rc\aa ri electrice, str\aa pungerea dielectricului ect. (care \textit{in} s\aa “ies” din domeniul electrostatic). \textit{In} acest fel, pe fa\u021a\aa Σ_c de la

“intrarea” câmpului exterior se crează o densitate electrică de suprafață negativă iar pe fața Σ_c de la ieșirea câmpului electric exterior, prin lipsa electronilor deplasați în câmp, se formează o densitate electrică de suprafață pozitivă, astfel încât –globul (pe întreaga suprafață Σ_c)– sarcina electrică $\int_{\Sigma_c} q_\Sigma dA = 0$, corpul conductor rămânând neutru.

Prin crearea acestei repartiții superficiale de sarcini electrice, în interiorul conductorului se produce un câmp electric columbian propriu $\vec{E}_{propriu}$ cu sens de la fața Σ_c cu sarcini pozitive spre fața opusă din Σ_c cu sarcină electrică negativă, deci opus intensității câmpului electric exterior \vec{E}_{ext} (v. fig.2.7). Deplasarea electronilor continuă atât timp cât diferența $\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{propriu} > 0$ și sfârșește când se realizează echilibrul electrostatic $\vec{E}_{propriu} = -\vec{E}_{ext}$, conductorul ajungând în regim electrostatic. Practic acest proces tranzistoriu de separare a sarcinilor electrice de semn contrar prin influența electrostatică, durează foarte puțin (la conductoarele metalice mai puțin decât 10^{-12} s).

Despre corpul conductor electrizat superficial, prin introducerea într-un câmp electric exterior, se spune că este *electrizat prin influență*. Dacă, în această situație fiind, corpul este secționat în două părți izolate una de altă, cele două părți rămân electrizate global și după suprimarea câmpului electric exterior, dacă fiecare dintre cele două părți avea exces de sarcină electrică de un anumit semn în urma electrizării prin influență.

Cele mai spectaculoase electrizări prin influență se produc în natură, în cadrul manifestărilor electrice atmosferice (când norii-mai ales cei de furtună- se electrizează diferit, între ei și față de suprafața pământului ajungându-se în anumite situații la descărcările electrice atmosferice, prin fulgere, trăsnete etc.).

2.3.4. Efectul de ecran electric

Acest efect constă în faptul că liniile de câmp electric din exteriorul unui conductor nu „pătrund” în interiorul unei cavități (un „gol de conductor”) existentă în interiorul conductorului (fig.2.9). Se spune că materialul conductor din jurul cavității (Ω_c) constituie un ecran electrostatic pentru toate puncte P din interiorul golului ($\forall P \in \Omega_g \Rightarrow \vec{E}(P) = 0$).

Efectul de ecran electrostatic se poate demonstra astfel:

- presupunem, mai întâi, că în interiorul cavității (golului Ω_g) nu există alte corpuri cu sarcini electrice. Deci $q_v(P) = 0$ în $\forall P \in \Omega_g$;

- apoi presupunem că totuși în interiorul golului ar exista câmp electric, însă liniile lui de câmp nu pot fi linii închise, atât în virtutea legii fluxului electric dar și al expresiei (2.22’).

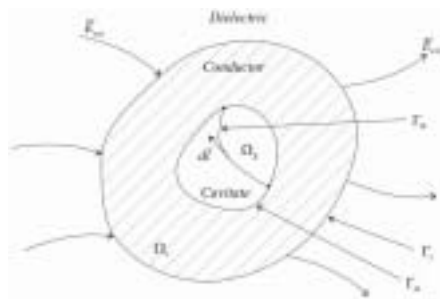


Fig. 2.9

Atunci liniile de câmp nu pot fi decât situate între două punte aflate pe fața interioară a suprafeței Σ_{in} ce delimitează golul (de exemplu, în figura 2.9, punctele $A, B \in \Sigma_{in}$);

- dacă se consideră o curbă Γ_{in} între două astfel de puncte (v.fig.2.9), atunci tensiunea electrică în lungul acestei curbe ar trebui să fie: $U_{AB} = \int_{\Gamma_{in}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \geq 0$;

-însă, conform concluziei (2.36’), într-un conductor omogen în regim electrostatic, $V_A = V_B$ și

deci $U_{AB} = 0$ pentru $\forall \{A, B\} \in \Sigma_{in}$ deoarece Σ_{in} este o suprafață echipotențială.

În consecință în regim, electrostatic, $\vec{E} = 0$ în orice punct din interiorul conductorului Ω_c , deci și în cele din cavitate, din Ω_g .

Dacă în cavitate ar exista sarcini electrice care ar putea produce -evident- un câmp electric în cavitate, atunci câmpurile electrice din domeniul exterior și interior ar fi independente unul de altul, în sensul că orice modificare a configurației sarcinilor dintr-un domeniu nu ar afecta câmpul electrostatic din celălalt domeniu, acesta fiind efectul de ecran. Ecranarea este eficace și atunci când conductorul –dintre “gol” și “exterior” (deci ecranul)– nu este compact (are perforații sau este în formă de plasă, tresă- împletitură metalică), cu condiția ca ecranul să fie legat la pământ. Acesta este cazul din practică (tehnică) al firelor de gardă (dedeasupra liniilor de transport a energiei electrice, pentru protejarea liniei împotriva câmpurilor electrice atmosferice) sau a instalației de gardă din platbandele metalice de pe zidurile laterale ale clădirilor etc., care –toate sunt conectate la o priză specială de legare la pământ (v.sub.cap.4.6, aplicația „Prize pământ”).

2.4. Câmpul electrostatic în dielectrics

În cadrul acestui subcapitol vor fi prezentate câteva din aspectele specifice câmpului electrostatic din medii dielectrice, considerându-se aici numai cazul *dielectricilor liniari* (cu $\epsilon = \text{const.}$), *omogeni, izotropi și fără polarizație electrică permanentă* (o situație, de altfel, frecventă în aplicațiile din tehnică). Regimul fiind electrostatic, deci cu $\vec{E}(t) = \text{const.}$ nu va prezenta interes în această situație nici polarizația electrică temporară.

Starea de polarizare electrică, specifică dielectricilor, va fi analizată în următorul capitol (v.cap.3).

2.4.1. Determinarea câmpului electrostatic în dielectrics

Mărimile de stare specifice câmpului electrostatic sunt: vectorii \vec{E} (intensitatea câmpului electric, care este un câmp coulombian), \vec{D} (inducția electrică), U (tensiunea electrică), V (potențialul electrostatic) și ψ (fluxul electric).

În condițiile de mediu precizate la începutul subcapitolului, câmpul electrostatic din dielectricii liniari, uniformi și cu $\vec{P}_p = 0$, va fi complet determinat dacă se va stabili numai una din mărimile de stare specificate, de exemplu vectorul $\vec{E}(P)$ sau scalarul $V(P)$ în orice punct al domeniului de existență al câmpului electrostatic, între care există relația $\vec{E} = -\text{grad}V$. Celelalte mărimi de stare, dacă sunt necesare într-o aplicație practică a electrostaticii, se pot determina cu relațiile cunoscute: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $U_{AB} = V_A - V_B$ și $\psi = \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A}$.

Pentru a indica felul în care se calculează mărimile \vec{E} și V , se va considera un câmp electrostatic existent într-un domeniu Ω , eventual extins la infinit (caz ideal, în care mediul dielectric ar trebui să fie același până la infinit, câmp produs –conform teoremei de unicitate (din § 2.2.4)– de n corpuri punctiforme cu sarcinile electrice q_k ($k=1,2,\dots,n$), de corpuri Ω_v electrizate cu sarcini electrice având densitatea de volum q_v (pe Ω_v) și de corpuri Ω_c , cu $\Sigma_c = \text{Fr}\Omega_c$, electrizate superficial cu densitatea de suprafață q_s (pe Σ_c). Mediul dintre aceste corpuri, lipsit de polarizație permanentă, are aceeași permitivitate absolută peste tot în Ω ($\epsilon(P) = \text{const.}$, în $\forall P \in \Omega_e$ unde $\Omega_e = \{\Omega - P_1 - P_2 - \dots - P_n - \Omega_v - \overline{\Omega_c}\}$).

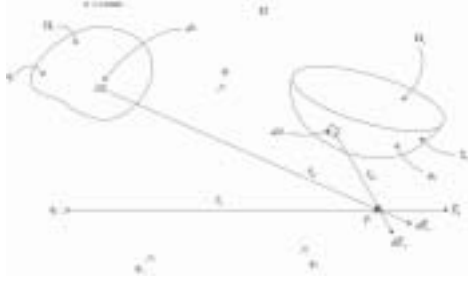


Fig. 2.10

Se pune problema determinării câmpului electrostatic într-un punct P , oricare din domeniul Ω_e , care este indicat schematic în figura 2.10.

Calculul intensității câmpului electrostatic în dielectrics

În acest scop vom utiliza teorema lui Coulomb sub forma (2.19), valabilă –însă – numai pentru corpurile electrizate punctiforme, deci numai pentru cele n corpuri cu sarcinile q_1, q_2, \dots, q_n .

Pentru corpurile „mari”, ca să se poată aplica relația (2.19), se va proceda –în virtutea teoremei superpoziției (din § 2.2.5) – la „divizarea” sau „mărunțirea” lor în elemente de volum (pentru corpurile Ω_v) care vor fi încărcate cu sarcina electrică $dq = q_v dv$ sau în elemente de arie (pentru corpurile Ω_c) care vor fi încărcate cu sarcina electrică $dq = q_\Sigma dA$. În acest fel, toate aceste elemente pot fi considerate punctiforme în raport cu punctul P în care se face calculul intensității câmpului electric $\vec{E}(P)$, astfel că –prin aplicarea teoremei superpoziției câmpurilor electrostatice (posibilă aici deoarece am considerat mediul dielectric ca fiind liniar)– vectorul $\vec{E}(P)$ va fi suma vectorială a vectorilor $\vec{E}_1(P), \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ produse în P de corpurile electrizate punctiforme și a vectorilor elementari $d\vec{E}(P)$ produse în punctul P de „corpurile” elementare (deci punctiforme) cu sarcinile electrice elementare dq , toți acești vectori putând fi calculați cu formula lui Coulomb (2.19). Astfel :

- pentru corpurile electrizate punctiforme :

$$(E1) \quad \vec{E}_k(P) = \vec{E}_k = \frac{q_k}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}_k}{r_k^3}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

- pentru fiecare element de volum dv , din corpurile Ω_v , cu densitatea de volum q_v a sarcinii electrice, care este încărcată cu sarcina electrică elementară $dq = q_v dv$:

$$(E2) \quad d\vec{E}_v(P) = d\vec{E}_v = \frac{q_v dv}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}_{dv}}{r_{dv}^3},$$

- pentru fiecare element de suprafață dA , de pe suprafața Σ_c (a corpului Ω_c electrizat numai superficial) cu densitatea de suprafață q_Σ a sarcinii electrice, care este încărcată cu sarcina electrică elementară $dq = q_\Sigma dA$:

$$(E3) \quad d\vec{E}_A(P) = d\vec{E}_A = \frac{q_\Sigma dA}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}_{dA}}{r_{dA}^3}.$$

Atunci, intensitatea câmpului electrostatic în orice punct P din domeniul Ω_e considerat (fig2.10) se determină cu ajutorul relațiilor (E1), (E2) și (E3) prin însumare vectorială extinsă la toate corpurile electrizate din Ω , conform teoremei superpoziției câmpurilor electrostatice (v. §2.2.5). Va rezulta în final:

$$\vec{E}(P) = \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^3} \vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n_v} \int_{\Omega_{vk}} \frac{q_{vk} dv}{r_{dv}^3} \cdot \vec{r}_{dv} + \sum_{k=1}^{n_c} \int_{\Sigma_{ck}} \frac{q_{\Sigma k} dA}{r_{dA}^3} \cdot \vec{r}_{dA} \right), \quad (2.39)$$

în care n_v este numărul corpurilor din Ω care au densitatea de volum a sarcinii electrice q_{vk} , $k=1,2, \dots, n_v$ (fiind posibil ca q_{vk} să fie o funcție de punct sau de $dv \in \Omega_{vk}$) și n_c este numărul corpurilor conductoare electrizate din Ω , care au densitatea de suprafață a sarcinii electrice $q_{\Sigma k}$, $k=1,2, \dots, n_c$ (fiind posibil ca în funcție de raza de curbură a suprafețelor $\Sigma_{ck} - q_{\Sigma k}$ să fie o funcție de punct sau de $dA \in \Sigma_{ck}$).

Calculul potențialului electrostatic în dielectrici

În cazul avut în vedere aici (redat schematic în figura 2.10) potențialul electric se poate determina pe două căi:

- în condițiile în care domeniul Ω (fig. 2.10) este extins teoretic la infinit, iar corpurile electrizate au un domeniu finit și determinat, caz în care punctul de referință P_0 , pentru valoarea de referință a potențialului electrostatic scalar, poate fi ales la infinit, astfel că $V_{P_0} = V_{P_\infty} = V_0 = 0$, se poate folosi pentru calculul potențialului electrostatic în $\forall P \in \Omega_\epsilon$ formula (2.20), valabilă pentru corpurile punctiforme, precum și pentru elementele de volum și de arie ce compun un corp finit, dacă sunt electrizate. Aplicându-se același procedeu ca și în subparagraful precedent, bazat pe teorema superpoziției câmpurilor electrostatice (în acest caz o însumare de valori scalare), se obține:

$$V(P) = V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} + \sum_{k=1}^{n_v} \int_{\Omega_{vk}} \frac{q_{vk} dv}{r_{dv}} + \sum_{k=1}^{n_c} \int_{\Sigma_{ck}} \frac{q_{\Sigma k} dA}{r_{dA}} \right) \text{ cu } V_0 = 0; \quad (2.40)$$

- în condițiile în care într-un domeniu oarecare Ω s-a putut calcula intensitatea câmpului electrostatic $\vec{E}(P)$ în $\forall P \in \Omega_\epsilon$, potențialul electrostatic $V(P)$ într-un punct P din Ω_ϵ , în raport cu potențialul unui punct P_0 luat ca referință ($V_{P_0} = V_0$), se determină cu ajutorul definiției (1.38):

$$V(P) = V_P = V_0 - \int_{\Gamma: P_0 \rightarrow P} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{sau} \quad \vec{E}(P) = -\text{grad}V|_P \leftarrow \forall P \in \Omega_\epsilon, \quad (2.40')$$

în care Γ este orice curbă deschisă din Ω_ϵ , având extremitățile în punctele P și P_0 .

Formulele (2.39) și (2.40) se pot utiliza numai dacă se cunoaște repartiția completă $q(P)$ în $\forall P \in \Omega$, a sarcinilor electrice în sistemul dat. După cum se va arăta în paragraful § 2.7.2, mărimile de stare ale câmpului electrostatic se pot calcula cu o relativă ușurință dacă se cunoaște exact geometria corpului electrizat și repartiția sarcinii electrice în punctele corpului, prin aplicarea produsului informatic –de tipul program utilizator– MATLAB (v. §9.3.1). În cazul unor corpuri cu geometrie regulată (sferă, disc etc.), calculul cu ajutorul expresiilor (2.39) și (2.40) se poate face și analitic – direct, fără a mai fi necesară utilizarea tehnicii de calcul automat.

În majoritatea aplicațiilor din tehnică se dă numai o parte din repartiția locală a sarcinii electrice $q(P) = q_v [C/m^3]$, la care se mai adaugă valorile potențialului electrostatic în anumite puncte sau/și pe anumite corpuri (considerate condiții la limită). În astfel de situații se folosesc, combinat, expresiile (2.39) și (2.40) la care se mai adaugă – conform cazului dat spre analiză – și:

- teorema lui Gauss (2.17'): $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} q_v$;

- ecuația lui Poisson (2.32): $\Delta V = -\frac{1}{\epsilon} q_v$, la care se atașează și condițiile la limită prin care

se formează probleme cu derivate parțiale de ordinul doi cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet, Neuman sau Fourier/mixtă (v. subparagraful "Ecuațiile lui Poisson și Laplace"), așa cum se arată în aplicațiile din paragraful 2.7.1 (unde problemele s-au rezolvat prin metoda numerică a diferențelor finite și aplicarea produsului MATLAB).

2.4.2. Câmpul electrostatic pe suprafețe de separație în dielectrics

În cazul în care în domeniul Ω există o suprafață de separație Σ_d , care împarte domeniul în două, cu medii dielectrice diferite (caracterizate de permitivitățile absolute $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$), însă liniare

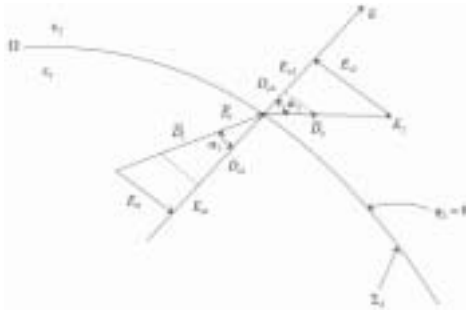


Fig. 2.11

($\varepsilon_1 = \text{const.}$ și $\varepsilon_2 = \text{const.}$), omogene, izotrope și ambele lipsite de polarizație electrică permanentă ($P_{p1} = P_{p2} = 0$) câmpul electrostatic din Ω se refractă în toate punctele $P \in \Sigma_d$ (fig. 2.11 – o secțiune prin sistemul de doi dielectrics în care s-a considerat că suprafața de separație Σ_d nu are sarcini electrice, adică $q_\Sigma [\text{C/m}^2] = 0$ în $\forall P \in \Sigma_d$), ceea ce este o consecință directă a ecuațiilor electrostaticii (2.12), adică $\text{div } \vec{D} = q_v$, și (2.14), adică $\text{rot } \vec{E}_c = 0$.

Teorema refracției liniilor de câmp electrostatic

Pentru acest caz (redat în figura 2.11) se poate enunța următoarea teoremă:

“în orice punct P al unei suprafețe de separație Σ_d , fără sarcină electrică ($q_\Sigma = 0$), dintre două medii dielectrice diferite, omogene, izotrope, liniare și fără polarizație electrică permanentă, liniile de câmp electrostatic se refractă față de normala locală \vec{n} la suprafața de separație, cu unghiurile $\alpha_1 \neq \alpha_2$ astfel că raportul tangentei trigonometrice ale acestor unghiuri este egal cu raportul permitivităților absolute ε_1 și ε_2 ”, adică:

$$(2.41) \quad \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

care poartă numele de *teorema refracției liniilor de câmp electrostatic*.

Această teoremă se poate demonstra arătându-se că în cazul suprafeței de separație Σ_d din fig. 2.11, la trecerea dintr-un mediu dielectric în altul:

- componentele tangențiale la Σ_d ale intensității câmpului electrostatic se conservă, adică:

$$E_{t1} = E_{t2};$$

- componentele normale la Σ_d ale vectorului inducției electrice se conservă, dacă în $\forall P \in \Sigma_d \Rightarrow q_\Sigma = 0$, adică $D_{n1} = D_{n2}$.

Conservarea componentelor tangențiale ale câmpului electrostatic

Se consideră figura 2.12 în care, în jurul unui punct P de pe Σ_d , oricare, se ia un contur închis Γ în forma unei elipse foarte mici, având axa Δl pe Σ_d și axa o normală pe Σ_d în P , care respectă condiția că $\Delta l \gg a$; cele două semielipse sunt situate una (Γ_1) în mediul dielectric cu ε_1 (lipită, la limită pe Σ_d) și cealaltă (Γ_2) în mediul ε_2 (lipită de limită, pe Σ_d), așa ca în fig. 2.12, unde este reprezentat sistemul de doi dielectrics diferiți în secțiune transversală pe Σ_d .

Pe acest mic contur, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, relația (2.14) devine:

$$\oint_{\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2} \overline{E} \cdot \overline{dl} = \int_{\Gamma_1} \overline{E}_1 \cdot \overline{dl}_1 + \int_{\Gamma_2} \overline{E}_2 \cdot \overline{dl}_2 = \int_{\Gamma_1} \overline{E}_1 \cdot \overline{t}_1 dl + \int_{\Gamma_2} \overline{E}_2 \cdot \overline{t}_2 dl = 0$$

și pentru că Γ (deci și Γ_1 și Γ_2) sunt oarecare, iar dl este un element oarecare de curbă, rezultă:

$$\overline{E}_1 \cdot \overline{t}_1 + \overline{E}_2 \cdot \overline{t}_2 = 0. \quad (T1)$$

Deoarece elementele de curbă orientate, $\overline{dl}_1 = \overline{t}_1 \cdot dl$ și $\overline{dl}_2 = \overline{t}_2 \cdot dl$, au același sens de referință de-a lungul lui Γ , rezultă:

$$\overline{t}_1 = -\overline{t}_2 = \overline{t},$$

astfel că relația (T1) devine:

$$\overline{E}_1 \overline{t} - \overline{E}_2 \overline{t} = 0 \text{ sau } \overline{E}_1 \overline{t} = \overline{E}_2 \overline{t}. \quad (T2)$$

Însă, $\overline{E}_1 \cdot \overline{t} = E_{t1}$ (deci componenta tangențială a câmpului electrostatic \overline{E}_1 la Γ_1 prin urmare și la Σ_d), iar $\overline{E}_2 \cdot \overline{t} = E_{t2}$ (deci componenta tangențială la Σ_d a vectorului \overline{E}_2). Cu aceasta egalitatea (T2) devine:

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad (2.42)$$

ceea ce exprimă că, în regim electrostatic, componentele tangențiale ale intensității câmpului electrostatic se conservă pe suprafețe neelectrizate dintre două medii dielectrice diferite, uniforme și liniare.

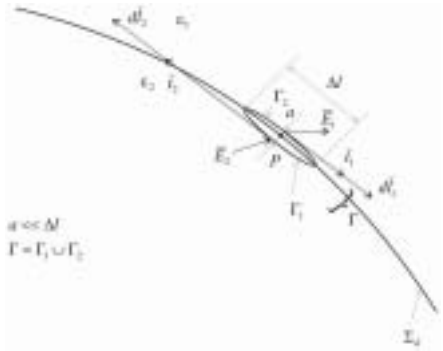


Fig. 2.12

Conservarea componentelor normale ale inducției electrice

Se consideră figura 2.13 (o secțiune prin cei doi dielectri, normală pe Σ_d) în care, în jurul unui punct P de pe Σ_d , oricare, se ia o suprafață închisă Σ în forma unui cilindru foarte mic, cu suprafața laterală ΔA_l perpendiculară pe Σ_d și cu cele două fețe frontale ΔA_1 și ΔA_2 paralele cu Σ_d , pe care Σ „deucează” o suprafață $\Delta A \subset \Sigma_d$, astfel că $\Delta A_1 = \Delta A_2 = \Delta A$, paralele și infinitezimal vecine (deoarece înălțimea dl a cilindrului Σ este elementar de mică, adică $dl \ll \sqrt{\Delta A}$), o suprafață ΔA_1 , fiind „lipită” pe Σ_d , însă situată în mediul dielectric ε_1 și cealaltă suprafață ΔA_2 fiind „lipită” pe Σ_d , însă situată în dielectricul ε_2 .

Aplicând legea fluxului electric (1.65') miciei suprafețe cilindrice închise Σ_d rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{dA} = q_{\Sigma} \rightarrow \oint_{\Sigma=\Delta A_1+\Delta A_2+\Delta A_l} \overline{D} \cdot \overline{dA} = \int_{\Delta A} q_{\Sigma} dA \quad (N1)$$

și deoarece $q_{\Sigma} = 0$ în $\forall P \in \Sigma_d$, atunci $\int_{\Delta A} q_{\Sigma} dA = 0$ și

expresia devine:

$$(N2) \quad \int_{\Delta A_1} \overline{D}_1 \cdot \overline{dA}_1 + \int_{\Delta A_2} \overline{D}_2 \cdot \overline{dA}_2 + \int_{\Delta A_l} \overline{D}_l \cdot \overline{dA}_l = 0$$

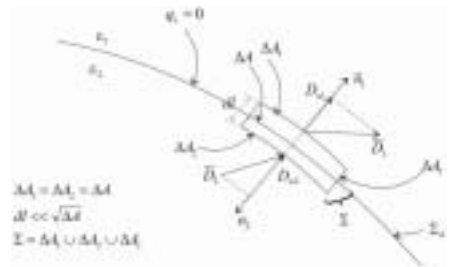


Fig. 2.13

Însă, la limită, când $\Delta A_1 \rightarrow (\Delta A \in \Sigma_d) \leftarrow \Delta A_2$, $\Delta A_1 \rightarrow 0$ și deci $\int_{\Delta A_1} \overline{D_1} \cdot \overline{dA_1} \rightarrow 0$, astfel că (N2) ia

forma:

$$(N3) \quad \int_{\Delta A_1} \overline{D_1} \cdot \overline{dA_1} + \int_{\Delta A_2} \overline{D_2} \cdot \overline{dA_2} = 0 \quad \text{sau} \quad \int_{\Delta A_1} \overline{D_1} \cdot \overline{n_1} dA + \int_{\Delta A_2} \overline{D_2} \cdot \overline{n_2} dA = 0$$

Deoarece $\Delta A_1 = \Delta A_2$ și dA este un element de arie oarecare, din (N3) rezultă:

$$(N4) \quad \overline{D_1} \cdot \overline{n_1} + \overline{D_2} \cdot \overline{n_2} = 0$$

și deoarece (v.fig. 2.13) elementele de arie fiind orientate spre exterior, peste tot pe Σ :

$$\overline{n_1} = -\overline{n_2} = \overline{n},$$

atunci (N4) devine:

$$\overline{D_1} \cdot \overline{n} - \overline{D_2} \cdot \overline{n} = 0 \quad \text{sau} \quad \overline{D_1} \cdot \overline{n} = \overline{D_2} \cdot \overline{n}$$

și pentru că $\overline{D_1} \cdot \overline{n} = D_{n1}$ și $\overline{D_2} \cdot \overline{n} = D_{n2}$ (deci componentele normale ale vectorilor $\overline{D_1}$ și $\overline{D_2}$) se obține în final:

$$(2.43) \quad D_{n1} = D_{n2} \iff q_\Sigma = 0 \quad \text{în} \quad \forall P \in \Sigma_d,$$

ceea ce înseamnă că pe suprafața de separație dintre doi dielectrici diferiți, însă uniformi și fără polarizație electrică permanentă, componentele normale la suprafața de separație Σ_d ale vectorului inducție electrică se conservă, cu condiția ca Σ_d să nu fie încărcată cu sarcini electrice.

Revenindu-se la figura 2.11, se vor putea exprima tangentele trigonometrice ale unghiului α_1 și α_2 , ținându-se cont de egalitățile (2.42) și (2.43), astfel:

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} = \frac{E_{t1}}{D_{n1}/\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1 E_{t1}}{D_{n1}}$$

și

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \frac{E_{t2}}{D_{n2}/\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 E_{t2}}{D_{n2}},$$

de unde rezultă că:

$$\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{\epsilon_1 E_{t1}}{D_{n1}}}{\frac{\epsilon_2 E_{t2}}{D_{n2}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \iff \begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \\ D_{n1} = D_{n2} \end{cases} \text{ pe } \Sigma_d,$$

fiind demonstrată, în acest fel, teorema (2.41) a refracției liniilor de câmp electrostatic prin suprafața de separație a doi dielectrici diferiți.

O consecință a acestei teoreme, și implicit a egalităților –de conservare– (2.42) și (2.43), rezultă dacă se exprimă, pentru suprafețele de separație neîncărcate cu sarcini electrice valorile E și D pe care le au câmpurile electrice în cei doi dielectrici diferiți, dar uniformi:

$$(2.44) \quad E_1 = \sqrt{E_{t1}^2 + E_{n1}^2} = \sqrt{E_{t1}^2 + \frac{1}{\epsilon_1^2} D_{n1}^2} \quad \text{și} \quad E_2 = \sqrt{E_{t2}^2 + \frac{1}{\epsilon_2^2} D_{n2}^2};$$

$$D_1 = \sqrt{D_{t1}^2 + D_{n1}^2} = \sqrt{\epsilon_1^2 E_{t1}^2 + D_{n1}^2} \quad \text{și} \quad D_2 = \sqrt{\epsilon_2^2 E_{t2}^2 + D_{n2}^2},$$

care arată că trecând într-un mediu cu permitivitate absolută mai mare, intensitatea câmpului electrostatic scade, iar valoarea absolută a inducției electrice crește (evident, cu excepția componentelor tangențiale E_t și normale D_n , care se conservă).

2.4.3. Rigiditatea dielectrică

Rigiditatea dielectrică este o mărime de material, notată E_{rd} , ce are dimensiunile intensității câmpului electric –adică $[u][L]^{-1}$ – și este măsurată în SI în volți pe metru (V/m) care, ducând la exprimări valorice prea mari, este înlocuită cu unitatea practică de măsură kilovolt pe centimetru (kV/cm). *Rigiditatea dielectrică a unui material izolant este definită ca fiind valoarea maximă a intensității câmpului electrostatic pe care o poate suporta local acel izolant (dielectric), în condiții determinante, fără să fie străpuns.*

Pentru un dielectric situat între două corpuri metalice (armături sau electrozi) cu o configurație geometrică dată, rigiditatea dielectrică determină o anumită tensiune maximă, numită *tensiune de străpungere*, notată cu U_{str} și definită prin:

$$U_{str} = \min_{\Gamma:1 \rightarrow 2} \int E_{rd}(P) dl,$$

unde 1 și 2 reprezintă armăturile, $E_{rd}(P)$ -rigiditatea dielectrică în punctele unui traseu Γ între cele două armături care trece prin punctele de minimă rigiditate dielectrică. În cazul ideal al unui dielectric perfect omogen, în care se stabilește (și datorită formei armăturilor) un câmp electrostatic uniform, iar condițiile de mediu sunt mereu aceleași, numai în acest caz, U_{str} nu ar depinde de drumul Γ dintre armături.

Străpungerea dielectricilor

Dacă un dielectric aflat în regim electrostatic își pierde brusc această stare, datorită creșterii intensității câmpului electrostatic peste valoarea rigidității dielectrice a materialului –adică: $|\vec{E}| > E_{rd}$, în condiții concrete date– atunci prin materialul dielectric (izolant) se produce o descărcare electrică prin creșterea deosebită și bruscă a conductivității electrice γ de-a lungul canalului de descărcare.

Străpungerea dielectricilor (sinonimă cu *străpungerea izolanților*) este un regim neelectrostatic, mai exact *un regim electrocinetic distructiv* de scurtă durată. La izolanții solizi, apariția străpunerii este urmată de o distrugere locală a lor. La acești izolanți străpungerea, care este ireversibilă, poate fi *completă* sau *incompletă*. Străpungerea incompletă a unor materiale, așa cum este spre exemplu sticla, nu influențează „prea mult” proprietățile lor izolante; străpungerea incompletă a altor materiale –ca, de exemplu, mica– reduce mult aceste proprietăți. La izolanții gazoși și lichizi, străpungerea este completă însă nu ireversibilă (ea se produce în tot intervalul dintre armături/electrozi, însă dielectricul se reface după stingerea descărcării).

Din punctul de vedere al teoriei microscopice, pierderea proprietăților de izolant ale unui material dielectric este legată de creșterea deosebită a numărului purtătorilor elementari de sarcină electrică, cea ce conduce la creșterea cospunzătoare a conductivității. În funcție de fenomenele care conduc la apariția purtătorilor de sarcină electrică, există două străpungeri tipice:

- **străpungerea termică** care este determinată, în principal, de transformarea energiei electromagnetice din câmp în căldură prin efect Joule (cantitatea de căldură cedată dielectricului crește cu mărirea conductivității materialului și a intensității câmpului electric, deoarece $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, iar cantitatea de căldură cedată mediului înconjurător depinde de diferența dintre temperatura acestuia și a dielectricului). Atunci când căldura cedată dielectricului este mai mare decât aceea cedată mediului, temperatura de-a lungul canalului de conducție crește și –când depășește valoarea temperaturii de stare stabilă a materialului– se produce străpungerea lui termică. Tensiunea de străpungere termică a unui dielectric depinde de temperatura mediului ambiant;

- **străpungerea electrică** care este determinată de creșterea conductivității prin formarea purtătorilor de sarcină sub acțiunea câmpului electric (particulele, microscopice, cu sarcina electrică q_m , sunt supuse unor forțe electrice $\overline{F}_m = q_m \overline{E}$, care cresc odată cu \overline{E} , putând învinge la un moment dat forțele de legătură din interiorul materialului). În cazul izolanților solizi, străpungerea electrică nu depinde, practic, de temperatura mediului ambiant; la lichide, străpungerea electrică depinde de temperatura mediului în funcție de natura și de gradul de impuritate ale izolantului, iar la gaze, dependența străpungerii electrice de temperatură nu este semnificativă.

Rigiditatea dielectrică a gazelor

La gaze, E_{rd} crește cu presiunea gazului, cu excepția presiunilor foarte joase (așa-zisul „vid înaintat”). U_{str} depinde de distanța dintre electrozi și de curbura acestora (de care depinde densitatea de suprafață a sarcinilor electrice q_Σ și –prin ea– intensitatea câmpului electrostatic pe suprafața electrodului $E = \frac{1}{\epsilon} q_\Sigma$). Pentru distanțe între electrozi care depășesc o anumită limită (în aer, mai mare decât 1 cm), rigiditatea dielectrică devine independentă de distanța dintre electrozi.

Rigiditatea dielectrică a gazelor depinde într-un mod însemnat de neuniformitatea câmpului electrostatic: în câmpuri uniforme și pentru distanțe mici între electrozi (armături), E_{rd} are valori mult mai mari decât în cazul distanțelor mari, când obținerea unui câmp electrostatic uniform practic nu este posibilă, ceea ce este utilizat în tehnică la construcția condensatoarelor (v. subcap. 2.5). În cazul distanțelor foarte mici între electrozi (de ordinul liberului parcurs mediu) rigiditatea dielectrică a gazului izolant crește foarte mult, deoarece este îngreunată producerea ionilor prin șoc.

Rigiditatea dielectrică a aerului uscat este de aproximativ $3 \cdot 10^6$ V/m (adică 30 kV/cm).

Rigiditatea dielectrică a lichidelor

La lichide E_{rd} depinde în mare măsură de puritatea lichidului dielectric, fiind -practic- independentă de distanța dintre electrozi (armături) și de temperatura lichidului (dacă el este foarte pur). Rigiditatea dielectrică a lichidelor se micșorează sensibil în prezența unor impurități conductoare, dar și a unor impurități cu permitivitate absolută mult mai mare decât cea a dielectricului lichid, mai ales atunci când impuritățile se pot deplasa în lichid sub acțiunea câmpului electric. Astfel, în uleiul de transformator (unul dintre izolanții lichizi foarte mult utilizat în electrotehnică) urmele de umiditate, scamele de bumbac (provenite de la izolația bobinelor aflate în ulei), particulele mici de cărbune (provenite din praful carbonizat sau cocsat) etc. se orientează, sub acțiunea forțelor de natură electrică, după liniile de câmp electrostatic, formând filamente aproape neîntrerupte între electrozii (conductoarele) izolate prin ulei, măbind pericolul de străpungere. În plus, prezența umidității face ca rigiditatea dielectrică a oricărui lichid izolant să scadă cu temperatura. La uleiul de transformator rigiditatea dielectrică scade practic hiperbolic în funcție de umiditate (astfel la o umiditate de 0,07%, $E_{rd} = 160$ kV/cm, la 0,02% $\rightarrow E_{rd} = 80$ kV/cm, iar la 0,05% scade la $E_{rd} = 40$ kV/cm).

Prin purificare, prin decantare și prin uscare (realizată prin centrifugare), uleiul de transformator utilizat în industria electrotehnică are o rigiditate dielectrică, la o presiune egală cu cea atmosferică, de 100 kV/cm.

În general, la lichidele dielectrice E_{rd} crește aproape direct proporțional cu presiunea lichidului.

Rigiditatea dielectrică a solidelor

La izolanții solizi, E_{rd} depinde de temperatură, de viteza de creștere a tensiunii aplicate pe armături (electrozi), de neuniformitatea câmpului electrostatic, de forma electrozilor, de capacitatea de cedare a căldurii, de durata de aplicare a tensiunii pe electrozi etc. În aceste condiții, rigiditatea dielectrică deși este -în principiu- o mărime de material, ea nu este totuși o constantă de material (chiar în condiții de omogenitate a materialului și de mediu bine precizate).

Între electrozi plani, tensiunea de străpungere, U_{str} , nu crește, ca la lichide și gaze, proporțional cu distanța dintre electrozi, ci mult mai lent. În regim nestaționar alternativ, rigiditatea dielectrică a izolanților solizi scade odată cu creșterea frecvenței (mai ales dacă au pierderi prin efect Joule).

Rigiditatea dielectrică, E_{rd} , depinde -pentru cei mai mulți dielectrici solizi omogeni și izotropi- aproximativ exponențial de temperatura izolanțului, adică:

$$E_{rd} = A \exp(-b/T),$$

în care T este temperatura absolută, iar A și b sunt constante de material. Sticla (numai la temperaturi joase) și materialele poroase (din cauza higroscopicității lor), nu respectă formula precedentă.

La majoritatea dielectricilor minerali cristalini, care prezintă neomogenități fizice structurale, rigiditatea dielectrică nu depinde de grosimea izolanțului și nici de temperatură. La astfel de materiale, neomogenitatea fizică este datorată dislocării unora dintre ionii din rețeaua cristalină (deci din poziția lor normală), printr-o agitație termică intensă, sau este datorată neomogenității structurii sau orientării cristalelor componente, ori unor neomogenități de suprafață (fisuri ultramicroscopice). Aceste dislocări de ioni cresc pe măsură ce intensitatea câmpului electric aplicat crește și, pentru o anumită valoare a câmpului, se declanșează ionizarea prin ciocnire și, astfel, străpungerea izolanțului.

Deși, pe bază de considerații teoretice microscopice și statistice, străpungerea dielectricilor solizi perfect omogeni și izotropi ar trebui să se producă pentru intensități ale câmpului electrostatic aplicat mai mari decât 150MV/cm, totuși toți dielectricii cunoscuți sunt străpunși la valori ale câmpului mai mici decât 1MV/cm. Mai mult, pentru siguranță, rigiditățile dielectrice declarate de constructorii de materiale izolante sunt mult mai mici, ca de exemplu: 600kV/cm pentru mică, 350kV/cm pentru micanită, 250 kV/cm pentru porțelan, 10 la 100kV/cm pentru diversele sortimente de carton izolanț (preșpan). Această diferență provine din existența unor puncte slabe în masa dielectricului, care cedează sub acțiunea câmpului electric aplicat (adesea neuniform și el), producându-se o separare de sarcini electrice elementare. Separarea acestora accentuează neuniformitatea câmpului care duce la apariția a noi puncte slabe și astfel -în lanț- procesul se dezvoltă până la străpungerea completă a dielectricului.

2.5. Condensatoare electrice

Un sistem fizic format din două corpuri conductoare separate printr-un dielectric poartă numele generic de **condensator electric**. Conductoarele poartă denumirea de *armăturile condensatorului*, iar dielectricul se mai numește și izolanț.

Dacă unui astfel de sistem, i se aplică între armături (care se pot nota cu 1 și 2) o diferență de potențial $V_1 - V_2 = U_{12}$ se va constata că armăturile condensatorului se vor încărca cu sarcini electrice de semn contrar: q_1 și $-q_2$. Este valabilă și reciproca, dacă armăturile electrice vor fi încărcate cu sarcini electrice de semne contrare, q_1 și $-q_2$, atunci -în concordanță cu legile

electrostaticii (v. § 2.1.2) și cu teorema unicității- armăturile se vor situa (echipotential, pentru că sunt conductoare) la potențiale diferite V_1 și V_2 , la tensiunea $U = U_{12} = V_1 - V_2$ iar în dielectric, în regim electrostatic, se va produce un câmp electric caracterizat de mărimile: \bar{E} (dată de $U_{12} = \int_{\Gamma:1 \rightarrow 2} \bar{E} \cdot d\bar{l}$), \bar{D} (dată de $\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \bar{P}_p$, unde ϵ este permitivitatea locală a dielectricului și \bar{P}_p -polarizația electrică permanentă locală a dielectricului, dacă există) și de fluxul electric $\Psi = \int_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A}$, calculat prin orice suprafață Σ considerată în domeniul ocupat de sistemul denumit condensator electric.

În condiții cu totul particulare (care, însă, sunt realizate cu o bună aproximație în electrotehnică) și anume:

k) armături metalice cu γ mare și uniforme (omogene și izotrope);

kk) dielectric omogen, izotrop, liniar, fără densitate de volum a sarcinii electrice și fără polarizație electrică permanentă ($q_v = 0, \bar{P}_p = 0$ și $\epsilon = \text{const.}$ în toate punctele din dielectric);

kkk) în cazul încărcării armăturilor cu sarcini electrice de semn contrar, toate liniile de câmp care pornesc de pe armături cu sarcină electrică pozitivă se regăsesc (în întregime) pe cealaltă armătură (cu sarcină electrică negativă);

kv) sistemul armături, dielectric, câmp electric este în regim electrostatic, există următoarele relații:

$$(2.45) \quad q_1 = q, \quad q_2 = -q \quad \text{și} \quad q_1 + q_2 = 0;$$

$$(2.46) \quad \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{q_1}{U_{12}} = \frac{q_2}{U_{21}} = \frac{q}{U} = \frac{Kq}{KU} = \text{const.}, \quad K \in R$$

Relațiile (2.45) se pot demonstra printr-o suprafață închisă Σ care trece prin interiorul ambelor armături, iar în exteriorul lor se închide extinzându-se atât de mult (teoretic și la infinit) încât să nu intersecteze liniile de câmp electric, care trebuie să rămână în interiorul suprafeței închise Σ , așa ca în figura 2.14. (dacă dielectricul condensatorului are o permitivitate absolută mult mai mare decât a mediului exterior, de exemplu aerul, atunci extinderea suprafeței Σ nu este necesar să facă prea departe în exteriorul armăturilor).

Fluxul dielectric prin suprafața închisă Σ este nul, adică:

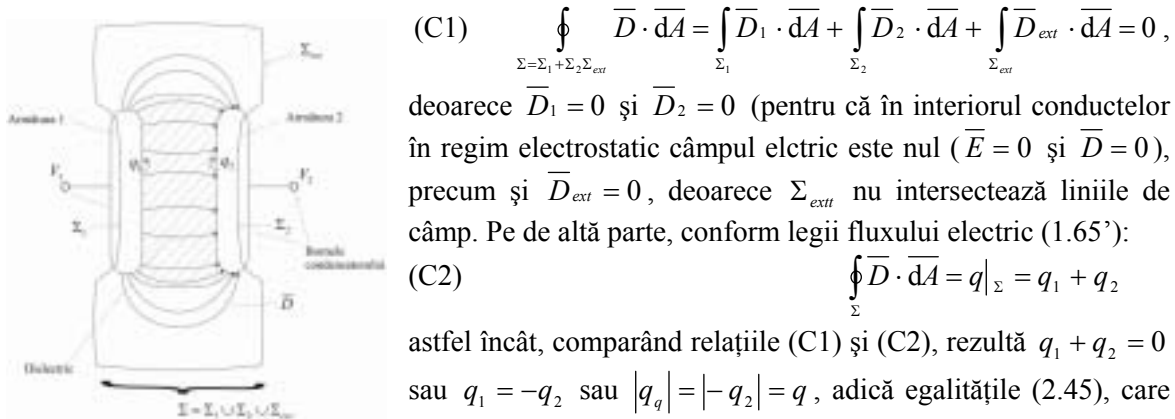


Fig. 2.14

$$(C1) \quad \oint_{\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_{ext}} \bar{D} \cdot d\bar{A} = \int_{\Sigma_1} \bar{D}_1 \cdot d\bar{A} + \int_{\Sigma_2} \bar{D}_2 \cdot d\bar{A} + \int_{\Sigma_{ext}} \bar{D}_{ext} \cdot d\bar{A} = 0,$$

deoarece $\bar{D}_1 = 0$ și $\bar{D}_2 = 0$ (pentru că în interiorul conductelor în regim electrostatic câmpul electric este nul ($\bar{E} = 0$ și $\bar{D} = 0$), precum și $\bar{D}_{ext} = 0$, deoarece Σ_{ext} nu intersectează liniile de câmp. Pe de altă parte, conform legii fluxului electric (1.65’):

$$(C2) \quad \oint_{\Sigma} \bar{D} \cdot d\bar{A} = q|_{\Sigma} = q_1 + q_2$$

astfel încât, comparând relațiile (C1) și (C2), rezultă $q_1 + q_2 = 0$ sau $q_1 = -q_2$ sau $|q_1| = |-q_2| = q$, adică egalitățile (2.45), care poartă denumirea de *teorema ariilor corespondente*, sarcinile q_1 și $-q_2$ fiind repartizate pe fețele dinspre dielectric ale armăturilor.

2.5.1. Capacitatea electrostatică

Deoarece raportul (2.46), dintre sarcina electrică de pe o armătură q și tensiunea la bornele condensatorului U , în condițiile k)...kv), este astfel un parametru specific condensatorului, el se notează cu C și poartă denumirea de *capacitatea electrostatică a condensatorului*:

$$C \stackrel{D}{=} \frac{q}{U} = \frac{q}{V_2 - V_1} \quad (2.47)$$

și dimensional :

$$[C] = [q] \cdot [u]^{-1}. \quad (2.47')$$

În sistemul internațional (SI), unitatea de măsură pentru capacitatea electrostatică este *faradul*, cu pluralul *farazi* și cu simbolul F. Unitatea fiind prea mare, în practică se utilizează frecvent (și după caz) submultiplii SI: microfaradul $1 \mu F = 10^{-6} F$ și picofaradul, cu $1 pF = 10^{-12} F$.

Mai târziu (v. subcap.8.1) se va arăta că se mai utilizează și noțiunile de capacitate : statică, dinamică și diferențială.

Pe schemele electrice, condensatoarele se reprezintă prin simbolul grafic general arătat în figura 2.15.

Uneori se folosește și parametrul notat cu S și definit prin:

$$S \stackrel{D}{=} \frac{1}{C}, \quad (2.47')$$

numit *elastanță*, cu unitatea de măsură SI unu pe farad $[F^{-1}]$.

Teorema capacității electrostatice



Fig. 2.15

Se exprimă prin relația, deja prezentată (2.46) și se enunță astfel: valoarea capacității electrice a unui condensator cu dielectric liniar (adică cu permitivitate absolută ϵ constantă, independent de intensitatea câmpului electric din izolanț) este pozitivă și nu depinde de valoarea sarcinii electrice q și nici de diferența de potențial U , ale armăturilor, fiind o caracteristică a condensatorului (un parametru de material).

Această teoremă se exprimă analitic prin relația (2.46), care rezultă din definiția capacității electrostatice (2.47) și teorema superpoziției câmpurilor electrostatice, care poate fi aplicată deoarece dielectricul condensatorului s-a considerat liniar (acesta fiind și condiția de valabilitate a teoremei). Într-adevăr, pentru o sarcină electrică q pe o armătură (care se distribuie pe fața dinspre dielectric a armăturii, cu densitatea de suprafață q_Σ) și o tensiune electrică U între armături se poate scrie:

$$q = \int_A q_\Sigma dA \quad \text{și} \quad U = \int_{1 \rightarrow 2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{q_\Sigma}{\epsilon} \vec{n} \cdot d\vec{l} \quad (C3)$$

unde A este aria feții interioare (dinspre dielectric) a armăturii, iar \vec{n} este versorul normalei locale pe fața armăturii, cu sensul de la armătura 1 la 2. În relația anterioară (C3), s-a făcut înlocuirea $\vec{E} = q_\Sigma \vec{n} / \epsilon$, conform expresiei (2.38) pe care o are intensitatea câmpului electrostatic pe suprafața unui conductor încărcat electric, considerându-se în plus și faptul că acest câmp este constant pe drumul $1 \rightarrow 2$ dintre cele două armături. Cu aceste expresii (C3) ale lui q și U , capacitatea electrostatică a condensatorului devine:

$$(C4) \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\int_A q_\Sigma dA}{\int_{1 \rightarrow 2} \frac{q_\Sigma}{\epsilon} \vec{n} \cdot d\vec{l}}.$$

Dacă sarcina electrică a armăturii devine Kq , cu repartiția superficială Kq_Σ și –în virtutea teoremelor de unicitate și superpoziție a câmpurilor electrostatice– tensiunea electrică dintre armături ia valoarea:

$$KU = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{Kq_{\Sigma}}{\varepsilon} \cdot \vec{n} \cdot \vec{dl} ,$$

atunci expresia condensatorului este:

$$(C5) \quad C_K = \frac{D}{KU} = \frac{\int_A Kq_{\Sigma} dA}{\int_{1 \rightarrow 2} \frac{Kq_{\Sigma}}{\varepsilon} \cdot \vec{n} \cdot \vec{dl}} = C .$$

Prin urmare, în condițiile specificate anterior, capacitatea electrostatică a condensatorului este aceeași ($C=C_K=const.$, independent de q și U). Se va spune că o astfel de *capacitate este liniară*, adică $C(q,U)=const.$, dependența $q=f(U)$ fiind dată de o ecuație liniară $q=CU$, reprezentată în planul q,U printr-o dreaptă cu panta C (fig. 2.16).

În condițiile k)...kv), precizate la începutul acestui capitol, la care se mai poate adăuga $q_{\Sigma}=const.$ pe A , adică repartiția superficială a sarcinii electrice să fie aceeași în toate punctele suprafeții A a armăturii (caz întâlnit cu o foarte bună aproximație în numeroase situații din electrotehnică), relația (C5) devine:

$$(C6) \quad C = \frac{D}{U} = \frac{\int_A q_{\Sigma} dA}{\int_{1 \rightarrow 2} \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon} \cdot \vec{n} \cdot \vec{dl}} = \frac{q_{\Sigma} \int_A dA}{\frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon} \int_{1 \rightarrow 2} \vec{n} \cdot \vec{dl}} = \varepsilon \frac{A}{\int_{n1 \rightarrow 2} dl} ,$$

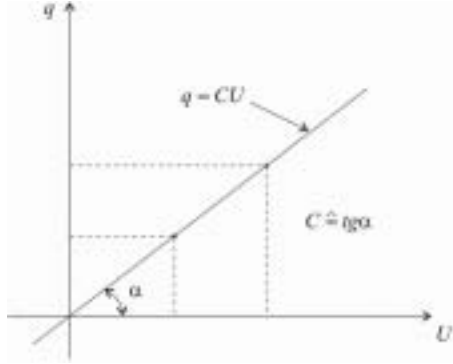


Fig. 2.16

expresie care arată că în cazul unui condensator linier, adică la care $C(q,U)=const.$ și cu un câmp electric uniform în dielectricul dintre armături, capacitatea electrostatică a condensatorului depinde numai de poziția relativă a armăturilor (fapt arătat de termenul $\int_{1 \rightarrow 2} dl$), de dimensiunile lor (lucru indicat de aria unei armături A) și de natura dielectricului, prin permitivitatea lui absolută ε cu care este direct proporțională. Expresia (C6) a capacității electrostatice a unui condensator electric capătă forme analitice diferite în funcție și de forma armăturilor (plane, cilindrice, coaxiale, cilindrice, paralele, sferice, sferă-plan etc.).

Calculul capacității electrostatice

Pentru un condensator electric dat (ca formă, dimensiuni, dielectric etc.), capacitatea sa electrostatică se determină întotdeauna cu expresia ei de definiție (2.47) în modul următor:

- se presupune condensatorul încărcat cu sarcinile q și $-q$;
- se determină intensitatea câmpului electrostatic în dielectricul dintre armături sau a potențialelor electrostatice ale celor două armături;
- se calculează tensiunea electrică dintre armături U_{12} , fie cu relația $U_{12} = \int_{\Gamma:1 \rightarrow 2} \vec{E} \cdot \vec{dl}$ (de obicei pe drumul Γ de-a lungul unei linii de câmp) sau cu $U_{12} = V_1 - V_2$;
- se aplică relația (2.47) pentru determinarea capacității electrostatice C .

În acest sens, în paragraful 2.7.3 sunt prezentate câteva aplicații privind calculul capacității electrostatice a unor condensatoare tipice. Aici ne vom limita –spre exemplificare– la calculul capacității electrostatice a unui condensator plan ideal.

Condensatorul plan ideal (fig. 2.17a) este format din două armături plane paralele, cu suprafețe identice ($A_1=A_2=A$), situate la distanța d , între care se află un dielectric omogen, izotrop, liniar, fără sarcini electrice ($q_v=0$) și fără polarizație electrică permanentă ($\bar{P}_p=0$), cu permitivitatea absolută ϵ . Se mai consideră că între armături, în dielectric, există un câmp electrostatic uniform, cu intensitatea $\bar{E}=\text{const.}$ în orice punct din dielectric, deci și în punctele de pe suprafața interioară a armăturii 1, unde este dat de relația (2.38), fiind deci $\bar{E} = \frac{1}{\epsilon} q_s \bar{n}$, unde \bar{n} este versorul normalei pe fața A_1 a armăturii 1. cu sensul spre armătura 2. Către o astfel de situație ideală (câmp electrostatic uniform, aflat numai în dielectricul dintre armături – v. fig. 2.17a) se tinde, fiind chiar admisă cu o bună aproximație dacă distanța d dintre armături este foarte mică, mai bine spus $d \ll \sqrt{A}$ ($d=10\div 50 \mu\text{m}$ și $A=1\text{cm}^2=10^8\mu\text{m}^2$). Oricum, redând printr-un efect de lupă (v. fig. 1.27b) – spectrul câmpului electrostatic la marginea armăturilor nu mai este omogen, ci prezintă o curbură din ce în ce mai mare la ieșirea dintre armături, acesta fiind așa numitul *efect de margine*.

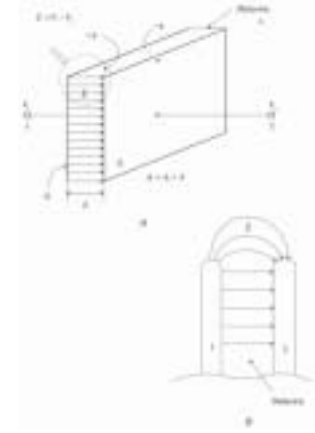


Fig. 2.17

Neglijând acest efect de margine și în condițiile de condensator plan perfect, capacitatea sa electrostatică are expresia dată de (C6) în care $\int_{n_1 \rightarrow 2} \bar{n} \cdot d\bar{l} = \int_{1 \rightarrow 2} dl = d$ și astfel:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} . \quad (2.48)$$

Din relația (2.48) se poate determina ecuația dimensională a permitivității absolute care este:

$$[\epsilon] = [C] \cdot [L]^{-1} , \quad (2.49)$$

ceea ce explică și unitatea de măsură SI a lui ϵ de farad pe metru (F/m).

2.5.2. Teoremele capacităților electrostatice echivalente

Într-o schemă, cu două borne de acces A și B , corespunzătoare unei aplicații practice concrete, pot exista mai multe condensatoare diferite (cu capacități electrostatice de valori diferite), conectate între ele în diverse moduri datorate aplicației. În anumite cazuri, impuse de necesitatea efectuării mai ușor a calcului, de realizarea efectivă a aplicației, de simplificarea schemei de reprezentare, de realizarea unui montaj mai compact etc., este posibil ca grupul de condensatoare conectate între bornele de acces din exterior, A și B , să fie înlocuit cu *un singur condensator legat între aceleași borne A și B , cu condiția însă ca acest unic condensator să aibă o astfel de capacitate electrostatică, notată cu C_e și numită capacitate echivalentă*, încât tensiunea la bornele A, B să fie aceeași (atât în cazul grupului de condensatoare cât și a condensatorului unic), iar sarcinile electrice pe armăturile condensatorului unic $q_A = -q_B$ să fie aceeași cu sarcinile “absorbite” de grupul de condensatoare (inițial presupuse descărcate) prin bornele A și B , când acestor borne li se aplică tensiunea U_{AB} (de la bornele condensatorului unic).

Expresia capacității electerostatice echivalente C_e , dată prin definiție de raportul:

$$(CE1) \quad \frac{q_A}{U_{AB}} = \frac{q_B}{U_{BA}} = C_e^D,$$

exprimată în funcție de capacitățile electrostatice C_k , $k=1,2,\dots,n$, depinde de felul conexiunii acestor condensatoare și se determină astfel încât în exteriorul sistemului să nu se producă nici o schimbare electrică atunci când se înlocuiește grupul de condensatoare cu condensatorul unic, de capacitate echivalentă cu cea a grupului.

Condensatoare electrice conectate în paralel

Despre mai multe condensatoare electrice se spune că sunt conectate în paralel atunci când toate au aceeași tensiune la borne (fig. 2.18), astfel că:

$$(CE2) \quad U_1 = U_2 = \dots = U_n = U_{AB}.$$

Aplicându-se relația de definiție (CE1) a capacității electrostatice echivalente, rezultă că sarcina electrică absorbită la borna A , a condensatorului unic, este:

$$(CE3) \quad q_A = C_e U_{AB}.$$

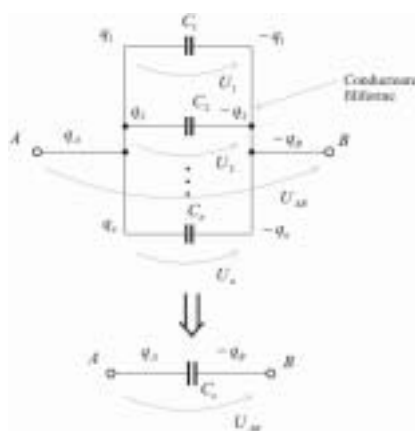


Fig. 2.18

Conform definiției capacității electrostatice echivalente, pentru ca starea electrică a celor două sisteme (grup de condensatoare și condensator unic) să nu se modifice, trebuie ca sarcina q_A să fie egală cu sarcina de la aceeași bornă a grupului de condensatoare.

Pentru că toate cele n condensatoare au prima armătură (adică cea cu sarcină electrică pozitivă) conectată la aceeași bornă A prin fire conductoare, rezultă (în regim electrostatic):

$$(CE4) \quad q_A = q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

Aplicându-se definiția (2.47) tuturor condensatoarelor din grupul paralel rezultă:

$$(CE5) \quad q_1 = C_1 U_1, \quad q_2 = C_2 U_2, \quad \dots, \quad q_n = C_n U_n,$$

a căror sumă este:

$$(CE6) \quad q_A = q_1 + q_2 + \dots + q_n = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n =$$

$$(C_1 + C_2 + \dots + C_n) U_{AB}$$

conform condiției de conectare în paralel (CE2). Atunci, înlocuindu-se în relația (CE4) membrul din stânga cu expresia lui (CE3) și pe cel din dreapta cu ultima expresie a lui din (CE6), se obține:

$$C_e U_{AB} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U_{AB}.$$

care arată că în cazul conexiunii în paralel capacitatea electrostatică echivalentă este egală cu suma capacităților electrostatice ale condensatoarelor existente în grup, adică:

$$(2.50) \quad C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

Conform acestei expresii, rezultă că în cazul conexiunii în paralel:

$$C_e > \max \{ C_k \mid k=1,2,\dots,n \}.$$

Elastanța echivalentă în cazul conexiunii în paralel este, conform definiției sale (2.47') și relației (2.50):

$$(2.50') \quad \frac{1}{S_e} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n}.$$

Condensatoare electrice conectate în serie

Despre mai multe condensatoare electrice se poate spune că sunt conectate în serie dacă toate condensatoarele electrice au pe armături o aceeași sarcină electrică q – pe armătura pozitivă și $-q$ pe cea negativă, condiția conectării fiind deci :

$$q_1=q_2=\dots=q_n. \quad (CE7)$$

Acest lucru se întâmplă practic când între bornele de acces A și B ale grupului de condensatoare electrice, cele n condensatoare formează un singur șir (o singură “latură”) între cele două borne A și B în care: borna + a primului condensator este conectată printr-un fir conductor la borna A , apoi borna + a celui de al doilea condensator este conectată (prin alt fir conductor) la borna – a primului condensator și așa mai departe până când borna + a ultimului condensator este conectată la borna – a penultimului condensator, iar borna– a acestui ultim condensator devine chiar borna B (de “ieșire”) din grup, așa ca în figura 2.19.

Condiția (CE7) de conectare în serie a condensatoarelor electrice aflate în regim electrostatic se demonstrează simplu cu ajutorul legii conservării sarcinii electrice scrise sub forma (1.90), dacă se consideră două condensatoare oarecare din grup, consecutive, k și $k+1$ (fig. 2.20).

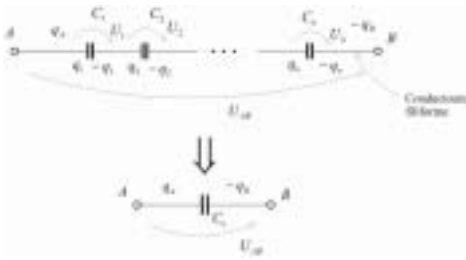


Fig. 2.19

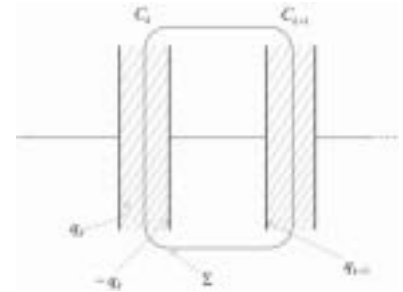


Fig. 2.20

Deoarece inițial s-a considerat că nu sunt încărcate condensatoarele, legea conservării sarcinilor electrice –sub forma $i_\Sigma = -dq/dt$ l_Σ – printr-o suprafață închisă Σ care trece prin dielectricul condensatoarelor vecine k și $k+1$ arată că după încărcarea condensatoarelor, când acestea au ajuns în regim electrostatic (caracterizat, deci, de $i_\Sigma=0$): $0 = -dq/dt$ l_Σ , ceea ce este valabil fie dacă q $l_\Sigma=0$, fie dacă q $l_\Sigma=const.$ În ambele cazuri, rezultă că în interiorul suprafeții Σ sarcinile electrice (și anume cele de pe armătura – a condensatorului k și + a condensatorului $k+1$) trebuie să respecte condiția:

$$q$$
 $l_\Sigma = -q_k + q_{k+1} = 0,$

ceea ce înseamnă că $q_k = q_{k+1}$ și cum k este (pe rând) $1, 2, \dots, n$, rezultă: $q_1=q_2=\dots=q_n$, prin urmare condiția (CE7).

Dacă se scrie teorema potențialului electrostatic sub forma (2.24) în cazul condensatorului unic și în cazul grupului de condensatoare electrice în serie, pe un traseu Γ ce trece prin dielectric Γ_d, Γ_{dk} ($k=1, 2, \dots, n$) și prin firele conductoare de legătură Γ_c va rezulta:

$$\int_{\Gamma: A \rightarrow B} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_c} \vec{E}_{ec} \cdot d\vec{l} = 0 + U_{AB} = U_{AB}, \quad (CE8)$$

unde \vec{E}_e este intensitatea câmpului electrostatic a condensatorului electric unic, \vec{E}_{ec} – este câmpul electric din conductorii condensatorului unic (care în regim electrostatic este nul) iar \vec{E}_{ed} – este câmpul din dielectricul condensatorului unic, și:

$$U_{AB} = \int_{\Gamma_{c1}} \vec{E}_{c1} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_{d1}} \vec{E}_{d1} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_{c2}} \vec{E}_{c2} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_{d2}} \vec{E}_{d2} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{\Gamma_{cn}} \vec{E}_{cn} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_{dn}} \vec{E}_{dn} \cdot d\vec{l} =$$

$$= 0 + U_1 + 0 + U_2 + \dots + 0 + U_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (CE9)$$

care se referă la circulația prin grupul de condensatoare electrice conectate în serie (c –prin firele conductoare de legătură, unde câmpul $\vec{E}_{ck}=0$ și dk – prin dielectrici unde $\int_{\Gamma_{dk}} \vec{E}_{dk} \cdot d\vec{l} = U_k$, $k=1, 2, \dots, n$).

Atunci, din relațiile (CE8) și (CE9), rezultă:

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \dots + U_n \text{ sau } \frac{q_A}{C_e} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \dots + \frac{q_n}{C_n}$$

și ținându-se cont de condiția (CE 7) a conectării în serie se obține:

$$\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n},$$

de unde se poate scrie *expresia capacității electrostatice echivalente pentru conectarea în serie a condensatoarelor electrice*, și anume:

$$(2.51) \quad \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n},$$

iar pentru elastanță (în cazul conectării serie):

$$(2.51') \quad S_e = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Expresia (2.51) a lui C_e arată că, prin conectarea în serie a mai multor condensatoare electrice, capacitatea electrostatică echivalentă (C_e) scade, devenind:

$$C_e < \min \{C_k | k=1,2,\dots,n\}.$$

Dacă cele n condensatoare electrice sunt identice (cu capacitatea electrostatică C), atunci:

$$C_e = \frac{C}{n},$$

iar, în cazul a două condensatoare electrice (cu capacitățile electrostatice C_1 și C_2) capacitatea echivalentă (2.51) are expresia:

$$C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

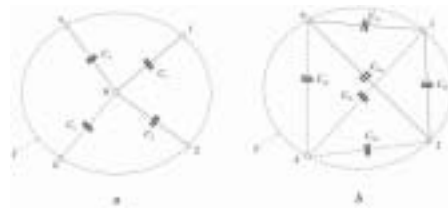


Fig. 2.21

Transfigurarea conexiunilor de condensatoare electrice

Conectarea condensatoarelor electrice în paralel sau în serie sunt două moduri de conexiuni tipice particulare. De foarte multe ori (v. § 2.7.3), în numeroasele aplicații tehnice, condensatoarele pot fi conectate mult mai divers, nu numai în serie sau în paralel, ci în grupuri de conexiuni care includ legăturile: serie, paralel, poligonale (de exemplu în triunghi), cu ramificații (de exemplu în stea) etc. Într-o structură de conexiuni, fiecare grup de condensatoare electrice poate fi înlocuit printr-un condensator unic având capacitatea electrică echivalentă, care –dacă conexiunile sunt în serie sau în paralel– se calculează cu expresiile arătate anterior (2.51) și – respectiv– (2.50), combinate în conformitate cu conexiunea dată.

În cazul conexiunilor poligonale și radiale, calculul capacităților echivalente se face prin așa-numita *transfigurare a conexiunilor* (din radial în poligonal și eventual invers). În general, prin *transfigurarea unui sistem de condensatoare electrice cu un anumit fel de conectare se înțelege transformarea lui în alt sistem echivalent de condensatoare electrice* cu o conexiune adecvată calcului, echivalența constând în faptul că la aceeași tensiune între bornele de acces trebuie să existe aceeași repartitie a sarcinilor electrice la fiecare bornă, în ambele conexiuni.

Transfigurarea unei conexiuni radiale (stea) în una poligonală (fig. 2.21) se face precum urmează.

Sarcina electrică a condensatorului C_k (din figura 2.21a) este:

$$q_k = C_k(V_k - V_0), \quad (\text{CE10})$$

unde V_0 este potențialul nodului comun al configurației radiale de condensatoare și $C_1=C_{01}$, $C_2=C_{02}$, ..., $C_k=C_{0k}$, ..., $C_n=C_{0n}$.

Presupunându-se condensatoarele inițial neîncărcate și deoarece fluxul electric prin conturul închis Γ este nul, rezultă:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0 \text{ sau } \sum_{k=1}^n C_k (V_k - V_0) = 0,$$

din care se obține imediat:

$$V_0 = \frac{\sum_{k=1}^n C_k V_k}{\sum_{k=1}^n C_k}. \quad (\text{CE11})$$

Înlocuindu-se V_0 din relația (CE10) cu expresia sa (CE11) se obține:

$$q_k = C_k V_k - C_k \frac{\sum_{k=1}^n C_k V_k}{\sum_{k=1}^n C_k} \quad (\text{CE12})$$

și considerându-se și un alt mod „curent” j pe conturul Γ va rezulta din (CE12):

$$q_j = C_j V_j - C_j \frac{\sum_{k=1}^n C_k V_k}{\sum_{k=1}^n C_k} = \sum_{k=1}^n \frac{C_j C_k}{\sum_{k=1}^n C_k} (V_j - V_k). \quad (\text{CE13})$$

Atunci, sarcina electrică din nodul j , în capul poligonului complet, ia forma:

$$q_j = \sum_{k=1}^n q_{jk} = \sum_{k=1}^n C_{jk} (V_j - V_k), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{CE14})$$

Pentru ca (în conformitate cu definiția transfigurării) la potențiale electrostatice date să corespundă aceleași sarcini electrice este necesar să se identifice termenii corespunzători din cele două egalități (CE13) și (CE14). Va rezulta:

$$C_{jk} = \frac{C_j C_k}{\sum_{k=1}^n C_k}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.52)$$

relație care determină capacitatea electrostatică echivalentă a condensatoarelor din sistemul poligonal (C_{jk} este capacitatea electrostatică a laturii poligonale cuprinsă între nodurile j și k - v. fig. 2.21 b) în funcție de capacitățile electrostatice ale laturilor din schema radială (C_j și C_k sunt capacitățile electrostatice ale celor n laturi din structura în stea).

Sistemul (2.52) permite determinarea tuturor capacităților electrostatice ale condensatoarelor electrice din laturile unui poligon complet (v. fig. 2.21b) care se poate construi prin combinarea tuturor celor n ramificații stelare, luate câte două. Deci numărul de capacități electrostatice poligonale C_{jk} este egal cu $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = n(n-1)/2$. În cazul figurii 2.21a, în care este reprezentată o stea cu 4 laturi ($n=4$), rezultă că sistemul (2.52) poate determina $4 \cdot 3/2 = 6$ capacități electrostatice poligonale (v. fig. 2.21b)

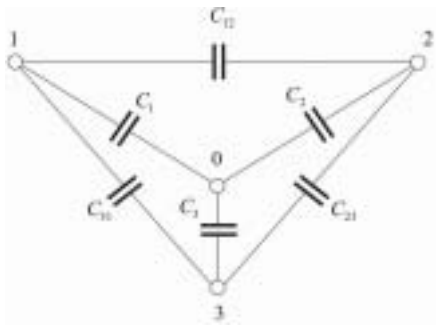
Deoarece, cu excepția lui $n=3$, sistemul (2.52) are mai multe ecuații decât n , pentru că:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} > n \Rightarrow n > 3,$$

transfigurarea inversă (poligon \rightarrow stea) nu este posibilă.

În cazul lui $n=3$ laturi (fig. 2.22), caz frecvent întâlnit în aplicațiile practice, se vorbește despre **transfigurarea stea \leftrightarrow triunghi**, care este posibilă în ambele sensuri.

Pentru *transfigurarea stea – triunghi*, sistemul (2.52) dă următoarele valori ale capacităților echivalente din laturile conexiunii triunghi în funcție de capacitățile C_1, C_2, C_3 ale ramificațiilor cu nodul comun 0 (v. fig. 2.22):



(2.53)

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \text{ și}$$

$$C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Fig. 2.22

Pentru *transfigurarea triunghi – stea*, atunci când se dau capacitățile electrostatice C_{12}, C_{23} și C_{31} , ale celor trei condensatoare conectate în triunghi și trebuie calculate capacitățile electrostatice echivalente ale unei conexiuni în stea de condensatoare electrice, se utilizează sistemul (2.53) de trei ecuații în care C_1, C_2 și C_3 , sunt necunoscutele. Va rezulta imediat:

$$(2.53') \quad C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}}, \quad C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23} C_{12}}{C_{31}} \text{ și } C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31} C_{23}}{C_{12}}.$$

Dacă condensatoarele electrice ar fi identice și ar avea capacitățile electrostatice C_Δ (în cazul conexiunii triunghi) și C_Y (în cazul conexiunii stea), relațiile dintre aceste capacități, așa cum rezultă din (2.53) sau (2.53'), sunt:

$$(2.53'') \quad C_\Delta = \frac{1}{3} C_Y \text{ și } C_Y = 3C_\Delta,$$

care arată că dacă conectăm niște condensatoare electrice în stea, se obține pe fiecare latură o capacitate electrostatică de trei ori mai mare, ceea ce este utilizat la numite punți de măsurare.

2.5.3. Ecuațiile lui Maxwell referitoare la capacitățile electrostatice

Dacă într-un mediu dielectric există mai multe corpuri conductoare și –la un moment dat, printr-o cauză oarecare– unul dintre conductoare (k) se încarcă cu o sarcină electrică q_k , el va ajunge ca –în regim electrostatic– să aibă un potențial electrostatic V_k , același în toate punctele sale (se știe –v §2.3.2– că în regim electrostatic volumul și suprafața unui conductor electric sunt echipotențiale). Datorită proximității și capacităților electrice care există între conductori, precum și fenomenului de influență electrostatică, atunci și celelalte corpuri conductoare (inițial neîncărcate electric) se vor încărca cu sarcini electrice: $q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n$ și vor ajunge la potențialele electrostatice $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_n$ (dacă sunt n corpuri conductoare).

Spre exemplu, în cazul a numai două corpuri conductoare ($n=2$) „separate” printr-un dielectric, care formează un condensator electric cu capacitatea electrostatică C , când una dintre armături se va încărca cu o sarcină electrică q_1 și va avea un potențial electrostatic V_1 , cealaltă armătură se va încărca cu o sarcină electrică q_2 și va avea potențial electrostatic V_2 relațiile dintre aceste mărimi putând fi determinate cu ajutorul expresiei (2.46) sau (2.47) de definiție a capacității electrostatice C . Astfel, se va putea scrie:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} \text{ sau } C = \frac{q_2}{V_2 - V_1};$$

$$q_1 = C(V_1 - V_2) = CV_1 - CV_2 \text{ și } q_2 = C(V_2 - V_1) = CV_2 - CV_1;$$

$$V_1 = \frac{CV_2 - q_2}{C} = V_2 - \frac{q_2}{C} \text{ și } V_2 = \frac{CV_1 - q_1}{C} = V_1 - \frac{q_1}{C}.$$

Maxwell a extins aceste formule la un sistem electrostatic liniar format din n conductoare omogene, izolate printr-un dielectric omogen, izotrop, liniar ($\epsilon = \text{const.}$), fără polarizație electrică permanentă ($\bar{P}_p = 0$) și neîncărcat cu sarcini electrice

($q_v \left[\frac{C}{m^3} \right] = 0$) ca cel –oarecare– din figura 2.23 (în care doi conductori, „curenți”, au fost notați literele de indice curent, k și j).

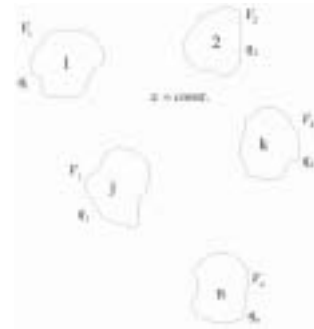


Fig. 2.23

Ecuțiile de potențial electrostatic

Se definesc, mai întâi, așa-numiții *coeficienți de potențial* α_{jk} prin:

$$\alpha_{jk} = \frac{V_{jk}}{q_k} \Rightarrow q_j = 0, j, k = 1, 2, \dots, n, j \neq k, \quad (M1)$$

unde q_k este sarcina electrică cu care este încărcat corpul k și V_{jk} reprezintă potențialul electrostatic la care ajunge corpul j datorită „influenței” corpului k . Pentru corpul luat ca referință, k , coeficientul α_{kk} , numit coeficient de potențial propriu, este:

$$\alpha_{kk} = \frac{V_k}{q_k} \Rightarrow q_j = 0, j = 1, 2, \dots, n, k-1, k+1, \dots, n \quad (M2)$$

Datorită reciprocității (considerându-se, pe rând $q_k \neq 0$ și apoi $q_j \neq 0$) reiese:

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj}, j, k = 1, 2, \dots, n \text{ cu } j \neq k. \quad (M3)$$

Pentru că mediul este liniar, se poate aplica teorema superpoziției câmpurilor electrostatice astfel că potențialul electrostatic V_j , al unui corp $j = 1, 2, \dots, n$, este egal cu suma potențialelor V_{jk} $k=1, 2, \dots, n$ produse „pe corpul $j=1, 2, \dots, n$ ” de fiecare din celelalte corpuri (dar și inclusiv j) cu sarcini electrice existente separat:

$$V_j = \sum_{k=1}^n V_{jk}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (M4)$$

Însă, potrivit definiției (M1), $V_{jk} = \alpha_{jk} q_k$ astfel că relația (M4) devine:

$$V_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} q_k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.54)$$

care reprezintă următorul sistem de ecuații algebrice liniare:

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \dots + \alpha_{1n} q_n \\ V_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \dots + \alpha_{2n} q_n \\ \vdots \\ V_n = \alpha_{n1} q_1 + \alpha_{n2} q_2 + \dots + \alpha_{nn} q_n \end{cases} \quad (2.54')$$

sau matriceal:

$$(2.54'') \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{q},$$

unde \mathbf{V} este matricea coloană a potențialelor electrostatice ale celor n corpuri conductoare:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, q \text{ este matricea sarcinilor electrice ale conductorilor: } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \text{ iar } \alpha \text{ este matricea:}$$

$$(M5) \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

care este o matrice pătratică de tip simetric (deoarece $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$)

Ecuțiile de sarcini electrice

Rezolvându-se sistemul (2.54) în raport cu sarcinile q_1, q_2, \dots, q_n , se obține o altă formă a ecuațiilor lui Maxwell referitoare la capacități și anume ecuațiile pentru determinarea sarcinilor electrice ale corpurilor conductoare:

$$(2.55) \quad \alpha = \alpha^{-1} \mathbf{V},$$

unde α^{-1} este matricea inversă a matricei α dată de (M5).

Notându-se:

$$(M6) \quad \alpha^{-1} = \beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix},$$

ecuația (2.55) devine:

$$(2.55') \quad \mathbf{q} = \beta \mathbf{V},$$

care este forma matriceală a ecuațiilor lui Maxwell cu privire la sarcinile electrice.

Termenii β_{kj} ai matricei (M6) se calculează cu relația cunoscută de la Algebră, privind inversarea matricelor și anume:

$$(M7) \quad \beta_{kj} = (-1)^{k+j} \frac{\det \alpha_{kj}}{\det \alpha},$$

în care $\det \alpha_{kj}$ este determinatul minorului din matricea transpusă a lui α (ștergându-se linia k și coloana j pe care se găsește acel element, iar $\det \alpha$ este determinantul matricei α din relația (M5).

Așa cum rezultă din ecuația (2.55') elementele matricei β au dimensiuni de capacitate: $[\beta] = [q][V]^{-1} = [C]$ de aceea elementele β_{kj} poartă denumirea de *coeficienți de capacitate*. Ei pot fi de valoare pozitivă –dacă $j+k$ este un număr par, sau negativă– dacă $j+k$ este un număr impar, ceea ce rezultă din formula (M7). Tot din motive de reciprocitate $\beta_{kj} = \beta_{jk}$ iar β_{jj} (elementele de pe diagonala matricei β) sunt întotdeauna pozitive.

Matricea inversă $\alpha^{-1} = \beta$ este foarte ușor de programat și calculat cu ajutorul produsului MATLAB (v. § 2.7.4).

Ecuația matriceală (2.55') se poate scrie și sub forma unui sistem de n ecuații algebrice liniare:

$$q_k = n \sum_{j=1} \beta_{kj} V_j, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.55'')$$

sau:

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{11}V_1 + \beta_{12}V_2 + \dots + \beta_{1n}V_n \\ q_2 = \beta_{21}V_1 + \beta_{22}V_2 + \dots + \beta_{2n}V_n \\ \dots \\ q_n = \beta_{n1}V_1 + \beta_{n2}V_2 + \dots + \beta_{nn}V_n \end{cases} \quad (2.55''')$$

Întotdeauna coeficienții de capacitate electrostatică $\beta_{ij} > 0$, iar coeficienții $\beta_{kj} < 0 \Rightarrow k \neq j$ – conform relației (M7), fiind numiți și *coeficienți de influență electrostatică*.

Ecuțiile de capacitate

Reprezintă a treia formă a ecuațiilor lui Maxwell referitoare la capacitățile electrostatice și se obține din sistemul (2.55''') prin adăugarea lui 0 fiecărei ecuații în forma unei sume pozitive de termeni și exact a aceleiași sume –însă negative– de aceeași termeni.

Astfel, dacă primei ecuații a sistemului (2.55'') i se adaugă 0 (ceea ce nu modifică, în fond, cu nimic ecuația) sub forma:

$$0 = \sum_{j=2}^n \beta_{1j} V_j - \sum_{j=2}^n \beta_{1j} V_1,$$

va rezulta:

$$q_1 = \beta_{11}V_1 + \beta_{12}V_2 + \dots + \beta_{1n}V_n + \beta_{12}V_1 + \beta_{13}V_1 + \dots + \beta_{1n}V_1 - \beta_{12}V_1 - \beta_{13}V_1 - \dots - \beta_{1n}V_1$$

și distribuindu-se convenabil termenii se va obține:

$$q_1 = (\beta_{11} + \beta_{12} + \dots + \beta_{1n})V_1 + \beta_{12}(V_2 - V_1) + \beta_{13}(V_3 - V_1) + \dots + \beta_{1n}(V_n - V_1),$$

care, cu notația $\beta_{11} + \beta_{12} + \dots + \beta_{1n} = C_{10}$, $V_1 = V_1 - V_0 = U_{10}$ (unde V_0 este potențialul electrostatic de referință), $V_2 - V_1 = U_{12}, \dots, V_n - V_1 = U_{1n}$, $\beta_{12} = -C_{12}, \dots, \beta_{1n} = -C_{1n}$, ia forma definitivă :

$$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \dots + C_{1n}U_{1n}. \quad (M8)$$

Procedându-se astfel și cu celelalte ecuații ale sistemului (2.55'''), adică:

- ecuației a doua adăugându-i-se și scăpându-i-se termenii:

$$\sum_{j=1}^n \beta_{2j} V_j \quad \text{cu } j \neq 2$$

și ducându-se apoi la o formă ca (M8),

- ultimei ecuații adăugându-i-se și scăzându-i-se termenii:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \beta_{nj} V_n \quad \text{cu } j \neq 2$$

și ducându-se apoi la o formă ca (M8), se obține sistemul:

$$q_k = C_{k0}U_{k0} + \sum_{j=1}^n C_{kj}U_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.56)$$

ce reprezintă *ecuațiile de capacitate ale lui Maxwell*, în care:

$$C_{k0} = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad C_{kj} = -\beta_{kj} = -\beta_{jk} = C_{kj}, \quad U_{k0} = V_k - V_0 \quad \text{și} \quad U_{kj} = V_k - V_j.$$

Sistemul (2.56) se poate scrie și dezvoltat, devenind:

$$(2.56') \quad \begin{cases} q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \dots + C_{1n}U_{1n} \\ q_2 = C_{20}U_{20} + C_{21}U_{21} + C_{23}U_{23} + \dots + C_{2n}U_{2n} \\ q_3 = C_{30}U_{30} + C_{31}U_{31} + C_{32}U_{32} + \dots + C_{3n}U_{3n} \\ \vdots \\ q_n = C_{n0}U_{n0} + C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \dots + C_{n,n-1}U_{n,n-1} \end{cases}$$

În această formă, sistemul (2.56') exprimă sarcina electrică totală a unui corp conductor ca sumă a sarcinilor electrice a unor condensatoare fictive care ar fi între corpurile conductoare (ca armături) și corpul conductor și un conductor situat la infinit (deci de potențial $V_0=0$).

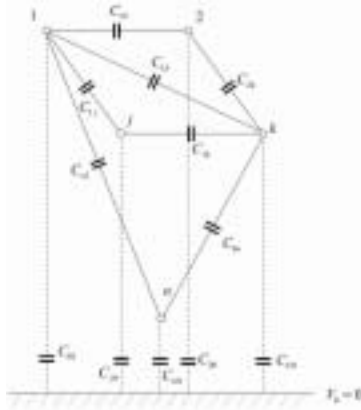


Fig. 2.24

În acest fel sistemul de corpuri din figura 2.23 poate fi înlocuit, din punctul de vedere al stării electrostatice, cu sistemul de condensatoare din figura 2.24, unde punctul la infinit (de potențial electrostatic $V_0=0$) este considerat pământul.

În sistemul (2.56') al ecuațiilor lui Maxwell referitoare la capacitățile electrostatice (cu corespondent în figura 2.24), coeficienții de tip capacitate electrostatică au semnificația:

C_{k0} , $k=1,2,\dots,n$ – capacitățile parțiale față de pământ;

C_{kj} , $k,j=1,2,\dots,n$ – capacitățile parțiale între corpurile

conductoare, care satisfac relațiile $C_{ij} = C_{ji}$ și $C_{ij} > 0$, așa cum rezultă din relațiile (M7) și (M8)

2.5.4. Circuite cu condensatoare în regim electrostatic

În multe aplicații tehnice se întâlnesc sisteme de condensatoare electrice (unele existând ca atare, sub formă de componente de circuit, iar altele datorându-se unor conexiuni, unor borne, unor porți de intrare, fiind considerate elemente parazite etc.) conectate după o anumită schemă, sub forma unor circuite, numite circuite cu condensatoare. Dacă la anumite perechi de borne de acces (numite și “porți”) se aplică –de la niște surse electrice de curent continuu (v. cap.4)– tensiuni electrice continue (constante în timp), se produce un proces de încărcare a condensatoarelor din schemă –care este un proces tranzitoriu (v. §8.8.1)– după care –dacă în schemă nu se produce nici o modificare și tensiunile la bornele de acces ale circuitului (de “alimentare”) rămân la aceeași valoare ca cea inițială– circuitul cu condensatoare intră în regim electrostatic și el se numește *circuit cu condensatoare electrice în regim electrostatic*.

Un astfel de circuit este caracterizat de:

- inexistența curenților electrice (nici de conducție și nici de deplasare –v. cap.4), deci $i=0$ și $\bar{J}=0$ peste tot (adică prin orice suprafață și –respectiv– în orice punct);

- capacitățile electrice ale condensatoarelor sunt constante (invariabile în timp) și nici un element al circuitului (armături de condensatoare și conductoare de legătură) nu se deplasează (sunt imobile);

- sarcinile electrice ale armăturilor și potențialele lor rămân constante, invariabile în timp ($q_k=\text{const.}$, $V_k=\text{const.}$, $k=1,2,\dots,n$);

- tensiunile electrice continue de la bornele de alimentare (de acces) ale circuitelor își păstrează mereu aceeași valoare.

Pentru un astfel de circuit cu condensatoare în regim electrostatic se pune problema ca fiind date: tensiunile electrice constante de la bornele de acces ale circuitului și capacitățile electrostatice ale tuturor condensatoarelor electrice, să se determine sarcinile electrice cu care s-au

încărcat condensatoarele și tensiunile electrostatice la bornele lor (adică q_k și U_k , $k=1,2,\dots,n$), în regim electrostatic permanent. Aceasta este problema de bază, dar –între datele și rezultatele cerute de probleme se pot face anumite “transferuri” (ca de pildă fiind date anumite tensiuni la bornele condensatoarelor electrice și sarcini electrice pe armături, să se stabilească ce capacitate electrostatică ar trebui să aibă condensatoarele pentru ca distribuția de tensiuni și sarcini electrice date să se poată realiza). Toate aceste variante de probleme sunt posibile cu condiția ca numărul de necunoscute să fie egal cu numărul de ecuații pe care îl are modelul de analiză a circuitului cu condensatoare electrice.

Din punctul de vedere topologic, circuitul cu condensatoare electrice este caracterizat simultan de:

- numărul n de noduri, un nod fiind acel “loc” al circuitului unde sunt conectate mai multe armături de condensatoare electrice sau/și borne de alimentare (+ sau –);
- numărul l de laturi ale circuitului, o latură fiind porțiunea de circuit fără derivații dintre două noduri adiacente, în lungul căreia pot fi conectate în serie mai multe condensatoare electrice sau/și surse de alimentare.

Metodele care descriu regimul electrostatic al unui circuit cu condensatoare se bazează pe aplicarea la noduri a legii conservării sarcinilor electrice (v. §1.3.9) și în bucle (ochiuri închise ale circuitului) a teoremei potențialului electrostatic (v. §2.2.3). La aplicarea lor se va avea în vedere faptul specific regimului electrostatic și anume: curenții electrice de conducție fiind de intensitate nulă, nu se produc căderi de tensiune (v. cap. 8) în conductoarele de legătură și în surse (ale căror rezistențe electrice nu au importanță în regim electrostatic), iar intensitatea câmpului electrostatic este nulă și are $\int_{cond} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

Aplicarea legii conservării sarcinii electrice la noduri (de fapt printr-o suprafață închisă Σ care trece prin dielectricul celor p condensatoare conectate într-un nod k , așa ca în figura 2.25) înseamnă:

$$i_{\Sigma} = -\left. \frac{dq}{dt} \right|_{\Sigma} \rightarrow 0 = -\left. \frac{dq}{dt} \right|_{\Sigma} \text{ sau } \frac{dq}{dt} (q_1 + q_2 + \dots + q_p) = 0$$

și deoarece sarcinile sunt constante în timp, reiese:

$$(q_1 + q_2 + \dots + q_p)_k = 0 \text{ sau } \sum_{j=1}^p q_j = 0 \text{ în } \forall k \in (n-1), p \in N, \quad (2.57)$$

în care sarcinile electrice au semnul + sau – corespunzător semnelui armăturii (bornei) condensatorului conectată la nodul considerat.

Aplicarea teoremei potențialului electrostatic pe un contur închis o , alcătuit din r laturi de rețea ce conțin condensatoare C_k și surse cu tensiune electrică U_s la borne –calculată în lungul unei curbe prin sursă– ca cel din figura 2.26 (unde A și B sunt două borne de alimentare, iar E_1 și E_3 sunt două surse de curent continuu) permite scrierea modelelor:

$$\oint_{\Gamma_o} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^r U_k = \sum_{k=1}^{r_c} U_{ck} + \sum_{k=1}^{r_s} U_{sk} = 0, \quad r, r_s, r_c \in N$$

în care Γ_o este o curbă închisă prin ochiul o (dusă prin dielectricul condensatoarelor – unde este câmp electrostatic, prin interiorul surselor – unde există condiția de echilibru $\vec{E}_c = -\vec{E}_i$ și prin conductoarele de legătură – unde $\vec{E} = 0$), U_{ck} este tensiunea la bornele condensatoarelor –dată de $\int_{+ \rightarrow -} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = U_c$, U_{sk} este tensiunea la bornele surselor electrice dată de $\int_{+ \rightarrow -} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_{+ \rightarrow -} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = U_{sk}$, r

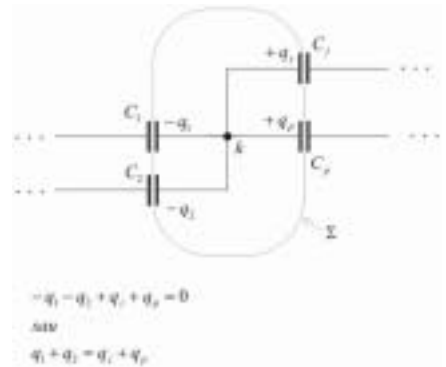


Fig. 2.25

este numărul de laturi al ochiului o ($r = 4$ în figura 2.26), r_s este numărul de surse electrice din ochiul o și r_c este numărul de condensatoare electrice din ochiul o . Deoarece, conform definiției (2.47), $U_{ck} = q_k/C_k$ și ținându-se seama de sensul de parcurs al ochiului (indicat în figura 2.26 prin săgeata Γ_o) și de semnul (polaritatea) bornelor condensatoarelor electrice și surselor, ultima relație devine:

$$(2.58) \quad \sum_{k=1}^{r_c} \frac{q_k}{C_k} + \sum_{k=1}^{r_s} U_{sk} = 0, \quad r_c, r_s \in \mathbb{N}, \text{ în } \forall o \in (l - n + 1).$$

Scriindu-se, pentru un circuit cu condensatoare dat, ecuația (2.57) pentru $n-1$ noduri (a n -a ecuație, scrisă pentru al n -lea nod fiind o combinație liniară a celorlalte $n-1$ ecuații, nu este deci distinctă) și ecuația (2.58) pentru $l-(n-1)=l-n+1$ ochiuri, se obține un sistem de l ecuații algebrice

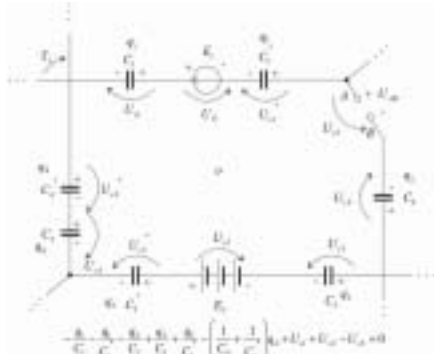


Fig. 2.26

având cele l necunoscute sarcinile electrice ale condensatoarelor din laturi: q_k , $k = 1, 2, \dots, l$ (chiar dacă într-o latură sunt mai multe condensatoare legate în serie: C_k, C'_k, C''_k, \dots , sarcina condensatoarelor este aceeași q_k – v. fig. 2.26). Rezolvând sistemul astfel creat, se determină sarcinile electrice ale condensatoarelor q_k și apoi tensiunea electrostatică de la bornele lor $U_k = q_k/C_k$, problema fiind astfel rezolvată.

În paragraful 2.7.3 sunt date două exemple de calcul a circuitelor cu condensatoare în regim electrostatic, dintre care unul –cu mai multe laturi– are sistemul de ecuații (2.57) și (2.58) rezolvat prin produsul informatic MATLAB.

2.6. Energia și acțiuni ponderomotoare în câmpul electrostatic

Această temă a fost tratată la modul general, ca energie a câmpului electromagnetic, în paragraful 1.5.3 (“Teorema energiei electromagnetice”) și parțial (referitor la forțele în câmp electrostatic) în §2.2.3 (v. subparagraful “Forțe de natură electrostatică”). În acest subcapitol revenim cu câteva precizări specifice câmpului electrostatic.

2.6.1. Energia câmpului electrostatic

După cum s-a arătat, dacă într-un domeniu de existență a câmpului electromagnetic, s-a produs și stabilizat în timp un câmp electrostatic, descris în fiecare punct al domeniului Ω de mărimile de stare \vec{D} și \vec{E} existente numai în afara corpurilor conductoare –în dielectricul ce le înconjoară $\Omega_d = \Omega - \Omega_c$ (unde Ω_c este mulțimea punctelor din interiorul tuturor corpurilor conductoare aflate în Ω)– atunci în câmpul electrostatic s-a “acumulat” o energie electrică dată de (1.111’), adică:

$$w_e = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \quad \Leftarrow \forall P \in \Omega_d \quad .$$

Integrându-se această relație pentru întreg volumul v_d “ocupat” de dielectric (Ω_d), se va putea determina energia existentă în întreg domeniul Ω al sistemului electrostatic, deoarece în interiorul corpurilor conductoare câmpul electrostatic este nul iar corpurile sunt imobile. Va rezulta:

$$W_{e,\Omega} = \int_{\forall v} w_e dv = \int_{\forall v} \frac{\bar{D} \cdot \bar{E}}{2} dv, \quad (2.59)$$

care permite, deci, calculul energiei totale din câmpul electrostatic Ω , lipsit însă de discontinuități.

În continuare se vor stabili câteva expresii ale energiei din câmpul electrostatic al unor cazuri specifice.

Energia din câmpul electrostatic al unui sistem de conductori încărcăți cu sarcini electrice. Să presupunem că într-un mediu dielectric Ω_d omogen, izotrop, liniar (cu permitivitatea absolută ϵ constantă, independent de intensitatea locală a câmpului electric), fără polarizație permanentă ($\bar{P}_p = 0$) și fără sarcini electrice ($q_v [C/m^3] = 0$) se află n corpuri conductoare ($1, \dots, k, \dots, n$) care –pentru început– nu sunt încărcate cu sarcini electrice (adică inițial: $q_{10} = \dots = q_{k0} = \dots = q_{n0} = 0$). Să mai presupunem că se dorește ca acești conductori să se încarce, treptat și atât de lent, încât în permanență sistemul $\Omega_d U \Omega_c$ (dielectric și conductori) să se afle în regim permanent electrostatic. În acest scop se va folosi un corp de probă (punctiform și cu sarcină electrică pozitivă elementară $q_{cp} = dq$) adus din afara sistemului $\Omega_d U \Omega_c$, adică de la infinit (unde potențialul electrostatic de referință este $V_0 = V_\infty = 0$). Corpul de probă, printr-un lucru mecanic L_{ext} (prestat de un alt sistem, exterior celui analizat) se va deplasa lent și izoterm (pentru a se păstra mereu echilibrul electrostatic, adică fără dezvoltare sau transfer de căldură), aducând sarcini electrice elementare ($dq = q_{cp}$) din afara sistemului (de la infinit) pe un traseu oarecare Γ_k ($k=1, 2, \dots, n$) până la conductorul k ($k=1, 2, \dots, n$) căruia îi va ceda sarcina sa, încărcând corpul conductor k cu sarcina adusă de el, astfel că la o anumită etapă a procesului sarcina electrică a corpului k ajunge la o valoare intermediară $q_{k\lambda}$, cuprinsă între valoarea inițială (adică zero) și cea finală (adică Q_k), așa cum se arată în figura 2.27.

Deoarece, la o anumită etapă λ a acestui proces, $0 < q_{k\lambda} < Q_k$, sarcina electrică q_k (ce încarcă “provizoriu”) conductorul k poate fi exprimată ca o fracțiune λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) din sarcina electrică finală cu care va fi încărcat corpul:

$$q_{k\lambda} = \lambda Q_k \quad (e1)$$

și atunci aportul elementar de sarcină electrică se va exprima prin:

$$dq (= q_{cp}) = Q_k d\lambda. \quad (e2)$$

Pe măsură ce corpul conductor k se va încărca cu sarcină electrică, în punctele domeniului Ω_d deci și de pe traseul Γ_k , se va produce un câmp electrostatic cu o valoare “provizorie” \bar{E}_λ . Atunci în “drumurile” sale de la infinit la corpul k , corpul de probă va fi supus unei forțe de natură electrostatică: $\bar{F} = q_{cp} \bar{E}_\lambda$, care este o forță elementară, deoarece $q_{cp} = dq$:

$$d\bar{F} = \bar{E}_\lambda dq = \bar{E}_\lambda Q_k d\lambda \quad \Leftarrow \forall P \in \Gamma_k, k = 1, 2, \dots, n. \quad (e3)$$

Însă această forță tinde să “scoată” corpul de probă din câmp, împotriva procesului de încărcare treptată a conductorului k . De aceea, este necesar ca –din exterior– să se acționeze cu o forță $d\bar{F}_{ext}$ care –la limită, în echilibru electrostatic– să fie egală cu forța electrică, adică:

$$d\bar{F}_{ext} = -d\bar{F} \quad \therefore d\bar{F}_{ext} = -q_{cp} \bar{E}_\lambda = -\bar{E}_\lambda dq = -\bar{E}_\lambda Q_k d\lambda. \quad (e4)$$

Acest proces, de încărcare cu sarcini electrice de la 0 la o valoare “definitivă” Q_k , se va executa (treptat și lent, pe traiectorii Γ_k) pentru toate corpurile, pe rând, adică pentru $k=1, 2, \dots, n$ până când sistemul va ajunge într-o stare electrostatică caracterizată de: Q_1, Q_2, \dots, Q_n și V_1 ,

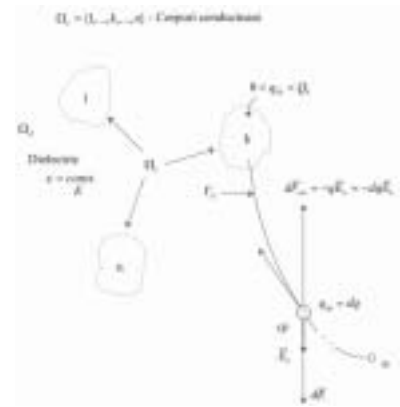


Fig. 2.27

V_2, \dots, V_n pe toate corpurile conductoare ale lui Ω_c , precum și de $\bar{E}(P)$ și $\bar{D}(P)$ în toate punctele lui Ω_d . În această situație finală, sistemul electrostatic $\Omega_d U \Omega_c$ va “cumula” o energie electrică, rezidentă în dielectricul Ω_d cu o densitate de volum $\frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E}$ [W/m³], care provine în totalitate (în condițiile “speciale” evidențiate mereu până aici) din lucrul mecanic total L_{ext} , ce trebuie depus din exterior pentru a aduce sarcinile electrice de la infinit (din afara sistemului $\Omega_d U \Omega_c$) în ”pozițiile” pe care le ocupă în Ω_c (adică pentru a încărca corpurile conductoare, inițial fără sarcini electrice, cu sarcinile electrice definitive Q_k , $k=1, 2, \dots, n$).

Considerând, mai întâi, unul dintre corpuri (k), pentru ca sarcina electrică a lui, $q_{k\lambda}$, să crească (spre Q_k) cu dq și potențialul electrostatic al corpului conductor să crească de la $V_{k\lambda}$ (spre V_k) cu dV , prin aducerea corpului de probă electrizat cu $q_{cp}=dq$ de la ∞ la k pe o traiectorie Γ_k (v. fig. 2.27) va trebui efectuat un lucru elementar:

$$(e5) \quad d_{\uparrow} L_{ext k} = \int_{\Gamma_k: \infty \rightarrow k} d\bar{F}_{ext} \cdot d\bar{l} = \int_{\Gamma_k: \infty \rightarrow k} -dq \bar{E}_{k\lambda} \cdot d\bar{l} = Q_k d\lambda \int_{\Gamma_k: \infty \rightarrow k} -\bar{E}_{k\lambda} \cdot d\bar{l},$$

în care simbolul d_{\uparrow} reprezintă nu operatorul diferențial din Analiza matematică, ci o creștere elementară a mărimii de proces “lucru mecanic”.

Deoarece, conform definiției potențialului electrostatic (1.38), integrala din expresia (e5) reprezintă potențialul electrostatic $V_{k\lambda}$ (al conductorului k în etapa λ de încărcare electrică), deci deoarece:

$$(e6) \quad - \int_{\Gamma_k: \infty \rightarrow k} \bar{E}_{k\lambda} \cdot d\bar{l} = V_{k\lambda} - V_{\infty} = V_{k\lambda} \quad \Leftarrow \quad V_{\infty} = 0,$$

atunci relația (e5) ia forma:

$$(e7) \quad d_{\uparrow} L_{ext k} = dq V_{k\lambda} = Q_k d\lambda V_{k\lambda} = Q_k \lambda V_k d\lambda = Q_k V_k \lambda d\lambda,$$

în care potențialul electrostatic al corpului în etapa λ de încărcare electrică $V_{k\lambda}$, care este o fracțiune subunitară λ din potențialul electrostatic final V_k al conductorului k , poate fi scris și el sub forma:

$$(2.54) \quad V_{k\lambda} = \lambda V_k,$$

ceea ce este în conformitate cu ecuațiile lui Maxwell de potențial electrostatic.

Aplicându-se principiul conservării energiei (deoarece în discuție sunt numai două sisteme izolate de restul, cel electrostatic $\Omega_d U \Omega_c$ împreună cu cel exterior ce “oferă” lucrul mecanic de încărcare cu sarcini electrice a lui Ω_c) transformarea considerată fiind reversibilă (existând două forțe contrare $d\bar{F}_{ext}$ și $d\bar{F}$ –v. fig. 2.27) și izotermă, acest lucru mecanic elementar (e7) –singurul efectuat, deoarece corpurile din Ω_c sunt imobile– este egal cu diferențiala exactă a energiei electrice W_{ek} necesară încărcării corpului conductor de la 0 la sarcina electrică Q_k și potențialul V_k :

$$(e8) \quad d_{\uparrow} L_{ext k} = dW_{ek} = Q_k V_k \lambda d\lambda.$$

Atunci energia pe care o dobândește câmpul electrostatic când este încărcat numai conductorul k cu sarcina electrică Q_k , la potențialul electrostatic V_k , se determină prin integrarea (de-a lungul întregului proces) a lui dW_{ek} dat de (e8). Se obține:

$$(e9) \quad W_{ek} = \int dW_{ek} = \int_0^1 Q_k V_k \lambda d\lambda = Q_k V_k \int_0^1 \lambda d\lambda = Q_k V_k \left| \frac{\lambda^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} Q_k V_k.$$

În același mod se va proceda cu fiecare corp conductor în parte ($1, 2, \dots, n$) dacă ar exista singur în Ω_d . Pentru că Ω_d este un domeniu dielectric liniar (cu $\epsilon = \text{constant}$, independent de \bar{E} , \bar{D} , V și q), energia electrică din câmpul electrostatic cu n conductoare existente simultan și încărcate cu sarcinile electrice Q_1, Q_2, \dots, Q_n , situate la potențialele electrostatice V_1, V_2, \dots, V_n este dată de suma:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k. \quad (2.60)$$

Energia electrică din dielectricul unui condensator. Se determină imediat cu ajutorul expresiei (2.60) în care $n = 2$ adică cele două armături (conductoare) ale condensatorului, care în regim electrostatic sunt încărcate cu sarcinile electrice, $q_1 = -q_2 = q$ și se află la potențialele electrostatice V_1 și V_2 (deci la o tensiune electrică $U = V_1 - V_2$). Va rezulta direct din (2.60), notând energia condensatorului cu W_{ec} :

$$W_{ec} = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2) = \frac{1}{2} q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad (2.61)$$

deoarece din definiția capacității electrostatice (2.47), rezultă $q = CU$ și $U = q/C$.

Conforma ultimei egalități (2.61), dacă se menține sarcina electrică de pe armături constantă (de exemplu prin suprimarea bruscă a tensiunii U de la bornele unui condensator deconectat din circuit), energia electrică a condensatorului W_{ec} va crește dacă capacitatea lui electrostatică C scade (ceea ce s-ar putea realiza dacă armăturile pot fi îndepărtate, când distanța d dintre ele crește sau dacă armăturile s-ar roti una față de cealaltă, când suprafața dintre armături A scade, știind că la un condensator plan $C = \epsilon A/d$). Acest fapt duce la concluzia că armăturile condensatorului sunt supuse la forțe de atracție, deoarece pentru a le îndepărta sau roti a trebuit să se depună un lucru mecanic din exterior.

Energia din câmpul electrostatic în care sunt suprafețe de discontinuitate. Să presupunem că într-un domeniu $\bar{\Omega}$, mărginit de $\Sigma = \text{Fr } \Omega$, se află și domenii cu suprafețe de discontinuitate: Σ_v –care închid un domeniu Ω_v în care există densitate de volum a sarcinii electrice q_v [C/m^3] și Σ_A – pe care există o repartiție de suprafață q_A [C/m^2] a sarcinii electrice (așa ca în figura 2.28).

În acest caz, energia pe care o are câmpul electrostatic în Ω , se poate calcula cu relația (2.59), dacă se separă, din Ω , domeniul de discontinuitate Σ_A cu niște suprafețe infintezimal vecine cu Σ_A^+ și Σ_A^- (fig. 2.28) și dacă produsul scalar $\bar{D} \cdot \bar{E}$ din membrul drept al relației (2.59) se înlocuiește cu:

$$\begin{cases} \bar{D} \cdot \bar{E} = V \nabla \cdot \bar{D} - \nabla \cdot (V \bar{D}) \text{ sau} \\ \bar{D} \cdot \bar{E} = V \text{div} \bar{D} - \text{div}(V \bar{D}) \end{cases}, \quad (e10)$$

relație care este prezentată în § 9.1.2, relațiile (9.29') și (9.29'') –în care se face înlocuirea de variabile $\varphi \equiv V$ și $\bar{E} \equiv \bar{D}$, rezultând că termenul din (9.29') $\bar{E} \text{grad} \varphi$ devine $\bar{D} \text{grad} V = -\bar{D} \bar{E}$ (deoarece $\text{grad} V = -\bar{E}$).

Ținându-se seama de (e10) și cele arătate în figura 2.28, relația (2.59) devine:

$$W_{e\Omega} = \int_{v_\Omega} \frac{1}{2} [V \text{div} \bar{D} - \text{div}(V \bar{D})] dv = \frac{1}{2} \int_{v_\Omega} V \text{div} \bar{D} dv - \frac{1}{2} \int_{v_\Omega} \text{div}(V \bar{D}) dv, \quad (e11)$$

unde v_Ω este volumul întregului domeniu Ω (v. fig. 2.28) și v_{Σ_A} este volumul închis de suprafața de discontinuitate Σ_A .

În ultima egalitate a relației (e11) se pot face înlocuirile:

- avându-se în vedere forma locală a fluxului electric (2.12) și anume $\text{div} \bar{D} = q_v$, prima integrală relativă la v_Ω se înlocuiește cu integrala de volum relativă numai la domeniile unde $q_v \neq 0$, adică la Ω_v (v. fig. 2.28), devenind:

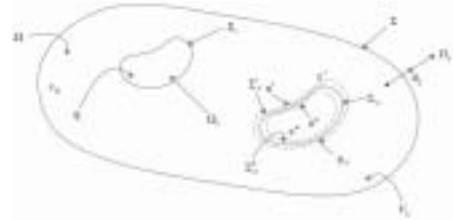


Fig. 2.28

$$(e12) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} V \operatorname{div} \bar{D} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} V q_v \, dv ;$$

- având în vedere formula lui Gauss-Ostrogradski (9.20), potrivit căreia integrala de volum a divergenței unui vector (care este densitatea de volum a fluxului) este egală cu fluxul prin suprafața închisă ce delimitează volumul a vectorului considerat (aici $V \bar{D}$), ultima integrală a egalității (e11) devine:

$$-\frac{1}{2} \int_{V_{\Sigma_A}} \operatorname{div}(V \bar{D}) \, dv = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} V \bar{D} \cdot \bar{dA} .$$

Pentru că la suprafețele de discontinuitate Σ_A , componenta normală a inducției electrice se conservă în cele două medii (cu $\varepsilon' \neq \varepsilon''$), adică $D_n' = D_n''$ la Σ_A , suprafața de discontinuitate Σ_A a fost înfinitesimal învâluită de cele două suprafețe Σ'_A (în mediul cu ε') și Σ''_A (în mediul cu ε''), așa ca în figura 2.28, astfel că integrala (e 13) devine:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} V \bar{D} \cdot \bar{dA} &= -\frac{1}{4} \int_{\Sigma'_A + \Sigma''_A = 2\Sigma_A} V \bar{D} \cdot \bar{dA} = -\frac{1}{4} \left[\int_{\Sigma'_A} V \bar{D}' \cdot \bar{n}' \, dA + \int_{\Sigma''_A} V \bar{D}'' \cdot \bar{n}'' \, dA \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\Sigma_A} V 2D_n \, dA = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} V D_n \, dA = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} V q_A D_n \, dA , \end{aligned}$$

deoarece: $\bar{dA}' = \bar{n}' \, dA$ și $\bar{dA}'' = \bar{n}'' \, dA$; $\bar{n}' = -\bar{n}''$; $(\bar{D}' - \bar{D}'') \cdot \bar{n}' = \bar{D}' \bar{n}' - \bar{D}'' \bar{n}' = \bar{D}' \bar{n}' - \bar{D}'' (-\bar{n}'') = \bar{D}' \bar{n}' - \bar{D}'' \bar{n}'' = D_n' + D_n'' = 2D_n$ pentru că $D_n' = D_n''$ (componentele normale la Σ_A ale vectorului inducției electrice se conservă) și -conform expresiei (2.38')- pe suprafețele cu densitate de suprafață q_A [C/m²] a sarcinii electrice $\bar{D}_n = q_A$.

Cu înlocuirile (e12), (e13) și apoi (e14), expresia (e11) a energiei electrice din câmpul electrostatic Ω capătă următoarea formă finală:

$$(2.62) \quad W_{e_\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} V q_v \, dv + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} V q_A \, dA - \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} V_\Sigma D_n \, dA ,$$

unde semnul minus al ultimei integrale se explică prin aceea că normala \bar{n} la frontiera Σ a domeniului Ω este spre exterior (v. fig.2.28).

În cazul general când în sistemul electrostatic există toate situațiile posibile (conductori încărcăți cu sarcini electrice, domenii Ω_v cu densități ale sarcinii electrice de volum q_v , suprafețe Σ_A cu densitate de suprafață a sarcinii electrice q_A și frontiera $\Sigma = \operatorname{Fr}\Omega$ este sub potențial V_Σ cu componenta normală D_n a inducției electrice), *energia electrică totală acumulată în sistemul electrostatic* este (în sistemele liniare ce admit superpoziția):

$$(2.63) \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_A} V q_A \, dA + \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} V q_v \, dv - \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} V_\Sigma D_n \, dA .$$

2.6.2. Acțiuni ponderomotoare în câmpul electrostatic

Prin acțiuni ponderomotoare se denumesc -la modul generic- toate efectele mecanice pe care le exercită un câmp electrostatic asupra corpurilor încărcate cu sarcini electrice sau/și polarizate electric permanent care se găsesc în câmp și care sunt imobilizate astfel încât, prin reacțiunile din elementele de fixare, să fie echilibrate acțiunile ponderomotoare, de sorginte electrică, împiedicând corpurile să se deplaseze și menținându-se, prin aceasta, starea de echilibru electrostatic a întregului sistem.

În particular aceste acțiuni ponderomotoare constau în forțe mecanice sau/și momente mecanice care –în Mecanică– mai poartă denumirea comună de *forțe generalizate*.

Coordonate și forțe generalizate. Forțele care se exercită asupra corpurilor aflate într-un câmp electric nu se pot calcula decât arareori cu ajutorul formulei lui Coulomb –v. expresia (2.21)– deoarece ea este valabilă în cazul cu totul particular al unor corpuri punctiforme situate într-un mediu dielectric uniform, sau –în cazul utilizării formulelor (2.30)– este necesară cunoașterea repartiției locale a sarcinilor electrice în fiecare punct P , prin $q_v(P)$ [în C/m^3] în $\forall P \in \Omega$, ceea ce –practic– se întâmplă foarte rar.

De aceea, s-au stabilit metode practice de calcul a acțiunilor ponderomotoare în câmpul electrostatic prin intermediul lucrului mecanic ce s-ar efectua la o deplasare ipotetică oarecare a corpurilor asupra cărora se exercită acțiunile mecanice. Aceste metode folosesc noțiunile de “coordonață generalizată” și de “forță generalizată” cunoscute din Mecanică.

Atunci când structura geometrică a unui sistem de corpuri se poate caracteriza complet cu ajutorul unui număr determinat de variabile scalare liniar independente, aceste variabile se numesc *coordonațe generalizate* –considerate ca parametri de poziție– ale sistemului, numărul lor numindu-se numărul gradelor de libertate ale sistemului de corpuri. Astfel, coordonatele generalizate pot fi: *distanțe* (așa cum sunt coordonatele carteziene x, y, z , ale punctelor sistemului), *unghiuri de rotație* (în jurul unui ax fix), *ariile unor suprafețe* variabile, volume, rețele de discretizare, elemente finite etc. Toate acestea, sub denumirea de coordonate generalizate vor fi notate –generic– cu litera x .

În cazurile în care configurația geometrică a unui sistem de corpuri are o variație infinitesimală, coordonatele generalizate capătă variații elementare notate cu dx , iar forțele (acțiunile ponderomotoare) care exercitându-se asupra sistemului de corpuri au dus la variația configurației lor geometrice realizează un lucru mecanic elementar $d_{\uparrow}L$ care dacă a variat numai o singură coordonață generalizată, se exprimă prin:

$$d_{\uparrow}L = Xdx, \quad (F1)$$

unde mărimea scalară notată cu X , ce reprezintă coeficientul variației coordonatei generalizate pentru a exprima egalitatea cu variația lucrului mecanic elementar se numește – la modul generic – *forță generalizată*, deși nu este întotdeauna chiar efectiv o forță. Astfel: dacă x este o deplasare, atunci X este componenta unei forțe propriu-zise în lungul deplasării x ; dacă x reprezintă un unghi de rotație, atunci X este momentul forțelor (în raport cu axa de rotație) care au produs rotația corpului cu unghiul x ; dacă x este o arie, atunci X reprezintă o tensiune (mecanică) superficială; dacă x este un volum, atunci X reprezintă o presiune etc.

Revenind la un sistem electrostatic format din n corpuri conductoare încărcate cu sarcini electrice, în care unul dintre corpuri (care poate să fie și un dielectric) notat cu c (fig. 2.29) se deplasează astfel încât o singură coordonață generalizată de a sa variază cu dx , asupra lui înseamnă că s-a exercitat –de către câmpul electric– o forță generalizată X de natură electrică, așa cum se arată în figura 2.29.

Presupunându-se că variațiile sarcinilor electrice (care se pot produce în acest caz) cât și micile deplasări ale corpului c , sunt suficient de mici și de lente încât starea de echilibru electrostatic a sistemului din figura 2.29 să se mențină în permanență, atunci –conform principiului conservării energiei– ecuația de bilanț energetic arată că lucrul mecanic elementar, efectuat de sursele de energie exterioare, va asigura toate variațiile elementare, dq , ale sarcinii electrice a corpurilor din sistem, care vor duce atât la creșterea (elementară) dW_e a energiei câmpului electric cât și la

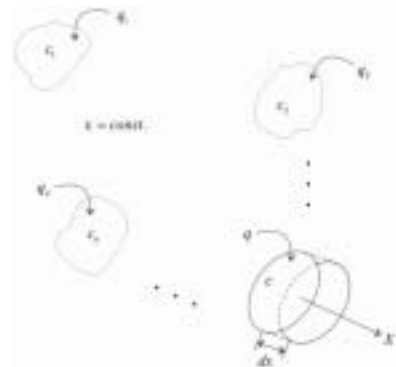


Fig. 2.29

efectuarea lucrului mecanic Xdx (de forța electrică X ce modifică poziția corpului c cu dx -v. fig. 2.29). Deoarece lucrul mecanic (elementar) produs de sursele de energie exterioară se determină cu relația (e7), prima egalitate a acestei relații devine (pentru toate corpurile din sistem):

$$(F2) \quad d_{\uparrow}L_{ext} = \sum_{k=1}^n V_k dq_k$$

și atunci ecuația de bilanț energetic (elementar) pentru un sistem ca cel din figura 2.29 devine:

$$(F3) \quad d_{\uparrow}L_{ext} = dW_e + Xdx \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^n V_k dq_k = dW_e + Xdx.$$

Teoremele forțelor generalizate în electrostatică. Se deduc din relația de bilanț energetic (F3), în care se consideră două cazuri posibile (de interes practic):

1° sarcinile electrice ale celor n corpuri rămân constante atunci când se exercită forța generalizată X , adică $q_1=\text{const.}$, $q_2=\text{const.}$, ..., $q_n=\text{const.}$ ceea ce implică $dq=0$, astfel că relația (F3) devine:

$$(F4) \quad 0 = dW_e \Big|_{q=\text{const.}} + Xdx \quad \text{sau} \quad Xdx = -dW_e \Big|_{q=\text{const.}}$$

de unde rezultă:

$$(2.64) \quad X = - \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{q=\text{const.}}$$

ceea ce înseamnă că lucrul mecanic efectuat de forțele electrice X din câmp pentru deplasarea unui corp cu dx ($Xdx > 0$) se efectuează pe seama energiei câmpului electric, care atunci va scădea cu $dW_e < 0$, conform ecuației de bilanț energetic (F4). Aceasta se explică prin faptul că $dq=0$ înseamnă că sursele de energie exterioare sunt deconectate și atunci orice “cheltuială” de lucru mecanic (ca, de exemplu, Xdx) se face pe seama energiei proprii a câmpului electric (prin variația ei parțială, după direcția x). Modelul (2.64) este o primă formă a teoremei forțelor generalizate în câmp electrostatic;

2° în procesul de variație a configurației sistemului (v. fig. 2.29) potențialele electrostatice ale tuturor corpurilor se mențin constante ($V_k=\text{const.}$ $k=1,2,\dots,n$), ceea ce –practic– se întâmplă atunci când toate cele n corpuri sunt conectate la surse electrice exterioare cu tensiune constantă la borne, care transmit sistemului de corpuri sarcinile electrice suplimentare dq_k ($k=1,2,\dots,n$), astfel că ecuația de bilanț (F3) devine:

$$(F5) \quad \sum_{k=1}^n V_k dq_k = dW_e \Big|_{V=\text{const.}} + Xdx.$$

În acest fel, dacă $V_k=\text{const.}$ ($k=1,2,\dots,n$), mediul dielectric este liniar ($\epsilon=\text{const.}$) și sarcina electrică ce încarcă corpurile, în procesul elementar, sunt $Q_k=dq_k$ ($k=1,2,\dots,n$) relația (2.60) devine:

$$(F6) \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k Q_k \quad \rightarrow \quad dW_e \Big|_{V=\text{const.}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k,$$

care introdusă în ecuația de bilanț (F5) conduce la:

$$\sum_{k=1}^n V_k dq_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k + Xdx,$$

de unde rezultă, ținându-se seama de egalitatea (F6):

$$Xdx = \sum_{k=1}^n V_k dq_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k \equiv dW_e \Big|_{V=\text{const.}}$$

astfel că:

$$X = \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{V=\text{const.}} \quad (2.65)$$

ce constituie o a doua formă a teoremei forțelor generalizate în câmp electrostatic, care este complet echivalentă cu prima formă (2.64), adică dau întotdeauna același rezultat în determinarea forței generalizate X .

Forța de atracție dintre armăturile unui condensator. După cum s-a mai arătat, energia unui condensator încărcat este dată de una dintre relațiile (2.61), astfel că prima metodă de calcul a forței –prin folosirea teoremei (2.64)– conduce la :

$$X = -\frac{\partial W_{ec}}{\partial x} \Big|_{V=const.} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right)_{q=const.} = -\frac{1}{2} q^2 \left(-\frac{1}{C^2} \frac{dC}{dx} \right) = \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx}, \quad (2.66)$$

Aplicându-se forma a doua (2.65) a teoremei forțelor generalizate, rezultă:

$$X = -\frac{\partial W_{ec}}{\partial x} \Big|_{V=const.} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(V_1 - V_2)^2}{2} C \right]_{V=const.} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 C \right)_{U=const.} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}. \quad (2.66')$$

După cum se constată, relațiile (2.66) și (2.66') sunt identice, deoarece $q=CU$.

În cazul unui condensator plan (fig. 2.30, în care s-a reprezentat armătura 1 ca fiind fixată, iar armătura 2 ca fiind posibil să se deplaseze după axa x normală pe suprafața armăturii) rezultă – știindu-se că $C=\epsilon A/x$ și aplicându-se formula (2.66):

$$F = \frac{q^2}{2C} \frac{d}{dx} \left(\epsilon \frac{A}{x} \right) = -\frac{q^2}{2C} \frac{\epsilon A}{x^2}, \quad (2.67)$$

Ceea ce arată (prin semnul -, față de sensul pozitiv ales pentru axa x - v. fig. 2.30) că forța F este o forță de atracție între armăturile condensatorului.

Același rezultat se obține și cu formula (2.66'):

$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{dx} \left(\epsilon \frac{A}{x} \right) = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon A}{x^2},$$

deoarece $q^2/C^2=U^2$.

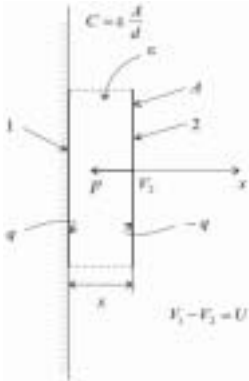


Fig. 2.30

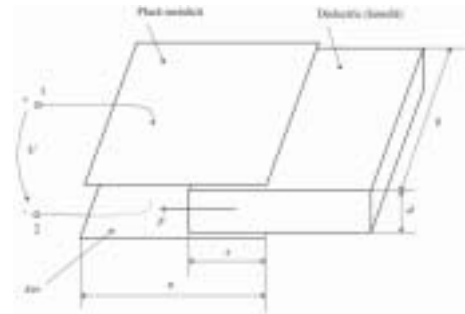


Fig. 2.31

Dacă printr-un sistem de reacție (de exemplu un arc spinal) se echilibrează forța F de atracția a armăturilor, $\bar{F} + \bar{F}_r = 0$ (unde $F_r=K_r x$ este forța ce se exercită în arcul spinal atunci când el este deformat cu săgeata x , egală cu deplasarea armăturii mobile), rezultă:

$$\bar{F} + \bar{F}_r = 0 \rightarrow \bar{F} = -\bar{F}_r \rightarrow \frac{q^2}{2C^2} \frac{\epsilon A}{x^2} = K_r x \text{ sau } \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon A}{x^2} = K_r x,$$

ceea ce înseamnă că fiind dată constanta arcului spinal K_r se pot determina, prin măsurarea deplasării x , tensiunea la bornele condensatorului.

$$\bar{U} = \sqrt{K_r \frac{2x^3}{\epsilon A}} = K_U x^{3/2},$$

precum și sarcina electrică:

$$q = \sqrt{K_r C \frac{2x^3}{\varepsilon A}} = \sqrt{K_r \frac{\varepsilon^2 A^2 2x^3}{x^2 \varepsilon A}} = \sqrt{2K_r \varepsilon A x} = K_q x^{1/2},$$

unde K_U este constanta aparatului conceput ca voltmetru electrostatic (ce va avea o scară neliniară) și K_q este constanta aparatului conceput să măsoare sarcinile electrice (numit electrometru), care va avea o scară de asemenea neliniară.

Dacă între plăcile plane ale unui condensator cu dielectric aerul (cu $\varepsilon_{\text{aer}} \approx \varepsilon_0$) se introduce parțial o lamelă din dielectric (fig. 2.31) se va constata că dielectricul este atras între plăci cu o forță F constantă, independentă de poziția lamei dielectrice.

Într-adevăr, capacitatea echivalentă a condensatorului din fig. 2.31 este:

$$C = C_{\text{aer}} + C_{\text{dielectric}} = \varepsilon_0 \frac{b(a-x)}{d} + \varepsilon \frac{bx}{d} = \varepsilon_0 \frac{b}{d} (a - x + \varepsilon_r x),$$

Astfel că forța pe direcția x , calculată cu formula (2.66') este:

$$F = \frac{\partial W_{ec}}{\partial x} \Big|_{U=\text{const.}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \varepsilon_0 \frac{b}{d} (\varepsilon_r - 1) = \frac{1}{2} U^2 \frac{b}{a} \varepsilon_0 \chi_e,$$

unde $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ este susceptivitatea electrică a dielectricului – v. relația (1.75).

2.6.3. Model variațional al câmpului electrostatic

Problemele de analiză a câmpului electrostatic la nivel macroscopic admit –pe lângă formularea diferențială (arătată în subcapitolele 2.1...2.5)– și o *formulare variațională* echivalentă. Construcția **modelului variațional de câmp** presupune stabilirea unui principiu variațional (de tip Lagrange sau Hamilton) capabil să furnizeze, din condiția de staționaritate a unei funcționale adecvate, ecuațiile de bază ale câmpului electrostatic în domeniile materiale. În lucrarea: *Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M., 1986, "Analiza numerică a câmpului electromagnetic", Editura DACIA, Cluj-Napoca* se dezvoltă formalismul variațional lagrangean asociat potențialului electric, care se consideră că prezintă avantajul unui puternic suport fizic și intuitiv conferit de *utilizarea funcționalelor naturale de energie*.

Notându-se cu x_k variabilele independente (în care se poate include și variabila timp) ce definesc un sistem fizic și cu λ_j variabilele dependente, *principiul variațional al acțiunii staționare* postulează existența unei funcționale de tip integral (extinsă asupra unui domeniu Ω arbitrar al spațiului variabilelor independente, de element $d\Omega$):

$$(V1) \quad Ac = \int_{\Omega} Lg(x_k, \lambda_j, \lambda_{jk}) d\Omega,$$

numită *acțiune*, care posedă o valoare staționară (sau un extrem) corespunzător evoluției reale a sistemului considerat. Integrantul Lg se numește *lagrangean* și reprezintă o funcție scalară de stare a sistemului fizic respectiv, determinată de variabilele independente x_k , cele dependente λ_j și derivatele parțiale de ordinul întâi $\lambda_{jk} = \partial \lambda_j / \partial x_k$. Deși ca simplă funcție de calcul, lagrangeanul nu are o semnificație fizică evidentă, el constituie –în fond– pentru orice sistem (în general neliniar) diferența dintre un termen de natura densității de volum a coenergiei cinetice și un altul de tipul densității de volum a energiei potențiale, adică:

$$(V2) \quad Lg = w_c - w_p.$$

Deoarece *condiția necesară de staționaritate* a funcționalei de tip integral (V1) constă în anularea primei sale variații –notată aici cu d_{\uparrow} (v. Matematică – Calcul variațional), rezultă următorul model pentru principiul variațional al acțiunii staționare:

$$d_{\uparrow} Ac = d_{\uparrow} \int_{\Omega} Lg(x_k, \lambda_k, \lambda_{jk}) d\Omega = 0. \quad (V3)$$

În Calculul variațional (v. Matematica) se demonstrează că din condiția (V3) se obțin –sub denumirea “ecuațiile Euler-Lagrange” atașate funcționalei (V1)– tocmai ecuațiile de evoluție ale sistemului fizic considerat.

Astfel, aplicându-se principiul variațional al acțiunii staționare sistemului fizic constituit din corpuri oarecari plasate într-un câmp electromagnetic, integrala de acțiune Ac –dată de definiția (V1)– trebuie să conțină trei termeni aditivi:

- primul termen este referitor la proprietățile de material ale corpurilor în absența câmpului (dar aici el se omite deoarece nu intervine în calculul propriu-zis al câmpului electromagnetic);
- al doilea termen caracterizează câmpul electromagnetic liber (exterior, în lipsa corpurilor);
- al treilea termen este cel care trebuie să caracterizeze (să definească) interacțiunea dintre corpuri și câmpul electromagnetic.

Prin urmare, pentru sistemele electromagnetice, integrala de acțiune apare sub forma unei funcționale de tip energetic (scrisă pentru funcții de punct și de timp și extinsă asupra unui domeniu Ω arbitrar spațial-temporar, de element $d\Omega$):

$$Ac = Ac_0 + Ac_s = \int_{\Omega} (Lg_0 + Lg_s) d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \left(\int_0^{\bar{E}} \bar{D} \cdot d\bar{E} - \int_0^{\bar{B}} \bar{H} \cdot d\bar{B} \right) + (\bar{J} \cdot \bar{A} - q_v V) \right\} d\Omega, \quad (2.67)$$

unde s-au evidențiat lagrangeenii Lg_0 al câmpului electromagnetic liber și Lg_s al sistemului corpuri ↔ câmp. În ultima expresie din (2.67), \bar{A} este așa-numitul potențial magnetic vector (v. cap. 5), definit de $\text{rot} \bar{A} = \bar{B}$ și $\text{div} \bar{A} = 0$. Toți termenii acestei expresii au dimensiunea $[W].[L]^{-3}$ sau în unități de măsură și $[Ws][m]^{-3}$.

Tratarea variațională a unei probleme concrete de analiză a câmpului electromagnetic presupune, mai întâi, particularizarea integralei de acțiune (2.67) corespunzător sistemului fizic dat (regimul câmpului, mediul din câmp etc.). Apoi, funcționala energetică trebuie să încorporeze condițiile de unicitate a determinării câmpului electromagnetic în regimul dat. În final, funcția de potențial care realizează valoarea staționară a funcționalei în condițiile de unicitate asociate, reprezintă soluția problemei de analiză a câmpului electromagnetic.

Funcționala energetică asociată câmpului electrostatic

Modelul variațional al câmpului electrostatic se obține prin particularizarea funcționalei (2.67) –general valabilă pentru orice câmp electromagnetic– corespunzător regimului electrostatic și supusă condițiilor de unicitate a determinării câmpului electrostatic, relativ la modelele diferențiale de câmp electrostatic (în care $\bar{H}, d\bar{B}$ și \bar{A} lipsesc).

Atunci, modelul variațional al câmpului electrostatic rezultă din determinarea unei funcții de potențial scalar V (adică potențialul electrostatic), notată cu $F(V)$ și care realizează valoarea staționară a funcționalei energetice asociate câmpului electrostatic, satisfăcând condițiile corespunzătoare de unicitate la limită.

O astfel de funcțională este funcționala energetică pentru câmpul electrostatic în medii oarecare $\bar{\Omega} = \Sigma \cup \Omega$ ($\Sigma = \text{Fr}\Omega$) și anume:

$$(2.68) \quad F(V) = \int_{v_{\Omega}} \left[\left(\int_0^{\bar{E}} \bar{D} \cdot d\bar{E} \right) - q_v V \right] dv + \int_{\Sigma_N} f_N V dA - \int_{\Sigma_d} q_{\Sigma_d} V dA,$$

în care: v_{Ω} este volumul domeniului Ω (închis de frontiera sa Σ), $f_N = \bar{D} \cdot \bar{n}_{\Sigma_N}$ (cu \bar{n}_{Σ_N} – versorul normalei la $\Sigma_N \subset \Sigma = \text{Fr}\Omega$) este condiția pe frontieră de tip Neumann (v. § 2.2.3), $\bar{D} \cdot \bar{n}_{\Sigma_N} = D_N$, fiind componenta normală a inducției electrice (dată pe $\Sigma_N \subset \Sigma$), Σ_N reprezintă (în cazul unor

condiții mixte pe frontieră) porțiunea frontierei Σ a domeniului de câmp Ω pe care se prescrie condiția de tip Neumann – v.(2.3.4), Σ_d definește o eventuală suprafață de discontinuitate din Ω ($\Sigma_d \subset \Omega$), încărcată cu densitatea superficială de sarcină electrică q_{Σ_d} [C/m^2] în puncte $P \in \Sigma_d$. Toate cele trei integrale din funcționala energetică (2.68) au dimensiunea de energie.

Prin explicitarea condițiilor de material $\bar{D} = f(\bar{E})$, se obțin formele specifice ale funcționalei energetice de staționarizat (2.68) asociată câmpului electrostatic, așa cum se arată în continuare.

Medii fixe, neliniare, anizotrope, neomogene și polarizate permanent

În acest caz, în lipsa câmpului electric imprimat, ecuația de material $\bar{D} = f(\bar{E})$ are forma de punct $\bar{D}(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{E}, \bar{r})\bar{E}(\bar{r}) + \bar{P}_p(\bar{r})$ – în care \bar{r} este raza vectorială corespunzătoare punctului considerat, $\bar{E}(\bar{r})$ este intensitatea locală a câmpului electrostatic, $\bar{P}_p(\bar{r})$ este polarizația electrică permanentă din același punct și ε este tensorul simetric de ordinul doi în spațiul euclidian tridimensional al permitivității absolute (v.cap. 3) ca funcție de punct și de câmp local – și face ca funcționala energetică (2.68) să ia forma:

$$(2.68^?) \quad F(V) = \int_{v_\Omega} \left\{ \int_0^{\bar{E}} [\varepsilon(\bar{E}, \bar{r})\bar{E}(\bar{r}) + \bar{P}_p(\bar{r})] \cdot d\bar{E} - q_v V \right\} dv + \int_{\Sigma_N} f_N(\bar{r}) V dA - \int_{\Sigma_d} q_{\Sigma_d} V dA,$$

în care:

$$f_N(\bar{r}) = [-\varepsilon(\bar{E}, \bar{r}) \text{grad} V(\bar{r}) + \bar{P}_p(\bar{r})] \cdot \bar{n}_{\Sigma_N} \leftarrow \forall \bar{r} \in \Sigma_N \subset \Sigma = \text{Fr}\Omega.$$

Medii fixe, uniforme, liniare și fără polarizație electrică permanentă

Corespunzător mediilor de câmp electrostatic, liniare, izotrope, omogene, lipsite de polarizație electrică permanentă ($\bar{P}_p = 0$) și fără câmp electric imprimat ($\bar{E}_i = 0$), permitivitatea absolută este o constantă scalară ε . De aceea, funcționala energetică de staționarizat (2.68) – sau (2.68^{?)} – se simplifică, luând forma:

$$(2.68^{??}) \quad F(V) = \int_{v_\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\text{grad} V|^2 - q_v V \right) dv - \int_{\Sigma_N} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n_{\Sigma_N}} V dA,$$

deoarece în acest caz al domeniului dielectric uniform:

- suprafețele de discontinuitate Σ_d lipsesc,
- energia electrică elementară

$$\bar{D} \cdot d\bar{E} = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \bar{E} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon |\text{grad} V|^2 \text{ – în } \text{Ws/m}^3;$$

$$-f_N = \bar{D} \cdot \bar{n}_{\Sigma_N} = D_{n_{\Sigma_N}} = \varepsilon E_{n_{\Sigma_N}} = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n_{\Sigma_N}}.$$

Dacă mediul nu ar fi liniar, în sistemul de calcul ar trebui introdusă, prin scanare, curba de variație a permitivității absolute în funcție de valoarea intensității câmpului electric, adică $\varepsilon = f(E)$.

Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electrostatic prin utilizarea modelului variațional

În acest scop se utilizează un sistem de calcul automat (de tip IBM – PC), un algoritm numeric bazat pe metoda elementului finit – MEF (v. § 9.2.4) și un pachet de programe de firmă specializat, cum ar fi –de exemplu– produsul ANSIS EMAG (v. § 9.3.2).

În principiu algoritmul MEF care utilizează modelul variațional al câmpului electrostatic constă în :

- se discretizează domeniul de câmp Ω – plan 2D (într-un plan de simetrie posibil), în m elemente finite, fiecare conținând p noduri (de obicei triunghiular de ordin I). Funcția de potențial V (acum V_m) se aproximează la nivelul fiecărui element prin:

$$V^e = \sum_{i=1}^p N_i^e V_i^e = \mathbf{N}^e \mathbf{V}^e$$

unde matricea coloană \mathbf{V}^e are p componente V_i^e , reprezentând valorile nodale necunoscute ale funcției de potențial, iar \mathbf{N}^e este o matrice linie p –dimensională, ale cărei componente sunt funcții de forma N_i^e (corespunzătoare elementului finit de ordin I– v. § 9.2.4);

- în aceste condiții funcțioala (2.68) se înlocuiește prin suma:

$$\tilde{F}(V) = \sum_{e=1}^m \tilde{F}^e(V^e)$$

- staționarizarea acestei funcții conduce –conform procedurilor MEF– la sistemul algebric:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial V_i} = \sum_e^{m_i} \frac{\partial \tilde{F}^e}{\partial V_i^e} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (\text{MEF})$$

unde \tilde{F}^e reprezintă aproximarea funcționalei energetice elementale, adică o funcție de valori nodale $V_i^e, i = \overline{1, p}$; în care indexările globală ($i = \overline{1, n}$) și locală ($i = \overline{1, p}$) corespund între ele – relativ la modul curent i (cu $V_i = V_i^e$);

- se rezolvă sistemul algebric de ecuații (MEF).

Sistemul (MEF) –a cărui rezolvare furnizează valorile nodale $V_i, i = \overline{1, n}$, ale soluției aproximative de potențial pentru problema de analiză a câmpului electrostatic 2D– se explicitează corespunzător formei elementelor finite și gradului poligonului de interpolare.

În prezent, se rezolvă cu aceeași ușurință ca în 2D, și problemele 3D prin MEF.

2.7. Aplicații

În cadrul acestui subcapitol vor fi prezentate câteva exemple de aplicații tipice pentru regimul electrostatic, care vor fixa mai bine noțiunile prezentate până aici și vor arăta cum se poate folosi tehnica de calcul automat și unii algoritmi numerici la rezolvarea problemelor de câmp electrostatic.

2.7.1. Reprezentarea câmpului electrostatic

Ne referim aici la reprezentarea grafică –prin așa numitul spectru de câmp (v. § 1.3.1., subparagraful „Linii de câmp electric” și § 9.1.2.), formate din liniile de câmp și în 2D de liniile echipotențiale– a câmpului electrostatic. Spectrul de câmp este nu numai o reprezentare grafică intuitivă ci și una cantitativă, dacă liniile de câmp (ca ax al tuburilor de flux electric unitar, de 1 C) și liniile echipotențiale (ca trasee ale căror puncte au același potențial electrostatic, în V) sunt trasate cu precizia dată de un sistem de calcul automat și se utilizează o cuantificare (tarare), cu $\Delta\Psi$ și ΔV , minuțios alese și cu un număr de puncte discrete convenabil.

Vor fi prezentate aici, mai mult pentru indicarea metodei de calcul asistat, numai două exemple.

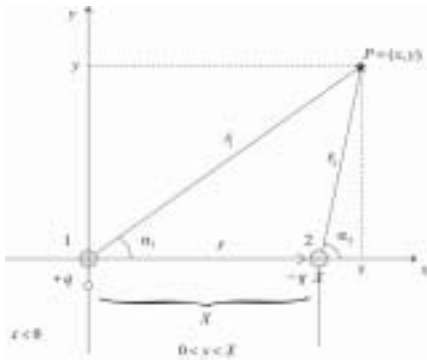


Fig. 2.32

Aplicația 2.1. *Spectrul câmpului produs de două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcini electrice identice (mai întâi de semne contrari și apoi ambele negative), se determină, în plan, raportând cele două puncte, reprezentând corpurile punctiforme, la un sistem de axe cartezian în plan, așa ca în figura 2.32.*

Intensitatea câmpului electrostatic într-un punct $P \in xOy$: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ se va calcula cu ajutorul teoremei lui Coulomb (2.18') sub forma valorii absolute:

$$E = \sqrt{(E_{1x} \pm E_{2x})^2 + (E_{1y} \pm E_{2y})^2},$$

în care proiecțiile pe axele Ox și Oy intensităților câmpurilor electrostatice: E_{1x} , E_{2x} , E_{1y} și E_{2y} se calculează cu:

$$E_{ky} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{x_k^2 + y_k^2} \cos \alpha_k = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_k^2} \cdot \frac{x_k}{r_k} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{x_k}{r_k^3}, \quad k = 1, 2 \text{ și:}$$

$$E_{ky} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{x_k^2 + y_k^2} \sin \alpha_k = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_k^2} \cdot \frac{y_k}{r_k} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{y_k}{r_k^3}, \quad k = 1, 2,$$

deoarece, conform relației (2,18')

$$E_k = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_k^2} \quad r_k^2 = x_k^2 + y_k^2, \quad \cos \alpha_k = \frac{x_k}{r_k} \text{ și } \sin \alpha_k = \frac{y_k}{r_k}, \quad k = 1, 2.$$

Pentru orice punct $P = (x, y)$ din planul xOy , razele vectoriale \vec{r}_1 și \vec{r}_2 vor avea valorile absolute:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ și } r_2 = \sqrt{\Delta x^2 + y^2},$$

unde:

$$\Delta x = \begin{cases} x - X \Rightarrow x > X \\ X - x \Rightarrow 0 < x < X, \\ X + (-1)x \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

în care X este distanța dintre corpurile punctiforme (v. fig. 2.32).

Atunci valoarea absolută a intensității câmpului electrostatic –v. fig. 2.32– va fi (în cazul $q = q_1 = -q_2$):

- pentru $x > X$:

$$E(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{[(x - X)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 + \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{[(x - X)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 \right\}^{1/2};$$

- pentru $0 < x < X$:

$$E(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{[(X - x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 + \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{[(X - x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 \right\}^{1/2};$$

- pentru $x < 0$:

$$E(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{[(X + (-1)x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 + \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{[(X + (-1)x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Trecerea de la un punct $P = (x, y)$ la altul $P = (x + k\delta x, y + k\delta y)$, $k = 1, 2, \dots$, se face cu δx și δy – pași incrementali de variație a coordonatelor, ce se aleg inițial în funcție de acuratețea dorită pentru reprezentarea spectrului.

Dacă $q = -q_1 = -q_2$ (ambele sarcini negative), se folosesc tot relațiile precedente, în care se înlocuiește q cu $-q$, iar minusul dintre termenii parantezelor $[]^2$ se înlocuiește, peste tot, cu +.

Programul MATLAB pentru calculul asistat al lui $E(P) = E(x, y)$ este listat și prezentat în continuare, cu toate comentariile necesare pentru alegerea datelor ($q, \epsilon, X, \delta x, \delta y$ și domeniile de variație ale lui x și y : $x \in \{-y_j, y_s\}$), folosirea lui și reprezentarea punctelor liniilor de câmp.

```
clear
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROGRAMUL MATLAB PENTRU CALCULUL ASISTAT AL MODULULUI INTENSITATII %
% CAMPULUI ELECTRIC E(P)=E(x,y) DETERMINAT DE DOUA CORPURI PUNCTIFORME %
% INCARCATE CU SARCINI ELECTRICE %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Notatii date:

% q:modulul sarcinii electrice [C]
% eps:permitivitatea vidului [F/m]
% xs,xd:limitele stanga si dreapta ale domeniului de calcul pe axa Ox [m]
% yj,ys:limitele jos si sus ale domeniului de calcul pe axa Oy [m]
% dx,dy:pasii incrementali de variatie a coordonatelor x si y [m]
% X:coordonata punctului cu sarcina q2 pe Ox [m]
% Sarcina q1 se afla in punctul de coordonate (0,0)
% Sarcina q2 se afla in punctul de coordonate (X,0)

% Se aleg urmatoarele valori numerice (cu exemplul q1=q si q2=-q):
q=1/(9*10^9);
eps=1/(4*pi*9*10^9);
xs=-5;
xd=15;
dx=0.2;
yj=-6;
ys=6;
dy=0.2;
X=10;

% Notatii rezultate:
% E:modulul intensitatii campului electric
% Emin,Emax:valoarea minima si maxima a lui E

% Se calculeaza E(x,y)
[x,y]=meshgrid(xs:dx:xd,yj:dy:ys);
E=(q/(4*pi*eps))*((x./(x.^2+y.^2).^(3/2)+(X-x)./((X-x).^2+y.^2).^(3/2)).^2+...
(y./(x.^2+y.^2).^(3/2)-y./((X-x).^2+y.^2).^(3/2)).^2).^(1/2);
Emin=E(1,1);
Emax=E(-yj/dy,-xs/dx+1);

% Se prezinta grafic tridimensional dependenta modulului intensitatii campului
%electric E de valorile coordonatelor x si y

mesh(x,y,E)
axis([xs xd yj ys Emin Emax])
```

```

title ('Graficul E(x,y)pentru q1=+q si q2= -q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')
zlabel ('intensitatea E [V/m]')
pause

% Se prezinta grafic in planul xOy curbele caracterizate de aceeasi valoare
%a lui E

contour(x,y,E,5)
axis([xs xd yj ys])
axis('equal')
title ('Graficul curbelor cu E(x,y)=const. pentru q1=+q si q2= -q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')
pause

% Pentru o buna vizualizare si in zonele unde variatiile intensitatii sunt
%foarte mici se prezinta cele doua grafice pentru valori mai mici de 1%
%din Emax.
% Se renoteaza:
% EE:modulul intensitatii campului electric
% EEmin,EEmax:valoarea minima si maxima a lui EE

EEmin=Emin;
EEmax=Emax/100;
for i=1:(ys-yj)/dy+1
for j=1:(xd-xs)/dx+1
if E(i,j)>EEmax
EEmax=E(i,j);
else
EEmax=E(i,j);
end
end
end

mesh(x,y,EEmax)
axis([xs xd yj ys EEmin EEmax])
title ('Graficul EE(x,y)pentru q1=+q si q2= -q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')
zlabel ('intensitatea EE [V/m]')
pause

C=contour(x,y,EE,6);
clabel (C);
axis('equal')
axis([xs xd yj ys])
title ('Graficul curbelor cu EE(x,y)=const. pentru q1=+q si q2= -q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')

```

Pentru trasarea liniilor de câmp se folosește relația $\vec{E} = -\text{grad}V$, care arată că liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafețele (în plan, pe liniile) echipotențiale și se calculează –mai întâi– și apoi se trasează liniile echipotențiale (așa cum se arată mai jos). Pe fiecare linie echipotențială $V_k = V(x_k, y_k) = \text{const.}$ se alege un punct (x_k, y_k) și se determină distanța $d_{k,k+1}^j$ de la punctul (x_k, y_k) la mai multe puncte oarecari (x_{k+1}^j, y_{k+1}^j) situate pe linia echipotențială vecină $V_{k+1} = V(x_{k+1}, y_{k+1})$, se ia minimumul acestei distanțe după j , adică:

$$\min_j d_{k,k+1}^j = \min_j \sqrt{(x_{k,k+1}^j - x_k)^2 + (y_{k,k+1}^j - y_k)^2}$$

și punctul $x_{k,k+1}^j, y_{k,k+1}^j$, pentru care $d_{k,k+1}^j = \min$ este distanța cea mai mică (deci și perpendiculară pe ambele linii de câmp $k, k+1$, $k = 1, 2, \dots$, fiind astfel porțiunea de linie de câmp între cele două

puncte. Atunci se trasează și se trece la alte puncte, întâi pe linia k , apoi pe $k+1$ (față de $k+2$) etc. până se trasează, cu incrementele dorite, toate liniile de câmp.

Calculul potențialelor electrostatice în diversele puncte ale planului xOy , adică a lui $V(P)=V(x,y)$ se face cu formula lui Coulomb (2.20) și aplicarea teoremei superpoziției (pentru $n=2$ corpuri punctiforme) scalarilor $V_1(x,y)$ și $V_2(x,y)$:

$$V(r)=\sum_{k=1}^n V_k = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{k=1}^2 \frac{1}{r_k} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Astfel în cazul $q = q_1 = -q_2$:

- pentru $x > X$:

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{[(x-X)^2 + y^2]^{1/2}} \right\};$$

- pentru $0 > x < X$:

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{[(X-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right\};$$

- pentru $x < 0$:

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{[(X+(-1)x)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}.$$

Trecerea de la un punct $P = (x, y)$ la altul $P = (x + k\delta x, y + k\delta y)$, $k = 1, 2, \dots$, se face cu δx și δy – pași incrementali de variație a coordonatelor, ce se aleg inițial în funcție de acuratețea dorită pentru reprezentarea spectrului.

Dacă $q = -q_1 = -q_2$ (adică ambele sarcini sunt negative), se folosesc tot relațiile precedente de calcul a lui $V(x,y)$, în care însă se înlocuiește q cu $-q$, iar minusul dintre termenii parantezelor $\{ \}$ se înlocuiește, peste tot, cu plus.

Programul MATLAB pentru calculul asistat al lui $V(P)=V(x,y)$ este listat și prezentat în continuare. El cuprinde toate comentariile necesare pentru alegerea și introducerea datelor ($q, \epsilon, X, \delta x, \delta y, \Delta V$ și domeniile de variație ale lui x și y : $x \in \{-x_s, x_d\}$ și $y \in \{-y_j, y_s\}$), folosirea lui și reprezentarea punctelor cu același V . Această ultimă operație se face alegând punctele $(x, y)_k$ care au același potențial $V + k\Delta V$, $k = 0, 1, 2, \dots$ și marcându-le cu un semn distinct ($-, \cdot, +, x$ etc.)

```
clear
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROGRAMUL MATLAB PENTRU CALCULUL ASISTAT AL POTENTIALULUI ELECTRO- %
% STATIC V(P)=V(x,y) DETERMINAT DE DOUA CORPURI PUNCTIFORME INCARCATE CU %
% SARCINI ELECTRICE %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Notatii date:
% q:modulul sarcinii electrice [C]
% eps:permitivitatea vidului [F/m]
% xs,xd:limitele stanga si dreapta ale domeniului de calcul pe axa Ox [m]
% yj,ys:limitele jos si sus ale domeniului de calcul pe axa Oy [m]
% dx,dy:pasii incrementali de variatie a coordonatelor x si y [m]
% X:coordonata punctului cu sarcina q2 pe Ox [m]
% Sarcina q1 se afla in punctul de coordonate (0,0)
% Sarcina q2 se afla in punctul de coordonate (X,0)
% Se aleg urmatoarele valori numerice (cu exemplul q1=q si q2=-q):
q=1/(9*10^9);
```

```

eps=1/(4*pi*9*10^9);
xs=-5;
xd=15;
dx=0.2;
yj=-6;
ys=6;
dy=0.2;
X=10;

% Notatii rezultate:
% V:potentialul electrostatic
% Vmin,Vmax:valoarea mimima si maxima a lui V

% Se calculeaza V(x,y)

[x,y]=meshgrid (xs:dx:xd,yj:dy:ys);
V=(q/(4*pi*eps))*(1./((x.^2+y.^2).^(1/2))-1./((X-x).^2+y.^2).^(1/2));
Vmin=V(-yj/dy,(-xs+X)/dx+1);
Vmax=V(-yj/dy,-xs/dx+1);

% Se prezinta grafic tridimensional dependenta potentialului electrostatic V de
%valorile coordonatelor x si y

mesh(x,y,V)
axis([xs xd yj ys Vmin Vmax])
title ('Graficul V(x,y)pentru q1=+q si q2=-q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')
zlabel ('potentialul V [V]')
pause

% Se prezinta grafic in planul xOy curbele echipotentiale

contour(x,y,V,9)
axis('equal')
axis([xs xd yj ys])
title ('Graficul curbelor cu V(x,y)=const. pentru q1=+q si q2=-q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')
pause

% Pentru o buna vizualizare si in zonele unde variatiile potentialului sunt
%foarte mici se prezinta cele doua grafice pentru valori cuprinse intre 10%*Vmin
%(valoare negativa)si 10%*Vmax
% Se renoteaza:
% VV:potentialul electrostatic
% VVmin,VVmax:valoarea mimima si maxima a lui VV

VVmin=Vmin/10;
VVmax=Vmax/10;
for i=1:(ys-yj)/dy+1
for j=1:(xd-xs)/dx+1
if V(i,j)>VVmax
VV(i,j)=VVmax;
elseif V(i,j)<VVmin
VV(i,j)=VVmin;
else
VV(i,j)=V(i,j);
end
end
end

mesh(x,y,VV)
axis([xs xd yj ys VVmin VVmax])

title ('Graficul VV(x,y)pentru q1=+q si q2=-q')
xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')
zlabel ('potentialul VV [V]')
pause

```



```

C=contour(x,y,VV,9);
clabel(C);
hold on
axis('equal')
axis([xs xd yj ys])
%title ('Curbele echipotentiale si spectrul liniilor de camp pentru q1=+q si q2=-q')

xlabel ('axa x [m]')
ylabel ('axa y [m]')

ddx=1;
ddy=1;
[x,y]=meshgrid (xs:ddx:xd,yj:ddy:ys)
W=(q/(4*pi*eps))*(1./(x.^2+y.^2).^(1/2)-1./((X-x).^2+y.^2).^(1/2));
WWmin=W(-yj/ddy,(-xs+X)/ddx+1);
WWmax=W(-yj/ddy,-xs/ddx+1);
for i=1:ddx:((ys-yj)/ddy)+1
for j=1:ddy:((xd-xs)/ddx)+1
if W(i,j)>WWmax
WW(i,j)=WWmax;
elseif W(i,j)<WWmin
WW(i,j)=WWmin;
else
WW(i,j)=W(i,j);
end
end
end
[bx,by]=gradient(-WW,ddx,ddy);
quiver(x,y,bx,by,1.5,'r'),hold off

```

Observație. Liniile de câmp și liniile echipotențiale, produse în planul xOy de cele două corpuri punctiforme cu sarcinile $+q$ și $-q$ (din figura 2.32) pot fi determinate și pe cale analitică. Pentru aceasta vom redesena cazul din figura 2.32 în forma indicată în figura A.2.1a. În această situație, potențialul electric într-un punct P are expresia:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Liniile de potențial constant (echipotențialele $\Gamma_k \Rightarrow V_k = \text{const.}$ în $\forall P \in \Gamma_k$) conțin punctele P_k pentru care:

$$r_2 / r_1 = k = \text{const.}, \quad (01)$$

unde k este parametrul familiei liniilor echipotențiale. Întrădevăr, dacă pe linia echipotențială Γ_k se iau două puncte diferite, P și P' ($P, P' \in \Gamma_k$), atunci $V(P) = V(P')$ și se poate scrie:

$$V(P) = V(P') \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right) \therefore \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}$$

unde r_1 și r_2 sunt razele de poziție față de cele două corpuri punctiforme electrizate corespunzătoare punctului $P \in \Gamma_k$ și r_1', r_2' același lucru pentru punctul $P' \in \Gamma_k$. Ultima egalitate se mai poate scrie și în formele:

$$\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{r_1' r_2'}{r_2' - r_1'} \therefore \frac{r_1' - r_2'}{r_1 - r_2} = \frac{r_1' r_2'}{r_1 r_2} \therefore \frac{r_2' \left(\frac{1}{k} - 1 \right)}{r_1 (1 - k)} = \frac{k}{k} \therefore k \frac{\left(\frac{1}{k} - 1 \right)}{(1 - k)} = \frac{k}{k},$$

adică:

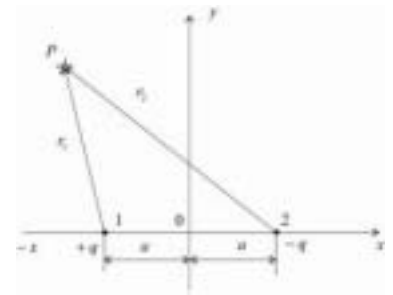


Fig. A.2.1a

$$\frac{1-k}{k-1} = \frac{k}{k} \therefore k(k-1) = k(k-1),$$

ceea ce demonstrează condiția (01), ca două puncte P și P' să se afle pe aceeași linie echipotențială Γ_k . Deci, liniile echipotențiale vor fi locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor până la punctele 1 și 2 (adică la corpuri punctiforme electrizate) este constant.

Acest loc geometric este un cerc cu centrul O_1 și raza R (fig. A2.1b), iar punctele 1 și 2

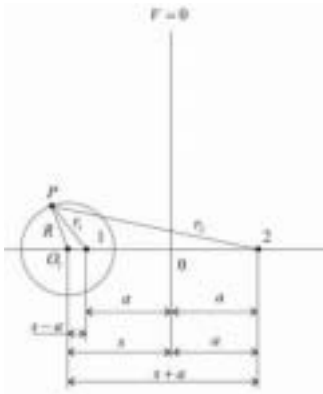


Fig. A2.1b

sunt *puncte reciproce, inverse, conjugate* sau *simetrice* față de acest cerc (se mai poate spune că ele reprezintă *imaginea* unuia în raport cu celălalt, *față de cerc*). Din Geometrie (Transformări geometrice) se știe că două puncte 1 și 2 se numesc *reciproce* față de un cerc cu rază R , al cărui centru se găsește pe dreapta $\overline{12}$, dacă *produsul distanțelor* de la cele două puncte până la centrul cercului, $s-a$ și $s+a$ pe figura A2.1b, este egal cu pătratul razei:

$$(02) \quad (s-a)(s+a) = R^2,$$

de unde mai rezultă și altă formă a acestei condiții (02) de reciprocitate a punctelor față de un cerc și anume:

$$(02') \quad \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a}.$$

Pentru orice punct P de pe cerc, relația (02') asigură asemănarea triunghiurilor PO_12 și IO_1P (unghiul $\widehat{PO_12}$ este comun). Rapoartele (02') vor fi egale atunci și cu raportul dintre cele două laturi r_1 și r_2 astfel că – în conformitate cu (01)– rezultă:

$$(03) \quad \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a} = \frac{r_2}{r_1} = k, \quad k \in R_+$$

care arată că atunci când punctul P se deplasează pe cerc (care este o echipotențială Γ_k), raportul r_2/r_1 este mereu constant. Pentru diferite valori ale lui k se modifică: poziția centrului cercului O_1 , segmentul $s-a$ și raza R , care se pot calcula cu relațiile:

$$(04) \quad s = a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \quad \text{și} \quad R = a \frac{2k}{k^2 - 1}.$$

(Față de figura 2.32, $a = X/2$.)

Relațiile (04) arată că: pentru $k=1$ se obține linia echipotențială $V=0$ – o dreaptă normală pe dreapta $\overline{12}$ la distanța a de corpurile punctiforme 1 și 2 (fig. A2.1b), căci $R = \infty$ și $s = \infty$; pentru $k > 1$ (deci $r_2 > r_1$) cercul echipotențial cuprinde punctul 1 (cu deplasarea centrului O_1 spre $-x$), iar pentru $k < 1$ cercul cuprinde punctul 2, unde sarcina electrică este negativă).

Dacă se trasează un nou cerc, cu centrul O_2 mutat pe linia echiscalară $V=0$ și care trece prin punctele 1 și 2 (fig. A2.1c), produsul $(s-a)(s+a)$ reprezintă „puterea punctului O_1 ” față de noul cerc. Dar acest produs este egal și cu pătratul segmentului $\overline{O_1T}$, unde T este punctul de contact al tangentei (duse din O_1 la cercul O_2) cu acest cerc. Pe de altă parte, conform relației (02), $\overline{O_1T} = R$. De aceea, raza dusă din O_1 în punctul de intersecție a celor două cercuri este

tangentă, și ea, la cercul O_2 , ceea ce înseamnă că cele două cercuri O_1 și O_2 se intersectează ortogonal.

Astfel, deoarece (datorită definiției $\vec{E} = -\text{grad}V$) liniile echipotențiale și cele de câmp sunt ortogonale, rezultă că *noul cerc* (a cărui rază $R_2 = \overline{O_2I} = \overline{O_22} = \overline{O_2T}$) este o linie de câmp electric. Din $(s-a)(s+a) = \overline{O_1T}^2$, pentru un s și un R al cercului O_1 se deduce poziția lui T , iar din $R = \overline{O_1T}$ și $R_2 = \overline{O_2T}$ se deduce R_2 .

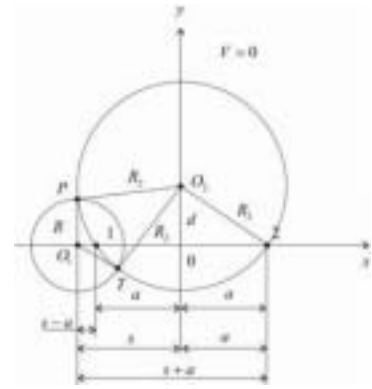


Fig. A.21c

În concluzie: *cercurile cu centrul în O_1 (de pe axa x) sunt linii echipotențiale*, iar *cercurile cu centrul în O_2 (de pe axa y ,*

mai exact de pe normala la $\overline{I2}$ la distanța a de puncte, sau $X/2$ în figura 2.32) *sunt linii de câmp.*

Cercurile O_1 și O_2 sunt cunoscute în Geometrie sub numele de *cercurile lui Apollonius*.

Utilizarea practică a cercurilor lui Apollonius la trasarea spectrului câmpului electrostatic produs de două corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile electrice egale și de semn contrar, $q = +q_1 = -q_2$ (fig. A2.1a) constă în:

- fixarea locului centrelor celor două cercuri ortogonale (O_1 și O_2) pentru diverse valori ale lui V_k și E_k ($k > 1$);

- determinarea razei lor (R_k și R_{2k}) și trasarea cercurilor cu aceste raze și cu centrul în punctele determinate anterior: O_{1k} pe axa $\overline{I2}$, adică x (două centre: O_{1k} pe semi-axa $\overline{O1}$, adică $-x$, și simetricul lui O'_{1k} pe semi-axa $\overline{O2}$, adică $+x$, ambele cu aceeași rază R_k) și O_{2k} pe axa y normală pe segmentul $\overline{I2}$ în punctul O , pentru care $V = 0$ (două centre: O_{2k} pe semi-axa $O+y$ și simetricul lui O'_{2k} pe semi-axa $O-y$, ambele cu aceeași rază R_{2k}), peste tot fiind $k > 1$;

- calibrarea cercurilor: O_{1k} , R_k (ca linii echipotențiale) cu potențialul V_k (în volți sau mV) și O_{2k} , R_{2k} (ca linii de câmp) prin precizarea valorii absolute a intensității câmpului electrostatic E_k (în volți / metru) în dreptul punctului ce marchează centrul cercului O_{2k} (distanța $d = OO_{2k}$ pe figura A2.1c) sau a unui flux electric convențional.

Algoritmul este următorul:

- pentru $k = 1$, $V = 0$ și linia echipotențială $V = 0$ este axa $-yOy$, normală pe segmentul $\overline{I2}$, la mijlocul lui (situat la distanțele a de I și 2 - v.fig.A2.1);

- se aleg diverse valori $k > 1$ sub forma $k_1 = \frac{a + \Delta a}{a - \Delta a}$, $k_2 = \frac{a + 2\Delta a}{a - 2\Delta a}$, ..., $k_n = \frac{a + n\Delta a}{a - n\Delta a}$, unde

Δa este un pas incremental dat distanței a dintre O și punctele I sau 2 (de exemplu $\Delta a = 0,1a$) ales în funcție de precizia (rezoluția) ce se cere pentru redarea spectrului. Pentru fiecare k_j rezultă cercul echipotențial cu:

- centrul O_{1j} situat pe axa $O-x$ (sau OI) la distanța s_j dată de prima formulă (04) și cu raza R_j dată de a doua formulă (04). Fiecare O_{1j} are un simetric O'_{1j} (pe semi-axa $O2$ sau $O+x$);

Potențialele acestor cercuri sunt:

$$(05) \quad V_j = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2j\Delta a}{a^2 - \Delta a^2 \cdot j^2} \text{ pentru cercurile } O_{1j} \text{ și } V'_j = \frac{-q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2j\Delta a}{a^2 - \Delta a^2 \cdot j^2} = -V_j,$$

potențiale care se scriu (în volți sau mV) pe marginea cercurilor O_{1j} și O'_{1j} ;

[Expresiile lui V_j din (05) rezultă, simplu, din:

pentru orice $j\Delta a$ razele punctelor de pe cercul O_{1j} cresc, deci și raza de repartiție r_{2j} a unui punct P_{2j} în care cercul O_{1j} intersectează axa l_2 ($-xOx$), care devin:

$$r_{1j} = a - j\Delta a \text{ și } r_{2j} = a + j\Delta a \text{ (} r_{1j} \text{ și } r_{2j} \text{ pe direcția } \overline{l_2}\text{),}$$

astfel că $r_{1j} + r_{2j} = 2a$ (fig. A2.1). Atunci potențialul electrostatic este:

$$V_j = V_{1j} + V_{2j} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_{1j}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_{2j}} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{1j}} - \frac{1}{r_{2j}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{a - j\Delta a} - \frac{1}{a + j\Delta a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2j\Delta a}{a^2 - \Delta a^2 \cdot j^2}, \quad j \in N$$

adică relația (05).]

Dacă pasul incremental Δa este constant: $\Delta a = \mu a$ (de exemplu cu $\mu = 0,1$), atunci expresiile lui k_j și V_j devin:

$$k_j = \frac{r_{2j}}{r_{1j}} = \frac{a + j\Delta a}{a - j\Delta a} = \frac{a + j\mu a}{a - j\mu a} = \frac{1 + j\mu}{1 - j\mu} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

iar potențialul corespunzător cercului k_j , dat de (05):

$$V_j = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2j\mu a}{a^2 - \mu a^2 \cdot j^2}, \text{ adică } V_j = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{j\mu}{1 - j^2\mu^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

unde trebuie ca $n < 1/\mu$ pentru ca $1 - n^2\mu^2 < 1$, căci la $n = \frac{1}{\mu}, V_n \rightarrow \infty$.

[De exemplu, la primul pas $j = 1$, dacă $\mu = 0,1$ atunci $V_1 = 0,208 \frac{q}{2\pi\epsilon a} = 0,208V$ pentru ca la al noulea pas, $j = 9$, să se ajungă la potențialul $V_9 = 1,11V$ (unde V este potențialul rezultat din datele problemei : $V = q/2\pi\epsilon a$) etc.]

- se determină poziția centrului O_{2j} a cercului de pe axa O_y (axa cu $V = 0$), la distanța d_j de origine (v. fig. A2.1c) –precum și a cercului simetric O'_{2j} , pe axa $O - y$ la distanța $-d_j$ de origine– ceea ce înseamnă calculul segmentului d_j la pasul j . Din triunghiul dreptunghic OO_2 (fig. A2.1c) rezultă:

$$(06) \quad d_j = \sqrt{a^2 + R_{2j}^2}.$$

Pentru că pe axa $-yOy$ potențialul electrostatic este nul ($V = 0$ în $\forall P \in -yOy$) rezultă că pe această axă intensitatea $\vec{E} = \text{const.} = E\vec{n}$, unde E este valoarea absolută a lui \vec{E} și \vec{n} normala pe axa $-yOy$. Deoarece, pentru orice punct $P \in -yOy$ distanțele de la punctul P (considerat în O_2) sunt $r_1 = r_2 = R_2$ (v. fig. A2.1c), rezultă:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{R_2^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{-q}{R_2^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{R_2^2}, \quad (07)$$

ce are valoarea maximă în origine, unde $R_2 = a$ și $E = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{a^2}$ și minimă $E = 0$ la $R_2 \rightarrow \infty$.

Din relația (07) reiese:

$$R_2^2 = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon E}. \quad (08)$$

Considerând, diverse valori $E_j = E - j\Delta E$ ale câmpului, deci diverse puncte O_{2_j} pe axa $-yOy$, $j=1,2,\dots,n$ (cu un pas oarecare al scăderii intensității câmpului electrostatic pe axa $O+y$, îndepărtându-ne de origine), se calculează diversele raze R_{2_j} ale cercurilor echipotențiale cu relația (08) și apoi diversele poziții ale centrului cercului O_{2_j} pe semiaxa $O+y$ (și simetricul O'_{2_j} pe semiaxa $O-y$), introducând pe R_{2_j} în relația (06) din care va rezulta d_j , adică ordonata lui O_{2_j} pe semiaxa O_y (și $-d_j$, adică ordonata lui O'_{2_j} pe semiaxa $O-y$). Se trasează, cu razele R_{2_j} , toate cercurile O_{2_j} și O'_{2_j} care reprezintă spectrul liniilor de câmp;

- pentru „marcarea” valorică ale acestor linii se pot indica, lângă ele, fie valorile câmpului E pe axa $-yOy$, în raport cu valoarea maximă din centrul O (unde $E = \frac{q}{2\pi\epsilon a^2}$), fie fluxul electric mediu $\bar{D} \cdot \Delta\bar{A} = D\Delta A$:

$$\frac{E_j}{\epsilon} \cdot (d_j - d_{j-1}) \cdot l = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi R_{2_{j-1}}^2} (d_j - d_{j-1}) \cdot l, \quad j=1,2,\dots,n \text{ și } l=1\text{m},$$

unde E_j/ϵ este valoarea inducției electrice în punctele O_{2_j} de pe axa $-yOy$, pe care \bar{D}_j este normală pe planul xOy , de lățime unitară.

În continuare este prezentat, însoțit de comentarii, „listing”-ul programului MATLAB care realizează algoritmul descris până aici (privind utilizarea cercurilor lui Apollonius la trasarea calibrată / valorică, a spectrului câmpului electrostatic produs de două corpuri punctiforme cu sarcinile electrice q și $-q$), urmat de figura ce rezultă pentru spectrul de câmp prin aplicarea acestui program.

```
clear
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROGRAMUL MATLAB DE REPREZENTARE CALIBRATA (VALORICA) A SPECTRULUI %
% CAMPULUI ELECTROSTATIC PRODUS DE DOUA CORPURI PUNCTIFORME INCARCAT %
% CU SARCINI ELECTRICE EGALE SI DE SEMNE CONTRARE PRIN UTILIZAREA CER %
% CULOR LUI APPOLONIUS %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Notatii date:
% q:modulul sarcinii electrice [C]
% eps:permitivitatea vidului [F/m]
% a:distanța dintre oricare dintre punctele cu sarcini si origine [m]
% Sarcina q1=+q se afla in punctul de coordonate (-a,0)
% Sarcina q2=-q se afla in punctul de coordonate (a,0)

% Se aleg urmatoarele valori numerice:
q=1/(9*10^9);
eps=1/(4*pi*9*10^9);
a=5;
% Se mai noteaza:
% u:valoarea pasului incremental ales (pentru reprezentarea cercurilor
% echipotențiale) raportat la distanța a
% j:indicele cercurilor echipotențiale (j=1,2,...,n)
% n:valoarea maxima a lui j (n<1/u)
% k(j):raportul distanțelor dintre cele doua puncte cu sarcini si un
% punct oarecare de pe cercul echipotențial de indice j (k=r2/r1)
% R(j):raza cercului echipotențial de indice j
% s(j):distanța dintre centrul cercului echipotențial de indice j (O1)
```

```

%si originea sistemului de coordonate
% V(j):valoarea potentialului electrostatic pe cercul echipotential de
%indice j

% Se aleg valorile:
u=0.1;
n=9;

for j=1:n
k(j)=(1+j*u)/(1-j*u);
R(j)=a*(2*k(j))/(k(j)^2-1);
s(j)=a*(k(j)^2+1)/(k(j)^2-1);
V(j)=(q/4*pi*eps)*j*u/(1-j*u)^2);
% Se calculeaza si se reprezinta grafic cercul echipotential de raza R(j)
%cu centrul in punctul de coordonate (-s(j),0).
xx=-R(j):R(j)/100:R(j);
x=-s(j)+xx;
y=(R(j)^2-xx.^2).^(1/2);
plot(x,y),hold on,
axis('equal')
plot(x,-y),hold on

% Se calculeaza si se reprezinta grafic cercul echipotential de raza R(j)
%cu centrul in punctul de coordonate (s(j),0),simetric celui anterior.

x=s(j)+xx;
y=(R(j)^2-xx.^2).^(1/2);
plot(x,y),hold on,
plot(x,-y),hold on
end

% Se reprezinta grafic linia echipotentiala de potential V=0 ce este
%axa Oy (dispusa simetric intre cele doua puncte cu sarcini)

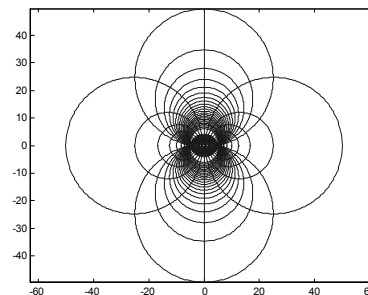
y=-2*R(1):R(1)/100:2*R(1);
x=0*y;
plot(x,y),hold on,

% Se noteaza:
% Emax:valoarea maxima a intensitatii campului electric pe axa Oy
%(valoarea din originea sistemului de coordonate O)
% DE:pasul de scadere al intensitatii campului electrostatic pe axa Oy
% m:numarul de pasi
% i:indicele cercurilor ortogonale (liniilor de camp) i=1,2,...,m
% E(i):intensitatea campului electric caracteristica cercului ortogonal
%de indice i
% R2(i):raza cercului ortogonal de indice i
% d(i):distanța dintre centrul cercului ortogonal de indice i si axa Ox

% Se alege:
m=25;
Emax=(q/4*pi*eps)*2^(1/2)/a^2;
DE=Emax/m;

for i=1:m-1
E(i)=Emax-i*DE;
R2(i)=((q/4*pi*eps)*2^(1/2)/E(i))^(1/2);
d(i)=(R2(i)^2-a^2)^(1/2);
% Se calculeaza si se reprezinta grafic cercul ortogonal cercurilor
%echipotentiale (linia de camp electric) cu centrul in (0,d(i))
yy=-R2(i):R2(i)/100:R2(i);
y=d(i)+yy;
x=(R2(i)^2-yy.^2).^(1/2);
plot(x,y),hold on,
axis('equal')
plot(-x,y),hold on,
% Se calculeaza si se reprezinta cercul ortogonal cu centrul in (0,-d(i))
y=-d(i)+yy;
x=(R2(i)^2-yy.^2).^(1/2);
plot(x,y),hold on,
plot(-x,y),hold on

```



end
hold off

În figurile 2.33 și 2.34 sunt redată spectrele de câmp în 2D (în plan) ale sistemului electrostatic format din două corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile electrice $q = q_1 = -q_2$ (fig. 2.33) și $q = -q_1 = -q_2$ (fig. 2.34) obținute cu programul redat la paginile 153 – 155.

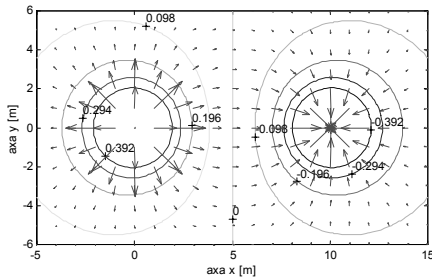


Fig. 2.33

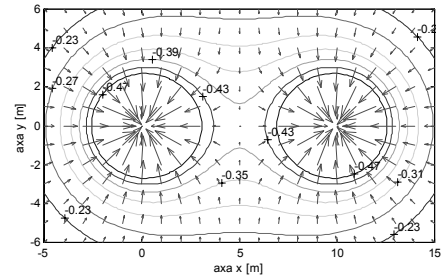


Fig. 2.34

Aplicația 2.2. Trasarea spectrului de câmp la marginile armăturilor unui condensator electric plan, adică redarea **efectului de margine** la condensatoarele electrice plane, se poate face considerând parțial (în plan) armăturile condensatorului, cu dimensiunile sale (așa ca în figura 2.35) și aplicând apoi ecuația lui Laplace (2.33) într-o problemă cu condiții la limită de tip Dirichlet interioară.

Dielectricul se consideră omogen, izotrop, liniar ($\epsilon = \text{const.}$) fără sarcini electrice ($q_v [C/m^3] = 0$) și fără polarizație electrică permanentă ($\vec{P}_p = 0$), iar –pentru marginea domeniului Ω – se consideră că armăturile – situate la potențialele V_1 și V_2 date (având interiorul și suprafața echipotențiale)– sunt „închise” într-un ecran cu $V_0 = 0$ situat relativ departe de armături (adică $\min \{a, b\} \gg \max \{\delta, d, h\}$). În aceste condiții, repartiția potențialului $V(P)$ în punctele $P \in \Omega$ se poate face rezolvând problema cu derivate parțiale de ordinul doi (o ecuație Laplace) cu condiții la limită (de tip Dirichlet – exterioară) și anume:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{în } \Omega \Leftarrow q_v = 0 & \text{în } \forall P \in \Omega - (1) - (2) \\ V = V_1 & \text{pe armătura (1)} \\ V = V_2 & \text{pe armătura (2)} \\ V = V_0 = 0 & \text{pe ecran (fig. 2.35)} \end{cases} \quad (A2.2)$$

Această problemă se poate rezolva numeric, prin metoda elementelor finite (v. § 9.2.3), alegându-se o rețea de discretizare pe Ω și –prin potențialele electrostatice la nodurile acestei rețele– care aproximează derivatele parțiale de ordinul doi, problema precedentă devine un sistem de ecuații algebrice liniare, care prin utilizarea produsului MATLAB (v. § 9.3.1) determină valorile potențialelor electrostatice în nodurile rețelei de discretizare. Apoi, pe baza acestor valori se trasează liniile echipotențiale și apoi cele de câmp (așa ca în cazul aplicației 2.1), rezultând spectrul efectului de margine redat în figura 2.36.

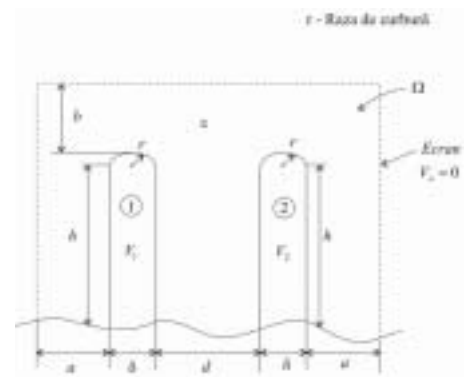


Fig. 2.35

Procedură informatică, asistată de calculator, de rezolvare a problemei (A2.2) și lista programului MATLAB utilizat, este prezentată pe larg în îndrumarul *Săvulescu, A ș.a. (2002)*.

2.7.2. Exemple de calcul al câmpului electrostatic

Câmpul electrostatic, produs într-un domeniu Ω conform teoremei unicității determinării lui (v. § 2.2.4), este complet caracterizat dacă se pot calcula, în fiecare punct $P \in \Omega$, mărimile de

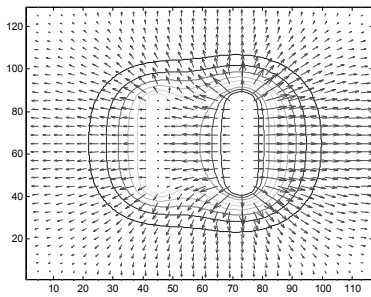


Fig. 2.36

stare: intensitatea câmpului electrostatic $\vec{E}(P)$, potențialul electrostatic $V(P)$, inducția electrică $\vec{D}(P)$ și –eventual– fluxul electric prin anumite suprafețe Σ . În cadrul acestui paragraf vor fi prezentate câteva aplicații tipice, ca pretext pentru exemplificarea procedurilor moderne de calcul, informatice (prin utilizarea produselor – program MATLAB și MATHCAD).

Aplicația 2.3. Se da un conductor filiform rectiliniu cu lungimea $2l$, diametrul fiind neglijabil, încărcat cu sarcina electrică q (în regim electrostatic) și situat într-un dielectric uniform și liniar, întins la infinit (fig. 2.37). Se cere să se calculeze câmpul electrostatic produs în dielectric în acest

caz, prin potențialul electrostatic $V(P)$ și intensitatea câmpului electrostatic $\vec{E}(P)$, în puncte din orice plan al conductorului (deoarece câmpul produs în acest caz are simetrie cilindrică circulară, în jurul conductorului). În acest scop se consideră un element de lungime infinit mică dl , situat la distanța λ față de mijlocul O al conductorului, care este încărcat cu o sarcină electrică $dq = \frac{q}{2l} dl$

(deoarece fiind în regim electrostatic și într-un sistem simetric, sarcina q a conductorului filiform se repartizează uniform pe toată lungimea lui, $2l$). Un singur element de conductor (dl , încărcat cu sarcina electrică $dq = \frac{q}{2l} dl$) poate fi considerat un corp punctiform care produce în orice punct $P \equiv (x, y)$, un potențial electrostatic elementar dV , a cărui expresie rezultă din formula (2.20), adică:

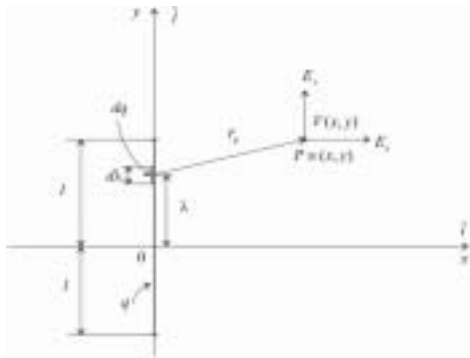


Fig. 2.37

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dq}{r_p} = \frac{q}{4\pi\epsilon 2l} \cdot \frac{dl}{\sqrt{x^2 + (\lambda - y)^2}}$$

Prin integrare, între limitele $\lambda = -l$ și $\lambda = l$, caz în care $dl \equiv d\lambda$, se obține expresia căutată a potențialului electrostatic $V(P) = V(x, y)$:

$$V(x, y) = \frac{q}{8\pi\epsilon l} \cdot \ln \frac{\sqrt{x^2 + (l - y)^2} + (l - y)}{\sqrt{x^2 + (l + y)^2} - (l + y)} \quad (2.3-1)$$

Dacă $l \gg \max\{x, y\}$, ceea ce –la limită– înseamnă un conductor filiform “infinit lung”, expresia lui $V(x, y)$ (2.3-1) devine:

$$V(x, y) = \frac{q}{8\pi\epsilon l} \cdot \ln \frac{4l^2}{x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{2l}{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon l} (-\ln x + \ln 2l) = -\frac{q}{4\pi\epsilon l} \ln x + V_0, \quad (2.3-2)$$

în care componenta continuă $\frac{q}{4\pi\epsilon l} \ln 2l$, notată cu V_0 , reprezintă potențialul de referință a lui $V(x,y)$.

Pentru $x \rightarrow 0$, expresia (2.3-2) ca și (2.3-1), tinde către infinit, ceea ce se explică prin faptul că distanța x devine (când $x \rightarrow 0$) de același ordin de mărime cu diametrul conductorului *filiform* (considerat de asemenea, că este zero în raport cu $2l$). La creșterea nelimitată a lui x , constanta $V_0 = q(\ln 2l)/4\pi\epsilon l$ trebuie și ea să devină infinită; aceasta pentru că la $x \rightarrow \infty$, $q(\ln x)/4\pi\epsilon l \rightarrow -\infty$, iar pentru că $V(x \rightarrow \infty, y)$ să rămână finit (sau să devină zero) ar trebui $V_0 \rightarrow +\infty$. Dar o asemenea constantă infinită nu are nici un sens fizic (explicația fizică, totuși, a acestei situații constă în nedeterminarea care apare în punctul în care firul conductor, încărcat cu sarcină electrică, infinit lung, ajunge să înțepe frontiera domeniului situată la infinit!).

Totuși, formula (2.3-2) dă valori cu o bună aproximație ale lui $V(x,y)$, dacă punctul (x,y) nu se îndepărtează prea mult de firul conductor, adică de origine. Astfel, relația (2.3-1) este în zona de simetrie a câmpului (plan-meridian) dacă: $x \leq 3l$ și $y \leq l$.

Intensitatea câmpului electrostatic se determină cu ajutorul definiției $\vec{E} = -\text{grad } V$, ceea ce în cazul din figura 2.37 înseamnă:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y) &= -\nabla V(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x,y) \vec{i} - \frac{\partial}{\partial y} V(x,y) \vec{j} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \\ &= -\frac{q}{8\pi\epsilon l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \ln \frac{[x^2 + (l-y)^2]^{1/2} + l - y}{[x^2 + (l+y)^2]^{1/2} - l - y}. \end{aligned} \quad (2.3-3)$$

În continuare, este prezentat "listing"-ul programului MATLAB, denumit aplic 23, care realizează calculul câmpului electrostatic, prin $V(x,y)$ – pe baza formulei (2.3-1) și componentele E_x , E_y ale intensității câmpului electrostatic – cu formula (2.3-3). Programul are patru secțiuni: introducerea datelor; calculul mărimilor $V(x,y)$, E_x și E_y în punctele din câmp $(x + k\Delta x, y + k\Delta y)$, $k = 1, 2, \dots, 10$, $\Delta x = \frac{l}{10}$ și $\Delta y = \frac{l}{10}$, luându-se $x=0,1$ și $y=0$; afișarea rezultatelor sub formă de matrice cu liniile $x+k\Delta x, y$ și coloanele $x, y+k\Delta y$, avînd unul elementele $V(x+k\Delta x, y+k\Delta y)$ iar celelalte tabele componentele câmpului electrostatic $E_x(x+k\Delta x, y+k\Delta y)$, $E_y(x+k\Delta x, y+k\Delta y)$ și reprezentarea grafică tridimensională a celor trei mărimi calculate (V , E_x și E_y). Programul conține și comentariile necesare utilizării lui. Datele de intrare sunt: $l=1\text{m}$,

$$q = \frac{2}{9} 10^{-8} \text{ C și } \epsilon = 1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ F/m.}$$

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%                               Program MATLAB pentru rezolvarea Aplicatiei 2.3                               %%
%%                               calculul campului electrostatic produs de catre un conductor                               %%
%%                               filiform de lungime 2l incarcat uniform cu sarcina electrica q                               %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear

% Introducerea datelor (lungimea, sarcina, epsilon)
%
l = 1 ;
q = (2/9)*10^-8 ;
eps = 1/(4*pi*9*10^9) ;

%
% Determinarea coordonatelor punctelor din camp in care se face calculul
%

dx = l/10 ;
dy = dx ;
kmax = 10 ;

```

```

for k=1:kmax
    x(k) = 1 + k * dx ;
    y(k) = 0 + k * dy ;
end

%
% Calculul potentialului electrostatic V(x,y)
%

for i=1:kmax
    for j=1:kmax
        upv = (x(i)^2+(l-y(j))^2)^0.5+l-y(j) ;
        dwv = (x(i)^2+(l+y(j))^2)^0.5-l-y(j) ;
        V(i,j) = q/(8*pi*eps*l)*log(upv/dwv) ;
    end
end

%
% Calculul componentelor intensitatii campului electrostatic Ex,Ey
%

for i=1:kmax
    for j=1:kmax
        rm = (x(i)^2+(l-y(j))^2)^0.5 ;
        rp = (x(i)^2+(l+y(j))^2)^0.5 ;
        upx = x(i)/rm/(rp-l-y(j))-(rm+l-y(j))*x(i)/((rp-l-y(j))^2)/rp ;
        upy = ((-l+y(j))/rm-1)/(rp-l-y(j))-((l+y(j))/rp-1)*(rm+l-y(j))/(rp-l-y(j)) ;
        Ex(i,j) = - q/(8*pi*eps*l) * upx*(rp-l-y(j))/(rm+l-y(j)) ;
        Ey(i,j) = - q/(8*pi*eps*l) * upy*(rp-l-y(j))/(rm+l-y(j)) ;
    end
end

%
% Afisarea rezultatelor pe ecran
%
fprintf('Matricea potentialului electrostatic, in V:')
V
fprintf('Matricea componentei Ex a intensitatii campului electrostatic, in V/m:')
Ex
fprintf('Matricea componentei Ey a intensitatii campului electrostatic, in V/m:')
Ey
%
% Prezentarea grafica tridimensionala a rezultatelor
%
rotate3d ON
surf(V)
xlabel('Coordonata x (dm)')
ylabel('Coordonata y (dm)')
zlabel('Potentialul electrostatic (V)')
pause
surf(Ex)
xlabel('Coordonata x (dm)')
ylabel('Coordonata y (dm)')
zlabel('Intensitatea campului electrostatic Ex (V/m)')
pause
surf(Ey)
xlabel('Coordonata x (dm)')
ylabel('Coordonata y (dm)')
zlabel('Intensitatea campului electrostatic Ey (V/m)')
%%%%%%%%%%

```

Notă. În vederea evaluării analitice a derivatelor parțiale din relația (2.3-3), cuprinse în segmentul de program cu comentariul “Calculul componentelor intensității câmpului electrostatic Ex, Ey” (v. “listing”-ul programului MATLAB anterior), s-a utilizat –în prealabil– produsul-program MATHCAD. Conținutul sesiunii de lucru MATHCAD, de calcul al acestor derivate, care include operațiile d/dx și d/dy și rezultatele lor, sunt prezentate în “out-print”-ul următor (cu observația că, pentru a se evita confuzia l sau 1, lungimea barei s-a notat cu L):

$$\frac{d}{dx} \ln \left[\frac{[x^2 + (L-y)^2]^{\frac{1}{2}} + L-y}{[x^2 + (L-y)^2]^{\frac{1}{2}} - L-y} \right]$$

$$\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (L-y)^2}} \cdot \frac{x}{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]^2} - \frac{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]}{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]^2 \cdot \sqrt{x^2 + (L-y)^2}} \right] \cdot x}{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]} \cdot [\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]$$

$$\frac{d}{dy} \ln \left[\frac{[x^2 + (L-y)^2]^{\frac{1}{2}} + L-y}{[x^2 + (L-y)^2]^{\frac{1}{2}} - L-y} \right]$$

$$\frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + (L-y)^2}} \cdot (-2L+2y)-1 \right] \cdot \frac{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 + L-y}]}{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]^2} - \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + (L-y)^2}} \cdot (2L+2y)-1 \right] \cdot \frac{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]}{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 + L-y}]}}{[\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]} \cdot [\sqrt{x^2 + (L+y)^2 - L-y}]$$

» aplic23:

Matricea potentialului electrostatic, in V:

V =	16.281	16.190	16.040	15.832	15.568	15.253	14.891	14.489	14.053	13.592
	15.143	15.065	14.935	14.756	14.530	14.260	13.951	13.606	13.233	12.838
	14.146	14.078	13.967	13.812	13.618	13.385	13.119	12.822	12.500	12.159
	13.267	13.208	13.111	12.978	12.809	12.608	12.377	12.120	11.841	11.544
	12.485	12.434	12.350	12.234	12.088	11.913	11.712	11.489	11.245	10.986
	11.788	11.743	11.670	11.568	11.441	11.288	11.113	10.917	10.704	10.475
	11.161	11.122	11.058	10.969	10.857	10.723	10.569	10.397	10.209	10.008
	10.595	10.561	10.504	10.426	10.328	10.210	10.074	9.922	9.756	9.578
	10.082	10.052	10.002	9.933	9.846	9.742	9.622	9.487	9.339	9.181
	9.615	9.588	9.544	9.483	9.406	9.313	9.206	9.087	8.955	8.813

Matricea componenteii Ex a intensitatii campului electrostatic, in V/m:

Ex =	12.185	12.048	11.820	11.501	11.092	10.598	10.024	9.383	8.690	7.965
	10.631	10.515	10.322	10.053	9.712	9.301	8.829	8.303	7.737	7.145
	9.347	9.249	9.086	8.860	8.574	8.232	7.840	7.405	6.938	6.449
	8.275	8.192	8.054	7.864	7.624	7.337	7.010	6.648	6.259	5.851
	7.372	7.301	7.185	7.024	6.822	6.581	6.306	6.002	5.676	5.333
	6.604	6.545	6.446	6.310	6.138	5.935	5.703	5.446	5.170	4.880
	5.947	5.896	5.812	5.697	5.551	5.378	5.181	4.963	4.729	4.482
	5.381	5.338	5.266	5.167	5.043	4.896	4.727	4.541	4.341	4.129
	4.890	4.852	4.791	4.707	4.600	4.474	4.330	4.170	3.998	3.815
	4.461	4.429	4.376	4.304	4.212	4.104	3.979	3.842	3.693	3.535

Matricea componenteii Ey a intensitatii campului electrostatic, in V/m:

Ey =	4.107	4.723	5.303	5.844	6.340	6.784	7.166	7.477	7.707	7.853
	3.423	4.004	4.546	5.046	5.501	5.905	6.254	6.540	6.759	6.908
	2.784	3.334	3.843	4.312	4.736	5.113	5.438	5.709	5.922	6.076
	2.186	2.709	3.193	3.636	4.037	4.393	4.703	4.964	5.175	5.335
	1.630	2.129	2.590	3.013	3.395	3.736	4.035	4.290	4.500	4.666

1.112	1.590	2.031	2.437	2.804	3.134	3.425	3.675	3.886	4.058
0.631	1.089	1.513	1.904	2.259	2.579	2.863	3.112	3.324	3.501
0.183	0.623	1.032	1.409	1.754	2.066	2.346	2.592	2.806	2.988
-0.233	0.190	0.585	0.950	1.286	1.591	1.866	2.111	2.327	2.513
-0.621	-0.212	0.169	0.523	0.850	1.149	1.421	1.664	1.881	2.071

În figurile 2.3-1, 2.3-2 și 2.3-3, sunt prezentate conținutul sesiunii de lucru MATLAB de rezolvare a aplicației, sub forma de grafice în ferestre separate, rezultate prin lansarea în execuție a programului anterior: $V(x,y)$ în figura 2.3-1, E_x în figura 2.3-2 și E_y în figura 2.3-3.

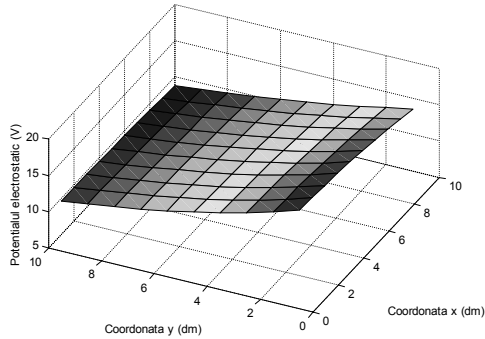


Fig. 2.3-1

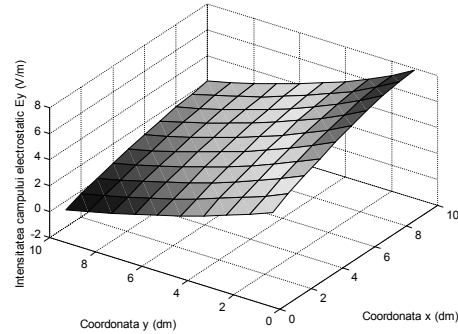


Fig. 2.3-2

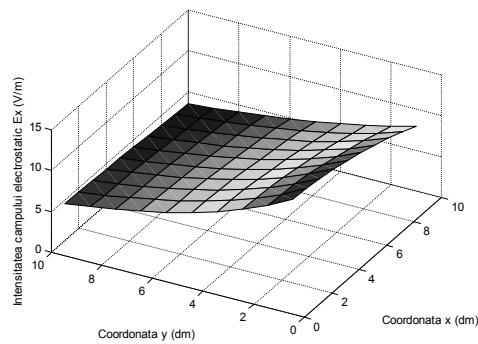


Fig. 2.3-3

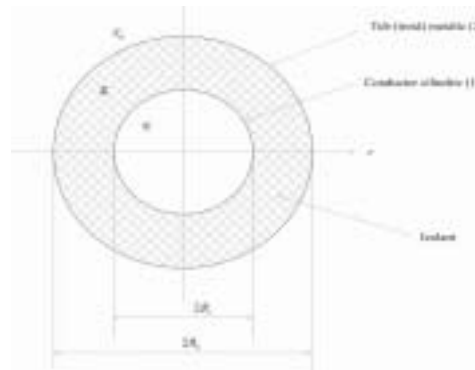


Fig. 2.38

Aplicația 2.4. Să se calculeze câmpul unui cablu coaxial presupus în regim electrostatic.

După cum se știe cablul coaxial este un conductor electric format –în principiu– din doi cilindrii metalici ale căror axe coincid (fig. 2.38). În fapt, “cilindrul metalic” interior este un conductor masiv cilindric – filiform (de exemplu, din cupru) cu diametrul $2R_1$ (care constituie “inima” sau “conductorul cald”), iar “cilindrul metalic” exterior este o împletitură deasă din fire foarte subțiri din cupru (o așa-zisă tresă), de formă cilindrică, ce îmbracă stratul de izolație care înconjoară firul interior, cu diametrul $2R_2$, care joacă rolul de ecran.

Dacă conductorul interior este încărcat cu o sarcină electrică, ce se distribuie uniform în lungul lui cu o densitate liniară $q_l = dq/dl$ în C/m), considerată constantă (în timp) și uniformă (în lungul l al cablului), iar tresă (cilindrul) exterior este legat la masă (cu potențialul electric $V_2=V_0=0$), atunci cablul coaxial din figura 2.38 poate fi considerat un sistem electrostatic în care:

- în interiorul conductorului de rază R_1 , câmpul electrostatic are intensitatea și inducția electrică nulă;
- volumul și suprafața conductorului interior sunt echipotențiale, avînd o valoare V_1 ;

- cilindrul exterior (tresa), fiind legat la masă, are potențialul $V_2 = V_0 = 0$, el ecranând tot ce este în interiorul său (stratul izolant și conductorul central) de câmpurile electrice exterioare cablului coaxial, care nu dau nici un efect în interiorul tresei;

- câmpul electric produs de sarcina q_l (C/m) a conductorului central există numai în dielectric și –dacă izolantul este: omogen, izotrop, fără sarcini electrice (q_v în C/m^3 este nul în stratul izolant), fără polarizație electrică permanentă și liniar ($\epsilon = \text{const.}$ față de \vec{E}) – atunci câmpul electric din stratul izolant are simetrie radială cu $\vec{E} = E\vec{r}_0$, $E(P) = \text{const.} \Rightarrow \forall P \in \Sigma = 2\pi r l$, $R_1 < r < R_2$.

În aceste condiții, conform relației (2.38), intensitatea câmpului electric imediat pe suprafața conductorului interior este normală pe suprafața sa, deci este radială și are expresia:

$$\vec{E}_1 = \frac{q_l}{2\pi\epsilon R_1} \vec{r}_0 \text{ cu valoarea } E_1 = \frac{q_l}{2\pi\epsilon R_1},$$

iar în stratul dielectric, la distanța $R_1 < r < R_2$ de axa cablului coaxial este:

$$\vec{E} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r}, \text{ cu } \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.4-1)$$

Tensiunea electrostatică între cei doi cilindri metalici, 1 și 2, calculată prin stratul dielectric, pe direcția radială, este:

$$U = V_1 - V_2 = \int_{r:1 \rightarrow 2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r:1 \rightarrow 2} \frac{q_l}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}}{r} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.4-2)$$

Capacitatea cu distribuție liniară a cablului, pe unitatea de lungime, (în anumite situații ea fiind o “capacitate parazită”) este așa cum se va arăta în aplicația 2.7 (din § 2.7.3):

$$C_l = \frac{q_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \text{ în F/m.} \quad (2.4-3)$$

Valoarea maximă a intensității câmpului electrostatic se obține pentru $r=R_1$ (pe suprafața conductorului interior) și este:

$$E_{\max} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon R_1} = E_1 \quad (2.4-4)$$

și dacă din a doua egalitate a expresiilor (2.4-3) se explicitază q_l , care devine:

$$q_l = U \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}},$$

introducându-se în expresia (2.4-4), expresia valorii maxime a intensității câmpului electrostatic din cablul coaxial devine:

$$(2.4-5) \quad E_{\max} = \frac{U \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_2/R_1)}}{2\pi\epsilon R_1} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

La tensiunea U dată, valoarea lui E_{\max} dată de expresia (2.4-5) va fi cea mai mică posibilă dacă numitorul $R_1 \ln(R_2/R_1)$ este maxim, ceea ce se poate stabili din ecuația:

$$(2.4-6) \quad \frac{d}{dR_1} \left(R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) = 0,$$

a cărei soluție este: $R_1 = R_2/e = R_2/2,7$.

Atunci, dacă razele R_1 și R_2 ale cablului coaxial îndeplinesc condiția (2.4-6), capacitatea liniară a cablului (pe unitatea de lungime) are valoarea minimă:

$$C_l = 2\pi\epsilon \text{ în F/m.}$$

Aplicația 2.5. *Să se analizeze câmpul electrostatic în cazul prezenței unui conductor cilindric infinit lung paralel cu suprafața unui semispațiu conductor infinit.* O astfel de problemă prezintă importanță deosebită în tehnică (instalații electrice, construcții diverse etc. situate în exterior, “sub cerul liber”), deoarece permite determinarea efectului de ecran al “firelor de gardă” prevăzute pentru protecția liniilor de transport de înaltă tensiune a energiei electrice și al sistemelor de “captare” orizontală ale instalațiilor de paratrăsnet din construcții.

“Electricitatea atmosferică” constă –în primul rând– în existența unui câmp electric natural (cu caracter electrostatic pe anumite perioade de timp) determinat de condițiile atmosferice și meteorologice. În principal, câmpul electric atmosferic se datorează sarcinilor electrice, de obicei de semn pozitiv aflate în nori (în special în norii de furtună, și mai ales în cei situați la mare înălțime) care –împreună cu sarcinile electrice (negative) induse pe suprafața solului– determină formarea unor linii de câmp electric avînd orientarea verticală (cu sensul de la nori către pămînt). La dimensiunile atât de mari ale sistemului nori-atmosferă-pămînt, câmpul electric atmosferic poate fi considerat uniform, cu valoarea intensității $E_0 = \text{const.}$ în toate punctele din aer, astfel că potențialul electrostatic la înălțimea y deasupra solului va fi, conform definiției (2.26):

$$(2.5-0) \quad V_0 = E_0 y + V_s = E_0 y,$$

unde V_s este potențialul de referință al solului (pămîntului) care poate fi considerat nul. În acest fel, solul poate fi asemănat cu un semiplan conductor infinit lung iar firul de gardă cu un conductor cilindric infinit lung și cu diametrul relativ mic (neglijabil în raport cu lungimea), ceea ce constituie cazul problemei formulate la începutul aplicației 2.5.

Potențialul electrostatic determinat de un conductor cilindric cu lungimea l foarte mare în raport cu diametrul lui, care s-a încărcat cu o sarcină electrică q , distribuită uniform în lungul său, este dat –într-un punct P situat la distanța r de axul cilindricului– de relația cunoscută (2.3-2), adică:

$$(2.5-1) \quad V(P) = V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int \frac{dq}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{1}{r} + V_m,$$

considerată pentru o lungime de conductor egala cu 1, cu o repartitie uniformă a sarcinii electrice q/l și cu constanta de integrare V_m .

Liniile de câmp electric sunt radiale în plane perpendiculare pe axa conductorului cilindric, iar liniile echipotențiale considerate în același plan sunt cercuri concentrice (planul fiind o secțiune transversală pe suprafețele echipotențiale, care sunt suprafețe cilindrice coaxiale cu cilindrul conductor).

Când conductorul cilindric (firul de gardă) este situat în apropierea solului, liniile de câmp se curbează, astfel încât ele să rămână simultan perpendiculare pe suprafețele echipotențiale ale conductorului (firul cilindric) și ale suprafeții solului, precum și pe toate celelalte suprafețe echipotențiale dintre firul de gardă și suprafața solului.

Potențialul unui punct P din spațiu se poate calcula ușor prin metoda imaginilor electrice din electrostatică.

Metoda imaginilor electrice este o consecință a teoremei unicității determinării câmpului electrostatic, pe baza observației că un câmp electrostatic nu se poate modifica dacă se mențin condițiile sale de unicitate. Această observație duce la concluzia că anumite corpuri conductoare la care este limitat domeniul sau mediul dielectric înconjurător, pot fi înlocuite cu un alt domeniu și cu alte conductoare, cu un astfel de plasament simetric (ca poziție, sarcina electrică și semn al sarcinilor electrice) încât condițiile de unicitate să rămână aceleași, ceea ce înseamnă că soluția rămâne și ea aceeași. Astfel, câmpul electrostatic pe o parte a unei suprafețe Σ , nu neapărat echipotențială (deci într-un semispațiu), nu se modifică dacă pe cealaltă parte a acelei suprafețe Σ (celălalt semispațiu) se schimbă parametrii mediului și distribuția sarcinilor electrice în așa fel încât pe Σ condițiile la limită să rămână nemodificate. În acest caz, sarcinile electrice nou introduse se numesc *imagini ale sarcinilor originale*, iar metoda de calcul ce folosește această transformare este numită *metoda imaginilor sarcinilor electrice*.

Astfel, în cazul problemei propusă de aplicația 2.5, suprafața pământului poate fi eliminată din datele problemei dacă parametrii mediului de sub suprafața pământului (semispațiul subteran) se consideră identici cu cei ai spațiului de deasupra (semispațiul atmosferic) și dacă se instalează în “subsol” imagini electrice ale conductorului cilindric aerian în așa fel încât să se mențină potențialul nul al suprafeței de separații (suprafața solului). De aceea, aplicarea metodei imaginilor electrice în cazul acestei aplicații, impune ca imaginea sarcinii electrice original $+q$, situată pe conductorul cilindric aerian situat la înălțimea h_1 , față de sol, să fie un conductor fictiv îngropat în sol la adâncimea tot h_1 , însă încărcat cu sarcina imagine $-q$ (fig. 2.39)

În acest caz, potențialul punctului P rezultă aplicându-se relația (2.5-1) și teorema superpoziției câmpurilor electrostatice, rezultând:

$$V_e = V - V' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{1}{r} + V_m - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{1}{r'} - V_m,$$

adică:

$$V_e = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r'}{r}, \quad (2.5-2)$$

notația V_e indicând potențialul electrostatic echivalent. Sarcina acumulată pe conductor (firul de gardă) poate fi determinată în funcție de potențialul lui V_{ec} , atunci când punctul P (din figura 2.39) se deplasează pe suprafața cilindrului original (care are diametrul d). În acest caz, $r=d/2$ și $r' \cong 2h$, astfel că relația (2.5-2) îl dă pe V_{ec} , fiind:

$$V_{ec} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{4h}{d}.$$

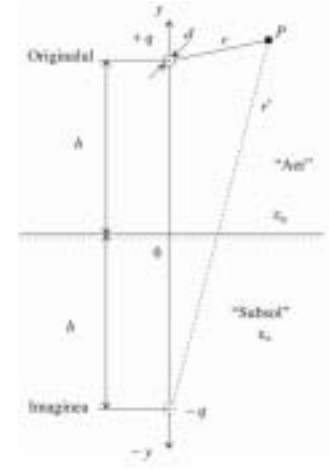


Fig. 2.39

Atunci când firul de gardă (conductorul original) este izolat față de pământ, aflându-se în câmpul electric atmosferic, potențialul său este egal cu cel al punctului din aer în care este instalat firul, adică la potențialul dat de relația (2.5-0) și anume $V_{oc}=E_0 y=E_0 h$ (deoarece $y=h$), și –în acest fel– pe conductor (firul de gardă) nu se pot “depune” sarcini electrice.

În lucrarea *Gavrilă, H., Centea, O. (1998)* se face un studiu mai amănunțit al modului în care firul de gardă (conductorul cilindric, infinit lung, suspendat la distanța h față de suprafața solului) poate îndeplini **rolul de ecran electrostatic**. Astfel, dacă firul de gardă se leagă la pământ atunci potențialul său va deveni nul ($V_{oc}=0$) și legătura la pământ (fiind o legătură conductoare) va permite acumularea de sarcini electrice pe conductorul cilindric. De aceea, potențialul electrostatic într-un punct P din aer va fi suma potențialelor date de relațiile (2.5-0) și (2.5-2), adică potențialul electrostatic fără sarcină electrică plus potențialul electrostatic determinat de firul de gardă încărcat cu sarcina electrică q :

$$V = V_o + V_e = E_0 y + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r'}{r}, \quad (2.5-4)$$

aceasta în virtutea teoremei superpoziției câmpurilor electrostatice.

Pe suprafața solului, pentru care $r=r'$ și $y=0$, ambii membri ai relației precedente (2.5-4) se anulează, adevărind faptul că potențialul electrostatic al solului $V_s=0$ –v. relația (2.5-0).

Determinarea sarcinii electrice q , cu care se poate încărcă firul de gardă, se face cu relația (2.5-4) în care se iau: $y=h$, $r=d/2$, $r'=2h$ și $V(P)=V=0$ (pe suprafața firului de gardă); atunci (2.5-4) devine:

$$0 = E_0 h + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{4h}{d},$$

de unde rezultă:

$$(2.5-5) \quad q = -\frac{2\pi\epsilon_0 l E_0 h}{\ln \frac{4h}{d}},$$

Înlocuindu-se q în relația (2.5-2) cu expresia sa (2.5-5), se va obține formula potențialului electrostatic echivalent V_e , datorat sarcinii electrice q de pe firul de gardă în orice punct P din semispațiul atmosferic, caracterizat de razele r și r' :

$$(2.5-6) \quad V_e = -E_0 h \frac{\ln \frac{r'}{r}}{\ln \frac{4h}{d}},$$

precum și potențialul electrostatic total V din același punct P , ca sumă a potențialului electrostatic datorat atmosferei –adică V_0 dat de relația (2.5-0) în punctul P – și a potențialului electrostatic datorat prezenței firului de gardă legat la pământ –adică V_e dat de relația (2.5-6):

$$(2.5-7) \quad V = E_0 y - E_0 h \frac{\ln(r'/r)}{\ln(4h/d)}.$$

Dacă razele de la punctul P considerat la conductorul original (r) și la cel imagine (r') sunt exprimate în funcție de coordonatele (x,y) ale punctului, adică:

$r = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$ și $r' = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$, expresia (2.5-7) devine:

$$(2.5-8) \quad V = E_0 \left(y - \frac{h}{\ln(4h/d)} \cdot \ln \frac{[x^2 + (y-h)^2]^{1/2}}{[x^2 + (y+h)^2]^{1/2}} \right).$$

Liniiile echipotențiale, trasate cu ajutorul unui program MATLAB (asemănător celui folosit de aplicația 2.1), linii care unesc punctele (x,y) din semispațiul atmosferic – în intervalul:

$$x \in \left\{ -h, -\frac{d}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{d}{2}, h \right\} \text{ și } y \in \left\{ 0, h - \frac{d}{2} \right\} \cup \left\{ h + \frac{d}{2}, 1,5h \right\}$$

cu un increment $\Delta x = \Delta y = 0,1h$ – care au același potențial $V(x,y) = \text{const.}$, arată așa ca în figura 2.40 pentru un caz luat ca exemplu cu: $E_0 = 10.000 \text{ V/m}$, $h = 11 \text{ m}$ și $d = 0,008 \text{ m}$ (el este precedat de „listing”-ul programului prin care a fost realizat).

```
% Program MATLAB pentru rezolvarea Aplicației 2.5
%
clear
E = 400000 ;
h = 11 ;
d = 0.008 ;
dx = 0.1 * h ;
dy = dx ;
for kx=1:21
    x(kx) = - h + (kx-1) * dx ;
end
for ky=1:16
    y(ky) = 0 + (ky-1) * dy ;
end
for i=1:16
    for j=1:21
        upv = (x(j)^2+(y(i)-h)^2)^0.5 ;
        dwv = (x(j)^2+(y(i)+h)^2)^0.5 ;
        if upv == 0 upv = 0.64 ; end
        V(i,j) = E*(y(i) - h*(log(upv/dwv))/(log(4*h/d)));
    end
end
contour(x,y,V,15)
xlabel('Coordonata x (m)')
```



```

ylabel('Coordonata y (m)')
title('Liniile echipotentiale')
hold on
plot(0,11,'o')
%
```

Pentru completarea spectrului, se pot trasa și liniile de câmp, care sunt curbe perpendiculare pe liniile echipotențiale (deoarece $\vec{E} = -\text{grad } V$). Spectrul din figura 2.40 arată ca în apropierea firului de gardă (conductorul de protecție prin ecranare), potențialul electrostatic scade relativ mult, mai ales sub conductor, dar și lateral și chiar deasupra lui. Pe conductorul de protecție se termină o parte foarte mare a liniilor de câmp superioare (intensitatea câmpului electrostatic este puternic mărită deasupra conductorului, iar dedesubtul lui ea este mult diminuată, într-o zonă relativ întinsă, numită “zonă de umbră”). În acest fel, firul de gardă are un **efect de ecranare**, pentru o zonă aflată sub conductor, între el și suprafața solului.

În lipsa conductorului de protecție, într-un punct din atmosferă, potențialul electrostatic este cel natural, dat de relația (2.5-0), adică $V_0 = E_0 y$; după instalarea conductorului, potențialul devine V , adică cel dat de relația (2.5-7), astfel că modificarea relativă a potențialului, care poate fi numit *coeficient de ecranare* c_e , adică:

$$c_e = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{-V_e}{V_0},$$

unde V_e este potențialul electrostatic echivalent dat de relația (2.5-6) încât se ajunge la expresia :

$$c_e = \frac{h \ln(r'/r)}{y \ln(4h/d)} \quad (2.5-9)$$

La distanțe nu prea mari față de conductor, cum sunt punctele P pentru care $r' = h + \Delta h$ și $y \cong \Delta h$, relația (2.5-9) devine:

$$c_e = \frac{h \ln(h + \Delta h / r)}{\Delta h \ln(4h/d)}, \quad (2.5-10)$$

care, spre exemplu pentru un conductor de protecție cu diametrul $d = 8\text{mm}$, instalat la o înălțime $h = 11\text{m}$ deasupra solului, are într-un punct aflat la $r = 1\text{m}$ dedesubtul său (adică $y = r = 1$ și $\Delta h = y = h - r = 11 - 1 = 10\text{m}$) valoarea:

$$c_e(1\text{m}) = \frac{11 \ln[(11 + 10)/1]}{10 \ln(4 \cdot 11 / 0.008)} = 0.38675.$$

La dimensiunile uzuale ale conductoarelor de protecție ($d = 8\text{-}10\text{mm}$) și la rapoarte $h/\Delta h$ apropiate de 1, efectul de ecranare este cam același, cu un coeficient de ecranare c_e de ordinul a (30...40)%. Formula (2.5-10) arată că montarea conductoarelor de protecție determină reducerea accentuată a potențialului electric natural și a variațiilor sale în cursul furtunilor, ducând la eliberarea sarcinilor electrice induse și la reducerea supratensiunilor aplicate obiectivului protejat în timpul descărcărilor electrice atmosferice.

Intensitatea câmpului electric determinat de conductorul de protecție pe direcția razei r (v. fig. 2.39) este dată, după cum se știe de gradientul potențialului electric pe acea direcție. Astfel pentru o valoare $r < h/4$, raza r' (de la punctul P considerat la conductorul imagine) este practic constant și egal cu $2h$. Într-adevăr:

$$r = h/4 \rightarrow r' = \sqrt{\left(\frac{h}{4}\right)^2 + (2h)^2} = \sqrt{\frac{h^2}{16} + 4h^2} = h\sqrt{\frac{1+64}{16}} = \sqrt{4,06}h \cong 2h.$$

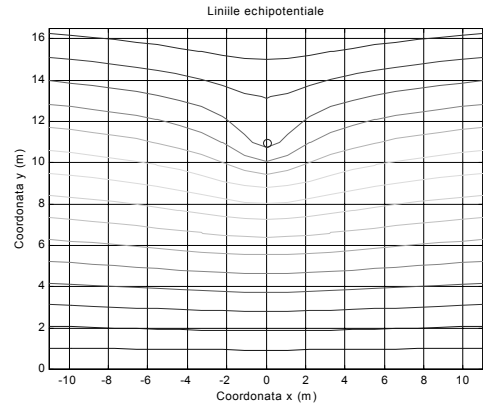


Fig. 2.40

În acest caz, $r < h/4$ (ceea ce înseamnă practic în apropierea conductorului de protecție), utilizându-se expresia (2.5-6) a lui V_e , rezultă intensitatea câmpului electric echivalent și anume:

$$(2.5-11) \quad E_e(r) = -\text{grad}V_e(r) = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{\frac{h}{r}E_0}{\ln(4h/d)}.$$

Pe suprafața conductorului de gardă, unde $r=d/2$, intensitatea câmpului electric, E_{ec} , rezultă imediat din (2.5-11):

$$(2.5-12) \quad E_{ec} = \frac{2h/d}{\ln(4h/d)} E_0, \text{ normal pe cilindrul conductor,}$$

unde –reamintim– E_0 este intensitatea câmpului electric atmosferic. Deoarece pentru $\alpha \gg 1$, $\ln \alpha \ll \alpha$ [de exemplu pentru $h=11\text{m}$ și $d=0,008\text{m}$, rezultă: $2h/d=22/0,008=2,750$ și $\ln(4h/d)=8,59$ care este de 320 ori mai mică decât $2h/d=2,750$], relația (2.5-12) arată că orice câmp electric atmosferic este puternic concentrat pe conductorul de protecție, efect ce se accentuează cu cât înălțimea de montare a firului de gardă h este mai mare.

Astfel, pentru aceleași date din exemplul considerat până acum ($h=11\text{m}$ și $d=0,008\text{m}$), rezultă:

$$E_{ec} = \frac{2 \cdot 11 / 0,008}{\ln(4 \cdot 11 / 0,008)} E_0 = 320 E_0$$

și dacă –de exemplu– există în atmosferă un câmp electric cu intensitatea $E_0 = 10.000\text{V/m}$ (valoare mult mai mică decât aceea din timpul furtunilor cu descărcări electrice numeroase), la suprafața conductorului de protecție apare un câmp electric cu intensitatea de $3,2\text{MV/m}$, suficient de mare pentru a provoca descărcări electrice prin efect Corona (v. Fizica) în jurul firului de gardă și ionizarea aerului în zona lui, ceea ce atrage descărcarea spre conductor a sarcinilor electrice (și de aici la pământ), protejându-se astfel construcțiile de sub conductor (numit, de aceea, și conductor de protecție sau –încă– și fir de gardă).

Dar toate acestea se întâmplă când se poate considera, repetăm, $r'=\text{const.}$ (și r relativ mic). La o anumită distanță r_0 sub conductorul de protecție, cu valoarea:

$$(2.5-13) \quad r_0 = \frac{h}{\ln(4h/d)},$$

se produce egalitatea intensității câmpurilor electrice: $E_e = E_0$. Deoarece între sol și conductor, câmpul electric al semiconductorului de protecție \vec{E}_{ec} și cel natural \vec{E}_e au sensuri contrare pe verticala la suprafața solului, rezultă că în punctul cu $r=r_0$ câmpul atmosferic este complet neutralizat. În exemplul dat, expresia (2.5-13) arată că valoarea lui r_0 , la care se produce această neutralizare, este:

$$r_0 = \frac{11}{\ln(4 \cdot 11 / 0,008)} = \frac{11}{8,59} = 1,28\text{m}$$

sub conductorul de protecție. Un obiect situat în acest punct este ecranat, deci, în protecție de 100% și probabilitatea de a fi atins de trăsnet este minimă (teoretic nulă). Rezultă, așadar, că elementele necesare a fi protejate trebuie să fie plasate (instalate) cât mai aproape de acest punct (în jurul lui). Se poate dovedi (v. *Gavrilă și Centea, 1998*) că înălțimea h_y (de la sol către firul de gardă) până la care trebuie instalat un obiectiv ca să poată fi eficient ecranat (protejat) este:

$$h_y < h - \frac{r_0}{2},$$

unde r_0 este dat de formula (2.5-13). În cazul exemplului considerat: $h_y < 11 - 1,28/2 < 10,36\text{m}$ (practic sub 10m deasupra solului).

Aplicația 2.6 Să se determine câmpul electrostatic produs de patru corpuri punctiforme (1,2,3 și 4), încărcate cu sarcinile electrice q_1, q_2, q_3 și q_4 , situate în colțurile unui patrulater oarecare (fig. 2.41).

Aparent, această aplicație este simplu de realizat prin aplicarea teoremei lui Coulomb și a teoremei superpoziției câmpurilor electrice, rezultând (pentru orice punct P din planul Ω) :

$$\vec{E}(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^4 \frac{q_k \vec{r}_k}{r_k^3} \text{ și } V_k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k}, \quad (2.6-1)$$

în $\forall r \in \Omega$

Dar, reprezentarea razelor vectoriale r_1, r_2, r_3, r_4 de la corpul punctiform la diversele puncte (x, y) din câmp (din planul xOy), deși se face printr-o relație simplă și anume $r_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}$, $k=1,2,3,4$, unde (x_k, y_k) sunt coordonatele corpurilor punctiforme, este atât de dificilă de realizat încât chiar cu asistența unei logistici informatice bune (de exemplu, prin utilizarea produsului informatic MATHCAD) este necesar un efort mare de programare.

Problema devine într-adevăr simplă dacă se utilizează un alt model decât (2.6-1) obținut prin intermediul transformării geometrice Schwarz – Christoffel, care permite transformarea conformă a unui contur poligonal închis într-o linie dreaptă, ce poate fi asimilată cu axa reală $O\xi$ a unui plan complex $\underline{\zeta}$. Apoi, calculul unui câmp produs

de corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice și situate într-o poziție coliniară devine destul de ușor.

Câmpul electric produs de corpurile punctiforme coliniare, încărcate cu sarcini electrice (așa-zisele „sarcini coliniare”). Se consideră exemplul din figura 2.42, în care: a este un exemplu de dispunere a sarcinilor electrice de-a lungul axei reale $O\xi$ și b reprezintă calculul unghiurilor de rotație a intensității câmpului electrostatic.

Se consideră că de-a lungul axei reale a planului $\underline{\zeta} = \xi + j\eta$ (unde j este unitatea imaginară, $j^2 = -1$, și

operatorul de rotație cu unghiul $\pi/2$ în planul complex) sunt plasate sarcini electrice concentrate punctual și distribuite liniar într-o succesiune oarecare (de exemplu, așa ca în figura 2.42 a). În acest fel axa reală $O\xi$ va fi formată din segmente echipotențiale (de exemplu în figura 2.42 a segmentele $\overline{b_1b_2}$ și $\overline{b_3b_4}$) și din segmentele de linii de câmp (ca, de exemplu $\overline{a_1b_1}, \overline{b_2b_3}$, etc.). De aceea se pune problema calculării distribuției intensității câmpului electrostatic, precum și a potențialului electrostatic pentru repartiția de sarcini electrice dată.

În acest scop, se introduce o nouă noțiune și anume **câmpul electric complex**, care în lucrarea Gavrilă și Centea (1998) este reprezentat de funcția denumită *potențial complex*, notată cu \underline{W} și definită prin :

$$(2.6-2) \quad \underline{W}^D = U$$

care este o funcție fazorială definită în planul complex \underline{z} .

Atât partea reală U cât și cea

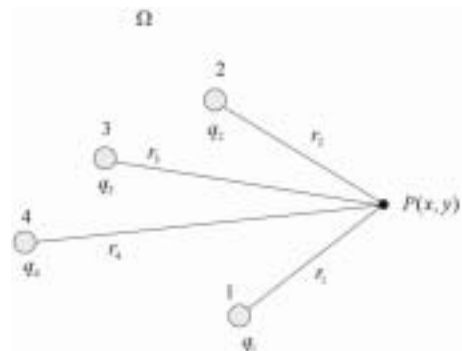


Fig. 2.41

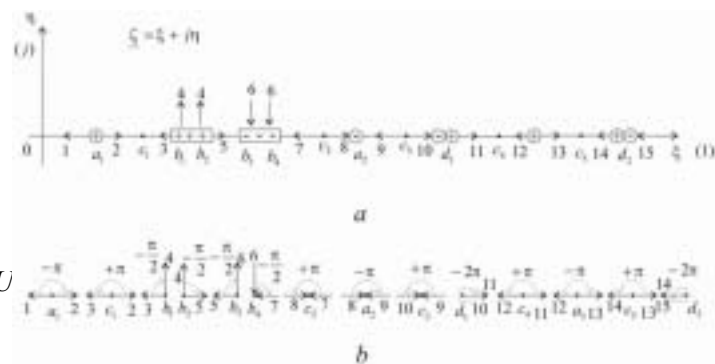


Fig. 2.42

imaginară V pot reprezenta potențialul electrostatic (potențialul original) al unui câmp oarecare. Forma unor linii echipotențiale $U = \text{const.}$ sau $V = \text{const.}$ poate fi asemuită cu niște conductoare încărcate cu sarcini electrice al căror câmp este descris prin componentele potențialului complex \underline{W} . Ambelor funcții conjugate U și V le corespund intensitățile câmpului :

$$(2.6-3) \quad \begin{cases} \underline{E}_U = E_{Ux} + jE_{Uy} = -\frac{\partial U}{\partial x} - j\frac{\partial U}{\partial y} \\ \underline{E}_V = E_{Vx} + jE_{Vy} = -\frac{\partial V}{\partial x} - j\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases},$$

scrise pe baza definiției clasice : $E = -\text{grad}V$.

Dacă una din funcțiile U sau V reprezintă potențialul original, cealaltă funcție poate fi utilizată pentru determinarea atât a traiectoriei liniilor de câmp , cât și a sarcinii electrice a conductoarelor (precum și distribuția ei pe corpul conductor) .

În ceea ce privește trasarea liniilor de câmp se pleacă de la constatarea că liniile $U = \text{const.}$ și $V = \text{const.}$ sunt ortogonale, deoarece în cadrul funcției complexe $\underline{W} = U + jV$, j este un operator de rotație cu $\pi/2$. De altfel, acest fapt rezultă și din efectuarea produsului scalar dintre intensitățile \overline{E}_U și \overline{E}_V din planul geometric xOy , adică :

$$(2.6-4) \quad \overline{E}_U \cdot \overline{E}_V = E_{Ux}E_{Vx} + E_{Uy}E_{Vy},$$

în care :

$$(2.6-5) \quad \begin{cases} \overline{E}_U = -\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} = E_{Ux}\bar{i} + E_{Uy}\bar{j} \\ \overline{E}_V = -\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\bar{j} = E_{Vx}\bar{i} + E_{Vy}\bar{j} \end{cases},$$

unde \bar{i} și \bar{j} sunt versorii axelor geometrice Ox și Oz .

Ținându-se seama de faptul că vectorii intensităților electromagnetice \overline{E}_U și \overline{E}_V sunt, în fiecare punct al planului geometric xOy , tangente la traiectoriile liniilor echipotențiale $U = \text{const.}$ și respectiv- $V = \text{const.}$, ortogonalitatea este asigurată dacă produsul scalar (2.6-4) este nul. Folosindu-se condițiile Cauchy-Riemann și anume :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

ceea ce înseamnă, ținându-se seama de ecuațiile sistemului (2.6-5), că:

$$E_{Ux} = E_{Vy}; \quad E_{Uy} = -E_{Vx},$$

care introduse în membrul drept al relației (2.6-4) dau :

$$E_{Ux}E_{Vx} + E_{Uy}E_{Vy} \equiv E_{Vy}E_{Vx} - E_{Vx}E_{Vy} = 0 \rightarrow \overline{E}_U \cdot \overline{E}_V = 0.$$

Prin urmare, relațiile (2.6-3) și (2.6-2) arată că :

$$\frac{dW}{dz} = -\underline{E}_u^* = -jE_v^*, \quad (2.6-6)$$

steluța indicând conjugata funcției complexe.

Termenul dW/dz este denumit *intensitatea complexă a câmpului electric*. Relațiile precedente arată că, în valoare absolută, cele trei intensități sunt egale în același punct:

$$|dW/dz| = E_U = E_V. \quad (2.6-7)$$

Revenind la problema din figura 2.41 rezultă, ținându-se seama de egalitățile (2.6-6), că în punctele de tipul a_1, a_2, \dots (în care sunt concentrate sarcini electrice pe corpuri punctiforme), intensitatea câmpului electric devine infinită, iar la stânga și la dreapta punctelor are sensuri opuse

(v. fig. 2.42 a). De aceea, în formula de calcul a intensității câmpului trebuie introduși niște factori de forma :

$$\frac{1}{(\underline{\zeta} - a_1) \cdots} \quad (2.6-8)$$

În punctele de pe axa reală, $\underline{\zeta} = a + jO = \xi$, condițiile (2.6-8) sunt îndeplinite, deoarece $\underline{\zeta}$ pe axa absciselor primește numai valori reale:

$$\underline{\zeta} = a_1, a_2, \dots$$

În punctele de tipul b_1, b_2, \dots , care se situează la limita dintre o linie de flux (de câmp) și o linie echipotențială, câmpul electric devine infinit iar direcția sa se modifică cu $\pi/2$, ceea ce implică introducerea în formulele de calcul a unor factori de forma :

$$\frac{1}{\sqrt{(\underline{\zeta} - b_1)(\underline{\zeta} - b_2) \cdots}} \quad (2.6-9)$$

deoarece atunci punctul în care se face calculul se găsește în stânga punctului b_1 sau la dreapta punctului b_2 (b_1 și b_2 fiind deci capetele conductorului filiform cu distribuție liniară a sarcinii electrice) produsul de sub radical în (2.6-9) este pozitiv și intensitatea câmpului este reală (adică pe direcția axei reale $O\xi$), iar când câmpul curent se găsește între capetele b_1 și b_2 , produsul este negativ, radicalul din (2.6-9) este atunci imaginar și ca urmare argumentul funcției intensitate complexă a câmpului $dW/d\underline{\zeta}$ se rotește cu $\pi/2$ (pe direcția axei imaginare $O\eta$).

Dacă punctele b_1 și b_2 se apropie între ele, sarcina rămâne constantă și porțiunea b_1 - b_2 încărcată electric se reduce la un punct, factorul (2.6-9) transformându-se într-un factor de forma (2.6-8).

Sarcinile coliniare pot fi și sarcini dipolare, deoarece pe axa reală se pot găsi și dipoli de tipul d_1, d_2 (în figura 2.42 a). Prezența acestora se manifestă în formula de calcul prin factori de forma:

$$\frac{1}{(\underline{\zeta} - d_1)^2 \cdots} \quad (2.6-10)$$

care apar ca o limită calculată în felul următor:

$$\lim_{a_1 \rightarrow d_1 \leftarrow a_2} \frac{1}{(\underline{\zeta} - a_1)(\underline{\zeta} - a_2)} = \frac{1}{(\underline{\zeta} - d_1)^2} \quad (2.6-11)$$

sugerată de definiția (1.11) a momentului electric.

În sfârșit, pe axa reală $O\xi$ se mai pot afla și puncte de tipul c_1, c_2, \dots (vezi figura 2.42 a), în care intensitatea câmpului se anulează și își schimbă sensul (de o parte și de cealaltă parte). Astfel de puncte pot exista pe axă în locurile cuprinse între cele două corpuri punctiforme cu sarcini de același semn (v. fig. 2.35). De acest caz se ține seama introducându-se în formula de calcul a intensității câmpului a unor factori de forma:

$$(2.6-12) \quad (\underline{\zeta} - c_1) \cdots,$$

deci pozițiile punctelor c nu pot fi cunoscute apriori, ele putând fi determinate numai pe baza condițiilor la limită.

Rezultă, atunci, că în cazul sarcinilor electrice coliniare (concentrate pe corpuri punctiforme, distribuite pe corpuri filiforme, legate ca sarcini dipolare etc.), intensitatea complexă a câmpului electric se poate calcula cu o formulă de forma:

$$(2.6-13) \quad \frac{d\underline{W}}{d\underline{\zeta}} = \underline{A} \frac{(\underline{\zeta} - c_1) \cdots}{(\underline{\zeta} - a_1) \cdots \sqrt{(\underline{\zeta} - b_1)(\underline{\zeta} - b_2) \cdots (\underline{\zeta} - d_1)^2}},$$

unde \underline{A} este o constantă complexă care se determină din condițiile la limită .

Dacă pe axa $O\xi$ se găsesc n conductori punctiformi coliniari, gradul numitorului expresiei (2.6-13) este chiar n . În ipoteza extremă că sarcinile coliniare sunt de același semn, numărul punctelor c care apar la numărătorul fracției (2.6-13) va fi maxim, adică $n-1$ (câte intervale sunt între cele n corpuri coliniare), iar când semnul sarcinilor electrice consecutive alternează, evident că gradul numărătorului va fi mai mic decât $n-1$.

Din relația (2.6-13) rezultă că potențialul electrostatic complex \underline{W} –definit prin funcția (2.6-2)– se poate determina cu formula:

$$(2.6-14) \quad \underline{W} = \underline{A} \int \frac{(\underline{\zeta} - c_1) \cdots}{(\underline{\zeta} - a_1) \cdots \sqrt{(\underline{\zeta} - b_1)(\underline{\zeta} - b_2) \cdots (\underline{\zeta} - d_1)^2}} d\underline{\zeta} + \underline{B},$$

unde \underline{B} este și ea o constantă complexă de integrare. Această formulă poate fi prelungită analitic în tot planul complex $\underline{\zeta}$.

Potențialul complex \underline{W} , dat de expresia (2.6-14) este o funcție de variabilă complexă $\underline{\zeta} = \xi + j\eta$ și –de aceea– satisface ecuația lui Laplace ($\Delta \underline{W} = 0$ în punctele $\underline{\zeta}$ în care $q_v [C/m^3] = 0$). Ca urmare, expresiile (2.6-14) și (2.6-13), ale potențialului electric și câmpului electric (complexe) permit determinarea tuturor constantelor ($\underline{A}, \underline{B}$ și c) în funcție de sarcinile electrice date, valorile la limită ale potențialului electric, condițiile la limită pe axa $O\xi$ (reală) și condițiile de la infinit (astfel, la distanțe mari contribuția dipolilor electrice $-Q \rightarrow +Q$ poate fi neglijată, iar sarcinile electrice concentrate în punctele a și cele distribuite între punctele $b_k - b_{k+1}$ apar ca sarcini pe corpuri punctiforme a căror contribuție în formulele de calcul (2.6-14) și (2.6-13) este de forma $1/(\underline{\zeta} - a)$, făcând ca –la infinit– potențialul \underline{W} să aibă o evaluare logaritmică).

În expresia (2.6-13), a intensității complexe a câmpului electric, apar factori de forma $(\underline{\zeta} - a)^{-1}, (\underline{\zeta} - b)^{-1/2}, (\underline{\zeta} - c)^{-1}$ și $(\underline{\zeta} - d)^{-2}$, ai căror exponenți (1, -1/2, -1 și -2) reprezintă, datorită operatorului j de rotație cu $\pi/2$ din structura lui $\underline{\zeta}$, raportul θ/π , unde θ este unghiul cu care se rotește intensitatea câmpului electric în dreptul punctului considerat (c, b, a și d). Întrădevăr, unitatea complexă $j^2 = -1$, rotește, în planul complex $\underline{\zeta}$, orice vector (deci și pe $d\underline{W}/d\underline{\zeta}$) cu $\pi/2$ dacă $j = j^1$, cu $-\pi/2$ dacă operatorul este j^{-1} și cu 2π dacă j este la puterea -2 sau $+2$ (pentru că : $j^0 = 1$ adică axa reală $O\xi$, $jj^0 = j$ adică axa imaginară $O\eta$, $jj = j^2 = -1$ adică axa reală $O-\xi$, $jj^2 = -j$ adică axa imaginară $O-\eta$ și $-jj^2 = 1$ adică iarăși axa reală $O\xi$ ș.a.m.d.). De exemplu, în figura 2.42, în stânga punctului a_1 , intensitatea câmpului electric are sensul spre valorile descrescătoare ale lui ξ , deci unghiul pe care îl face cu sensul pozitiv al acestei axe $O\xi$ este $\theta = \pi$, iar în dreapta punctului a_1 sensul intensității coincide cu sensul pozitiv al axei reale $O\xi$, deci $\theta = 0$, caz în care creșterea unghiului este $0 - \pi = -\pi$, iar câtul $\theta/\pi = -\pi/\pi = -1$, adică exponentul factorului $(\underline{\zeta} - a)^{-1}$.

În figura 2.42b este prezentat modul de calcul al acestor unghiuri de rotire pentru distribuția sarcinilor electrice (coliniare) pe axa $O\xi$ din figura 2.42a .

Prin generalizare, dacă funcția complexă $d\underline{W}/d\underline{\zeta}$ se rotește într-un punct oarecare a cu un unghi $+\theta$, în formula (2.6-13) va trebui introdus un factor $(\underline{\zeta} - a)^{-\theta/\pi}$, deoarece:

- la stânga punctului a , de referință, $(\underline{\zeta} - a)$ este negativă:

$$\underline{\zeta} - a = -|\underline{\zeta} - a| = |\underline{\zeta} - a|e^{j\pi},$$

iar numărul $(\underline{\zeta} - a)^{-\theta/\pi}$ reprezintă mărimea $(|\underline{\zeta} - a|e^{j\pi})^{-\theta/\pi} = |\underline{\zeta} - a|e^{-j\theta}$;

- la dreapta punctului a , factorul $(\underline{\zeta} - a)$ este pozitiv, argumentul său fiind nul și de aceea unghiul crește cu $+\theta$.

De exemplu, în cazul cu totul particular al unui câmp electrostatic uniform, în toate punctele liniilor echipotențiale sau de câmp, vectorul intensității câmpului nu își schimbă direcția, ceea ce face ca exponenții tuturor factorilor $(\underline{\zeta} - p)$, cu $p \in \{a, b, c, d\}$ să fie nuli și astfel:

$$d\underline{W}/d\underline{\zeta} = A, \quad \underline{W} = A\underline{\zeta} + B \quad \text{și} \quad U = A\xi + B, \quad V = A\eta + B$$

constantele de integrare fiind numere reale. În acest caz liniile echipotențiale și liniile de câmp formează o rețea de drepte ortogonale echidistante și paralele cu axele de coordonate rectangulare (așa ca în figura 2.43).

În cartea *Gavrilă, Centea (1998)* sunt prezentate numeroase exemple, toate având un important interes practic.

Ne putem reîntoarce acum la problema enunțată la începutul acestei aplicații (v. fig. 2.41) datorită faptului că prin transformarea geometrică Schwarz-Christoffel, care va fi descrisă în continuare, conturul poligonal închis pe care îl formează corpurile punctiforme încărcate cu sarcini electrice din figura 2.41, va putea fi transformat într-o linie dreaptă, care poate fi asimilat cu axa reală $O\xi$ a unui plan complex $\underline{\zeta}$. În acest fel interiorul poligonului se transformă în semiplanul superior al planului complex $\underline{\zeta}$, iar exteriorul lui în semiplanul inferior al lui $\underline{\zeta}$ (fig. 2.44). Pe această cale, câmpul determinat de poligon poate fi corelat cu cel al sarcinilor coliniare (indicat în figurile 2.42).

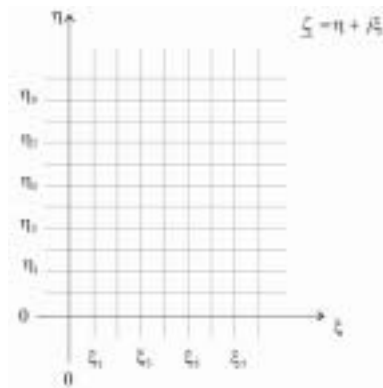


Fig. 2.43

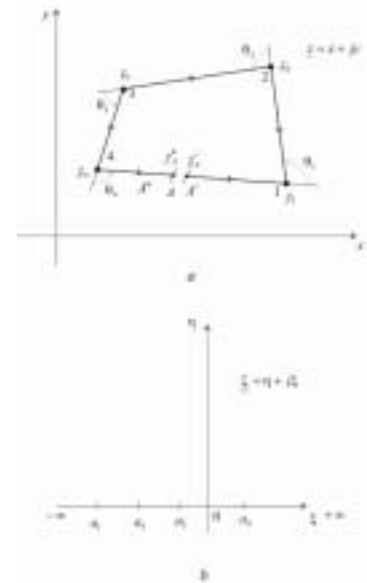


Fig. 2.44

Formula Schwarz-Christoffel permite determinarea unei transformări $\underline{\zeta} = f(\underline{z})$ în așa fel încât atunci când punctul curent $\underline{z} = x + jy$ parcurge întregul contur poligonal punctul $\underline{\zeta} = \xi + j\eta$ descrie întreaga axă reală a planului $\underline{\zeta} = \xi + j\eta$.

Determinarea funcției $\underline{\zeta} = f(\underline{z})$ sau a funcției inverse (care există) $\underline{z} = g(\underline{\zeta})$ este o problemă pur geometrică. După rezolvarea ei, pe baza celor arătate anterior („sarcini coliniare“) se poate trece la aflarea soluției problemei fizice date.

Fie punctul \underline{z} care pornește din punctul A (\underline{z}_A), aflat pe una din laturi și care se deplasează de-a lungul conturului poligonal închis în sens pozitiv (adică în așa fel încât domeniul închis să rămână în stânga), trecând succesiv prin vârfurile poligonului, în ordinea $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3$ și \underline{z}_4 , ajungând din nou în A (în \underline{z}_A). Simultan, punctul $\underline{\zeta}$ se deplasează de-a lungul axei absciselor în sens pozitiv, începând cu punctul de la $-\infty$ (în A'') și trecând succesiv prin punctele a_1, a_2, a_3 și a_4 pentru a ajunge în punctul de la $+\infty$, care corespunde tot punctului A (la stânga lui în $A'' \rightarrow A$). Astfel punctele a_1, a_2, a_3, a_4 corespund vârfurilor $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3, \underline{z}_4$ ale poligonului, iar segmentele care unesc punctele $-\infty$ și a_1, a_1 și a_2, a_2 și a_3, a_3 și a_4, a_4 și $+\infty$ corespund laturilor conturului poligonal $\underline{z}_A \underline{z}_1, \underline{z}_1 \underline{z}_2, \underline{z}_2 \underline{z}_3, \underline{z}_3 \underline{z}_4$ și $\underline{z}_4 \underline{z}_A$ (fig. 2.44b).

De-a lungul fiecăruia dintre segmentele care alcătuiesc laturile poligonului, derivata complexă $d\underline{z}/d\underline{\zeta}$ are un argument constant căci $\underline{\zeta}$ se deplasează pe axa absciselor, având permanent valoarea reală. Când $\underline{\zeta}$ trece prin punctele, a_1, a_2, \dots , direcția de deplasare a punctului \underline{z} se modifică cu unghiurile $\theta_1, \theta_2, \dots$. Prin urmare, analog cu formula (2.6-13)– dedusă pentru intensitatea complexă a câmpului, în formula pentru derivata $d\underline{z}/d\underline{\zeta}$ vor apărea factori de forma :

$$(\underline{\zeta} - a_1)^{-\theta_1/\pi}, (\underline{\zeta} - a_2)^{-\theta_2/\pi}, \dots,$$

rezultând:

$$(2.6-13') \quad \frac{d\underline{z}}{d\underline{\zeta}} = \underline{A}(\underline{\zeta} - a_1)^{-\theta_1/\pi} \cdot (\underline{\zeta} - a_2)^{-\theta_2/\pi} \dots,$$

astfel că :

$$(2.6-14') \quad \underline{z} = g(\underline{\zeta}) = \underline{A} \int (\underline{\zeta} - a_1)^{-\theta_1/\pi} \cdot (\underline{\zeta} - a_2)^{-\theta_2/\pi} \dots + \underline{B},$$

unde \underline{A} și \underline{B} sunt constante de integrare, iar unghiurile $\theta_1, \theta_2, \dots$ sunt pozitive când sensul de rotație corespunde sensului trigonometric. Practic, în expresiile (2.6-13') și (2.6-14'), exponenții $-\theta_k/\pi$ reprezintă câtul prin π al unghiului cu care trebuie rotită latura $k + 1$ pentru ca sensul ei pozitiv să coincidă cu cel al laturii k .

Constanta \underline{A} determină dimensiunile poligonului în planul \underline{z} (prin modulul ei), iar constanta \underline{B} conduce la translatarea poligonului în poziția dorită.

Relația (2.6-14') este denumită *integrala Schwarz-Christoffel* și ea realizează transformarea conformă $\underline{\zeta} \xrightarrow{g} \underline{z}$. Dacă, invers, din formula (2.6-14') se exprimă $\underline{\zeta}$ în funcție de \underline{z} , adică $\underline{\zeta} = f(\underline{z})$, punctele \underline{z} sunt reprezentate pe axa reală ξ a lui $\underline{\zeta}$ și, ca atare, pe această axă apar toate liniile echipotențiale și de câmp care compun conturul poligonal închis. Utilizând expresia (2.6-14) se poate determina expresia potențialului complex $\underline{W} = w(\underline{\zeta})$ care îndeplinește condițiile la limită de-a lungul axei reale în planul $\underline{\zeta}$; de fapt dacă în expresia (2.6-14) a lui \underline{W} se înlocuiește $\underline{\zeta} = f(\underline{z})$ se va obține formula de calcul a distribuției semnalului complex în planul

$\underline{z}: W = [f(\underline{z})]$. Variabila complexă \underline{z} poate fi considerată ca un parametru care atașează punctelor $\underline{z} \equiv (x, y)$ din domeniul analizat câte un potențial complex calculat în aceste puncte cu expresia (2.6-14).

Pentru cazul prezentat în figura 2.44 în care pe axa reală $O\xi$ apar tot atâtea puncte a câte vârfuri \underline{z} are poligonul (deci $n = 4$) \leftrightarrow integrala Schwarz-Christoffel (2.6-14') are patru factori de tipul $(\underline{z} - a_k)^{-\theta_k/\pi}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Numărul acestor factori ar putea fi redus la trei (în general de la n la $n-1$), dacă deschiderea poligonului prin punctul de „fractură” A (v. fig.2.44a) se face chiar în unul din vârfuri; atunci punctul în care a fost deschis poligonul este ∞ , astfel căla distanță finită apar numai $n-1$ puncte a . Acest mod de deschidere este recomandat atunci când poligonul are vârfuri la infinit, în care fracturându-se poligonul, vârful de la infinit nu mai apare în transformare.

Dacă poligonul din planul \underline{z} are n laturi, în formula (2.6-14') apar, în general, $n+2$ constante și anume: $\underline{A}, \underline{B}$ (de integrare) și n valori a_k $k = (1, 2, \dots, n)$ – corespunzătoare celor n vârfuri ale poligonului dat. Pentru determinarea acestor $n + 2$ constante dispunem însă numai de n ecuații de forma $z_k = g(a_k)$, ecuații care rezultă prin înlocuirea lui \underline{z} din relația (2.6-14') prin $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_n$ și pe \underline{z} prin a_1, a_2, \dots, a_n , astfel că două constante iau valori arbitrare.

Dacă poligonul prezintă o axă de simetrie și sistemul de coordonate Oxy se alege astfel încât axa Oy să coincidă cu axa de simetrie, punctele simetrice din planul Oxy vor avea abscise simetrice în planul $O\xi\eta$ dacă axa $O\eta$ este transformata conformă a axei Oy .

2.7.3. Exemple de calcul al capacităților electrostatice

Vor fi prezentate câteva cazuri de condensatoare utilizate în practică pentru care se va determina capacitatea electrostatică, precum și un exemplu tipic de calcul a capacității electrostatice echivalente.

Aplicația 2.7 – calculul capacității condensatorului cilindric. Condensatorul cilindric (fig. 2.45) are două armături cilindrice, coaxiale, cu razele R_1, R_2 și cu lungimea l .

Neglijându-se efectul de margine și tinându-se seama de simetria axială a sistemului, repartitia câmpului între armături se aproximează cu una radială.

Pentru calculul câmpului se aplică legea fluxului electric pe o suprafață Σ , cilindrică, coaxială cu armăturile având raza R ($R_1 < R < R_2$).

Câmpul fiind radial, flux există numai prin suprafața laterală a cilindrului Σ și deci:

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma_{lat}} \overline{D} \cdot d\overline{A} = \int_{\Sigma_{lat}} D dA = D \int_{\Sigma_{lat}} dA = D 2\pi R l,$$

inducția electrică fiind aceeași în oricare punct al suprafeței laterale.

Deoarece $\Psi_{\Sigma} = Q$ și $D = \epsilon E$ rezultă

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon R l}$$

Tensiunea dintre armături va fi:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \overline{E} \cdot d\overline{R} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R},$$

adică:

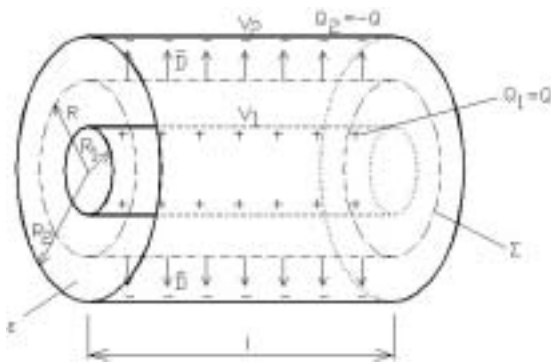


Fig. 2.45

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

De aici rezultă imediat:

$$(2.7-1) \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Aplicația 2.8 – capacitatea unui condensator sferic (fig. 2.46). Câmpul între cele două armături sferice, concentrice, este radial iar calculul său se face cu ajutorul legii fluxului electric scrisă pentru suprafața sferică Σ de rază R , de asemenea concentrică cu cele două armături ($R_1 < R < R_2$).

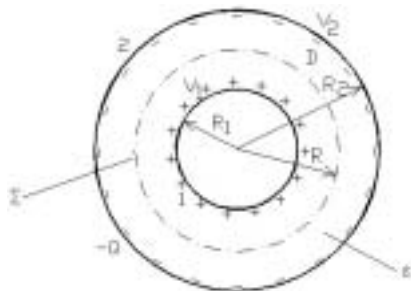


Fig. 2.46

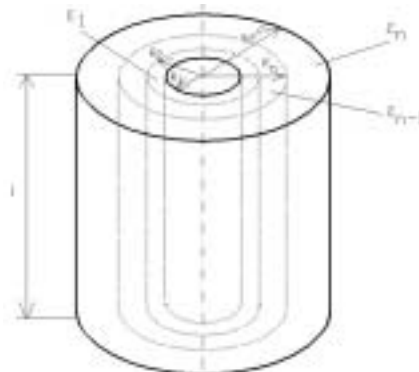


Fig. 2.47

Conform legii fluxului electric, $\Psi_{\Sigma} = Q$,

unde:

$$\Psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{D} \cdot d\overline{A} = \int_{\Sigma} \epsilon \overline{E} \cdot d\overline{A} = \epsilon E \int_{\Sigma} dA = 4\pi\epsilon R^2 E,$$

rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}.$$

Tensiunea între armături este:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \overline{E} \cdot d\overline{R} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

iar capacitatea:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Aplicația 2.9 – condensator cilindric cu straturi dielectrice concentrice (fig. 2.47). Se admite, datorită simetriei, așa cum s-a stabilit și în cazul aplicației 2.7, repartiția radială a câmpului între armături, astfel că suprafețele concentrice de separație dintre straturile de dielectric sunt suprafețe echipotențiale iar sistemul este echivalent cu n condensatoare în serie având armături de raze $R_i < R_{i+1}$ și dielectric de permitivitate ϵ_i .

Capacitatea echivalentă este dată de relația:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{R_{i+1}}{R_i}}{2\pi\epsilon_i l},$$

de unde rezultă:

$$C = \frac{2\pi l}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}}$$

Observație : Din expresia intensității câmpului în stratul dielectric:

$$E_i = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_i R l}$$

rezultă că aceasta este invers proporțională cu ε_i, R și l . Dacă dielectricul este același, uniformitatea intensității câmpului în straturile dielectrice se poate obține atunci când $R_1 l_1 = R_2 l_2 = \dots = R_n l_n$. În cazul izolațiilor aplicate în straturi, pentru solicitarea uniformă a dielectricului se urmărește realizarea constructivă a acestei condiții, lungimile straturilor trebuind să scadă pe măsură ce raza crește.

Aplicația 2.10 – condensator cu lamele. Sistemul din figura 2.48, utilizat la construcția condensatoarelor variabile, este echivalent cu n condensatoare plane, în paralel, fiecare având distanța dintre armături d , aria suprafeței armăturii A , iar ca dielectric aerul cu permitivitatea ε_0 . Capacitatea echivalentă este egală cu suma celor n capacități:

$$C_e = n \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

În cazul particular al unui condensator plan cu două straturi paralele de dielectric (fig. 2.49), cele două straturi de dielectric fiind considerate omogene și izotrope, liniile de câmp sunt perpendiculare pe armături iar suprafața de separație dintre straturi este o suprafață echipotențială. Capacitatea condensatorului este egală cu capacitatea echivalentă a două condensatoare în serie:

$$C = \frac{\frac{\varepsilon_1 A}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 A}{d_2}}{\frac{\varepsilon_1 A}{d_1} + \frac{\varepsilon_2 A}{d_2}} = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

Observații:

- în cazul condensatorului cu n straturi de dielectric se va obține:

$$C = \frac{A}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i}}$$

- inducția electrică \bar{D} fiind aceeași în toate straturile (v. teorema refracției liniilor câmpului electric):

$$\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = \dots = \bar{D}_n,$$

din relația echivalentă:

$$\varepsilon_1 \bar{E}_1 = \varepsilon_2 \bar{E}_2 = \dots = \varepsilon_n \bar{E}_n,$$

rezultă că intensitatea câmpului va fi mai mare în stratul cu permitivitate mai mică. De aici necesitatea asigurării omogenității izolațiilor aparatelor și instalațiilor electrice.

Aplicația 2.11 – ecuațiile lui Maxwell de capacitate a unei linii bifilare (fig. 2.50). Se cere calculul coeficienților de potențial ($\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12} = \alpha_{21}$) și de capacitate ($\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12} = \beta_{21}$) conform datelor din figura 2.50.

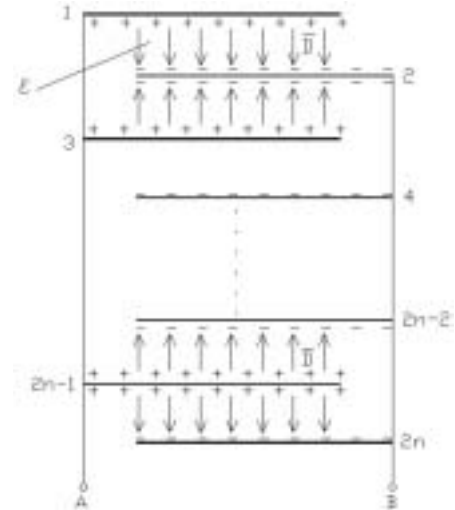


Fig. 2.48

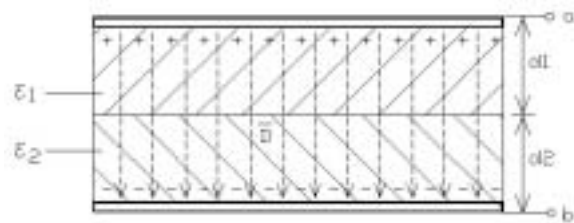


Fig. 2.49

Aplicându-se *metoda imaginilor*, se înlocuiește sistemul real al celor două conductoare aflate în prezența pământului cu sistemul, echivalent din punctul de vedere al producerii câmpului electrostatic, format de ele și de *imaginile* lor în raport cu suprafața pământului.

Ecuțiile de capacitate ale lui Maxwell pentru sistemul din figura 2.50 sunt:

$$V_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2$$

$$V_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2$$

și

$$Q_1 = \beta_{11}V_1 + \beta_{12}V_2$$

$$Q_2 = \beta_{21}V_1 + \beta_{22}V_2.$$

Coeficienții de capacitate rezultă din rezolvarea primului sistem în raport cu Q_1 și Q_2 :

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \alpha_{12} \\ V_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_{22}}{\det[\alpha]}V_1 - \frac{\alpha_{12}}{\det[\alpha]}V_2,$$

$$Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & V_1 \\ \alpha_{21} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{\alpha_{21}}{\det[\alpha]}V_1 + \frac{\alpha_{11}}{\det[\alpha]}V_2,$$

de unde rezultă:

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\det[\alpha]}; \beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\det[\alpha]}; \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\det[\alpha]}.$$

Vom scrie ecuațiile primului sistem exprimând potențialul câmpului produs la distanța x de sarcina distribuită pe un conductor, în raport cu potențialul unui punct de referință situat la distanța x_0 , conductorul fiind presupus infinit lung:

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_0}{x} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x_0}{x}.$$

Punctul de referință este suficient de depărtat pentru a-l considera ca fiind același pentru toate conductoarele sistemului.

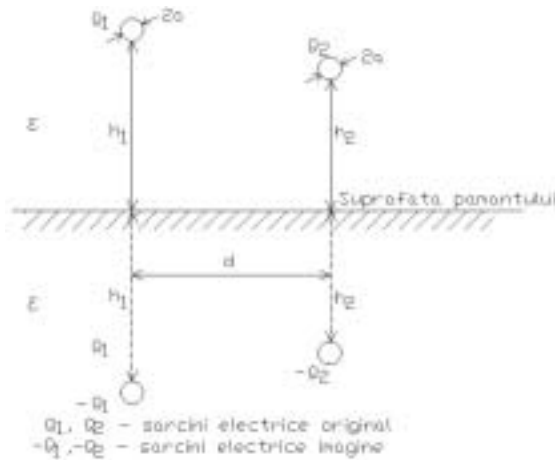


Fig. 2.50

Potențialul conductorului 1, ținând cont și de prezența celorlalte, va fi:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x_0}{a} + \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x_0}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2}} - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x_0}{2h_1} - \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x_0}{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}} = \\ &= \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h_1}{a} + \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2}}. \end{aligned}$$

Analog, rezultă:

$$V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2}} + \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h_2}{a}.$$

Prin urmare:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h_1}{a};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h_2}{a};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2}}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2}},$$

coeficienții de capacitate urmând a fi calculați în funcție de aceștia, așa cum s-a arătat mai sus.

Observații :

- dacă $h_1 \approx h_2 = h$ și $d \ll h$, așa cum se întâmplă în practică, coeficienții de potențial vor fi:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h}{a},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2h}{d};$$

- dacă și $Q_1 = -Q_2 = Q$ va rezulta:

$$V_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{d}{a} \quad \text{și} \quad V_2 = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{d}{a}.$$

Aplicația 2.12 –capacitatea electrostatica echivalentă a grupului de condensatoare identice din figura 2.51a. Pentru calculul capacității echivalente cu ajutorul teoremelor capacității echivalente a condensatoarelor legate în serie și, respectiv, în paralel, se va transforma mai întâi rețeaua utilizându-se teoremele transfigurărilor triunghi-stea sau stea-triunghi, așa ca în figurile 2.51b și, apoi, 2.51c.

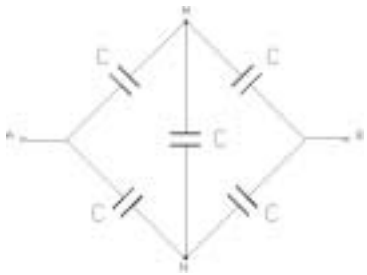


Fig. 2.51a

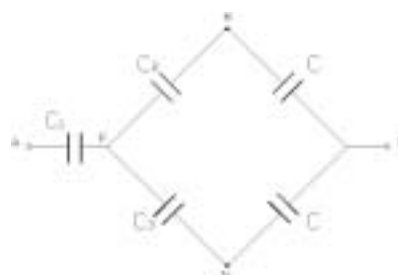


Fig. 2.51b

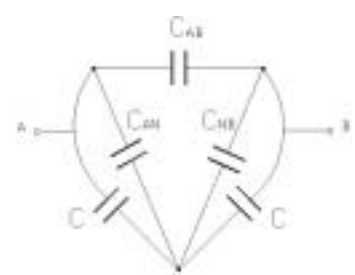


Fig. 2.51c

În primul caz avem (fig. 2.51b)

$$C_1 = C_2 = C_3 = C + C + \frac{C^2}{C} = 3C$$

și

$$C_e = \frac{3C \left(\frac{3C \cdot C}{4C} + \frac{3C \cdot C}{4C} \right)}{3C + \frac{3C \cdot C}{4C} + \frac{3C \cdot C}{4C}} = C.$$

În cel de al doilea caz (fig. 2.51c) se obține:

$$C_{AB} = C_{AN} = C_{NB} = \frac{C^2}{3C} = \frac{C}{3}$$

și

$$C_e = \frac{C}{3} + \frac{\left(C + \frac{C}{3}\right)\left(C + \frac{C}{3}\right)}{\left(C + \frac{C}{3}\right) + \left(C + \frac{C}{3}\right)} = C.$$

Observație. Simetria arată că cele două condensatoare legate la borna A, ca și cele două legate la borna B, se vor încărca cu aceeași sarcină. Drept urmare vor exista egalitățile $U_{AM} = U_{AN}$ și $V_M = V_N$. Condensatorul din diagonala punții rămâne neîncărcat, iar capacitatea echivalentă a rețelei este egală cu capacitatea echivalentă a condensatoarelor din laturile punții:

$$C_e = \frac{CC}{2C} + \frac{CC}{2C} = C.$$

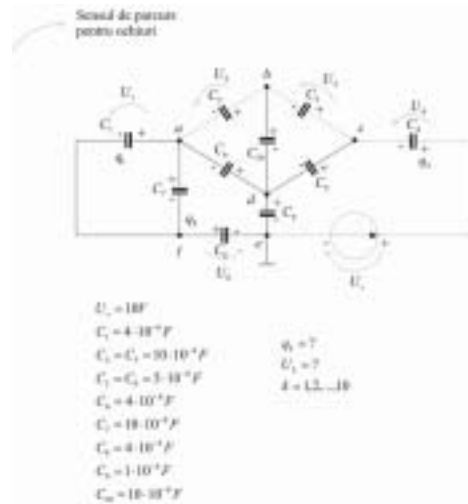


Fig. 2.52

2.7.4. Calculul circuitelor cu condensatoare în regim electrostatic

Prin acest paragraf dorim să arătăm ușurința cu care se rezolvă orice sistem de ecuații algebrice liniare –ce descrie circuitele cu condensatoare în regim electrostatic– prin utilizarea produsului informatic MATLAB (v. §9.3.1) considerând, în acest scop, două aplicații: una privind repartiția sarcinilor electrice și potențialele electrostatice într-un circuit cu condensatoare și a doua referitoare la determinarea coeficienților de capacitate și a capacităților parțiale într-un sistem de mai multe corpuri izolate între ele, prin folosirea ecuațiilor lui Maxwell pentru capacitățile electrostatice.

Aplicația 2.13-circuit cu condensatoare electrostatice. Se consideră circuitul din figura 2.52 care reprezintă un caz practic (o punte Wheatstone de curent alternativ utilizată la măsurarea impedanțelor), analizat aici numai din punctul de vedere electrostatic, adică atunci când -sursa de alimentare cu energie electrică fiind conectată- în circuit toți curenții electrice din laturi au intensitatea zero, situație în care rezistența electrică a componentelor din laturi nu reprezintă importanță.

Acest circuit electrostatic are $n=6$ noduri și $l=10$ laturi, pentru fiecare latură indicându-se capacitatea ei electrostatică C_k , $k=1,2,\dots,10$. În latura cu indicele 4, este conectată o sursă de curent continuu, cu tensiunea la bornele U_s dată. Pentru acest circuit se cere să se determine cu ce sarcini electrice se vor încărca –în regim electrostatic– condensatoarele electrice (adică q_1, q_2, \dots, q_{10}) și tensiunile electrostatice la bornele lor (adică U_1, U_2, \dots, U_{10}).

Rezolvarea acestei probleme se face determinând –mai întâi– cele zece sarcini electrice q_k , $k=1,2,\dots,10$, ale condensatoarelor electrice, ceea ce se realizează prin rezolvarea sistemului (CE1), de 10 ecuații algebrice liniare în q , scris direct cu date numerice, care rezultă prin aplicarea relațiilor (2.57) la $n-1=6-1=5$ noduri, adică: $\sum q=0$ și a relației (2.58) –v. § 2.5.4– pentru $l-n+1=10-6+1=5$ ochiuri, adică $\sum \frac{q}{C} = \sum U_s$ sau $\sum Sq = \sum U_s$, unde elastața $S=1/C$.

Se obține, în acest fel sistemul (după ce -în prealabil s-au fixat semnul sarcinilor electrice de pe armăturile condensatoarelor electrice, ținând seama de polaritatea sursei de alimentare U_s , dar și arbitrar, urmând ca prin rezolvarea sistemului ce urmează valorile lui q să poarte semnul minus dacă semnul inițial al sarcinii respective nu a fost ales în conformitate cu cel real):

$$\left. \begin{aligned}
 \text{nodul } a &\rightarrow 1 \cdot q_1 - 1 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 + 0 \cdot q_5 - 1 \cdot q_6 + 1 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = 0 \\
 \text{nodul } b & 0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 - 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 + 0 \cdot q_5 + 0 \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 1 \cdot q_{10} = 0 \\
 \text{nodul } c & 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 1 \cdot q_3 - 1 \cdot q_4 + 1 \cdot q_5 + 0 \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = 0 \\
 \text{nodul } d & 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 - 1 \cdot q_5 + 1 \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 - 1 \cdot q_{10} = 0 \\
 \text{nodul } f & -1 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 + 0 \cdot q_5 + 0 \cdot q_6 - 1 \cdot q_7 + 1 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = 0 \\
 \text{ochiul } a b c d a : & \\
 0 \cdot q_1 - 10^{+5} \cdot q_2 - 2 \cdot 10^{-5} \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 + 10^{+5} \cdot q_5 + 2 \cdot 10^{+5} \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = 0 & \\
 \text{ochiul } c U_s e d c : & \\
 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 - 2,5 \cdot 10^5 \cdot q_4 - 10^5 \cdot q_5 + 0 \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 - 10 \cdot 10^5 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = +10 & \\
 \text{ochiul } f \text{ (prin } C_1) a b c U_s e f : & \\
 -2,5 \cdot 10^5 \cdot q_1 - 10^5 \cdot q_2 - 2 \cdot 10^5 \cdot q_3 - 2,5 \cdot 10^5 \cdot q_4 + 0 \cdot q_5 + 0 \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 - & \\
 -2,5 \cdot 10^5 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = +10 &
 \end{aligned} \right\} \text{(CE1)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{ochiul } a d e f a : & \\
 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 + 0 \cdot q_5 - 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot q_6 - 100 \cdot 10^5 \cdot q_7 - 2,5 \cdot 10^5 \cdot q_8 + 10 \cdot 10^5 \cdot q_9 + 0 \cdot q_{10} = 0 & \\
 \text{ochiul } a b d a : & \\
 0 \cdot q_1 - 10^5 \cdot q_2 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_4 + 0 \cdot q_5 + 2 \cdot 10^5 \cdot q_6 + 0 \cdot q_7 + 0 \cdot q_8 + 0 \cdot q_9 + 100 \cdot 10^5 \cdot q_{10} = 0 &
 \end{aligned} \right\}$$

care, scris sub formă matricială, devine:

S									
1	-1	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	1	0	0	1	-1
-1	0	0	0	0	0	+1	1	0	0
0	-10 ⁵	-2,5·10 ⁵	0	10 ⁵	2,5·10 ⁵	0	0	0	0
0	0	0	-2,5·10 ⁵	-10 ⁵	0	0	0	-10·10 ⁵	0
-2,5·10 ⁵	-10 ⁵	-2,5·10 ⁵	-2,5·10 ⁵	0	0	0	-2,5·10 ⁵	0	0
0	0	0	0	0	-2,5·10 ⁵	-100·10 ⁵	-2,5·10 ⁵	10·10 ⁵	0
0	-10 ⁵	0	0	0	2,5·10 ⁵	0	0	0	100·10 ⁵

q

U_s

(CE2)

$$\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

„Listning”-ul programului MATLAB care asigură rezolvarea sistemului (CE2), precum și calculul tensiunii la bornele condensatoarelor electrice –realizat cu formula $U_k = q_k / C_k$, $k = 1, 2, \dots, 10$ – este prezentat în continuare.

Programul MATLAB pentru rezolvarea Aplicației 2.13 conține toate comentariile necesare pentru deslușirea lui. Pentru prezentarea rezultatelor afișate pe ecranul calculatorului, ca urmare a lansării în execuție a acestui program, s-a inclus în „out-print”-ul ce urmează și conținutul sesiunii de lucru MATLAB de rezolvare a aplicației 2.13 (cu două coloane: q= și U=).

```
%%%%%%%%%%
%%          Program MATLAB pentru rezolvarea Aplicației 2.13          %%
%%          Circuit cu condensatoare electrostatice                    %%
%%%%%%%%%%
clear
%
%   Introducerea datelor de intrare
%
% - matricea S a coeficientilor sistemului
%
s1 = [ 1 -1 0 0 0 -1 1 0 0 0 ; ...
      0 1 -1 0 0 0 0 0 0 1 ; ...
      0 0 1 -1 1 0 0 0 0 0 ; ...
      0 0 0 0 -1 1 0 0 1 -1 ; ...
      -1 0 0 0 0 0 -1 1 0 0 ] ;
s2 = [ 0 -1 -2.5 0 1 2 0 0 0 0 ; ...
      0 0 0 -2.5 -1 0 0 0 -10 0 ; ...
      -2.5 -1 -2.5 -2.5 0 0 0 -2.5 0 0 ; ...
      0 0 0 0 0 -2.5 -100 -2.5 10 0 ; ...
      0 -1 0 0 0 2 0 0 0 100 ] ;
S = [ s1 ; s2*10^5 ] ;
%
% - vectorul termenului liber A al sistemului
%
A = [ 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -10 ; -10 ; 0 ; 0 ] ;
%
% - capacitatile condensatoarelor din circuit (in Farad)
%
C1 = 4*10^-6 ;
C2 = 10*10^-6 ;
C3 = 5*10^-6 ;
C4 = C1 ;
C5 = C2 ;
C6 = C3 ;
C7 = 10*10^-8 ;
C8 = C1 ;
C9 = 1*10^-6 ;
C10 = C7 ;
c = [ C1 ; C2 ; C3 ; C4 ; C5 ; C6 ; C7 ; C8 ; C9 ; C10 ] ;
%
%   Rezolvarea problemei
%
% - calculul vectorului sarcinilor electrice ale condensatoarelor
```



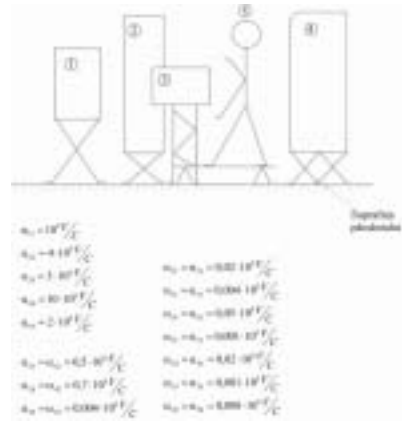
```

%
q = inv(S)*A ;
%
% - calculul vectorului tensiunilor la bornele condensatoarelor
%
U = q./c ;
%
%
% Afisarea rezultatelor
%
fprintf ('Vectorul sarcinilor electrice ale celor zece condensatoare, in Coulomb:')
q
fprintf ('Vectorul tensiunilor la bornele celor zece condensatoare, in Volti:')
U
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

» aplic213

Vectorul sarcinilor electrice ale celor zece condensatoare, in Coulomb:



q =
1.0e-004 *
0.0903
0.0511
0.0508
0.1462
0.0955
0.0413
0.0021
0.0923
0.0539
-0.0003

Vectorul tensiunilor la bornele celor zece condensatoare, in Volti:

U =
2.2568
0.5107

Fig. 2.53

1.0151
3.6555
0.9546
0.8250
2.0505
2.3081
5.3899
-0.3143

Aceste rezultate arată că puntea cu condensatoare din figura 2.52 se află în stare de echilibru, fapt dovedit de aceea că sarcina electrică a condensatorului C_{10} (de pe diagonala de măsură) este practic neglijabilă ($q_{10} = 0,0003 \text{ C}$) în raport cu celelalte sarcini electrice, iar tensiunea la bornele sale este extrem de mică. Semnele sarcinilor electrice și al tensiunilor la borne, așa cum au rezultat din calcul, arată că –inițial (pe schema din figura 2.52)– au fost corect alese, cu excepția condensatorului C_{10} , la care semnul real este invers celui inițial.

Aplicația 2.14 – utilizarea ecuațiilor lui Maxwell referitoare la capacități. Se consideră un sistem fizic format din 5 obiecte conductoare situate în aer și izolate față de pământ, așa ca în figura 2.53 (care poate reprezenta un caz real, de exemplu un punct de distribuție aeriană a energiei electrice format din câteva incinte metalica cu diverse aparate de conectare și de măsurat, plus un operator uman).

Presupunând că –pentru moment– obiectele nu sunt conectate la instalația de legare la pământ (nu sunt încă protejate) și că, în funcție de: permitivitatea absolută a aerului $\epsilon_{aer} \cong 1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ F/m}$, distanța dintre obiecte și dimensiunile lor, sistemul are coeficienții de potențial α_{kj} , $k, j \in \{1,2,3,4,5\}$ indicați în figura 2.53, se cere să se determine capacitățile parțiale

ale celor cinci obiecte față de pământ $C_{k0}, k=1, 2, \dots, 5$ și capacitățile parțiale între obiectele conductoare $C_{kj} = C_{jk}, j, k \in \{1, 2, \dots, 5\}$.

Problema se poate soluționa cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell referitoare la capacitățile electrostatice, rezolvate cu un sistem de calcul (de tip IBM-PC) care are instalat produsul informatic MATLAB.

Astfel, cunoscându-se matricea α (dată de problemă) și anume:

$$(2.14-1) \quad \alpha = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0,02 & 0,004 & 0,05 & 0,001 \\ \hline 0,02 & 4 & 0,5 & 0,7 & 0,004 \\ \hline 0,004 & 0,5 & 3 & 0,1 & 0,001 \\ \hline 0,05 & 0,7 & 0,01 & 6 & 0,008 \\ \hline 0,001 & 0,004 & 0,001 & 0,008 & 2 \\ \hline \end{array} \times 10^9 \text{ V/C}$$

se calculează, prin inversarea ei, coeficienții de capacitate $\beta_{jk} = \beta_{kj}, j, k \in \{1, 2, \dots, 5\}$, sub forma matricei β :

$$(2.14-2) \quad \beta = \alpha^{-1}, \text{ în farazi (sau, dacă } \alpha \text{ se împarte cu } 10^9, \text{ în nF).}$$

Cunoscând elementele matricei β se pot determina capacitățile cerute de această aplicație și anume:

- capacitățile parțiale față de pământ:

$$C_{k0} = \sum_{j=1}^5 \beta_{kj} \text{ în nF, } k=1, 2, \dots, 5, \quad (2.14-3)$$

adică suma elementelor de pe linii ale matricei β ;

- capacitățile parțiale între obiectele conductoare:

$$C_{kj} = -\beta_{kj} \text{ în nF, } k, j \in \{1, 2, \dots, 5\} \quad (2.14-4)$$

în total nouă valori

$C_{12} = C_{21}, C_{13} = C_{31}, C_{14} = C_{41}, C_{15} = C_{51}, C_{23} = C_{32}, C_{24} = C_{42}, C_{25} = C_{52}, C_{34} = C_{43}$ și $C_{45} = C_{54}$, care sunt elementele matricei β de-o parte a diagonalei $\beta_{jj} (j = 1, 2, \dots, 5)$, luate cu semnul minus.

În încheiere prezentăm lista programului MATLAB, cu comentariile de rigoare, ce realizează operațiile:

- introduce în calculator valorile elementelor matricei α , date de (2.14-1);
- calculează matricea β , ca inversa matricei α , conform relației (2.14-2);
- determină, cu sumele (2.14-3), capacitățile parțiale față de pământ și le listează;
- listează capacitățile parțiale între obiecte, conform egalității (2.14-4).

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%                               Program MATLAB pentru rezolvarea Aplicației 2.14                               %%
%%                               Utilizarea ecuațiilor lui Maxwell referitoare la capacitati                               %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clear
%
%  Introducerea datelor (matricea coeficientilor de potential, in V/C)
%
```

```
alf = [ 1   0.02  0.004  0.05  0.001 ; ...
        0.02  4   0.5   0.7   0.004 ; ...
        0.004 0.5   3   0.1   0.001 ; ...
        0.05  0.7   0.1   6   0.008 ; ...
        0.001 0.004 0.001 0.008 2   ];
```

```

alfa = alf * 10^9 ;
%
% Rezolvarea problemei
% - calculul matricei coeficientilor de capacitate, in nF
%
beta = inv(alf) ;
%
% - calculul vectorului capacitatilor partiale fata de pamint (in nF)
%
Ck = sum(beta) ;
%
% - calculul matricei capacitatilor intre obiectele conductoare (in nF)
%
C = -beta ;
%
% Afisarea rezultatelor
%
fprintf('Capacitatile partiale fata de pamint sunt:\n')
fprintf(' - pentru obiectul 1: %7.4f nF\n',Ck(1))
fprintf(' - pentru obiectul 2: %7.4f nF\n',Ck(2))
fprintf(' - pentru obiectul 3: %7.4f nF\n',Ck(3))
fprintf(' - pentru obiectul 4: %7.4f nF\n',Ck(4))
fprintf(' - pentru obiectul 5: %7.4f nF\n',Ck(5))
fprintf('Capacitatile partiale intre obiecte sunt:\n')
fprintf(' - intre obiectele 1 si 2: %7.4f nF\n',C(1,2))
fprintf(' - intre obiectele 1 si 3: %7.4f nF\n',C(1,3))
fprintf(' - intre obiectele 1 si 4: %7.4f nF\n',C(1,4))
fprintf(' - intre obiectele 1 si 5: %7.4f nF\n',C(1,5))
fprintf(' - intre obiectele 2 si 3: %7.4f nF\n',C(2,3))
fprintf(' - intre obiectele 2 si 4: %7.4f nF\n',C(2,4))
fprintf(' - intre obiectele 2 si 5: %7.4f nF\n',C(2,5))
fprintf(' - intre obiectele 3 si 4: %7.4f nF\n',C(3,4))

fprintf(' - intre obiectele 3 si 5: %7.4f nF\n',C(3,5))
fprintf(' - intre obiectele 4 si 5: %7.4f nF\n',C(4,5))
%%%%%%%%%%

```

» aplic214

Capacitatile partiale fata de pamânt sunt:

- pentru obiectul 1: 0.9881 nF
- pentru obiectul 2: 0.1845 nF
- pentru obiectul 3: 0.2967 nF
- pentru obiectul 4: 0.1313 nF
- pentru obiectul 5: 0.4985 nF

Capacitatile partiale intre obiecte sunt:

- intre obiectele 1 si 2: 0.0036 nF
- intre obiectele 1 si 3: 0.0005 nF
- intre obiectele 1 si 4: 0.0079 nF
- intre obiectele 1 si 5: 0.0005 nF
- intre obiectele 2 si 3: 0.0424 nF
- intre obiectele 2 si 4: 0.0297 nF
- intre obiectele 2 si 5: 0.0004 nF
- intre obiectele 3 si 4: 0.0007 nF
- intre obiectele 3 si 5: 0.0001 nF
- intre obiectele 4 si 5: 0.0006 nF