ANALIZĂ GLOBALĂ ŞI GEOMETRIE RIEMANNIANĂ

Paul A. BLAGA

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varietăţi diferenţiabile

1.1 Varietăţi topologice

Definiţie. Se numeşte *varietate topologică* de dimensiune n un spaţiu topologic M care îndeplineşte următoarele trei condiţii:

(i) M este un spaţiu topologic Hausdorff (sau, cum se mai spune, verifică axioma de separabilitate T2: două puncte distincte au vecinătăţi disjuncte).

(ii) M are o bază numărabilă de mulţimi deschise.

(iii) M este local euclidian de dimensiune n, ceea ce înseamnă că fiecare punct al său are o vecinătate omeomorfă cu o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ (sau, ceea ce este acelaşi lucru, cu întregul $\mathbb{R}^n$).

Definiţie. Dacă M este un spaţiu topologic, o *hartă* de dimensiune n pe M este o pereche (U, φ), unde $U \subset M$ este o submulţime deschisă iar $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este un omeomorfism pe imagine.

Aşadar, putem reformula definiţia varietăţii topologice, spunând că M *este o varietate topologică de dimensiune* n *dacă este un spaţiu T2, cu bază numărabilă, astfel încât în jurul fiecărui punct al său există o hartă de dimensiune* n.

Cu completările ce vor fi aduse în secţiunea următoare, o varietate urmează să fie o generalizare naturală a unui spaţiu euclidian, un spaţiu topologic care, la scară mică, este "identic" cu un spaţiu euclidian, dar la scară mare poate fi complet diferit. După cum se poate arăta, prin contraexemple, cele trei axiome ale varietăţii topologice sunt independente. Am putea fi tentaţi să credem că, datorită faptului că spaţiile euclidiene verifică, în mod evident, axiomele (i) şi (ii), a treia axiomă le implică pe primele două. Nu este, totuşi, aşa. Mai precis, din a treia axiomă rezultă că primele două axiome sunt verificate *local* numai. De exemplu, din a treia rezultă că M se poate acoperi cu deschişi care au, fiecare, o bază numărabilă, dar de aici nu rezultă că putem folosi aceste baze pentru a construi o bază numărabilă a întregului spaţiu, deoarece aceste mulţimi deschise pot fi "prea multe", familia lor poate să nu fie numărabilă.

Desigur, spaţiile euclidiene au multe alte proprietăţi topologice care nu rezultă din axiomele varietăţii topologice. Ne putem întreba de ce le-am singularizat exact pe acestea şi nu pe altele. Răspunsul nu este foarte complicat de dat. Există cel puţin două motive foarte serioase care au impus această alegere:

1. Deşi varietăţile nu sunt, în general, spaţii vectoriale, deci nu le putem înzestra cu structuri de spaţiu normat sau spaţiu cu produs scalar, vrem ca ele să posede cel puţin o structură de spaţiu metric, în aşa fel încât să putem calcula distanţe. Se ştie din topologia generală că orice spaţiu metric este Hausdorff.

2. Cele două axiome topologice ne asigură existenţa unui aparat, numit *partiţie diferenţiabilă a unităţii* care ne permite să "lipim" obiecte construite local, pe submulţimi deschise, pentru a construi obiecte globale. Acest aparat este central în demonstrarea foarte multor teoreme de geometrie diferenţială globală (cu alte cuvinte, teoreme care descriu varietatea ca întreg, nu comportamentul local, în jurul unui punct).

Exemple

1) O submulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$ este, în mod evident, o varietate topologică n-dimensională, deoarece proprietăţile descrise în axiomele (i) şi (ii) sunt ereditare, iar U, fiind deschisă, este o vecinătate pentru fiecare din punctele sale şi este omeomorfă cu ea însăşi, ca deschis din $\mathbb{R}^n$ (omeomorfismul putând fi ales chiar aplicaţia identică). Chiar în cazul în care U se poate identifica, din punct de vedere *topologic* cu întregul $\mathbb{R}^n$, din punct de vedere algebric, trebuie să le considerăm distincte, deoarece, în general, U nu are o structură de spaţiu vectorial (decât în cazul trivial în care $U \equiv \mathbb{R}^n$).

2) Sfera S^2, cu topologia de subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$, este o varietate topologică de dimensiune 2. În acest caz, sfera *nu* este omeomorfă cu întregul $\mathbb{R}^2$, deoarece sfera este compactă, iar $\mathbb{R}^2$ – nu. Prin urmare, nu putem utiliza aceeaşi vecinătate pentru toate punctele lui S^2. Afirmaţii analoage sunt adevărate, după cum ne vom convinge în curând, pentru sfere de dimensiune n, unde n este un întreg cel puţin egal cu 1.

O afirmaţie care se face adesea este aceea că varietăţile sunt generalizări naturale ale curbelor şi suprafeţelor din spaţiul intuitiv. Afirmaţia este adevărată, în principiu, dacă suntem atenţi la definirea acestora din urmă. Dacă, însă înţelegem, de exemplu, prin curbă pur şi simplu suportul unei curbe parametrizate, fără să impunem nici un fel de condiţii (cu excepţia celor de netezime) asupra parametrizării, atunci, în general, o curbă *nu* este o varietate topologică.

Considerăm exemplul lemniscatei lui Bernoulli, care este suportul curbei parametrizate

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right).$$

Originea axelor de coordonate, care se află pe curbă, nu are nici o vecinătate omeomorfă cu un segment deschis de pe axa reală. Cum arată o vecinătate a originii de pe curbă? Este clar că trebuie să fie, dacă e restrânsă suficient, intersecţia dintre curbă şi un disc deschis centrat în origine, deci este o mulţime sub formă de cruce.

Se afirmă, de regulă, că este evident că o cruce nu poate fi omeomorfă cu un segment (deschis). Demonstraţia riguroasă nu este chiar atât de trivială pe cât ne-am putea aştepta. Ea se bazează pe noţiunea de *punct secţional* al unui spaţiu topologic.

Astfel, dacă X este un spaţiu topologic, iar $p \in X$, spunem că p este un *punct secţional de ordin k* al lui X dacă mulţimea $X \setminus \{p\}$ are k componente conexe. Punctul de intersecţie al celor două segmente care formează crucea este un punct secţional d e ordinul al patrulea pentru această cruce, în timp ce toate punctele unui segment deschis sunt puncte secţionale de ordinul al doilea. Prin urmare, dacă se poate demonstra că ordinul de secţionalitate al unui punct este invariant la omeomorfisme, atunci am scăpat. Într-adevăr, avem:

Propoziţia 1.1.1. *Fie X, Y spaţii topologice şi $p \in X$ un punct secţional de ordinul k. Dacă $f : X \longrightarrow Y$ este un omeomorfism, atunci şi $f(p)$ este secţional de ordin k în Y.*

Demonstraţie. Fie $X_1, \ldots, X_k$ componentele conexe ale lui $X \setminus \{p\}$. Avem $X \setminus \{p\} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i$. Aplicând f şi ţinând cont de faptul că f este injectivă, obţinem că $f(X \setminus \{p\}) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} f(X_i)$. Pe de altă parte, avem că $f(X \setminus \{p\}) = f(X) \setminus$

$\{f(p)\} = Y \setminus \{f(p)\}$, unde s-a utilizat faptul că aplicaţia f este surjectivă. Prin urmare, $Y \setminus \{f(p)\} = \bigcup_{i=1}^{k} f(X_i)$. Mulţimile $f(X_i)$ sunt conexe (deoarece X_i sunt conexe şi f este continuă) şi disjuncte (deoarece X_i sunt disjuncte). Prin urmare, $f(p)$ este secţional de ordin k. ■

Utilizând aceeastă propoziţie, se poate demonstra, printre altele, şi că suprafaţa conică (cu două pânze) nu este o varietate topologică, deoarece, dacă ar fi, ar trebui să fie de dimensiune doi. Ori, vârful conului este secţional de ordinul doi, în timp ce toate punctele unui disc deschis din plan sunt puncte secţionale de ordinul unu.

1.2 Definiţia varietăţii diferenţiabile

Definiţie. Fie M o varietate topologică. Spunem că două hărţi (U, φ) şi (V, ψ) sunt C^∞-*compatibile* dacă fie $U \cap V = \emptyset$, fie $U \cap V \neq \emptyset$, iar aplicaţiile $\varphi \circ \psi^{-1}$ şi $\psi \circ \varphi^{-1}$ sunt *difeomorfisme* între submulţimile deschise $\varphi(U \cap V)$ şi $\psi(U \cap V)$.

Definiţie. O *structură diferenţiabilă* (zisă şi C^∞ sau netedă) pe o varietate toplogică M este o familie $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de hărţi astfel încât următoarele trei condiţii să fie verificate:

(1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ (altfel spus, familia de deschişi $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o acoperire a spaţiului topologic M);

(2) pentru orice $\alpha, \beta \in A$ hărţile $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ şi (U_β, φ_β) sunt C^∞-compatibile;

(3) Orice hartă (V, ψ), C^∞-compatibilă cu toate hărţile din $\mathcal{U}$, aparţine lui $\mathcal{U}$.

Observaţii. 1) În general, pe o varietate topologică pot exista mai multe structuri diferenţiabile "neechivalente" (vom vedea mai târziu care este semnificaţia precisă a acestui termen). De exemplu, pe $\mathbb{R}^4$ există chiar o infinitate. De remarcat că dimensiunea 4 este o dimensiune specială, pentru că pe toate celelalte spaţii euclidiene există doar câte o structură diferenţiabilă.

2) Există varietăţi topologice pe care nu se poate introduce nici o structură diferenţiabilă. Un astfel de exemplu a fost construit de către matematicianul elveţian Maurice Kervaire, în 1963.

3) Nu este neapărată nevoie să lucrăm cu varietăţi diferenţiabile de clasă C^∞. Definiţia are perfect sens şi pentru cazul C^k, cu $k < \infty$ sau pentru cazul C^ω (adică toate aplicaţiile sunt analitice). Multe dintre rezultatele din curs sunt valabile şi pentru varietăţi de clasă C^k, dar demonstraţiile presupun mai multe dificultăţi de natură tehnică. Pe de altă parte, unele dintre rezultate nu sunt valabile în cazul analitic (de exemplu existenţa partiţiei unităţii, vezi mai departe).

4) Dacă o varietate admite o structură diferenţiabilă de clasă C^1, atunci dintre hărţile sale se pot selecţiona unele care formează o structură de clasă C^∞.

O famile de hărţi pe o varietate topologică ce verifică doar primele două condiţii din definiţia structurii diferenţiabile se numeşte *atlas*. Intuitiv, este clar că o structură diferenţiabilă conţine "prea multe" hărţi pentru a putea fi manevrată în mod comod. Pe de altă parte, în cazurile fericite, un atlas poate consta dintr-un număr finit de hărţi (e întotdeauna cazul dacă varietatea este compactă). Următoarea teoremă ne arată că orice atlas determină în mod unic structura diferenţiabilă, deci întotdeauna este suficient, în cazurile concrete, să fixăm un atlas şi să lucrăm cu el.

Teorema 1.1. *Fie M o varietate topologică Hausdorff, cu bază numărabilă. Dacă $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ este un atlas pe M, atunci există o singură structură diferenţiabilă pe M care conţine atlasul.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{U}$ familia tuturor hărţilor topologice de pe M care sunt C^∞-compatibile cu toate hărţile din atlasul $\mathcal{A}$. Vom demonstra că $\mathcal{U}$ este o structură diferenţiabilă pe M.

Este clar că $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, prin urmare proprietatea (1) este în mod evident verificată, deoarece domeniile hărţilor din $\mathcal{A}$ acoperă deja varietatea M.

Fie, acum (U, φ) şi (V, ψ) două hărţi din $\mathcal{U}$ astfel încât domeniile lor să se intersecteze, adică $U \cap V \neq \emptyset$. Atunci, aceste hărţi fiind hărţi topologice pe M, aplicaţiile $\varphi \circ \psi^{-1}$ şi $\psi \circ \varphi^{-1}$ sunt omeomorfisme bine definite între submulţimile deschise $\varphi(U \cap V)$ şi $\psi(U \cap V)$. Rămâne doar de arătat că ele sunt de clasă C^∞.

Fie $x = \varphi(p)$ un punct oarecare din $\varphi(U \cap V)$. Atunci, deoarece domeniile hărţilor din $\mathcal{A}$ formează o acoperire, există un $\alpha \in A$ astfel încât $p \in V_\alpha$. Atunci mulţimea $W = V_\alpha \cap U \cap V$ este deschisă şi conţine punctul p, iar $\varphi(W)$ este o mulţime deschisă ce-l conţine pe x. Avem $\psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})$ pe $\varphi(W)$; dar $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ şi $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ sunt ambele de clasă C^∞, deoarece hărţile (U, φ) şi (V, ψ) sunt C^∞-compatibile cu harta $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$; cum p a fost un punct arbitrar din $U \cap V$, rezultă că aplicaţia $\psi \circ \varphi^{-1}$ este de clasă C^∞ în vecinătatea fiecărui punct din $\varphi(U \cap V)$, deci este C^∞ pe tot domeniul de definiţie. De aici rezultă proprietatea (2). Proprietatea (3) este, din nou, trivială. ■

1.3 Exemple de varietăţi diferenţiabile

1.3.1 Spaţiul euclidian n-dimensional

Este clar că $\mathbb{R}^n$ are o structură naturală de varietate diferenţiabilă n-dimensională, dată de un atlas cu o singură hartă, aplicaţia identică.

1.3.2 Subvarietăţi deschise

Dacă M este o varietate diferenţiabilă, iar $N \subset M$ este o submulţime deschisă a sa, atunci N se poate înzestra în mod natural cu o structură de varietate diferenţiabilă, numită *subvarietate deschisă* a lui M[1]. Într-adevăr, fie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas pe M. Este evident, atunci, că $\mathcal{B} = \left\{(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\right\}_{\alpha \in A}$ este un atlas pe N, care determină structura sa diferenţială. În particular, este clar că orice submulţime deschisă a unui spaţiu euclidian este o varietate diferenţiabilă de aceeaşi dimensiune cu spaţiul ambient, posedând un atlas format dintr-o singură hartă, dată de aplicaţia identică[2].

1.3.3 Produsul de varietăţi

Dacă M şi N sunt varietăţi diferenţiabile, atunci $M \times N$, cu topologia produs, este, de asemenea, o varietate, iar $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$. Într-adevăr, nu avem decât să considerăm un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ pe M şi un atlas $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ pe N. Atunci $\mathcal{C} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$, cu

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(x, y) = (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y))$$

este un atlas pe $M \times N$.

1.3.4 Sfera bidimensională (Proiecţia ortogonală).

Sfera bidimensională (şi, prin analogie, cea n-dimensională, unde n este un număr natural oarecare) se poate înzestra în mai multe moduri (adică utilizând mai multe atlase) cu o structură de varietate diferenţiabilă bidimensională

[1] După cum vom vedea ceva mai târziu, subvarietăţile deschise sunt cazuri particulare ale unor obiecte mai generale, numite *subvarietăţi*.

[2] Mai precis, această hartă este dată nu de aplicaţia identică a mulţimii deschise, ci de scufundarea canonică a sa în spaţiul ambient, dar această scufundare nu este altceva decât restricţia aplicaţiei identice a spaţiului euclidian ambient la mulţimea considerată.

(respectiv n-dimensională, în cazul general). Mai întâi, ca mulţime, avem

$$S^2 = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\right\},$$

adică este sfera unitate din $\mathbb{R}^3$, centrată în originea spaţiului $\mathbb{R}^3$. Înzestrăm S^2 cu topologia de subspaţiu din $\mathbb{R}^3$. Cu alte cuvinte, o mulţime $U \subset S^2$ este deschisă în topologia lui S^2 dacă şi numai dacă există o submulţime deschisă $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât să aibă loc egalitatea $U = \widetilde{U} \cap S^2$. După cum se ştie din topologia generală, atât proprietatea lui Hausdorff, cât şi existenţa bazei numărabile sunt proprietăţi ereditare: dacă un spaţiu topologic le are, atunci orice submulţime a sa, înzestrată cu topologia de subspaţiu le are. Pe de altă parte, proprietatea unui spaţiu topologic de a fi local euclidian *nu* este o proprietate ereditară, deci mai rămâne să demonstrăm, pentru a ne convinge că S^2 este, în primă instanţă, o varietate topologică, faptul că este un spaţiu topologic local euclidian. Pentru aceasta, fireşte, trebuie să punem în evidenţă un *atlas*. Considerăm submulţimile deschise ale lui $\mathbb{R}^3$ (semispaţii deschise)

$$\widetilde{U}_i^+ = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^i > 0\right\}$$

şi

$$\widetilde{U}_i^- = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^i < 0\right\},$$

cu $i = 1, 2, 3$. Atunci mulţimile $U_i^\pm = \widetilde{U}_i^\pm \cap S^2$, $i = 1, 2, 3$, sunt submulţimi deschise ale sferei S^2 care, în mod evident, acoperă întreaga sferă (ele sunt, în fond, şase emisfere deschise, adică fără ecuator).

Definim acum aplicaţiile $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ ca fiind, pur şi simplu, proiecţii ortogonale (proiecţii paralele după direcţia axei i), adică

$$\begin{aligned}
\varphi_1^\pm(x^1, x^2, x^3) &= (x^2, x^3)\\
\varphi_2^\pm(x^1, x^2, x^3) &= (x^1, x^3)\\
\varphi_3^\pm(x^1, x^2, x^3) &= (x^1, x^2)
\end{aligned}$$

Se verifică imediat că aceste aplicaţii sunt omeomorfisme pe interiorul cercului unitate cu centrul în originea lui $\mathbb{R}^2$,

$$W = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < 1\right\}.$$

Într-adevăr, să verificăm pentru φ_1^+. Cum $(x^1, x^2, x^3) \in S^2$, înseamnă că avem $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, adică $(x^2)^2 + (x^3)^2 = 1 - (x^1)^2 < 1$, întrucât $(x^1, x^2, x^3) \in U_1^+$, deci $x^1 > 0$. Prin urmare, pentru orice $(x^1, x^2, x^3) \in U_1^+$ avem $\varphi_1^+(x^1, x^2, x^3) \in W$, deci aplicaţia φ_1^+ ia, într-adevăr, valori în W. De asemenea, este evident faptul că aplicaţia φ_1^+ este continuă, deoarece este uşor de verificat că preimaginea oricărei submulţimi deschise a discului deschis W este o submulţime deschisă de pe sferă (adică intersecţia dintre o submulţime deschisă a spaţiului tridimensional şi sfera S^2).

Să demonstrăm acum că φ_1^+ este o aplicaţie inversabilă. Pentru aceasta, e clar, este suficient să-i punem în evidenţă inversa. Fie, deci $y = (y^1, y^2) \in W$. Atunci $(y^1)^2 + (y^2)^2 < 1$, deci are sens să definim aplicaţia $\psi_1^+ : W \longrightarrow U_1^+$,

$$\psi_1^+(y^2, y^3) = \left(\sqrt{1 - (y^2)^2 - (y^3)^2}, y^2, y^3\right).$$

Aplicaţia ψ_1^+ este, în mod evident, bine definită şi continuă. În plus, este uşor de verificat faptul că $\psi_1^+ = (\varphi_1^+)^{-1}$, adică, într-adevăr, φ_1^+ este un omeomorfism. La fel se verifică şi pentru celelalte aplicaţii (pentru aplicaţiile cu indicele superior "-" se ia semnul minus în faţa radicalului atunci când se defineşte aplicaţia inversă).

Pentru a verifica faptul că sfera S^2 este o varietate diferenţiabilă de clasă C^∞, este necesar să mai arătăm că oricare două hărţi sunt C^∞- compatibile. Considerăm, de exemplu, hărţile (U_1^+, φ_1^+) şi (U_2^-, φ_2^-). Avem, înainte, de toate,

$$U_1^+ \cap U_2^- = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^1 > 0, x^2 < 0\right\} \neq \emptyset$$

(această mulţime este un sfert de sferă deschis). Mai departe

$$\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-) = \left\{(y^1, y^2) \in W \mid y^1 < 0\right\},$$
$$\varphi_2^-(U_1^+ \cap U_2^-) = \left\{(y^1, y^2) \in W \mid y^1 > 0\right\},$$

adică aceste submulţimi ale planului sunt nişte semidiscuri deschise (semidiscul din stânga, respectiv din dreapta).

Pentru aplicaţia

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1} : \varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-) \to \varphi_2^-(U_1^+ \cap U_2^-)$$

avem expresia

$$(\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1})(y^2, y^3) = \varphi_2^-((\varphi_1^+)^{-1}(y^2, y^3)) =$$
$$= \varphi_2^-\left(\sqrt{1-(y^2)^2-(y^3)^2}, y^2, y^3\right) = \left(\sqrt{1-(y^2)^2-(y^3)^2}, y^3\right)$$

şi este clar că aplicaţia este de clasă C^∞. În mod analog, considerăm acum aplicaţia

$$\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1} : \varphi_2^-(U_1^+ \cap U_2^-) \to \varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-).$$

Avem

$$(\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1})(y^1, y^3) = \varphi_1^+((\varphi_2^-)^{-1}(y^1, y^3)) =$$
$$= \varphi_2^-\left(y^1, -\sqrt{1-(y^1)^2-(y^3)^2}, y^3\right) = \left(-\sqrt{1-(y^1)^2-(y^3)^2}, y^3\right),$$

deci şi această aplicaţie este infinit diferenţiabilă. Cum această aplicaţie este inversa primei, rezultă că prima aplicaţie (deci şi a doua) este un difeomorfism, ceea ce trebuia demonstrat.

Atlasul pe care l-am construit pe sferă conţine 6 hărţi de coordonate.

Exemplul se poate extinde în mod natural la cazul sferei S^n din spaţiul $\mathbb{R}^{n+1}$. Atlasul corespunzător va avea, evident, $2n+2$ hărţi.

1.3.5 Sfera bidimensională (proiecţia stereografică)

Considerăm, din nou, sfera bidimensională, cu aceeaşi topologie ca în exemplul de mai sus. Alegem însă un alt atlas, format, de data aceasta, numai din două hărţi. Fixăm în $\mathbb{R}^3$ un reper ortonormat, cu originea în originea sferei. Vom numi punctul $N = (0, 0, 1)$ *polul nord* al sferei, iar punctul $S = (0, 0, -1)$ – *polul sud*. Cele două hărţi vor fi atunci $U_N = S^2 \setminus \{N\}$, respectiv $U_S = S^2 \setminus \{S\}$. Este clar că dacă notăm $\widetilde{U}_N \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{N\}$ şi $\widetilde{U}_S \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$, atunci aceste mulţimi sunt deschise în $\mathbb{R}^3$, iar $U_N = \widetilde{U}_N \cap S^2$, $U_S = \widetilde{U}_S \cap S^2$, prin urmare mulţimile U_N şi U_S sunt deschise pe sferă.

Mai rămâne să construim aplicaţiile acestor hărţi. Descrierea geometrică a acestor aplicaţii este cât se poate de simplă. Identificăm $\mathbb{R}^2$ cu planul ecuatorial al sferei (adică cu planul de ecuaţie $x^3 = 0$). Acum, dacă $P \in U_N$, construim dreapta NP (care este bine definită, deoarece $N \neq P$). Atunci, prin definiţie, $\varphi_N(P)$ este punctul în care dreapta NP intersectează planul ecuatorial.

Analog se defineşte φ_S, cu diferenţa că se consideră dreapta SP (care, din nou, este bine definită dacă $P \in U_S$). Din această descriere este deja clar cel puţin că φ_N şi φ_S sunt aplicaţii bijective, bine definite, numite *proiecţii stereografice* (din polul nord, respectiv din polul sud).

Fie, deci, $P = (x^1, x^2, x^3) \in U_N$. Scriem ecuaţiile dreptei NP:

$$\frac{X^1}{x^1} = \frac{X^2}{x^2} = \frac{X^3 - 1}{x^3 - 1}.$$

Vom determina acum punctul de intersecţie dintre dreapta NP şi planul ecuatorial $X^3 = 0$. Avem , prin urmare,

$$\frac{X^1}{x^1} = \frac{X^2}{x^2} = \frac{1}{1-x^3},$$

de unde rezultă imediat că acest punct, fie el Q, va avea coordonatele

$$\left(\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{x^2}{1-x^3}, 0\right),$$

de unde, identificând planul ecuatorial cu $\mathbb{R}^2$ (adică, practic, ştergând zero-ul), obţinem că

$$\varphi_N(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{x^2}{1-x^3}, 0\right) \equiv \left(\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{x^2}{1-x^3}\right).$$

Este clar că aplicaţia φ_N este continuă. Vom determina acum inversa ei. Dacă $(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$, vom identifica acest punct cu punctul $(y^1, y^2, 0)$ din planul ecuatorial al sferei. Scriem acum ecuaţiile dreptei NQ:

$$\frac{X^1}{y^1} = \frac{X^2}{y^2} = \frac{X^3-1}{-1}. \tag{*}$$

Determinăm punctul P de intersecţie dintre dreapta NQ şi sfera S^2. Aceasta înseamnă să adăugăm ecuaţiilor (*) ecuaţia

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1$$

şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{X^1}{y^1} = \dfrac{X^2}{y^2} = \dfrac{X^3-1}{-1} \\ (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1 \end{cases}. \tag{**}$$

Notăm cu t valoarea comună a rapoartelor din (*) şi obţinem

$$\begin{cases} X^1 = ty^1 \\ X^2 = ty^2 \\ X^3 = 1-t \end{cases}. \tag{***}$$

Înlocuind în a doua ecuaţie a sistemului (**) obţinem

$$t^2(y^1)^2 + t^2(y^2)^2 + (1-t)^2 = 1$$

sau

$$t^2\left[(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1\right] - 2t = 0.$$

Este clar că nu putem avea $t = 0$, pentru că atunci din (***) am obţine că punctul de intersecţie este polul nord. Prin urmare, putem împărţi cu t şi obţinem, în final,

$$t = \frac{2}{1+\|y\|^2},$$

unde $\|y\|^2 \equiv (y^1)^2 + (y^2)^2$ este pătratul normei euclidiene a lui $y = (y^1, y^2)$, privit ca punct al lui $\mathbb{R}^2$. Înlocuind în (***), obţinem că

$$\varphi_N^{-1}\left(y^1, y^2\right) = \left(\frac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \frac{2y^2}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right).$$

Este evident că şi φ_N^{-1} este continuă. Este, de asemenea, clar din construcţie că φ_N^{-1} este inversa lui φ_N. Totuşi, ca o verificare suplimentară, să calculăm, de exemplu, expresia lui $\varphi_N \circ \varphi_N^{-1}$:

$$\varphi_N \circ \varphi_N^{-1}(y^1, y^2) = \varphi_N \left(\frac{2y^1}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y^2}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2} \right).$$

În acest caz $x^3 = \dfrac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2}$, deci avem că

$$1 - x^3 = 1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2} = \frac{2}{1 + \|y\|^2}$$

Revenind, obţinem că

$$\varphi_N \circ \varphi_N^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{2y^1}{1 + \|y\|^2} \cdot \frac{1 + \|y\|^2}{2}, \frac{2y^2}{1 + \|y\|^2} \cdot \frac{1 + \|y\|^2}{2} \right) = (y^1, y^2),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Determinarea expresiei pentru aplicaţia din polul sud $\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ decurge în exact aceeaşi manieră, aşa că nu vom mai repeta calculele. Se obţine, astfel, că

$$\varphi_S(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{x^1}{1 + x^3}, \frac{x^2}{1 + x^3}, 0 \right),$$

$$\varphi_S^{-1} = \left(\frac{2y^1}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y^2}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right).$$

Este evident că şi φ_S este un omeomorfism. Ce mai rămâne de demonstrat este că $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ şi $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ sunt aplicaţii netede. Într-adevăr, avem:

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y^1, y^2) = \varphi_S(\varphi_N^{-1}(y^1, y^2)) = \varphi_S \left(\frac{2y^1}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y^2}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2} \right) =$$
$$= \left(\frac{\frac{2y^1}{1+\|y\|^2}}{1 + \frac{\|y^2\|-1}{\|y^2\|+1}}, \frac{\frac{2y^2}{1+\|y\|^2}}{1 + \frac{\|y^2\|-1}{\|y^2\|+1}} \right) = \frac{1}{\|y\|^2}(y^1, y^2),$$

iar această aplicaţie este, în mod evident, netedă. Este de observat că $y = (y^1, y^2)$ nu poate fi $0 = (0, 0)$, deoarece aplicaţia $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ este definită pe $\varphi(U_S \cap U_N) = \varphi_N(S^2 \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, deoarece, în mod clar, $\varphi_N(0, 0, -1) = (0, 0)$. În exact acelaşi mod se poate verifica faptul că şi aplicaţia $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ este o aplicaţie netedă.

Atlasul construit se poate adapta, fără probleme, la cazul sferei n-dimensionale, unde n este un număr natural oarecare. De remarcat că de data aceasta numărul de hărţi nu depinde de dimensiune. Prin urmare, pe o sferă cu o dimensiune oarecare există întotdeauna un atlas alcătuit din două hărţi. Acesta este, în mod evident, optimul. Sfera fiind compactă, pe ea nu pot exista atlasuri formate dintr-o singură hartă.

1.3.6 Echivalenţa celor două atlasuri de pe sferă

Considerăm, de exemplu, harta (U_1^+, φ_1^+) din atlasul dat de proiecţiile ortogonale şi harta (U_N, φ_N) din atlasul dat de proiecţiile stereografice. Să verificăm că aceste două hărţi sunt echivalente. Mai întâi observăm că $U_1^+ \cap U_N \neq \emptyset$ (mai precis, $U_1^+ \cap U_N = U_1^+ \setminus \{N\}$).

Mai departe, $\varphi_N(U_1^+ \cap U_N) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| \leq 1\} \equiv$ exteriorul discului unitate centrat în originea lui $\mathbb{R}^2$, iar $\varphi_1^+(U_1^+ \cap U_N) = \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < 1,\ \|y\| \neq 0\} \equiv$ interiorul discului unitate centrat în originea lui $\mathbb{R}^2$, mai puţin centrul său.

Acum

$$(\varphi_N \circ (\varphi_1^+)^{-1})(y^1, y^2) = \varphi_N(\sqrt{1-(y^1)^2-(y^2)^2}, y^1, y^2) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{1-\|y\|^2}}{1-y^2}, \frac{y^1}{1-y^2} \right).$$

Aplicaţia este, deci, netedă. Remarcăm că $y^2 \neq 1$, deoarece $\|y\| < 1$.

Pe de altă parte,

$$(\varphi_1^+ \circ \varphi_N^{-1})(y^1, y^2) = \varphi_1^+ \left(\frac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \frac{2y^2}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2} \right) =$$
$$= \left(\frac{2y^2}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2} \right).$$

Şi această aplicaţie este, prin urmare, netedă, aşadar cele două hărţi sunt C^∞-compatibile. În exact acelaşi mod se verifică şi compatibilitatea celorlalte perechi de hărţi, deci atlasele sunt C^∞- compatibile.

1.3.7 Spaţii factor

O metodă foarte puternică de obţinere a unor varietăţi diferenţiabile se bazează pe relaţii de echivalenţă şi factorizare. Dacă X este un spaţiu topologic, iar $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe el, există o metodă naturală de a introduce o topologie pe spaţiul factor $X/\sim$ şi anume, dacă $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ este proiecţia canonică, atunci o submulţime $U \subset X/\sim$ este, prin definiţie, deschisă în $X/\sim$ dacă $\pi^{-1}(U)$ este o submulţime deschisă a spaţiului topologic X. Topologia astfel obţinută se numeşte *topologie factor* sau *topologie cât*. Este clar din modul de definire că π este continuă în această topologie (în fapt, topologia factor este cea mai fină în raport cu care aplicaţia π este continuă).

Problema este că, aşa cum se întâmplă şi cu structurile algebrice, spaţiul factor nu moşteneşte, în general, proprietăţile spaţiului care se factorizează. În particular, un spaţiu factor al unui spaţiu Hausdorff nu are, neapărat, această proprietate. Se pot, totuşi, impune anumite condiţii de “regularitate” asupra relaţiei de echivalenţă care să asigure obţinerea unui spaţiu factor “bun”. Din nou, problema este că aceste condiţii sunt destul de greu de verificat în practică. Oricum, este tot ce avem şi, în anumite cazuri, funcţionează.

Definiţie. O relaţie de echivalenţă pe un spaţiu topologic X se numeşte *deschisă* dacă proiecţia canonică este deschisă în raport cu topologia factor, cu alte cuvinte dacă pentru orice submulţime deschisă $A \subset X$, $\pi(A) = [A] = \{[x] \mid x \in A\}$ este deschisă în $X/\sim$.

Relaţiile deschise sunt foarte utile pentru construirea de varietăţi, după cum arată următoarea propoziţie:

Propoziţia 1.3.1. *Dacă X este un spaţiu topologic cu bază numărabilă şi $\sim$ este o relaţie de echivalenţă deschisă pe X, atunci spaţiul topologic factor $X/\sim$ are bază numărabilă.*

Demonstraţie. Fie $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ o bază numărabilă a lui X. Fie $W \subset X/\sim$ o mulţime deschisă din $X/\sim$. Atunci $\pi^{-1}(W)$ este deschisă în X, deci există o mulţime de numere naturale $J \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\pi^{-1}(W) = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$, iar $W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup\limits_{i\in J} \pi(U_i)$. Relaţia $\sim$ fiind deschisă, mulţimile $\pi(U_i)$ sunt deschise, deci $\{\pi(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ este o bază numărabilă a topologiei de pe $X/\sim$. ■

Următoarea propoziţie ne dă condiţii necesare şi suficiente pentru ca spaţiul factor să fie Hausdorff. (Atenţie! Nu se cere de data aceasta ca spaţiul care se factorizează să fie Hausdorff).

Propoziţia 1.3.2. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă deschisă pe un spaţiu topologic X. Atunci spaţiul factor $X/\!\sim$ este Hausdorff dacă şi numai dacă graficul relaţiei,*

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

este o submulţime închisă în $X \times X$ în raport cu topologia produs.

Demonstraţie. Presupunem, mai întâi, că $X/\sim$ este un spaţiu Hausdorff şi fie $(x, y) \notin R$, ceea ce înseamnă că $x \nsim y$. $X/\!\sim$ fiind un spaţiu Hausdorff, există o vecinătate U a lui $\pi(x)$ şi o vecinătate V a lui $\pi(y)$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$. Ambele vecinătăţi se presupun deschise. Fie $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ şi $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V)$. π fiind o aplicaţie continuă, aceste două mulţimi sunt vecinătăţi deschise ale lui x, respectiv y în X. Intenţionăm să arătăm că $(\widetilde{U} \times \widetilde{V}) \cap R = \emptyset$, ceea ce înseamnă că (x, y) are o vecinătate deschisă inclusă în întregime în complementul lui R, ceea ce, fireşte, înseamnă că R este o mulţime închisă, din moment ce are complementul deschis.

Să presupunem că n-ar fi aşa. Fie deci $(x', y') \in (\widetilde{U} \times \widetilde{V}) \cap R$. Atunci $x' \sim y'$, de unde rezultă că $\pi(x') = \pi(y')$. Dar $\pi(x') \in U$, $\pi(y') \in V$, iar $U \cap V = \emptyset$, contradicţie.

Invers, acum, presupunem că mulţimea R este închisă. Fie $\pi(x), \pi(y) \in X/\!\sim$, distincte. Atunci există $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ mulţime deschisă ce conţine (x, y) şi care este inclusă în $(X \times X) \setminus R$. Asta înseamnă că $U = \pi(\widetilde{U})$ şi $V = \pi(\widetilde{V})$ sunt mulţimi disjuncte din $X/\!\sim$ ce conţin prima pe $\pi(x)$, iar a doua pe $\pi(y)$. Mulţimile sunt deschise, deoarece relaţia de echivalenţă este deschisă, prin urmare ele sunt *vecinătăţi* disjuncte ale punctelor $\pi(x)$ şi $\pi(y)$, de unde rezultă că $X/\!\sim$ este Hausdorff. ∎

1.3.8 Spaţiul proiectiv real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Vom aplica acum rezultatele paragrafului precedent pentru a construi un exemplu foarte important de varietate diferenţiabilă, aşa-numitul *spaţiu proiectiv real*. Fie $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Spunem că două puncte $x, y \in X$ sunt echivalente şi scriem $x \sim y$ dacă există un număr real nenul t astfel încât $y = tx$, adică

$$(y^1, \dots, y^{n+1}) = (tx^1, \dots, tx^{n+1}).$$

O clasă de echivalenţă este, în fapt, o dreaptă care trece prin originea lui $\mathbb{R}^{n+1}$ (mai puţin originea însăşi). Se numeşte *spaţiu proiectiv n-dimensional* spaţiul factor $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \doteq X/\!\sim$. Vom demonstra că acest spaţiu factor este o varietate diferenţiabilă de dimensiune n. In acest scop, vom arăta mai întâi că cele două propoziţii de mai sus se pot aplica şi pe urmă vom construi un atlas. Demonstrăm mai întâi că proiecţia canonică $\pi : X \longrightarrow X/\!\sim$ este o aplicaţie deschisă.

Fie, deocamdată, $t \in \mathbb{R}^*$, fixat. Considerăm aplicaţia (omotetia de raport t)

$$\varphi_t : X \longrightarrow X, \quad \varphi_t(x) = tx.$$

Este clar că φ_t este un omeomorfism, iar $\varphi_t^{-1} = \varphi_{1/t}$.

Dacă $U \subset X$ este o submulţime deschisă, atunci $\pi(U) = [U] = \bigcup_{t\in\mathbb{R}^*} \varphi_t(U)$. Dar fiecare $\varphi_t(U)$ este o submulţime deschisă, deci şi $\pi(U)$ este deschisă, ceea ce înseamnă, conform definiţiei, că relaţia de echivalenţă este deschisă.

Vom demonstra acum că graficul relaţiei de echivalenţă este închis. Remarcăm, mai întâi, că $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ este o submulţime deschisă. Definim aplicaţia $f : X \times X \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$f(x, y) = \sum_{i\neq j} (x^i y^j - x^j y^i)^2.$$

Atunci f este continuă şi se anulează doar pentru $y = tx$ cu $t \in \mathbb{R}^*$, adică dacă şi numai dacă $x \sim y$. Dar asta înseamnă, în fapt, că $R = f^{-1}(0)$. Cum $\mathbb{R}$ este Hausdorff, $\{0\}$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, de unde rezultă că, f fiind continuă, R este închisă în $X \times X$. Aplicând propoziţia 1.3.2, obţinem că $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ este un spaţiu topologic Hausdorff.

Mai rămâne de arătat că $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ este un spaţiu local euclidian, iar hărţile sunt C^∞- compatibile. În acest scop, considerăm mulţimile deschise $\widetilde{U}_i = \{x \in X \mid x^i \neq 0\} \subset X$, $i = \overline{1, n+1}$, atunci familia $\{U_i\}_{i=\overline{1,n+1}}$ este o acoperire deschisă a lui $X/\!\sim$. Fie acum $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Definim aplicaţia $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ în modul următor. Fie $(x^1, \dots, x^{n+1})$ un reprezentant al clasei $[x] \in U_i$. Punem atunci

$$\varphi_i([x]) \doteq \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

Este clar că aplicaţia este bine definită (nu depinde de alegerea reprezentanţilor în clasa de echivalenţă considerată).

Continuitatea aplicaţiei φ_i nu este atât de evidentă cum se afirmă uneori. Ea este o consecinţă a următoarei propoziţii:

Propoziţia 1.3.3. *Fie X un spaţiu topologic şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe el. Dacă Y este un alt spaţiu topologic, iar $\varphi : X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă compatibilă cu relaţia de echivalenţă, atunci există o singură aplicaţie continuă $\bar{\varphi} : X/\!\sim\longrightarrow Y$ astfel încât $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, unde $\pi : X \longrightarrow X/\!\sim$ este proiecţia canonică. (Compatibilitatea cu relaţia de echivalenţă înseamnă că dacă $x, y \in X$, cu $x \sim y$, atunci $\varphi(x) = \varphi(y)$).*

Demonstraţie. Este clar că putem defini aplicaţia $\overline{\varphi}$ prin $\overline{\varphi}([x]) = \varphi(x)$. Atunci $\overline{\varphi}$ este bine definită, datorită compatibilităţii lui φ cu relaţia de echivalenţă. Fie acum $U \subset Y$, deschisă. Trebuie să demonstrăm că $\overline{\varphi}^{-1}(U)$ este deschisă. Mai întâi, deoarece φ este continuă, $\varphi^{-1}(U)$ este deschisă în X. Pe de altă parte, deoarece $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, prin urmare

$$\varphi^{-1}(U) = (\bar{\varphi} \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(\bar{\varphi}^{-1}(U)).$$

Aşadar, mulţimea $\pi^{-1}(\bar{\varphi}^{-1}(U))$ este deschisă în X. Dar, conform definiţiei topologiei factor, asta înseamnă că mulţimea $\bar{\varphi}^{-1}(U)$ este deschisă în $X/\!\sim$, deci aplicaţia $\bar{\varphi}$ este continuă. ■

Ca să aplicăm propoziţia, observăm imediat că φ_i este indusă de aplicaţia, evident continuă, $\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right),$$

care, în plus, este compatibilă cu relaţia de echivalenţă.

Pentru a demonstra că φ_i este chiar un omeomorfism, mai trebuie să demonstrăm că este inversabilă şi inversa este, de asemenea, o aplicaţie continuă. Definim aplicaţia $\psi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow X/\!\sim$ prin

$$\psi(z) = \pi(z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^i, \dots, z^n) = (\pi \circ \gamma_i)(z),$$

unde γ_i este scufundarea lui $\mathbb{R}^n$ în $\mathbb{R}^{n+1}$ dată de

$$\gamma_i(z^1, \dots, z^n) = (z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^i, \dots, z^n).$$

Este clar că fiecare dintre aplicaţiile γ_i şi π este o aplicaţie continuă, prin urmare şi compunerea lor, adică ψ_i, este o aplicaţie continuă. Pe de altă parte, este imediat verificabil faptul că ψ_i este inversa lui φ_i, prin urmare această din urmă aplicaţie este un omeomorfism. Am demonstrat, până acum, că $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ este o varietate topologică. Mai rămâne doar să arătăm că schimbările de hartă sunt funcţii de clasă C^∞.

Fie, prin urmare, $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$. Avem

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(z^1, \dots, z^n) = \varphi_i(\varphi_j^{-1}(z^1, \dots, z^n)) = [z^1, \dots, z^{j-1}, 1, z^j, \dots, z^n] =$$
$$= \left(\frac{z^1}{z^i}, \dots, \frac{z^{j-1}}{z^i}, \frac{1}{z^i}, \frac{z^j}{z^i}, \frac{z^n}{z^i}\right)$$

unde am presupus, pentru fixarea ideilor, că $j < i$. Desigur, această presupunere nu afectează rezultatul. Este clar acum că $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ este de clasă C^∞ (de remarcat că $z_i \neq 0$).

1.3.9 Un spaţiu Hausdorff local euclidian care nu admite o bază numărabilă (Prüfer)

Considerăm următoarea mulţime

$$M := \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\right) \uplus \left(\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}\right).$$

Atunci familia de mulţimi $\left\{U_r = \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\right) \uplus \left(\mathbb{R} \times \{0\} \times \{r\}\right) \mid r \in \mathbb{R}\right\}$ este o acoperire deschisă a lui M. În plus, aplicaţiile

$$\varphi_r : U_r \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \varphi_r(x, y) := \left(\frac{x - r}{y}, y\right); \ \varphi_r(x, 0, r) := (x, 0)$$

sunt bijective, pentru orice $r \in \mathbb{R}$. Mai mult chiar, schimbările de hartă sunt netede. Într-adevăr, pentru orice $r, s \in \mathbb{R}, r \neq s$, avem $U_r \cap U_s = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, iar $\varphi_r(U_r \cap U_s) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \varphi_s(U_r \cap U_s)$. Atunci

$$\varphi_r \cap \varphi_s^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad \varphi_r \cap \varphi_s^{-1}(x, y) = \left(\frac{xy + s - r}{y}, y\right),$$

ceea ce demonstrează netezimea schimbării de hartă. Prin urmare, abstracţie făcând de condiţiile topologice, M este o varietate netedă de dimensiune 2. Demonstrăm, mai întâi că M este Hausdorff. În mod clar, punctele din prima parte a mulţimii M (adică cele din $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$) pot fi separate prin vecinătăţi disjuncte. Mai departe, deoarece M este reuniunea disjuncţă a două mulţimi, rezultă că un punct din prima mulţime şi unul din cea de-a doua mulţime pot fi, de asemenea, separate prin vecinătăţi disjuncte. Numai pentru puncte $p = (x, 0, r) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times \{r\}$ şi $q = (x', 0, s) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times \{s\}$, cu $r \neq s$ este necesar să facem verificarea. Pentru un $R > 0$ fixat şi un $\varepsilon > 0$ suficient de mic φ_r^{-1} $(B(x; R) \times B(0, \varepsilon))$ şi φ_s^{-1} $(B(x'; R) \times B(0, \varepsilon))$ sunt vecinătăţi disjuncte ale lui p şi q, respectiv. Mai departe, M este, în mod clar, conex. Nu are, însă, o bază numărabilă. Aceasta se poate constata din următorul raţionament. Se poate verifica cu uşurinţă că dacă un spaţiu local euclidian are o bază numărabilă, atunci din orice atlas al său se poate extrage un atlas numărabil. Pe de altă parte, în mod clar, atlasul de mai sus nu are un subatlas numărabil.

Dacă se înlocuieşte definiţia de mai sus a aplicaţiilor hărţilor cu următoarea definiţie:

$$(x, y) \longrightarrow (x, y), \quad \text{dacă} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \quad (x, 0, r) \longrightarrow (x, 0), \quad \text{dacă} \quad (x, 0, r) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times \{r\},$$

atunci spaţiul care se obţine nu este Hausdorff şi nici nu are bază numărabilă.

1.4 Aplicaţii diferenţiabile

Aşa cum aplicaţiile continue joacă un rol esenţial în topologia generală, anume rolul morfismelor, în teoria varietăţilor diferenţiabile un rol analog îl va juca o altă clasă de aplicaţii, numite *aplicaţii diferenţiabile*, clasă care se reduce, în cazul particular al spaţiilor euclidiene, la clasa aplicaţiilor diferenţiabile în sensul lui Fréchet, cu care ne-am întâlnit în analiza clasică. Ideea fundamentală de definire a acestor aplicaţii este aceeaşi care stă la baza întregii teorii a varietăţilor diferenţiabile. În esenţă, o aplicaţie diferenţiabilă între două varietăţi diferenţiabile este o aplicaţie care, local, se poate reprezenta cu ajutorul unor aplicaţii diferenţiabile între spaţii euclidiene. Vom face, în continuare, mai precisă această definiţie.

Definiţie. Fie M, N două varietăţi diferenţiabile şi $p \in M$. Spunem că o aplicaţie $f : M \longrightarrow N$ este *diferenţiabilă* în punctul p dacă există o hartă[3] (U, φ) pe M cu $p \in U$ şi o hartă[4] (V, ψ) pe N cu $f(p) \in V$ şi $f(U) \subset V$ astfel încât aplicaţia $f_{\varphi\psi} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$, definită prin $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ să fie diferenţiabilă în sens Fréchet. Se observă că atît domeniul cît şi codomeniul aplicaţiei $f_{\varphi\psi}$ sunt mulţimi deschise din spaţii euclidiene, deci noţiunea de diferenţiabilitate în sens Fréchet este bine definită pentru această aplicaţie.

Observaţii. a) Hărţile (U, φ) şi (V, ψ) care îndeplinesc condiţiile din definiţia de mai sus se numesc *hărţi adaptate aplicaţiei f în jurul punctului p, respectiv $f(p)$*, iar aplicaţia $f_{\varphi\psi}$ se numeşte *reprezentarea locală a lui f* în cele două hărţi adaptate considerate.

b) Reamintim că aplicaţia $f_{\varphi\psi}$ este diferenţiabilă dacă şi numai dacă sunt diferenţiabile funcţiile $p_i \circ f_{\varphi\psi} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $p_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ sunt proiecţiile canonice ($m = \dim M$).

O problemă naturală care se pune aici, şi care va apărea de multe ori în viitor, este dacă definiţia este corectă sau nu. Datorită faptului că în formularea definiţiei apar hărţile, nu este clar dacă definiţia depinde sau nu de alegerea hărţilor în jurul punctului p, respectiv $f(p)$. În general, vom atribui o semnificaţie geometrică numai acelor noţiuni care nu depind de această alegere, care sunt, prin urmare, într-un anume sens, invariante faţă de schimbarea coordonatelor. Următoarea propoziţie ne dă un răspuns la această întrebare.

Propoziţia 1.4.1. *Definiţia diferenţiabilităţii într-un punct a unei aplicaţii între două varietăţi diferenţiabile nu depinde de alegerea hărţilor adaptate în jurul punctului considerat.*

Demonstraţie. Fie (U', φ') o altă hartă în jurul lui p astfel încât $f(U') \subset V$. Considerăm reprezentarea locală a lui f în hărţile (U', φ') şi (V, ψ),

$$f_{\varphi'\psi} : \varphi'(U) \longrightarrow \psi(V), \quad f_{\varphi'\psi} = \psi \circ f \circ (\varphi')^{-1}.$$

Atunci putem scrie

$$\begin{aligned} f_{\varphi'\psi} &\equiv \psi \circ f \circ (\varphi')^{-1} = \psi \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi')^{-1} = \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ (\varphi')^{-1}) = f_{\varphi\psi} \circ (\varphi \circ (\varphi')^{-1}), \end{aligned}$$

adică $f_{\varphi'\psi}$ este o compunere de aplicaţii netede. La fel se procedează dacă se schimbă cea de-a doua hartă. ■

O aplicaţie $f : M \longrightarrow N$ între două varietăţi diferenţiabile se va numi, pur şi simplu, *netedă* sau *diferenţiabilă* dacă ea este diferenţiabilă în fiecare punct.

În particular, o aplicaţie netedă, inversabilă, şi cu inversa netedă se numeşte *difeomorfism*.

Observaţie. Spre deosebire de cazul structurilor algebrice, nu este suficient să cerem ca o aplicaţie să fie netedă şi inversabilă pentru ca ea să fie un difeomorfism. De fapt, nu este suficient nici măcar să fie un omeomorfism. Un contraexemplu este dat de aplicaţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, care este, în mod evident, un omeomorfism, este netedă, dar inversa ei (radicalul de ordinul trei) nu este derivabilă în origine.

Noţiunea de diferenţiabilitate este compatibilă cu compunerea funcţiilor. Într-adevăr, avem

Propoziţia 1.4.2. *Fie $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ două aplicaţii între varietăţi diferenţiabile. Dacă $m \in M$, f este diferenţiabilă în m, iar g este diferenţiabilă în $f(m)$, atunci $g \circ f$ este diferenţiabilă în m.*

[3] Vom spune despre această hartă că este o hartă *în jurul lui p*.

[4] Vom spune despre această hartă că este o hartă *în jurul lui $f(p)$*.

Demonstraţie. Fie (U, φ) o hartă pe M în jurul lui m, (V, psi) o hartă pe N în jurul lui $f(m)$ şi (W, μ) o hartă pe P în jurul lui $g(f(m))$ astfel încât să avem $f(U) \subset V$ şi $g(V) \subset W$. Atunci ştim că aplicaţiile $f_{\varphi\psi} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ şi $g_{\psi\mu} \equiv \mu \circ g \circ \psi^{-1}$ sunt netede şi vrem să arătăm că şi $(g \circ f)_{\varphi\mu} \equiv \mu \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ este netedă. Avem

$$\begin{aligned}(g \circ f)_{\varphi\mu} &\equiv \mu \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = \mu \circ g \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ \varphi^{-1} = \\ &= (\mu \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = g_{\psi\mu} \circ f_{\varphi\psi}.\end{aligned}$$

■

Vom nota, în general, cu $C^\infty(M, N)$ sau cu $\mathcal{F}(M, N)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor diferenţiabile între varietăţile M şi N. Această mulţime nu are, în general, nici o structură algebrică remarcabilă. Dacă, însă, $N \equiv \mathbb{R}$, cu structura diferenţiabilă standard, dată de identitate (caz în care aplicaţiile diferenţiabile se vor numi *funcţii diferenţiabile*), mulţimea $C^\infty(M, \mathbb{R})$, care se va nota cu $C^\infty(M)$ sau $\mathcal{F}(M)$, are o structură naturală de *algebră* peste mulţimea numerelor reale, structură indusă de operaţiile definite punctual. Astfel, dacă $f, g \in \mathcal{M}$, iar $\alpha \in \mathbb{R}$, vom defini, pentru orice $p \in M$:

(i) $(f + g)(p) := f(p) + g(p)$;

(ii) $(f \cdot g)(p) := f(p) \cdot g(p)$;

(iii) $(\alpha \cdot f)(p) := \alpha \cdot f(p)$.

În toate aceste relaţii operaţiile de după semnul egal se efectuează în mulţimea numerelor reale, deci au sens.

1.4.1 Exemple de aplicaţii diferenţiabile

(i) În mod evident, hărţile sunt aplicaţii netede.

(ii) Dacă $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ sunt aplicaţii netede, cu $i = 1, 2$, atunci aplicaţia $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2$, $(f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ este netedă în raport cu structurile diferenţiale produs.

(iii) Incluziunea $i : S^n \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow R^{n+1}$ este netedă.

(iv) Aplicaţia $f : S^n \longrightarrow S^n$, $f(x) = -x$ este netedă.

1.5 Grupuri Lie

Având la dispoziţie noţiunea de aplicaţie diferenţiabilă, putem defini o clasă de obiecte ce joacă un rol fundamental în matematica modernă.

Definiţie. Se numeşte *grup Lie* o varietate netedă G care este, în acelaşi timp, un grup, iar înmulţirea $\mu : G \times G \longrightarrow G$, $\mu(g, h) \overset{not}{=} g \cdot h$ şi trecerea la invers $\iota : G \longrightarrow G$, $\iota(g) \overset{not}{=} g^{-1}$ sunt aplicaţii netede.

Următoarea propoziţie ne permite uneori să verificăm cu mai multă uşurinţă dacă o varietate netedă care este şi grup este grup Lie, verificând netezimea unei singure aplicaţii.

Propoziţia 1.5.1. *Fie G o varietate netedă care are şi o structură de grup. Atunci G este un grup Lie dacă şi numai dacă aplicaţia $\varphi : G \times G \longrightarrow G$, $\varphi(g, h) = gh^{-1}$ este o aplicaţie netedă.*

Demonstraţie. Presupunem, mai întâi, că aplicaţia φ este netedă.

Fie $\psi : G \longrightarrow G \times G$, $\psi(g) = (e, g)$, unde e este elementul unitate al grupului. Este clar că aplicaţia ψ este netedă. Atunci trecerea la invers se poate reprezenta sub forma $\iota = \varphi \circ \psi$, adică este o aplicaţie netedă, fiind o compunere de aplaicaţii netede.

Mai departe, fie $\gamma : G \times G \longrightarrow G \times G$, $\gamma(g, h) = (g, h^{-1})$. Se observă imediat că $\gamma = 1_G \times \iota$, deci este netedă, deoarece atât 1_G, cât şi ι (pe baza celor demonstrate mai sus), sunt aplicaţii netede. Acum putem scrie înmulţirea sub forma $\mu = \varphi \circ \gamma$, adică şi înmulţirea este netedă, deci G este un grup Lie.

Invers, presupunem acum că G este un grup Lie, adică înmulţirea şi trecera la invers sunt netede. Atunci, în plus, este netedă şi aplicaţia γ, iar φ se poate scrie $\varphi = \mu \circ \gamma$, adică este netedă. ■

Observaţii.

1. În multe cărţi definiţia grupului Lie este dată prin cerinţa ca aplicaţia φ să fie netedă, iar apoi se demonstrează că în acest caz şi înmulţirea şi trecerea la invers sunt netede.

2. Grupurile Lie nu sunt întotdeauna conexe, ca spaţii topologice. În orice caz, componenta conexă a unităţii unui grup Lie este întotdeauna un grup Lie conex. Toate componentele conexe sunt difeomorfe între ele.

1.5.1 Exemple de grupuri Lie

a) Grupul general liniar real $GL(n, \mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Grupul general liniar complex $GL(n, \mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

c) Spaţiile euclidiene $\mathbb{R}^n$, în raport cu adunarea.

d) $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, în raport cu înmulţirea numerelor reale (complexe).

e) Cercul $S^1 \subset C^*$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe[5].

f) Produsul de grupuri Lie, cu structura diferenţiabilă produs şi cu structura de produs direct de grupuri este un grup Lie. Dimensiunea sa este egală cu suma dimensiunilor factorilor.

g) Ca un caz particular al punctului precedent, menţionăm torul n-dimensional

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ factori}}.$$

h) Orice grup cel mult numărabil, înzestrat cu topologia discretă, e un grup Lie de dimensiune zero (un astfel de grup se numeşte, din motive evidente, *grup Lie discret* sau doar *grup discret*).

Un instrument esenţial pentru investigarea grupurilor Lie este alcătuit de două familii de aplicaţii, numite *translaţii* la stânga şi la dreapta, definite după cum urmează. Fie $g \in G$.

- Se numeşte *translaţie la stânga* pe grupul G, asociată elementului g aplicaţia $L_g : G \longrightarrow G$ definită prin

$$L_g(h) = gh.$$

- Se numeşte *translaţie la dreapta* pe grupul G, asociată elementului g aplicaţia $R_g : G \longrightarrow G$ definită prin

$$R_g(h) = hg.$$

[5] Cercul este mulţimea numerelor complexe de modul 1.

Este uşor de verificat că translaţiile sunt aplicaţii netede. Într-adevăr, fie $g \in G$ şi L_g translaţia la stânga asociată acestui element. Considerăm aplicaţia, în mod evident netedă, $i_g : G \longrightarrow G \times G$, $i_g(h) = (g, h)$. Atunci translaţia L_g se poate scrie sub forma $L_g \mu \circ i_g$, adică este o aplicaţie netedă. Analog se face verificarea pentru translaţiile la dreapta.

Observaţii.

1. Translaţiile sunt, de fapt, chiar nişte difeomorfisme. Într-adevăr, este uşor de constatat că inversa unei translaţii L_g (respectiv R_g) există şi este tot o translaţie şi anume $L_{g^{-1}}$ (respectiv $R_{g^{-1}}$).

2. În cazul grupurilor Lie abeliene translaţia la dreapta şi cea la stânga asociate unui element coincid. Daca $g = e$ este elementul unitate al grupului, atunci, de asemenea, cele două translaţii asociate acestui element coincid şi coincid cu aplicaţia identică a grupului.

3. În general (cu excepţia cazului când sunt asociate elementului unitate), translaţiile *nu* sunt morfisme de grupuri.

4. În cazul grupului Lie aditiv (şi abelian) $\mathbb{R}^n$, translaţiile (la stânga şi la dreapta) asociate unui vector sunt chiar translaţiile cu acel vector, în sensul geometriei euclidiene. Aceasta este, de fapt, originea denumirii.

În general, dacâ G şi H sunt două grupuri Lie, morfismele de grupuri între cele două obiecte nu sunt aplicaţii netede. Vom numi *morfisme de grupuri Lie* sau, mai pe scurt, *morfisme Lie* acele morfisme de grupuri care sunt, în acelaşi timp, aplicaţii netede.

1.5.2 Exemple de morfisme Lie

a) Incluziunea $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ este un morfism de grupuri Lie. Într-adevăr, ea este un morfism de grupuri (pentru că, de fapt, S^1 este un subgrup al lui C^*) şi este uşor de constatat că este netedă.

b) Exponenţiala $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $\exp(t) = e^t$ este un morfism de grupuri Lie, dacă pe $\mathbb{R}$ considerăm structura aditivă, iar pe $\mathbb{R}^*$ structura multiplicativă. Imaginea exponenţialei reale este intervalul $(0, \infty)$, care este un subgrup al lui $\mathbb{R}^*$ şi este, în acelaşi timp, o mulţime deschisă, deci e o subvarietate deschisă a lui $\mathbb{R}^*$. Cum exponenţiala este injectivă, ea este, de fapt, un izomorfism Lie între grupurile Lie $\mathbb{R}$ şi $(0, \infty)$. Inversa ei este, desigur, aplicaţia logaritmică, $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ care este, de asemenea, un morfism Lie.

c) Exponenţiala complexă $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $\exp(z) = e^z$ este, de asemenea, un morfism Lie. Exponenţiala complexă este surjectivă, dar nu este injectivă, aşadar în cazul ei nu putem defini o inversă univocă.

d) $\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $\varepsilon(t) = e^{2\pi i t}$ este un morfism de grupuri Lie, al cărui nucleu, după cum se poate verifica uşor, este mulţimea numerelor întregi, $\mathbb{Z}$.

e) Exemplul precedent se poate extinde la cazul unui tor, $\varepsilon_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$,

$$\varepsilon_n(t_1, \ldots, t_n) = \left(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}\right).$$

f) Determinantul $\det : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ este un morfism de grupuri Lie. Netezimea se poate verifica imediat (de fapt, $GL(n, \mathbb{R})$ este o submulţime deschisă în $\mathbb{R}^{n^2}$, iar determinantul este o aplicaţie polinomială, deci netedă). Faptul că este morfism de grupuri rezultă din faptul că determinatul unui produs de matrici este egal cu produsul determinanţilor matricilor.

g) Exemplul precedent se poate aplica şi la cazul complex.

CAPITOLUL 2

Partiţia unităţii

Reamintim că, dacă $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, atunci *suportul* lui f este mulţimea

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

Pentru construirea partiţiei unităţii avem nevoie de nişte funcţii speciale. Începem cu pregătirea acestor funcţii.

Lema 2.1. *Funcţia* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

este netedă.

Demonstraţie. În mod clar, singurul punct în care putem avea probleme este $t = 0$. Pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia este identic nulă, deci şi derivata sa există şi este identic nulă. Pentru a evalua derivata la dreapta în origine, este util să stabilim forma derivatelor funcţiei pe intervalul $(0, \infty)$. Afirmăm că derivata de ordinul i, cu $i \in \mathbb{N}$ a funcţiei f pe intervalul considerat este de forma

$$f^{(i)}(t) = \frac{P(t)}{t^k} e^{-1/t^2},$$

unde P este o funcţie polinomială, iar k este un număr natural. Vom demonstra prin inducţie această afirmaţie. Ea este, în mod evident, adevărată pentru cazul $i = 0$, caz în care P este funcţia identic egală cu 1, iar k este zero. Mai departe, presupunem afirmaţia adevărată pentru un i natural oarecare şi o demonstrăm pentru $i + 1$. Derivata de ordinul $i + 1$ se obţine, pur şi simplu, derivând derivata de ordinul i, deci obţinem că

$$f^{(i+1)}(t) = \frac{t^3 P'(t) - k t^2 P(t) + 2P(t)}{t^{k+3}} e^{-1/t^2}.$$

Cum expresia de la numărător de mai sus continuă să fie un polinom în t, iar $k + 3$ este, de asemenea, un număr natural, afirmaţia este demonstrată.

Vom demonstra acum netezimea funcţiei, utilizând, de asemenea, inducţia. Funcţia este, în mod evident, continuă, deci este de clasă C^0. Presupunem că este de clasă C^i şi demonstrăm că este de clasă C^{i+1}. Derivata la stânga de ordin $i + 1$ în origine este, în mod evident, egală cu zero. Pe de altă parte, derivata la dreapta este, conform definiţiei

$$f_h d^{i+1} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f^{(i)}(t) - f^i(0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{P(t)}{t^{k+1}} e^{-1/t^2} = 0.$$

■

Lema 2.2. *Există o funcţie netedă* $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ *astfel încât* $h(t) \equiv 1$ *pentru* $t \leq 1$, $0 < h(t) < 1$ *pentru* $1 < t < 2$ *şi* $h(t) \equiv 0$ *pentru* $t \geq 2$.

Demonstraţie. Fie f funcţia definită în lema 2.1. Punem

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

Numitorul este întotdeauna strict pozitiv pentru că pentru orice t real sau $2 - t$ sau $t - 1$ sunt strict pozitive. Pe de altă parte, f fiind o funcţie pozitivă, $f(t-1) \geq 0$, deci $0 \leq h(t) \leq 1$. Dacă $t \leq 1$, atunci $f(t-1) \equiv 0$, deci $h(t) \equiv 1$. Dacă $t \in (1, 2)$, atunci $f(2-t) > 0$, $f(t-1) > 0$, deci $0 < h(t) < 1$, iar dacă $t \geq 2$, atunci $f(2-t) \equiv 0$, deci $h(t) \equiv 0$. ■

Lema 2.3. *Există o funcţie netedă* $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ *astfel încât* $H \equiv 1$ *pe* $\overline{B_1(0)}$ *şi* supp $H = \overline{B_2(0)}$.

Demonstraţie. Punem $H(x) = h(\|x\|)$, unde h este funcţia definită în lema 2.2. Pe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ H este netedă, fiind o compunere de funcţii netede. Pe de altă parte, H este identic egală cu 1 pe $B_1(0)$, deci este netedă şi în origine. Celelalte proprietăţi rezultă imediat din proprietăţile funcţiei h. ■

Definiţie. O familie de mulţimi deschise $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ pe un spaţiu topologic X se numeşte *local finită* dacă fiecare punct $p \in X$ are o vecinătate care intersectează cel mult un număr finit de mulţimi U_α.

Lema 2.4. *Orice varietate topologică admite o acoperire local finită numărabilă cu mulţimi deschise relativ compacte.*

Demonstraţie. M are, în mod evident, o acoperire deschisă numărabilă relativ compactă (de exemplu contraimagini de bile euclidiene de raze raţionale şi cu centre în puncte de coordonate raţionale prin aplicaţii de coordonate) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Vom construi o altă acoperire deschisă,$\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, cu aceleaşi proprietăţi, astfel încât

$$\overline{V}_{j-1} \subset V_j, \quad \text{dacă} \quad j \geq 2. \tag{2.1}$$

Fie $V_1 = U_1$. Presupunem că mulţimile deschise relativ compacte V_j au fost deja construite pentru $j = 1, \ldots, k$, astfel încât $U_j \subset V_j$ şi să fie verificată condiţia (2.1). Deoarece $\overline{V}_k$ este compactă şi este acoperită de $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, există un $m_k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\overline{V}_k \subset U_1 \cup \ldots U_{m_k}$. Mărind, la nevoie, m_k, putem presupune că $m_k > k$. Fie $V_{k+1} = U_1 \cup \ldots U_{m_k}$. Atunci (2.1) este, în mod evident, verificată (pentru $j = k+1$), $U_{k+1} \subset V_{k+1}$ (deoarece $k + 1 \leq m_k$, U_{k+1} este una dintre mulţimile care formează V_{k+1}) iar mulţimea $\overline{V}_{k+1} = \overline{U}_1 \cup \cdots \cup \overline{U}_{m_k}$ este compactă. Deoarece $U_j \subset V_j$ pentru orice j, $V_{j\, j\in\mathbb{N}}$ este o acoperire numărabilă cu deschişi relativ compacţi a lui M.

Punem acum $W_j = V_i \setminus \overline{V}_{j-2}$. Deoarece $\overline{W}_j$ este o submulţime închisă a mulţimii compacte $\overline{V}_j$, ea însăşi este compactă. Dacă $p \in M$ este un punct arbitrar, atunci $p \in W_k$, unde k este cel mai mic întreg pentru care $p \in V_k$. W_k are o intersecţie nevidă numai cu W_{k-1} şi W_{k+1}, deci acoperirea $\{W_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ este local finită. ■

Definiţie. Fie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire a unui spaţiu topologic X. O altă acoperire $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ a lui X se numeşte *rafinare* a lui $\mathcal{U}$ dacă pentru orice $\beta \in B$ există un $\alpha \in A$ astfel încât $V_\beta \subset U_\alpha$. Un spaţiu topologic se numeşte *paracompact* dacă orice acoperire deschisă a sa admite o rafinare local finită.

Vom demonstra, în cele ce urmează, că orice varietate diferenţiabilă este un spaţiu topologic paracompact. Mai mult, vom arăta că pe o varietate orice acoperire deschisă admite o rafinare *regulară*: o acoperire deschisă $\{W_i\}$ a lui M este regulară dacă

(i) este numărabilă şi local finită;

(ii) pentru fiecare i există un difeomorfism $\psi_i : W_i \longrightarrow B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$;

(iii) familia $\{U_i\}$, cu $U_i = \psi^{-1}(B_1(0))$ este o acoperire a lui M.

Propoziţia 2.0.2. *Fie M o varietate diferenţiabilă. Atunci orice acoperire deschisă a lui M admite o rafinare regulară. În particular, M este paracompactă.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{X}$ o acoperire deschisă a lui M şi $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ o acoperire numărabilă, local finită a lui M, cu mulţimi deschise relativ compacte. Pentru orice $p \in M$, fie (W_p, ψ_p) o hartă de coordonate în jurul lui p astfel încât

- $\psi_p(W_p) = B_3(0)$;
- W_p este conţinută într-o submulţime deschisă din $\mathcal{X}$.
- dacă $p \in V_j$, atunci $W_p \subset V_j$.

Primele două condiţii se pot realiza fără probleme, în mod evident. Pentru cea de a treia se utilizează doar faptul că $\{V_j\}$ este local finită, deci p are o vecinătate care intersectează doar un număr finit de mulţimi V_j. Putem micşora această vecinătate astfel încât ea să intersecteze doar mulţimea V_j aleasă.

Punem acum $U_p = \psi_p^{-1}(B_1(0))$. Pentru fiecare k familia $\{U_p \mid p \in \overline{V}_k\}$ este o acoperire deschisă a lui $\overline{V}_k$. $\overline{V}_k$ fiind compactă, ea se poate acoperi cu un număr finit de mulţimi de acest tip, fie ele $U_{k,1}, \dots, U_{k,m(k)}$ şi fie $(W_{k,1}, \psi_{k,1}), \dots, (W_{k,m(k)}, \psi_{k,m(k)})$ hărţile corespunzătoare. Familia $\{W_{k,i}\}$, când k şi i variază, este o acoperire numărabilă care rafinează $\mathcal{X}$ şi verifică (ii) şi (iii). Mai rămâne de verificat doar că această acoperire este local finită.

Pentru orice k fixat, fiecare mulţime $W_{k,i}$ este conţinută într-un V_j astfel încât $\overline{V}_k \cap V_j \neq \emptyset$. Mulţimea compactă $\overline{V}_k$ este acoperită de un număr finit de mulţimi V_j, iar fiecare V_j intersectează cel mult un număr finit de acoperiri din aceeaşi acoperire, prin urmare există un număr finit de valori ale lui j pentru care $W_{k,i} \cap W_{j,i} \neq \emptyset$.Deoarece pentru fiecare j există numai un număr finit de mulţimi $W_{j,i}$, acoperirea construită este local finită. ■

Definiţie. Fie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o acoperire deschisă a unei varietăţi M. O *partiţie a unităţii subordonată acoperiri $\mathcal{U}$* este o familie de funcţii netede $\{\varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ astfel încât

(i) $0 \leq \varphi_\alpha(x)$, pentru orice $\alpha \in A$ şi orice $x \in M$;

(ii) $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ pentru orice $\alpha \in A$;

(iii) familia $\{\operatorname{supp}\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este local finită;

(iv) $\sum\limits_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(x) = 1$, pentru orice $x \in M$.

Observaţie. Suma din (iv) este finită pentru orice x datorită condiţiei (iii), prin urmare nu apar probleme de convergenţă.

Teorema 2.1. *Dacă M este o varietate netedă, şi $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este o acoperire deschisă oarecare a lui M, atunci pe M există o partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\mathcal{X}$.*

Demonstraţie. Fie $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ o rafinare regulară a lui $\mathcal{X}$. Pentru fiecare i, fie $\psi_i : W_i \longrightarrow B_3(0)$ difeomorfismul asigurat de definiţia rafinării regulare şi fie

$$U_i = \psi_i^{-1}(B_1(0))$$
$$V_i = \psi_i^{-1}(B_2(0))$$

Pentru fiecare i definim o funcţie $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_i = \begin{cases} H \circ \psi_i & \text{pe } W_i \\ 0 & \text{pe } M \setminus \overline{V}_i \end{cases},$$

cu H funcţia definită mai devreme (lema 2.3). Pe mulţimea $W_i \setminus \overline{V}_i$ (partea comună a domeniilor de definiţie de pe cele două ramuri), definiţiile dau aceeaşi valoare: zero, prin urmare f_i este bine definită şi netedă pe întregul domeniu de definiţie, iar supp $f_i \subset W_i$.

Definim acum $g_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum\limits_j f_j(x)}.$$

Deoarece familia $\{W_i\}$ este local finită, suma de la numitor are doar un număr finit de termeni nenuli în fiecare punct al lui M. Pe dealtă parte, suma este cel puţin egală cu 1, pentru că fiecare x se află într-o mulţime U_k, iar pe U_k avem $f_k(x) \equiv 1$, iar celelalte funcţii sunt, oricum, pozitive. Avem, aşadar, $0 \leq g_i(x) \leq 1$ pentru orice $x \in M$, iar $\sum\limits_i g_i(x) = 1$, de asemenea pentru orice $x \in M$.

Singura condiţie pe care, în general, funcţiile g_i nu o verifică este condiţia (ii), de aceea trebuie să mai prelucrăm puţin această familie de funcţii pentru a obţine o partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\mathcal{X}$. Este clar că pentru fiecare $i \in \mathbb{N}$ există un indice $a(i) \in A$ pentru care $W_i \in X_{a(i)}$ (deoarece acoperirea $\{W_i\}$ este o rafinare a acoperirii $\mathcal{X}$. Pentru fiecare $\alpha \in A$ definim acum o funcţie $\varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\varphi_\alpha = \sum_{a(i)=\alpha} g_i.$$

Familia de funcţii $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ este o partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\mathcal{X}$. Într-adevăr, funcţiile φ_α sunt, în mod evident, netede, iar $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$ pentru orice $\alpha \in A$ şi orice $x \in M$, supp $\varphi_\alpha \subset X_\alpha$ pentru orice $\alpha \in A$ şi, în plus, $\{\operatorname{supp}\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ rămâne local finită, iar $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha \equiv \sum\limits_i g_i \equiv 1$. ■

O aplicaţie imediată a partiţiei unităţii este construirea unei funcţii cu proprietăţi analoage funcţiei H din propoziţia 2.3, adică o funcţie egală cu 1 pe o mulţime închisă dată şi cu suportul inclus într-o anumită mulţime deschisă.

Corolarul 2.1. *Fie M o varietate netedă. Atunci pentru orice mulţime închisă $A \subset M$ şi orice mulţime deschisă $U \subset M$ care conţine A există o funcţie netedă $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ care este egală cu* 1 *pe A, iar* supp $f \subset U$.

Demonstraţie. Submulţimile deschise $U_0 = U$ şi $U_1 = M \setminus A$ formează, în mod evident, o acoperire deschisă a varietăţii M. Atunci, conform teoremei precedente, acestei acoperiri îi putem subordona o partiţie a unităţii $\{\varphi_0, \varphi_1\}$. Afirmăm că funcţia $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) varphi_0(x)$ îndeplineşte condiţiile din enunţ. Într-adevăr, conform definiţiei partiţiei unităţii, supp $f \subset U_0 = U$. Pe de altă parte, pe A avem $\varphi_1 \equiv 0$ şi cum partiţia este alcătuită doar din două funcţii, rezultă că $f|_A \equiv 1$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Partiţia unităţii se utilizează în mod special pentru construirea unor obiecte definite pe întreaga varietate, plecând de la obiecte definite pe diferite tipuri de submulţimi, de regulă deschise, dar nu întotdeauna. Un exemplu tipic este dat de următoarea teoremă de prelungire a unei aplicaţii netede.

Lema 2.5. *Fie M o varietate netedă, $A \subset M$ o submulţime închisă şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicaţie netedă. Atunci pentru orice submulţime deschisă U a lui M, cu $A \subset M$, există o aplicaţie netedă $\tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\tilde{f}\Big|_A = \tilde{f}\Big|_A$ şi, în plus,* supp $\tilde{f} \subset U$.

Demonstraţie. Faptul că aplicaţia f, definită, reamintim, pe o submulţime *închisă*, înseamnă următorul lucru: există o submulţime deschisă $W \subset M$, care conţine A, iar f este definită şi netedă pe această mulţime, relativ la structura de subvarietate deschisă a lui M existentă pe W. Putem presupune că această mulţime W este conţinută în U, în caz contrar o putem înlocui cu $W \cap U$. Aplicăm acum corolarul 2.1 pentru mulţimile A şi W. Fie φ o funcţie ce verifică proprietăţile din acest corolar referitor la mulţimile menţionate. Definim atunci funcţia $\tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(m) = \begin{cases} f(m)\cdot\varphi(m) & \text{dacă } m \in W \\ 0 & \text{dacă } m \in M \setminus \operatorname{supp}\varphi \end{cases}.$$

$\tilde{f}$ este, în mod clar, netedă, iar pe A coincide cu f, deoarece pe această mulţime φ este egală cu unitatea. În plus, supp $\tilde{f} \subset W \subset U$. ■

CAPITOLUL 3

Spaţiul tangent la o varietate diferenţiabilă

3.1 Spaţiul tangent la un spaţiu euclidian

Spaţiul tangent la $\mathbb{R}^n$ într-un punct $a \in \mathbb{R}^n$ este, prin definiţie, spaţiul $\mathbb{R}^n_a$ al vectorilor *legaţi* cu originea în punctul a. Mai precis,

$$\mathbb{R}^n_a = \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Un vector $(a, v) \in \mathbb{R}^n_a$ se va nota cu v_a sau $v|_a$, în cazul în care v însuşi are un alt indice. $\mathbb{R}^n_a$ are o structură naturală de spaţiu vectorial, indusă de cea din $\mathbb{R}^n$:

$$v_a + w_a \doteq (v + w)_a, \quad \text{pentru orice } \ v, w \in \mathbb{R}^n;$$
$$cv_a \doteq (cv)_a \quad \text{pentru orice } \ v \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

Este foarte simplu de verificat faptul că aceste două operaţii definesc, într-adevăr, o structură de spaţiu vectorial pe mulţimea $\mathbb{R}^n_a$. Acest spaţiu vectorial este, în fapt, canonic[1] izomorf cu $\mathbb{R}^n$, izomorfismul fiind

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n_a, \quad \psi(v) = v_a.$$

În ciuda acestui izomorfism, nu vom identifica, de regulă, spaţiile tangente la $\mathbb{R}^n$ în puncte distincte.

Vom numi, în cele ce urmează, spaţiul $\mathbb{R}^n_a$ *spaţiu tangent geometric* la $\mathbb{R}^n$ în a, pentru a-l distinge de un alt spaţiu tangent, care va fi construit în cele ce urmează.

Dacă M este o varietate netedă conţinută într-un spaţiu euclidian $\mathbb{R}^n$, atunci putem găsi o modalitate de a defini spaţiul tangent la M într-un punct $a \in M \subset \mathbb{R}^n$ ca subspaţiu al lui $\mathbb{R}^n_a$. De exemplu, dacă S^{n-1} este sfera unitate cu centrul în origine din $\mathbb{R}^n$, atunci spaţiul tangent la sferă într-un punct $a \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ se poate defini ca fiind subspaţiul lui $\mathbb{R}^n_a$ format din vectorii ortogonali la raza vectoare a lui a. Mai precis, raza vectoare $\mathbf{r}$ a punctului a (adică vectorul legat cu originea în originea lui $\mathbb{R}^n$ şi cu extremitatea în punctul a) este un element lui $\mathbb{R}^n_0$. Ea se transportă în $\mathbb{R}^n_a$ prin compunerea de izomorfisme $\mathbb{R}^n_0 \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n_a$. De asemenea, produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^n$, $\langle , \rangle$, defineşte un produs scalar $\langle , \rangle_a$ pe $\mathbb{R}^n_a$:

$$\langle v_a, w_a \rangle_a \doteq \langle v, w \rangle \quad \text{pentru orice } \ v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci, dacă notăm cu $\mathbf{r}_a$ imaginea lui $\mathbf{r}$ în $\mathbb{R}^n_a$, spaţiul tangent la sfera S^{n-1} în a este

$$T_a S^{n-1} \doteq \{v_a \in \mathbb{R}^n_a \mid \langle v_a, \mathbf{r}_a \rangle_a = 0\}.$$

[1] În acest context, izomorfismul este "canonic" pentru că nu depinde de fixarea unor baze în cele două spaţii vectoriale.

Definiţia geometrică a spaţiului tangent nu poate fi extinsă la o varietate diferenţiabilă oarecare, care nu poate fi privită, pe moment cel puţin, ca o submulţime a unui spaţiu euclidian, prin urmare, nu avem la îndemână un set de vectori deja definiţi din care să selectăm vectorii care sunt tangenţi la varietate. Pentru a putea găsi o generalizare, însăşi definiţia vectorului tangent la un spaţiu euclidian trebuie înlocuită cu alta, care să utilizeze doar obiectele pe care la avem la îndemână şi pe varietăţi arbitrare: puncte, mulţimi deschise, funcţii netede.

Ne amintim din analiză că pentru orice vector tangent geometric $v_a \in \mathbb{R}^n_a$ se poate defini o aplicaţie (derivata Gâteaux sau derivata după o direcţie) $\overline{v}_a : C^\infty\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\overline{v}_a f \stackrel{not}{=} D_v f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a+tv) = \langle \text{grad } f|_a, v_a\rangle_a. \tag{3.1}$$

Această aplicaţie este, în mod evident, liniară şi satisface regula lui Leibniz:

$$\overline{v}_a(fg) = f(a)\overline{v}_a(g) + g(a)\overline{v}_a(f).$$

Dacă în raport cu baza indusă de baza canonică $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ a lui $\mathbb{R}^n$, v_a se scrie $v_a = v^i e_i|_a$ (se utilizează regula de însumare a lui Einstein), atunci operatorul $\overline{v}_a$ va avea reprezentarea

$$\overline{v}_a(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

Definiţie. O aplicaţie liniară $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *derivare* în $a \in \mathbb{R}^n$ dacă ea verifică regula lui Leibniz:

$$X(fg) = f(a)X(g) + g(a)X(f). \tag{3.2}$$

Notăm cu $T_a(\mathbb{R}^n)$ mulţimea tuturor derivărilor lui $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ în a. Este clar că $T_a(\mathbb{R}^n)$ este un spaţiu vectorial în raport cu operaţiile

$$(X+Y)(f) \doteq Xf + Yf$$
$$(cX)f = c(Xf),$$

pentru orice $X, Y \in T_a(\mathbb{R}^n)$ şi orice $c \in \mathbb{R}$. Toţi operatorii $\overline{v}_a$ aparţin, în mod evident, acestui spaţiu. Vom vedea că, de fapt, $T_a(\mathbb{R}^n)$ conţine *numai* aceşti operatori. Demonstrăm mai întâi o lemă tehnică foarte simplă, dar care va fi utilă în cele ce urmează.

Lema 3.1. *Fie $a \in \mathbb{R}^n$ şi $X \in T_a(\mathbb{R}^n)$.*

(i) Dacă f este o funcţie constantă, atunci $Xf = 0$.

(ii) Dacă $f(a) = g(a) = 0$, atunci $X(fg) = 0$.

Demonstraţie. (i) Este suficient să facem demonstraţia pentru cazul particular în care f este identic egală cu 1, pentru că rezultatul general se va obţine apoi din omogenitatea lui X. Fie, deci $f \equiv 1$. Atunci, din regula lui Leibniz, obţinem,

$$X(f) = X(ff) = f(a)Xf + f(a)Xf = 2Xf,$$

de unde rezultă că $Xf = 0$.

(ii) Rezultă imediat din regula lui Leibniz. ■

Suntem gata acum să formulăm rezultatul promis:

Propoziţia 3.1.1. *Pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$, aplicaţia*

$$\theta_a : \mathbb{R}^n_a \longrightarrow T_a(\mathbb{R}^n), \quad \theta(v_a) = \overline{v}_a$$

este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Demonstraţie. Liniaritatea lui θ_a este imediată. Vom demonstra, mai întâi, injectivitatea. În acest scop, vom demonstra că nucleul aplicaţiei este subspaţiul nul. Presupunem că $\overline{v}_a$ este derivarea nulă. Fie $v_a = v^i e_i|_a$ expresia lui v_a relativ la baza indusă de baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Presupunem că f este una dintre funcţiile de coordonate, $x^j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Atunci[2]

$$0 = \overline{v}_a(x^j) = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)\right|_a = v^i \delta_i^j = v^j.$$

Prin urmare, j fiind ales la întâmplare, toate componentele lui v_a sunt egale cu zero, deci v_a însuşi trebuie să fie egal cu zero. Din nou, v_a fiind un element oarecare al nucleului lui θ, de aici rezultă că acest nucleu este nul.

Pentru surjectivitate, fie $X \in T_a(\mathbb{R}^n)$ o derivare oarecare. Definim numerele reale $v^1, \ldots, v^n$ prin

$$v^i = X(x^i).$$

Vom arăta că $X = \overline{v}_a$, unde $v_a = v^i e_i|_a$. Fie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Din formula lui Taylor cu rest rezultă că există funcţiile $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ astfel încât $g_i(a) = 0$ şi

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - a^i) + g_i(x) \cdot (x^i - a^i). \tag{3.3}$$

Aplicând vectorul X acestei relaţii, obţinem

$$\begin{aligned} Xf &= \underbrace{X(f(a))}_{=0} + X\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - a^i)\right) + X\left(g_i(x) \cdot (x^i - a^i)\right) = \\ &= \frac{\partial x}{\partial x^i}(a)\underbrace{X(x^i)}_{=v^i} + \underbrace{g_i(a)}_{=0} X(x^i) + \underbrace{\left.(x^i - a^i)\right|_{x=a}}_{=0} Xg_i = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v^i = \overline{v}_a f. \end{aligned}$$

Prin urmare, $X = \overline{v}_a$. ∎

Corolarul 3.1. *Pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$ operatorii de derivare parţială*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_a,$$

definiţi prin

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a), \quad i = \overline{1,n},$$

formează o bază a lui $T_a\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Din demonstraţia propoziţiei precedente rezultă imediat că avem

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a = \theta_a(e_i|_a), \quad i = \overline{1,n},$$

unde $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$, iar cum imaginea unei baze printr-un izomorfism este tot o bază, demonstraţia este încheiată. ∎

[2]Aici şi în cele ce urmează vom utiliza *convenţia de însumare a lui Einstein*: dacă într-un monom un indice se repetă, o dată în poziţie superioară şi o dată în poziţie inferioară, atunci se însumează după toate valorile admisibile ale acelui indice.

3.2 Spaţiul tangent la o varietate

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă şi $p \in M$ un punct oarecare. O aplicaţie liniară $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *derivare în* p dacă ea verifică identitatea lui Leibniz

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$$

pentru orice funcţii $f, g \in C^\infty(M)$.

Este uşor de constatat că orice combinaţie liniară cu coeficienţi reali a două derivări este, de asemenea, o derivare, deci mulţimea derivărilor într-un punct al unei varietăţi diferenţiabile este un subspaţiu al spaţiului funcţionalelor liniare pe $C^\infty(M)$, deci este, în particular, un spaţiu vectorial.

Definiţie. Se numeşte *spaţiu tangent* într-un punct $p \in M$ la o varietate diferenţiabilă M şi se notează cu T_pM spaţiul vectorial al derivărilor lui $C^\infty(M)$ în punctul p, iar un element al acestui spaţiu vectorial se numeşte *vector tangent la* M *în punctul* p.

Observaţie. Este demn de remarcat că deocamdată ştim despre spaţiul tangent într-un punct la o varietate doar că este un spaţiu vectorial, un subspaţiu al spaţiului dual al spaţiului funcţiilor netede pe varietate. Nu este deloc evident, cel puţin pe moment, că acest spaţiu este finit dimensional şi că dimensiunea lui coincide cu dimensiunea varietăţii, aşa după cum ne-am aştepta. Vom demonstra mai târziu că acest lucru se întâmplă, într-adevăr.

Ca şi în cazul vectorilor tangenţi la un spaţiu euclidian, se poate demonstra că are loc următorul rezultat

Lema 3.2. *Dacă M este o varietate diferenţiabilă, $p \in M$ şi $X \in T_pM$, atunci:*

a) Dacă f este o funcţie constantă, atunci $Xf = 0$.

b) Dacă $f(p) = g(p) = 0$, atunci $X(fg) = 0$.

3.3 Aplicaţia tangentă într-un punct a unei aplicaţii diferenţiabile

Fie M, N două varietăţi netede şi $F : M \longrightarrow N$ o aplicaţie diferenţiabilă. Pentru fiecare $p \in M$ definim aplicaţia $F_{*,p} \equiv T_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}M$ prin

$$(F_{*,p}X)(f) = X(f \circ F)$$

pentru orice $f \in C^\infty(N)$. Să ne convingem că aplicaţia $F_{*,p}$ este, într-adevăr, bine definită, cu alte cuvinte, dacă $X \in T_pM$, atunci $F_{*,p}X \in T_{F(p)}N$. Este clar că dacă $f, g \in C^\infty(M)$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci

$$(\alpha f + \beta g) \circ F = \alpha(f \circ F) + \beta(g \circ F),$$

iar din liniaritatea lui X rezultă, atunci, şi liniaritatea lui $F_{*,p}X$. După cum vom vedea, acest operator liniar verifică şi regula lui Leibniz în $F(p)$. Într-adevăr, fie $f, g \in C^\infty(M)$. Atunci

$$\begin{aligned}(F_{*,p}X)(fg) = X((fg) \circ F) = X((f \circ F) \cdot (g \circ F)) = (f \circ F)(p) \cdot X(g \circ F)+\\ + (g \circ F)(p) \cdot X(f \circ F) = f(F(p)) \cdot (F_{*,p}X)(g)+\\ + g(F(p)) \cdot (F_{*,p}X)(f).\end{aligned}$$

Proprietăţile aplicaţiei tangente, sunt rezumate în următoarea lemă, a cărei demonstraţie este lăsată în grija cititorului.

Lema 3.3. *Fie $F : M \longrightarrow N$ şi $G : N \longrightarrow P$ două aplicaţii netede între varietăţi şi $p \in M$. Atunci*

a) $F_{*,p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ este o aplicaţie liniară.

b) $(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p} : T_pM \longrightarrow T_{G(F(p))}P.$

c) $(Id_M)_{*,p} = Id_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_pM.$

d) Dacă F este un difeomorfism, atunci $F_{*,p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Pentru a calcula valoarea unui vector tangent pentru o funcţie $f \in C^\infty(M)$ nu trebuie să cunoaştem valorile funcţiei pe întreaga varietate, ci doar pe o vecinătate a punctului p. Ne vom referi la această proprietate spunând că noţiunea de vector tangent este *locală*. Într-adevăr, avem

Propoziţia 3.3.1. *Fie M o varietate netedă, $p \in M$ şi $X \in T_pM$. Dacă $f, g \in C^\infty(M)$, $U \subset M$ este o vecinătate deschisă a lui p, iar $f|_U = g|_U$, atunci $Xf = Xg$.*

Demonstraţie. Punem $h = f - g$. Utilizând liniaritatea lui X, este suficient să demonstrăm că $Xh = 0$ dacă h se anulează pe o vecinătate U a lui p. Fie A mulţimea (închisă) $A = M \setminus U$. Din lema de prelungire, există o funcţie $u \in C^\infty(M)$, egală cu 1 pe A, cu suportul inclus în $M \setminus \{p\}$. Deoarece $u \equiv 1$ pe suportul lui h, produsul $h \cdot u$ este identic egal cu h. Aplicăm acum regula lui Leibniz:

$$Xh = X(hu) = \underbrace{h(p)}_{=0} \cdot X(u) + \underbrace{u(p)}_{=0} \cdot X(h) = 0.$$

■

Observaţie. Rezultatul de mai sus ne conduce la o altă descriere, echivalentă, a spaţiului tangent într-un punct la o varietate diferenţiabilă. Procedăm în modul următor. Fie $p \in M$ şi $\mathcal{F}(p)$ mulţimea de funcţii

$$\{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid U \text{ este o vecinătate a lui } p,\ f \text{ este netedă}\}.$$

Definim pe $\mathcal{F}(p)$ o relaţie de echivalenţă. Două perechi (U, f) şi (V, g) vor fi numite echivalente: $(U, f) \sim (V, g)$ dacă există o vecinătate W a lui p, $W \subset U \cap V$, astfel încât să avem $f|_W = g|_W$. Notăm cu $\mathcal{F}_p(M)$ mulţimea factor, care are o structură naturală de algebră, indusă de structura de algebră pe $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M)$. Această algebră se numeşte *algebra germenilor de funcţii netede în p*. Se poate demonstra (faceţi asta!) că spaţiul tangent T_pM este izomorf cu spaţiul vectorial al derivărilor algberei $\mathcal{F}_p(M)$.

Propoziţia 3.3.2. *Fie M o varietate netedă, $U \subset M$ o subvarietate deschisă a sa şi $i : U \hookrightarrow M$ – incluziunea. Atunci pentru orice $p \in U$ aplicaţia tangentă $i_{*,p} : T_pU \longrightarrow T_pM$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.*

Demonstraţie. Fie $p \in M$ şi B o vecinătate a sa astfel încât $\overline{B} \subset U$. Presupunem că $X \in T_pM$ şi $i_{*,p}X = 0 \in T_pM$. Dacă $f \in C^\infty(U)$ este o funcţie oarecare, teorema de prelungire garantează existenţa unei funcţii $\overline{f} \in C^\infty(M)$ astfel încât $\overline{f} \equiv f$ pe $\overline{B}$. Atunci, din propoziţia precedentă,

$$Xf = X\left(\overline{f}\Big|_U\right) = X(\overline{f} \circ i) = (i_{*,p}X)(\overline{f}) = 0.$$

Deoarece funcţia f este arbitrară, rezultă că $X = 0$, adică $i_{*,p}$ este injectivă.

Fie acum $Y \in T_pM$ un vector tangent oarecare. Definim un operator $X : C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $Xf = Y\overline{f}$, unde $\overline{f} \in C^\infty(M)$ coincide cu f pe $\overline{B}$. Atunci, pe baza teoremei de localitate, Xf nu depinde de alegera lui $\overline{f}$, deci X este bine definit. Liniaritatea şi proprietatea lui Leibniz pentru X rezultă din proprietăţile lui Y, deci X este un vector tangent din T_pM. Fie acum $g \in C^\infty(M)$ o funcţie netedă oarecare. Avem atunci

$$(i_{*,p}X)g = X(g \circ i) = Y(\overline{g \circ i}) = Yg,$$

unde ultima egalitate rezultă din faptul că $\overline{g \circ i}$ coincide cu g pe $\overline{B}$. Prin urmare, aplicaţia $i_{*,p}$ este şi surjectivă, adică este un izomorfism liniar. ■

Pe baza acestui izomorfism, vom identifica T_pU cu T_pM de fiecare dată când U este o subvarietate deschisă a lui M.

Suntem gata să demonstrăm acum un rezultat foarte important, şi anume că spaţiul tangent într-un punct la o varietate este finit dimensional, iar dimensiunea sa este egală cu dimensiunea varietăţii.

Propoziţia 3.3.3. *Dacă M este o varietate diferenţiabilă de dimensiune n, iar $p \in M$, atunci* $\dim T_pM = n = \dim M$.

Demonstraţie. Fie (U, φ) o hartă în jurul lui p. Atunci $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ este un difeomorfism, deci, după cum am văzut,

$$\varphi_{*,p} : T_pU \longrightarrow T_\varphi(p)\varphi(U)$$

este un izomorfism liniar. Pe de altă parte, utilizând propoziţia precedentă, $T_pU \cong T_pM$, iar $T_{\varphi(p)}\varphi(U) \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$, deci, în final, $T_pM \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$, izomorfismul fiind, dacă facem abstracţie de identificările bazate pe propoziţia precedentă, chiar $\varphi_{*,p}$. ■

Observaţie. Trebuie remarcat că identificările bazate pe propoziţia 3.3.2 şi izomorfismele bazate pe propoziţia 3.3.3, care stabilesc o legătură între spaţiul tangent la un spaţiu euclidian şi spaţiul tangent la o varietate nu sunt de acelaşi tip. Atunci când identificăm spaţiul tangent la o subvarietate deschisă cu spaţiul tangent în acelaşi punct la varietatea ambientă, identificarea depinde doar de incluziune, deci de subvarietatea însăşi, pe când pentru a stabili un izomorfism cu spaţiul tangent la un spaţiu euclidian trebuie să fixăm întâi o hartă, cu alte cuvinte, izomorfismul nu este canonic. El este însă suficient pentru a stabili dimensiunea spaţiului tangent şi, după cum vom vedea, ne va permite să introducem o bază asociată în mod canonic unei baze a spaţiului euclidian pe care se modelează varietatea.

După cum am văzut, derivările în direcţia vectorilor bazei canonice a spaţiului tangent într-un punct la un spatiu euclidian formează o bază a acestui spaţiu tangent. Aceste derivări sunt, de fapt, chiar operatorii de derivare parţială în raport cu coordonatele. După cum vom vedea imediat, izomorfismul stabilit în propoziţia precedentă ne va permite să introducem o bază analoagă, legată de o hartă locală, şi în spaţiul tangent într-un punct la o vartietate diferenţiabilă oarecare. Într-adevăr, avem

Propoziţia 3.3.4. *Fie M o varietate diferenţiabilă, $p \in M$ şi (U, φ) o hartă în jurul lui p. Atunci familia de vectori tangenţi*

$$\left\{ (\varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right) \right\}_{1 \le i \le n} \overset{not}{=} \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right\}_{1 \le i \le n}$$

formează o bază a spaţiului tangent T_p, numită baza canonică *asociată sistemului de coordonate (hărţii) considerate.*

Demonstraţie. Demonstraţia este imediată, în virtutea faptului că aplicaţia $\left(\varphi^{-1}\right)_{*\varphi(p)}$ este un izomorfism, iar un izomorfism de spaţii vectoriale duce o bază într-o bază. ■

Să vedem acum cum anume acţionează baza canonică a spaţiului tangent într-un punct la o varietate asupra unei funcţii netede. Înainte de toate, remarcăm că este mai comod să considerăm că vectorii bazei canonice sunt derivări ale algebrei $C^\infty(U)$ mai degrabă decât ale algebrei $C^\infty(M)$, deşi, după cum am văzut, din teorema de localitate rezultă că valoarea unui vector tangent, care este definit pe $C^\infty(M)$, este, determinată, în fond, de valorile funcţiilor pe o vecinătate oarecare (oricât de mică) a punctului considerat.

Fie, deci, $f \in C^\infty(U)$ şi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Atunci avem

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) = \frac{\partial f_\varphi}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

Prin urmare, *acţiunea lui $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ asupra unei funcţii netede f este derivata parţială în raport cu coordonata x^i a reprezentării locale a lui f în harta* (U, φ), *calculată în punctul* $\varphi(p)$.

Orice vector tangent în p la varietatea M se poate descompune în funcţie de vectorii bazei canonice asociate unei hărţi locale (U, φ) în jurul punctului p:

$$X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Componentele X^i ale unui vector tangent relativ la baza canonică asociată unui sistem de coordonate se numesc *componente ale vectorului în harta* (U, φ), pentru a evidenţia faptul că aceste componente se referă la baza canonică şi nu la o altă bază, oarecare, a spaţiului tangent în p la varietate.

3.3.1 Expresia aplicaţiei tangente a a unei aplicaţii netede în coordonate locale

Aplicaţia tangentă (diferenţiala) într-un punct a unei aplicaţii netede între varietăţi diferenţiabile nu este altceva decât o generalizare naturală a noţiunii de diferenţială într-un punct a unei aplicaţii diferenţiabile între deschişi din spaţii euclidiene, la care se reduce în cazul particular în care varietăţile în cauză sunt deschişi din spaţii euclidiene, priviţi ca subvarietăţi deschise ale spaţiilor euclidiene respective.

Ca să ne convingem de aceasta, să considerăm, pentru început, doi deschişi $U \subset \mathbb{R}^n$ şi $V \subset \mathbb{R}^m$ şi o aplicaţie netedă $F : U \longrightarrow V$. U şi V se consideră, fiecare, ca subvarietăţi deschise ale spaţiilor euclidiene respective, având, prin urmare, atlase formate din câte o singură hartă, dată de aplicaţia identică. Fie $p \in U$. Vrem să determinăm expresia în coordonate a aplicaţiei tangente

$$F_{*p} : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m.$$

Menţionăm că am utilizat aici izomorfismele canonice $T_pU \cong T_p\mathbb{R}^n$ şi $T_{F(p)}V \cong T_{F(p)}\mathbb{R}^m$. Prin *expresie în coordonate locale* a aplicaţie tangente înţelegem exprimarea acestei aplicaţii în raport cu bazele canonice asociate celor două hărţi, adică matricea aplicaţiei tangente în raport cu cele două baze canonice.

Notăm cu $(x^1, \ldots, x^n)$ coordonatele pe U şi cu $(y^1, \ldots, y^m)$ coordonatele pe V.

Avem, prin urmare,, pentru un $f \in C^\infty(U)$ şi un $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\left(F_{*p}\left.\frac{\partial}{x^i}\right|_p\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ F) = \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x^i}(p) = \\
&= \frac{\partial f\left(F^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, F^m(x^1, \ldots, x^n)\right)}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \cdot \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) = \\
&= \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}\right) f.
\end{aligned}$$

Aşadar

$$F_{*p}\left.\frac{\partial}{x^i}\right|_p = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)},$$

de unde rezultă că matricea aplicaţiei tangente în bazele canonice este

$$\left[F_{*p}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix},$$

adică este tocmai matricea Jacobi $JF(p)$ a aplicaţiei F în punctul p. Cum, după cum se ştie din analiza matematică, şi diferenţiala Frechet a aplicaţiei F în p are aceeaşi matrice, rezultă că aplicaţia tangentă F_{*p} se poate identifica cu diferenţiala Frechet $dF(p)$.

Din întreaga filozofie a varietăţilor diferenţiabile şi, în particular, a funcţiilor netede pe o varietate, ne putem aştepta ca aplicaţia tangentă într-un punct la o aplicaţie netedă între două varietăţi netede oarecare să se poată exprima cu ajutorul matricii Jacobi a reprezentării locale într-o pereche de hărţi a aplicaţiei respective. Chiar aşa stau lucrurile în realitate, după cum vom vedea din cele ce urmează.

Fie, deci, $F : M \longrightarrow N$ o aplicaţie netedă între două varietăţi diferenţiabile şi $p \in M$ un punct oarecare. Alegem hărţile (U, φ) pe M în jurul lui p, respectiv (V, ψ) pe N, în jurul lui $F(p)$, astfel încât $F(U) \subset V$.

Faţă de această pereche de hărţi, reprezentarea locală a lui F va fi

$$F_{\varphi\psi} \equiv \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V).$$

Dacă $i \in \{1, \dots, n\}$, iar $f \in C^\infty(U)$, atunci

$$\begin{aligned}\left(F_{*p} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ F) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ F \circ \psi^{-1}) = \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} ((f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (f_\psi \circ F_{\varphi\psi}) = \\ = \frac{\partial (f_\psi \circ F_{\varphi\psi})}{\partial x^i}(\varphi(p)) &= \frac{\partial f_\psi \left(F^1_{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^n), \dots, F^m_{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^n)\right)}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \\ &= \frac{\partial f_\psi}{\partial y^j}(F_{\varphi\psi}(\varphi(p))) \cdot \frac{\partial F^j_{\varphi\psi}}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial F^j_{\varphi\psi}}{\partial x^i}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}\right) f,\end{aligned}$$

unde $(x^1, \dots, x^n)$ sunt coordonatele în harta (U, φ), iar $(y^1, \dots, y^m)$ sunt coordonatele în harta (V, ψ). Aşadar, matricea aplicaţiei tangente F_{*p} în perechea de hărţi (U, φ), (V, ψ) este chiar matricea Jacobi $JF_{\varphi\psi}(\varphi(p))$ a reprezentării locale a lui F în această pereche de hărţi, calculată în punctul $\varphi(p)$.

3.3.2 Schimbări de coordonate

De multe ori este util să înlocuim un sistem de coordonate (o hartă) cu un alt sistem de coordonate (hartă). În astfel de situaţii, este necesar să avem la îndemână formule care să stabilească legătura dintre componentele unui vector într-o hartă şi componentele sale în cealaltă hartă.

Fie (U, φ) şi (V, ψ) două hărţi pe o varietate diferenţiabilă M şi $p \in U \cap V$ un punct al varietăţii. Notăm coordonatele în harta U, respectiv în harta V, cu x^i, respectiv $\bar{x}^i$. Un vector tangent $X \in T_pM$ se poate exprima în raport cu oricare dintre bazele canonice $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$ sau $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right|_p \right\}$.

Fie $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ schimbarea de hartă. Atunci, conform paragrafului precedent,

$$(\psi \circ \varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_{\psi(p)}.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\underline{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p} &= (\varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = (\psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))_{*\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = \\ = (\psi^{-1})_{*\psi(p)} &\left((\psi \circ \varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) = (\psi^{-1})_{*\psi(p)} \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_{\psi(p)}\right) = \\ &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot (\psi^{-1})_{*\psi(p)} \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_{\psi(p)} = \underline{\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p}.\end{aligned}$$

Am găsit, deci, în primă instanţă, formula pentru transformarea vectorilor bazei, la o schimbare de hartă:

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p.}$$

Fie, acum $X \in T_p M$ un vector tangent oarecare. Notăm cu X^i componentele sale faţă de harta (U, φ) şi cu $\overline{X}^i$ componentele în harta (V, ψ). Avem

$$X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = X^i \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p \equiv \overline{X}^j \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p.$$

Din ultima egalitate de mai sus rezultă imediat legea de transformare a coordonatelor unui vector la o schimbare de hartă:

$$\boxed{\overline{X}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot X^i}$$

sau, scrisă invers,

$$\boxed{X^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}(\psi(p)) \cdot \overline{X}^j.}$$

Observaţie. Se poate constata, din cele stabilite mai sus, că matricea utilizată pentru transformarea componentelor unui vector la o schimbare de hartă este inversa matricii utilizate pentru schimbarea elementelor bazei canonice a spaţiului tangent. Din acest motiv, în special în cărţile mai vechi, vectorii tangenţi la o varietate se mai numesc *vectori contravarianţi*.

3.3.3 O altă definiţie a spaţiului tangent

Fie $I \subset M$ un interval deschis. Se numeşte *drum* sau *curbă parametrizată* pe M o aplicaţie netedă $\gamma : I \longrightarrow M$, unde I este privit ca o subvarietate deschisă a lui $\mathbb{R}$, cu structura diferenţiabilă standard. Dacă M ar fi o submulţime a unui spaţiu euclidian, am putea defini vectorul tangent la γ în $\gamma(t_0)$, pentru un $t_0 \in I$, ca fiind $\gamma'(t_0)$, vectorul ale cărui componente sunt derivatele componentelor lui γ în t_0. În acest caz, în spaţiul ambient, există deja vectori şi tot ceea ce avem de făcut este să-l *selecţionăm* pe acela care este tangent la curbă. În cazul unei varietăţi oarecare, problema este tocmai abesenţa vectorilor. O idee foarte tentantă pentru definirea unui vector tangent la γ într-un punct $p = \gamma(t_0)$, $t_0 \in I$ ar putea fi următoarea: alegem o hartă (U, φ) pe M în jurul lui p şi considerăm aplicaţia (evident, netedă) $\varphi \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, care este o curbă pe $\mathbb{R}^n$. Definim vectorul tangent în p la γ ca fiind vectorul tangent în $\varphi(p)$ la $\varphi \circ \gamma$.

Problema cu o astfel de definiţie este că ea nu este "geometrică", în sensul că depinde de alegerea hărţii în jurul punctului p. Dacă alegem o altă hartă (V, ψ), atunci, în general, curbele $\varphi \circ \gamma$ şi $\psi \circ \gamma$ nu au acelaşi vector tangent în $\varphi(p)$, respectiv $\psi(p)$. Vom vedea, însă, în cele ce urmează, că acest defect se poate elimina cu puţină atenţie. Presupunem, pentru simplificarea notaţiilor, că $0 \in I$ şi că $p = \gamma(0)$. Atunci vectorul tangent în origine la $\varphi \circ \gamma$ va fi

$$\mathbf{u} = \left.\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)\right|_{t=0} = d_0(\varphi \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt}\right).$$

Notăm acest vector cu $(\varphi, d_0(\varphi\gamma))$. Considerăm o altă hartă, (V, ψ), în jurul punctului p. Ne interesează legătura dintre vectorii $(\varphi, d_0(\varphi\gamma))$ şi $(\psi, d_0(\psi\gamma))$. Avem

$$\begin{aligned}
d_0(\psi\gamma)\left(\frac{d}{dt}\right) &= \left.\frac{d}{dt}(\psi\gamma)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(\psi \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \gamma)\right|_{t=0} = \\
&= \left.\frac{d}{dt}((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))\right|_{t=0} = d_{\varphi(\gamma(0))}(\psi\varphi^{-1}) d_0(\varphi\gamma)\left(\frac{d}{dt}\right) = \\
&= d_{\varphi)p}(\psi\varphi^{-1}) d_0(\varphi\gamma)\left(\frac{d}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Ideea este acum să considerăm că un vector tangent la γ nu este doar un vector din $\mathbb{R}^n$, ci o clasă întreagă, câte unul pentru fiecare hartă în jurul lui p, astfel încât "reprezentanţii" vectorului în fiecare hartă să fie legaţi printr-o relaţie ca cea pe care tocmai am stabilit-o. Fie, deci, $p \in M$. Considerăm mulţimea

$$A_pM = \{(\varphi, \mathbf{u}) \mid (U, \varphi) - \text{hartă în jurul lui } p, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

Definim pe A_pM o relaţie de echivalenţă

$$(\varphi, \mathbf{u}) \sim (\psi, \mathbf{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = d_{\varphi(p)}(\psi\varphi^{-1})(\mathbf{u}).$$

Este clar că relaţia astfel definită este, într-adevăr, o relaţie de echivalenţă. Vom numi *vector tangent geometric* la M în p o clasă de echivalenţă $[\varphi, \mathbf{u}]$ în raport cu relaţia $\sim$, iar mulţimea vectorilor tangenţi geometric la M în p o cvom nota cu G_pM şi o vom numi *spaţiu tangent geometric* la M în p. Componentele lui $\mathbf{u}$ în baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ se numesc *componentele* vectorului tangent $[\varphi, \mathbf{u}]$ în harta (U, φ).

În cazul spaţiului T_pM, al derivărilor algebrei $C^\infty(M)$ în punctul p, structura de spaţiu vectorial a venit în mod natural, fiind indusă de structura de spaţiu vectorial pe $\mathbb{R}$. În cazul spaţiului tangent geometric lucrurile sunt puţin diferite, deci trebuie adoptată o tactică diferită pentru introducerea structurii de spaţiu vectorial. Fie (U, φ) o hartă în jurul punctului $p \in M$. Definim o aplicaţie $\theta_\varphi : \mathbb{R}^n \to G_pM$, punând

$$\theta_\varphi(\mathbf{u}) = [\varphi, \mathbf{u}].$$

Demonstrăm mai întâi că această aplicaţie este o bijecţie. Fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $\theta_\varphi(\mathbf{u}) = \theta_\varphi(v)$, adică $[\varphi, \mathbf{u}] = [\varphi, \mathbf{v}]$. Dar, din definiţia relaţiei de echivalenţă, avem atunci

$$\mathbf{v} = d_{\varphi(p)}(\varphi \circ \varphi^{-1})(\mathbf{u}) = d_{\varphi(p)}(1_{\varphi(U)})(\mathbf{u}) = 1_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{u}) = \mathbf{u},$$

adică θ_φ este injectivă. Pe de altă parte, dacă $[\psi, \mathbf{v}] \in G_pM$, atunci vectorul $\mathbf{u} = d_{\psi(p)}(\varphi\psi^{-1})(\mathbf{v})$ are proprietatea că

$$\theta_\varphi(\mathbf{u}) = [\varphi, \mathbf{u}] = [\psi, d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})d_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1})(\mathbf{v})] = [\psi, \mathbf{v}],$$

deci θ_φ este, de asemenea, surjectivă.

θ_φ ne permite să introducem pe G_pM o structură de spaţiu vectorial astfel încât θ_φ să fie un izomorfism liniar. Este clar că această structură este unică. Operaţiile de spaţiu vectorial se pot defini doar în modul următor

$$[\varphi, \mathbf{u}] + [\varphi, \mathbf{v}] \equiv \theta_\varphi(\mathbf{u}) + \theta_\varphi(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \equiv [\varphi, \mathbf{u} + \mathbf{v}],$$
$$\lambda[\varphi, \mathbf{u}] \equiv \lambda\theta_\varphi(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_\varphi(\lambda\mathbf{u}) \equiv [\varphi, \lambda\mathbf{u}],$$

pentru orice vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ şi orice scalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

În ciuda aparenţelor, structura de spaţiu vectorial pe G_pM nu depinde de alegerea hărţii (U, φ). Spre a ne convinge de aceasta, este suficient să demonstrăm că, dacă (V, ψ) este o altă hartă pe M în jurul lui p, atunci aplicaţia θ_ψ definită în mod analog, este liniară. Avem, prin urmare,

$$\theta_\psi(\mathbf{v}) = [\psi, \mathbf{v}] = [\varphi, d_{\psi(p)}(\varphi\psi^{-1})(\mathbf{v})] = \theta_\varphi(d_{\psi(p)}(\varphi\psi^{-1})(\mathbf{v})),$$

aşadar $\theta_\psi = \theta_\varphi \circ d_{\psi(p)}(\varphi\psi^{-1})$, deci θ_ψ este liniară, fiind o compunere de aplicaţii liniare.

Vom demonstra, în cele ce urmează, că G_pM este izomorf, în mod canonic, cu T_pM. Este de menţionat că G_pM are dimensiunea n, din modul de construcţie, prin urmare între cele două spaţii există, oricum un izomorfism, ele având aceeaşi dimensiune. Existenţa unui izomorfism canonic (independent de fixarea unei baze în unul dintre ele) nu este asigurată, în general, de egalitatea dimensiunilor, deci trebuie demonstrată.

Propoziţia 3.3.5. *Fie $X = [\varphi, \mathbf{u}] \in G_p M$. Atunci aplicaţia (notată cu aceeaşi literă) $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$X(f) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{u})$$

este o derivare în p a algebrei $C^\infty(M)$, care nu depinde de alegerea hărţii (deci nici de alegerea reprezentantului în clasa $[\varphi, \mathbf{u}]$).

Demonstraţie. Faptul că X este o derivare în p rezultă imediat din proprietăţile diferenţialei într-un punct a unei aplicaţii. Rămâne doar de demonstrat că definiţia este independentă de hartă. Fie (V, ψ) o altă hartă în jurul lui p, astfel încât $[\varphi, \mathbf{u}][\psi, \mathbf{v}]$. Atunci

$$\begin{aligned} X(f) &= d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{u}) = d_{\varphi(p)}[f \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ \varphi^{-1}] = \\ &= d_{\varphi(p)}[(f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})] = d_{\psi(p)}(f \circ \psi^{-1}) d_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})(\mathbf{u}) = \\ &= d_{\psi(p)}(f \circ \psi^{-1})(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează afirmaţia făcută. ■

Propoziţia 3.3.6. *Fie $p \in M$ şi $X \in T_p M$. Atunci pentru orice hartă (U, φ) în jurul lui p există $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $X = [\varphi, \mathbf{u}]$.*

Demonstraţie. Fie $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_{1 \le i \le n}$ baza canonică a lui $T_p M$ într-o harta (U, φ). Atunci

$$X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Fie $\mathbf{u} = X^i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$, unde $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \le i \le n}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Vom arăta că $X = [\varphi, \mathbf{u}]$. Într-adevăr, fie $\overline{X}$ vectorul tangent (derivarea) asociat lui $[\varphi, \mathbf{u}]$. Atunci

$$\overline{X}(f) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{u}) = u^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = X^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = X(f),$$

pentru orice $f \in C^\infty(M)$. ■

Am demonstrat, prin urmare, că aplicaţia care asociază unui vector tangent geometric o derivare a algebrei $C^\infty(M)$ este o bijecţie. Este uşor de verificat că această aplicaţie este liniară, prin urmare este un izomorfism liniar.

Observaţie. Echivalenţa celor două definiţii ale spaţiului tangent la o varietate funcţionează doar în cazul variatăţilor de clasă C^∞.

3.4 Spaţiul cotangent într-un punct la o varietate

Un rol deosebit îl joacă în geometria diferenţială a varietăţilor un alt spaţiu ataşat, în fiecare punct, oricărei varietăţi netede, aşa-numitul *spaţiu cotangent*. Acesta se obţine pe o cale des utilizată în algebra liniară, *dualizarea*. Vom trece mai întâi în revistă câteva noţiuni şi rezultate fundamentale referitoare la dualul unui spaţiu vectorial şi le vom aplica, în cele din urmă, la cazul particular al spaţiului tangent într-un punct la o varietate, pentru a obţine spaţiul cotangent.

3.4.1 Dualul unui spaţiu vectorial

Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial (real) finit dimensional. Se numeşte *dualul* spaţiului V şi se notează cu V^* mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la V la $\mathbb{R}$, înzestrată cu o structură de spaţiu vectorial real prin intermediul adunării şi înmulţirii definite punctual. Elementele spaţiului dual se numesc *1-forme liniare*, *funcţionale liniare*, *covectori* sau, încă, *vectori covarianţi*.

Spaţiul dual al unui spaţiu vectorial finit dimensional este strâns legat de spaţiul însuşi. În particular, ele au aceeaşi dimensiune, deci sunt izomorfe (deşi izomorfismele ce se construiesc nu sunt, de regulă, naturale,în sensul că presupun fixarea unei baze pe unul dintre spaţii; în general, dacă spaţiul V nu are structuri suplimentare, cum ar fi un produs scalar, izomorfisme naturale nici nu există, de fapt.) Într-adevăr, are loc

Propoziţia 3.4.1. *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional,* $\dim V = n$. *Dacă $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ este o bază a lui V, atunci familia de covectori $\{e^i\}_{1\le i\le n}$, definiţi prin*

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ 0 & \text{dacă } i \neq j, \end{cases}$$

formează o bază a spaţiului V^*, numită duala *bazei $\{e_i\}_{1\le i\le n}$. Drept urmare, cele două spaţii vectoriale au aceeaşi dimensiune.*

Demonstraţie. Vom demonstra că orice 1-formă $\omega \in V^*$ se poate reprezenta sub forma

$$\omega = \omega(e_i)e^i. \tag{3.4}$$

Fie $a^k e_k \in V$ un vector oarecare. Membrul stâng al relaţiei (3.4), aplicat acestui vector, ne va da

$$\omega(a^k e_k) = a^k \omega(e_k),$$

în timp ce membrul drept, aplicat aceluiaşi vector, dă

$$\omega(e_i)e^i(a^k e_k) = a^k \omega(e_i)e^i(e_k) = a^k \omega(e_i)\delta^i_k = a^k \omega(e_k),$$

ceea ce demonstrează relaţia (3.4), adică familia de covectori $\{e^i\}_{1\le i\le n}$ formează un sistem de generatori al spaţiului dual. Aceşti generatori sunt şi liniar independenţi, pentru că, dacă avem $a_i e^i = 0$, atunci, pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$, avem

$$a_k = (a_i e^i)(e_k) = 0.$$

∎

Dacă $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ este o bază în spaţiul vectorial n-dimensional V, iar $\{e^i\}_{1\le i\le n}$ este baza duală în spaţiul V^*, atunci orice covector $\omega \in V^*$ se va scrie în funcţie de baza duală ca

$$\omega = \omega_i e^i,$$

unde componentele sunt valorile lui ω pe elementele bazei lui V, adică

$$\omega_i = \omega(e_i).$$

Dacă $X = X^i e_i$ este un vector oarecare din V, atunci acţiunea unui covector pe X va fi, din liniaritate,

$$\omega(X) = \omega(X^i e_i) = \omega_i X^i.$$

Definiţie. Fie V şi W două spaţii vectoriale şi $A : V \longrightarrow W$ o aplicaţie liniară. Se numeşte *duala* sau *transpusa* aplicaţiei A o aplicaţie liniară $A^* : W^* \longrightarrow V^*$ definită, pentru orice $\omega \in W^*$ şi $X \in V$, prin

$$(A^*\omega)(X) = \omega(A(X)).$$

Propoziţia 3.4.2. *A^* există şi este unică.*

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi unicitatea. Fie A_1^* şi A_2^* două duale ale lui A. Atunci avem

$$(A_1^*\omega)(X) = \omega(AX) = (A_2^*\omega)(X),$$

pentru orice $\omega \in W^*$, $X \in V$, de unde rezultă că

$$(A_1^* - A_2^*)(\omega)(X) = 0.$$

Cum atât ω, cât şi X sunt arbitrare, rezultă că $A_1^* - A_2^* = 0$, adică $A_1^* = A_2^*$.

Pentru a demonstra existenţa, constatăm mai întâi că, pentru fiecare ω fixat, expresia $A(\omega(X))$ este liniară în X, în virtutea liniarităţii lui A şi ω, prin urmare este, pentru fiecare ω, o funcţională liniară pe V. Notăm această funtională cu $A^*(\omega)$. Egalităţile

$$A^*(\omega_1 + \omega_2) = A^*(\omega_1) + A^*(\omega_2), \quad A^*(\alpha\omega) = \alpha A^*(\omega)$$

rezultă din liniaritatea expresiei $A(\omega(X))$ în raport cu ω care rezultă din liniaritatea lui A. Prin urmare, A^* este o aplicaţie liniară care îndeplineşte cerinţele definiţiei, deci este duala aplicaţiei A. ■

Propoziţia 3.4.3. *Fie $A : V \longrightarrow W$ o aplicaţie liniară între două spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci, dacă fixăm câte o bază $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ şi $\{f_j\}_{1\leq j\leq m}$, matricea aplicaţiei duale $A^* : W^* \longrightarrow V^*$ relativ la dualele celor două baze este transpusa matricei aplicaţiei A relativ la cele două baze.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A}$ matricea aplicaţiei A relativ la bazele alese şi $\mathcal{B}$ matricea aplicaţiei A^* relativ la bazele duale. Vrem să demonstrăm, prin urmare, că $\mathcal{B} = \mathcal{A}^t$. Ştim, deocamdată, că, pentru orice $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$A(e_j) = a_j^i f_i,$$

unde a_i^j sunt elementele matricei $\mathcal{A}$, i numerotând liniile şi j coloanele (după cum se ştie, coloanele matricei unei aplicaţii într-o pereche de baze sunt componentele imaginilor vectorilor bazei domeniului relativ la baza din codomeniu).

Calculăm acum imaginile vectorilor din baza duală din W^* prin aplicaţia duală. Avem

$$(A^*(f^j))(e_k) = f^j(A(e_k)) = f^j(a_k^i f_i) = a_k^i f^j(f_i) = a_k^i \delta_i^j = a_k^j.$$

Dar asta înseamnă, în fond, că

$$A^*(f^j) = a_k^j e^k,$$

adică $\mathcal{B} = \mathcal{A}^t$. ■

Propoziţia 3.4.4. *Fie U, V, W trei spaţii vectoriale finit dimensionale şi $A : U \longrightarrow V$, $B : V \longrightarrow W$ două aplicaţii liniare. Atunci*

(i) $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$;

(ii) $(1_V)^* = 1_{V^*}$.

Demonstraţie. Afirmaţiile sunt consecinţe imediate ale propoziţie precedente, ţinând cont de faptul că transpusa produsului a două matrice este produsul transpuselor matricelor, luate în ordine inversă. ■

După cum am menţionat deja, deşi dualul unui spaţiu vectorial finit dimensional este izomordf cu spaţiul însuşi, de regulă nu putem identifica cele două spaţii, în lipsa unui izomorfism care să nu depindă de fixarea bazelor. Un astfel de izomorfism există, în schimb, între orice spaţiu vectorial finit dimensional şi dualul dualului său (aşa-numitul *bidual* al spaţiului).

Propoziţia 3.4.5. *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional şi $V^{**} = (V^*)^*$ bidualul său. Atunci $V \cong V^{**}$, în mod natural (adică există un izomorfism care nu depinde de baze).*

Demonstraţie. Este foarte uşor de verificat faptul că aplicaţia $\phi : V \longrightarrow V^{**}$, definită prin

$$\phi(X)(\omega) = \omega(X),$$

pentru orice $\omega \in V^*$ şi orice $X \in V$ este, într-adevăr, un izomorfism de spaţii vectoriale. ■

3.4.2 Spaţiul cotangent

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă şi $p \in M$ un punct arbitrar. Se numeşte *spaţiu cotangent* la M în p, şi se notează cu T_p^*M dualul spaţiului tangent la M în p: $T_p^*M = (T_pM)^*$. Elementele spaţiului cotangent se numesc, după regula generală, *covectori tangenţi în* p, *1-forme liniare* sau *vectori covarianţi*, ultima denumire urmând a fi justificată în cele ce urmează.

Fie $p \in M$ şi (U, φ) o hartă în jurul lui p, cu coordonatele x^i. Atunci spaţiul tangent admite baza canonică $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$. Această bază determină o bază duală în spaţiul cotangent T_p^*, notată cu $\left.dx^i\right|_p$. Avem, aşadar,

$$\left.dx^i\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \delta^i_j,$$

iar un covector $\omega \in T_p^*M$ are o descompunere unică relativ la acestă bază duală sub forma

$$\omega = \omega_i dx^i|_p,$$

unde

$$\omega_i = \omega \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right).$$

Fie acum (V, ψ) o altă hartă în jurul lui p, cu coordonatele $\bar{x}^j$. Aşa cum am văzut la studiul spaţiului tangent, la o schimbare de coordonate vectorii bazei canoinice de coordonate a lui T_pM se transformă după legea

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p.$$

Dacă $\omega \in T_p^*M$ este un covector oarecare, el se poate descompune, relativ la cele două baze duale, ca

$$\omega = \omega_i dx^i|_p = \overline{\omega}_j d\bar{x}^j|_p.$$

Vrem să determinăm relaţiile dintre componentele covectorului ω în cele două baze. Avem utilizând formula de transformare a vectorilor bazei spaţiului tangent:

$$\omega_i = \omega \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) = \omega \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p \right) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \cdot \omega \left(\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p \right) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\overline{\omega}_j$$

3.4.3 Aplicaţia cotangentă într-un punct a unei aplicaţii netede

Definiţie. Fie $F : M \longrightarrow N$ o aplicaţie netedă între varietăţi diferenţiabile şi $p \in M$. Se numeşte *aplicaţie cotangentă* la F în p aplicaţia $F_p^* : T^*_{F(p)}(N) \longrightarrow T^*pM$, care este duala aplicaţie tangente la F în p. Mai precis, aplicaţia cotangentă are expresia

$$F_p^*(\omega)(X) = \omega(F_*X),$$

pentru orice $\omega \in T^*_{F(p)}N$ şi orice $X \in T_pM$.

Ca o consecinţă directă a propoziţiei 3.4.3 şi a calcului făcut pentru cazul aplicaţie tangente, găsim

Propoziţia 3.4.6. *Matricea aplicaţie cotangente în bazele duale asociate bazelor de coordonate a două hărţi (U, φ) şi (V, ψ) în jurul lui p, respectiv $F(p)$, este transpusa matricei Jacobi a reprezentării locale a lui F în hărţile considerate, adică*

$$\left[F_p^*\right]_{\varphi\psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1_{\varphi\psi}}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m_{\varphi\psi}}{\partial x^1}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^1_{\varphi\psi}}{\partial x^n}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m_{\varphi\psi}}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

3.5 Fibratul tangent la o varietate diferenţiabilă

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n. Se numeşte *fibrat tangent* la M reuniunea disjunctă a tutror spaţiilor tangente la M, adică

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM. \tag{3.5}$$

Aplicaţia $\pi : TM \longrightarrow M$, $\pi(X_p) = p$, de fiecare dată când $X_p \in T_pM$ se numeşte *proiecţie* a fibratului tangent.

În aparenţă, fibratul tangent la o varietate este doar o multime amorfă de vectori tangenţi în diferite puncte ale varietăţii, fără o structură specială. Lucrurile nu stau însă aşa, el are, după cum vom vedea, o structură naturală de varietate diferenţiabilă, stâns legată de structura diferenţiabilă a lui M însuşi. Pentru construirea acestei structuri avem nevoie de următoarea lemă.

Lema 3.4. *Fie M o mulţime şi presupunem că pe M este dată o familie de submulţimi $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, împreună cu o familie de aplicaţii injective $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pentru fiecare $\alpha \in A$ astfel încât să fie satisfăcute următoarele proprietăţi:*

(i) pentru fiecare $\alpha \in A$, $\widetilde{U} = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ este o submulţime deschisă;

(ii) pentru orice $\alpha, \beta \in A$, muţimile $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ şi $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sunt deschise în $\mathbb{R}^n$.

(iii) de fiecare dată când $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, aplicaţia

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

este netedă.

(iv) M are o acoperire formată dintr-o familie numărabilă de mulţimi U_α.

(v) dacă p şi q sunt puncte distincte din M, atunci fie există $\alpha \in A$ astfel încât $p, q \in U_\alpha$, fie există $\alpha, \beta \in A$, cu $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ şi $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$.

Atunci pe M există o singură topologie astfel încât $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ să fie un atlas diferenţiabil, care înzestrează pe M cu o structură de varietate diferenţiabilă de dimensiune n.

Demonstraţie. Definim topologia pe M ca fiind cea a bazei formată din mulţimi de forma $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ unde $\alpha \in A$, iar $V \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$. Nu este evident că această familie de mulţimi formează, într-adevăr, o bază a a unei topologii. Pentru aceasta, este necesar ca intersecţia a două mulţimi din familie să aparţină, de asemenea, familiei. Fie, deci, $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ şi $\varphi^{-1}(W)$ două mulţimi din familie. Din proprietăţile (ii) şi (iii) rezultă că $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(W) \equiv \varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(W))$ este o submulţime deschisă a lui $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ şi, de aceea, şi a lui $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. De aceea, dacă $p \in \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$ este un punct oarecare, atunci

$$\varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)) = \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$$

este o mulţime din bază care conţine punctul p. În raport cu această topologie, este uşor de constatat că fiecare aplicaţie φ_α este un omeomorfism pe imagine, deci M este un spaţiu local euclidian de dimensiune n. Dacă, acum $\{U_\alpha(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ este o familie numărabilă de mulţimi U_α care acoperă pe M, atunci fiecare dintre mulţimile $U_\alpha(i)$ are o bază numărabilă, iar reuniunea acestor baze este o bază numarabilă pentru întregul spaţiu topologic M, deci M verifică cea de-a doua axiomă de numărabilitate. Proprietatea lui Hausdorff rezultă din (v), pentru că dacă p şi q sunt într-o aceeaşi mulţime U_α, atunci imaginile lor se separă în $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ şi nuavem decât să considerăm contraimaginile prin φ_α ale vecinătăţilor respective, care vor fi două vecinătăţi deschise ale lui p şi q. Celălalt caz este imediat. Faptul că familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ este un atlas neted rezultă imediat din punctul (iii). Este clar din modul de construcţie că există pe M o singură topologie şi o singură structură netedă care să verifice ipotezele lemei. ■

Propoziţia 3.5.1. *Pentru orice varietate netedă M, de dimensiune n, fibratul tangent TM poate fi înzestrat în mod natural cu o topologie şi o structură netedă care îl transformă într-o varietate diferenţiabilă de dimensiune $2n$ astfel încât proiecţia $\pi : TM \longrightarrow M$ să fie o aplicaţie netedă.*

Demonstraţie. Intenţia noastră este să aplicăm lema precedentă. În acest scop trebuie să construim familia de mulţimi şi aplicaţii care, în final, ne vor da structura diferenţială pe fibratul tangent. Această familie va fi construită plecând de la un atlas pe varietatea M. Considerăm, deci, (U, φ) o hartă pe M, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$. Punem $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Definim o aplicaţie $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, punând

$$\phi\left(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n).$$

În mod evident, $\phi(\pi^{-1}(U)) = \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$, care este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^{2n}$. ϕ este, în plus, o bijecţie pe imagine, iar inversa ei se scrie

$$\phi^{-1}(x, v) = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Avem, prin urmare, dacă se consideră toate hărţile dintr-un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ al lui M, o familie de mulţimi $V_\alpha \equiv \pi^{-1}(U_\alpha)$ şi funcţii ϕ_α construite ca mai sus, care verifică, deocamdată, condiţia (i) din lema 3.4.

Fie, acum două hărţi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ şi (U_β, φ_β) din atlasul pe M considerat şi fie (V_α, ϕ_α) şi (V_β, ϕ_β) hărţile pe TM care le corespund. Mulţimile $\phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) = \phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ şi $\phi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ sunt, în mod evident, deschise în $\mathbb{R}^{2n}$, deci proprietatea (ii) este verificată. Mai departe, schimbarea de hartă

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

se poate scrie, ţinând cont de formula de transformare a componentelor unui vector la o schimbare de hartă,

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\bar{x}^1(x), \dots, \bar{x}^n(x), \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^j}(x)v^j, \dots, \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^j}(x)v^j\right),$$

ceea ce arată că aplicaţia este netedă, de unde rezultă punctul (iii) din lema 3.4. Pentru punctul (iv), ne amintim că din orice atlas pe o varietate se poate extrage un atlas numărabil $\{(U_{\alpha(i)}, \varphi_{\alpha(i)})\}_{i\in\mathbb{N}}$. Din acest subatlas al atlasului de pe M se poate construi o acoperire numărabilă $\{V_{\alpha(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ a lui TM.

În sfârşit, pentru (v), remarcăm mai întâi că dacă două puncte se află în aceeaşi fibră a lui π ele se află în aceeaşi hartă. Dacă X_p şi Y_q se află în fibre diferite (cu alte cuvinte, în spaţii tangente T_pM şi T_q diferite: $p \neq q$), atunci există două vecinătăţi de coordonate disjuncte U_i a lui p şi U_j a lui q. Atunci $\pi^{-1}(U_i)$ şi $\pi^{-1}(U_j)$ sunt vecinătăţi disjuncte ale lui X_p şi Y_q.

Aplicând lema 3.4 obţinem rezultatul dorit, în ceea ce priveşte structura lui TM. Ceea ce ne mai rămâne este să verificăm faptul că proiecţia π este netedă. Fie, deci, (U, φ) o hartă pe M şi $(\pi^{-1}(U), \phi)$ harta corespunzătoare pe fibratul tangent. Atunci reprezentarea locală a lui π în perechea de hărţi considerate este

$$\pi_{\varphi\phi}(x, v) = \varphi \circ \pi \circ \phi^{-1}(x, v) = \varphi \circ \pi \left(v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)} \right) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x,$$

prin urmare reprezentarea locală a lui π este exact proiecţia produsului pe primul factor, deci este netedă. ■

3.5.1 Aplicaţia tangentă

Am definit mai sus aplicaţia tangentă a unei aplicaţii netede $F : M \longrightarrow N$ *într-un punct* $p \in M$ prin

$$F_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N, \qquad F_{*p}(X)(f) = X(f \circ F)$$

pentru orice vector tangent $X \in T_pM$ şi orice funcţie netedă $f \in C^\infty(N)$.

Putem defini acum *aplicaţia tangentă* a lui F ca o aplicaţie între fibratele tangente, $F_* : TM \longrightarrow TN$, punând

$$F_*(X_p) = F_{*p}(X_p),$$

dacă $X \in T_pM$.

Propoziţia 3.5.2. *Pentru orice aplicaţie netedă între două varietăţi diferenţiabile $F : M \longrightarrow N$, aplicaţia tangentă $F_* : TM \longrightarrow TN$ este netedă în raport cu structurile diferenţiabile standard pe fibratele cotangente.*

Demonstraţie. Fie $X_p \in TM$. Mai precis, presupunem chiar că $X_p \in T_pM$. Fie, mai departe, (U, φ) o hartă pe M în jurul lui p, $(\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$ – harta determinată de ea pe TM, (V, ψ) – o hartă pe N în jurul lui $F(p)$ şi $(\widetilde{V}, \tilde{\psi})$ – harta determinată de ea pe TN. Ca de obicei, presupunem că $F(U) \subset V$ (ceea ce, după cum se poate constata cu uşurinţă, are drept consecinţă $F_*(\widetilde{U}) \subset \widetilde{V}$). Reprezentarea locală a lui F_* va fi atunci

$$F_{*\varphi\psi} \equiv \tilde{\psi} \circ F_* \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{aligned}
(F_{*\varphi\psi})(x, v) &= \left(\tilde{\psi} \circ F_* \circ \tilde{\varphi}^{-1}\right)(x, v) = \left(\tilde{\psi} \circ F_*\right) \left(v_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)} \right) = \\
&= \tilde{\psi} \left[F_* \left(v_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)} \right) \right] = \tilde{\psi} \left[F_{*,\varphi^{-1}(x)} \left(v_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi^{-1}(x)} \right) \right] = \\
&= \tilde{\psi} \left(v^i \frac{\partial F^j_{\varphi\psi}}{\partial x^j} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\psi^{-1}(y)} \right) = \\
&= \left(y^1(\psi^{-1}(y)), \dots, y^n(\psi^{-1}(y)), v^i \frac{\partial F^1_{\varphi\psi}}{\partial x^i}, \dots, v^i \frac{\partial F^n_{\varphi\psi}}{\partial x^i} \right)
\end{aligned}$$

Se observă, prin urmare, că reprezentarea locală a lui F_* în perechea de hărţi aleasă este netedă, de unde rezultă că aplicaţia tangentă însăşi este netedă. ■

3.6 Fibratul cotangent şi aplicaţia cotangentă

Definiţie. Dacă M este o varietate diferenţiabilă, se numeşte *fibrat cotangent* al lui M reuniunea disjunctă a tuturor spaţiilor cotangente ale lui M, adică

$$T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M$$

Se numeşte *proiecţie* a fibratului cotangent aplicaţia $\pi^* : T^*M \longrightarrow M$,

$$\pi^*(\omega_p) = p,$$

dacă $\omega_p \in T_p^*M$.

Exact ca şi în cazul fibratului tangent, se poate construi o structură de varietate diferenţiabilă de dimensiune $2n$, cu $n = \dim M$, pe T^*M astfel încât proiecţia să fie netedă.

Topologia se construieşte şi de data aceasta cu ajutorul unei baze formate din preimagini de mulţimi deschise prin proiecţia fibratului (ceea ce asigură, din start, continuitatea proiecţiei). Hărţile sunt, de asemenea, determinate de hărţile pe M. Anume, dacă (U, φ) este o hartă pe M, punem $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Definim, atunci, $\tilde{\varphi} : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, punând

$$\tilde{\varphi}(\omega_i dx^i|_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), \omega_1(p), \dots, \omega_n(p)).$$

Atunci $\tilde{\varphi}\left((\pi^*)^{-1}(U)\right) = \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$, iar inversa aplicaţiei $\tilde{\varphi}$ este dată de expresia

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x, \omega) = \omega_i dx^i|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Suntem acum în măsură să definim *aplicaţia cotangentă* a unei aplicaţii diferenţiabile $F : M \longrightarrow N$, utilizând aplicaţiile sale tangente în punctele varietăţii M. Mai prescis, aplicaţia cotangentă $F^* : T^*N \longrightarrow T^*M$ se defineşte prin

$$F^*(\omega_p) = F_p^*(\omega_p),$$

pentru orice punct $p \in M$ şi orice covector $\omega_p \in T^*_{F(p)}N$.

Exact ca în cazul aplicaţiei tangente, se poate arăta că aplicaţia cotangentă este netedă în raport cu structurile diferenţiabile definite mai sus pe fibratele cotangente.

CAPITOLUL 4

Imersii, submersii, scufundări şi subvarietăţi

4.1 Teorema de inversiune locală

4.1.1 Cazul euclidian

Teorema de inversiune locală, una dintre cele mai importante teoreme din analiza matematică, nu este, în fond, altceva decât o versiune neliniară a teoremei lui Cramer din algebra liniară, la care se reduce, de fapt, în cazul aplicaţiilor liniare. Ea spune, în esenţă, că dacă diferenţiala unei aplicaţii într-un punct este inversabilă, atunci, cel puţin într-o vecinătate a acelui punct, aplicaţia se poate inversa, iar inversa are aceleaşi proprietăţi de netezime ca şi aplicaţia însăşi.

Definiţie. Fie $U, V \subset \mathbb{R}^n$ submulţimi deschise. Se spune că o aplicaţie netedă $F : U \longrightarrow V$ este un difeomorfism dacă este inversabilă, iar inversa ei este, de asemenea, netedă. Aplicaţia se numeşte difeomorfism local în jurul unui punct $a \in U$ dacă acest punct are o vecinătate deschisă W inclusă în U astfel încât $F|_W : W \longrightarrow F(W)$ este un difeomorfism. Dacă F este difeomorfism local în jurul fiecărui punct al domeniului de definiţie, el se va numi, simplu, difeomorfism local.

Observaţie. Aşa cum vom vedea mai târziu, un difeomorfism local nu este întotdeauna un difeomorfism global, adică poate avea inverse în jurul fiecărui punct, dar din aceste inverse locale nu se poate construi o inversă globală.

Exemplul 4.1.1. Fie $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ translaţia de vector $\overrightarrow{ab}$, cu $a, b \in \mathbb{R}^n$, puncte fixate. Atunci expresia analitică a translaţiei va fi
$$F(x^1, \ldots, x^n) = (x^1 + (b^1 - a^1), \ldots, x^n + (b^n - a^n))$$
sau, încă, $F(x) = x + b - a$. Componentele $f^i(x) = x^i + b^i - a^i$ sunt funcţii analitice, deci, în particular, de clasă C^∞. Translaţia $G(x) = x + (a - b)$ este, de asemenea, de clasă C^∞ şi este, în mod evident, inversa lui F. Prin urmare, F este un difeomorfism.

Exemplul 4.1.2. Fie $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicaţie liniară
$$F(x) = \left(\alpha^1_j x^j, \ldots, \alpha^n_j x^j\right)$$
sau $F(x) = A \cdot x$, unde $A = \left[\alpha^i_j\right]_{1 \leq i, j \leq n}$. Atunci matricea Jacobi a aplicaţiei F este, în fiecare punct, egală cu A. După cum se ştie din algebră, F este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, iar dacă B este inversa lui A (în cazul

în care există, desigur), atunci inversa aplicaţiei F este aplicaţia liniară $F^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F^{-1}(y) = B \cdot y$. Prin urmare, F este un difeomorfism dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.

Aşa cum arată propoziţia care urmează, a cărei demonstraţie o lăsăm în grija cititorului, difeomorfismele se comportă bine relativ la compunere.

Propoziţia 4.1.1. *Fie $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ submulţimi deschise, $F : U \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow W$ aplicaţii surjective, iar $H = G \circ F : U \longrightarrow W$ compunerea lor. Dacă oricare două dintre aplicaţii sunt difeomorfisme, atunci şi a treia este, de asemenea, un difeomorfism.*

Teorema 4.1 (Teorema de inversiune locală)**.** *Fie W o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ şi $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^r, unde $r \geq 1$. Dacă $a \in W$ şi $d_a F$ este nesingulară, atunci există o vecinătate deschisă U a lui a, conţinută în W astfel înât mulţimea $V = F(U)$ este deschisă, iar $F : U \longrightarrow V$ este un difeomorfism de clasă C^r. Mai mult, dacă $x \in U$ şi $y = F(x)$, atunci*

$$d_y(F^{-1}) = (d_x F)^{-1},$$

unde -1 din membrul drept desemnează inversa matricii.

Demonstraţia teoremei foloseşte, în mod esenţial, principiul contracţiei, cu alte cuvinte următoarea propozitie:

Propoziţia 4.1.2 (Principiul contracţiei)**.** *Fie (M, d) un spaţiu metric complet şi fie $T : M \longrightarrow M$ o aplicaţie. Dacă există $\lambda \in [0, 1)$ astfel înât $\forall x, y \in M$,*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y), \tag{4.1}$$

atunci T are un singur punct fix în M.

Observaţie. O aplicaţie T ca în propoziţia de mai sus se numeşte *contracţie*. Este esenţial ca numărul λ din propoziţie să fie *strict* mai mic dacât 1, altfel propoziţia nu este adevărată.

Demonstraţia principiului contracţiei. Iterând relaţia (4.1), obţinem că, pentru orice număr natural n,

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y).$$

În particular, fixăm un element $x_0 \in M$ şi fie $x_n = T^n(x_0)$. Atunci afirmăm că pentru orice numere naturale n, m avem,

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \lambda^n K,$$

unde K este o constantă pozitivă care nu depinde de n @ şi m. Într-adevăr, din $T^{n+m}(x_0) = T^n(T^m(x_0))$, obţinem

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \lambda^n d(x_0, T^m(x_0)).$$

Aplicând în mod repetat inegalitatea triunghiului pentru metrică, obţinem

$$\begin{aligned} d(x_0, T^m(x_0)) &\leq d(x_0, T(x_0)) + d(T(x_0), T^2(x_0)) + \\ &+ \cdots + d(T^{m-1}(x_0), T^m(x_0)) \leq (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{m-1}) \cdot \\ &\cdot d(x_0, T(x_0)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x_0, T(x_0)). \end{aligned}$$

Putem pune deci $K = \frac{1}{1-\lambda} d(x_0, T(x_0))$ şi inegalitatea este demonstrată. Prin urmare, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir Cauchy, iar spaţiul metric M fiin complet, rezultă că are o limită unică a. Deoarece $T(x_n) = x_{n+1}$ are aceeaşi limită, rezultă că

$$d(T(a), a) = \lim_{n \longrightarrow \infty} d(T(x_n), x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0,$$

deci a este punct fix. Dacă ar exista două puncte fixe $a, b \in M$, atunci am avea $d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leq \lambda d(a, b)$, ceea ce nu se poate, deoarece numărul real λ este subunitar. ■

Demostraţia teoremei de inversiune locală. Vom face demonstraţia în mai mulţi paşi.

(i) Putem presupune, fără a restrânge generalitatea,că $0 \in W$, $F(0) = 0$ şi $d_0 F = 1_{\mathbb{R}^n}$, pentru că, în caz contrar, putem compune cu o aplicaţie liniară şi o translaţie, iar propoziţia 4.1.1 ne asigură că, acestea fiind difeormorfisme, nu se distruge condiţia de difeomorfism. Definim acum $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G(x) = x - F(x)$. Atunci, pentru această aplicaţie, avem, în mod evident, $G(0) = 0$ şi $d_0 G = 0$.

(ii) Există un număr real $r > 0$ astfel încât $d_x F$ să fie inversabilă în fiecare punct x al bilei închise $\bar{B}_{2r}(0) \subset W$ şi, pentru orice $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(0)$ să avem

$$\|G(x_1) - G(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \tag{*}$$

şi

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|F(x_1) - F(x_2)\|. \tag{**}$$

Pentru a verifica aceste afirmaţii, alegem r astfel încât $\bar{B}_{2r}(0) \subset W$; mai departe, $\det d_x F$ este o funcţie continuă în raport cu x i este nenulă în zero, deci putem alege r astfel încât această funcţie să nu se anuleze pe $\bar{B}_{2r}(0)$; în sfârşit, micşorând, la nevoie, numărul r, putem presupune că derivatele parţiale ale lui G, egale cu 0 în origine, să fie mărginite superior de $1/2n$ pe $\bar{B}_{2r}(0)$. Atunci, dacă $x_1, x_2 \in \bar{B}_{2r}(0)$, vom avea $\|x_1 - x_2\| \leq 2r$, deci

$$\|G(x_1) - g(x_2)\| \leq n \cdot \frac{1}{2n}\|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

adică egalitatea (*). Mai departe, este clar că (*) este echivalentă cu

$$\|x_1 - f(x_1) - x_2 + F(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|. \tag{***}$$

Pe de altă parte, din inegalitatea triunghiului, obţinem că

$$\|x_1 - x_2\| - \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \|x_1 - f(x_1) - x_2 + F(x_2)\|. \tag{****}$$

Acum (**) rezultă din (***) şi (****).

(iii) Dacă $\|x\| \leq r$, atunci $\|G(x)\| \leq r/2$, adică $G(\bar{B}_r(0)) \subset \bar{B}_{r/2}(0)$. Mai mult, pentru fiecare $y \in \bar{B}_{r/2}(0)$ există un singur $x \in \bar{B}_r(0)$ astfel încât $F(x) = y$.

Într-adevăr, prima afirmaţie rezultă din (*) punând $x_1 = x$ şi $x_2 = 0$. Pentru a doua, trebuie să utilizăm propoziţia 4.1.1. Dacă $y \in \bar{B}_{r/2}$ şi $x \in \bar{B}_r(0)$, atunci

$$\|y + G(x)\| \leq \|y\| + \|G(x)\| \leq \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r.$$

Considerăm acum o aplicaţie $T_y : \bar{B}_r(0) \longrightarrow \bar{B}_r(0)$ definită pentru fiecare $y \in \bar{B}_{r/2}(0)$ prin $T_y(x) = y + G(x)$. Atunci $T_y(x) = x$ dacă şi numai dacă $y = x - G(x)$ sau, altfel spus, $F(x) = y$. Pe de altă parte, inegalitatea (*), scrisă sub forma

$$\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| = |G(x_1) - G(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

care este adevărată pentru orice $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(0)$, dovedete că T_y este o contracţie pe $\bar{B}_r(0)$. De aceea, din propoziţia 4.1.2 rezultă că există un singur $x \in \bar{B}_r(0)$ astfel încât $T_y(x) = x$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, $y = F(x)$. Deoarece acest fapt este valabil pentru orice $y \in \bar{B}_{r/2}(0)$, rezultă că F^{-1} este definită pe această mulţime. În particular, deoarece F este continuă, mulţimea $U \equiv F^{-1}(B_{r/2}(0))$ este deschisă în $\bar{B}_r(0)$. Fie $V = B_{r/2}(0)$; deoarece $\bar{B}_r(0) \subset W$, obţinem că:

(iv) F este un omeomorfism de la mulţimea deschisă $U \subset W$ pe mulţimea deschisă V.

Într-adevăr, F este continuă şi inversabilă în aceste condiţii. Trebuie doar să arătăm că F^{-1} este continuă. Dacă $x_1, x_2 \in U$, avem $y_1 = F(x_1)$ şi $y_2 = F(x_2)$, iar relaţia (**) devine, în acest caz,

$$\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| \le 2\|y_1 - y_2\|$$

de unde rezultă concluzia.

(v)Fie $b = F(a) \in V$. Atunci F^{-1} este diferenţiabilă în b, iar $d_b F^{-1} = [d_a F]^{-1}$.

Intr-adevăr, deoarece F este de clasă C^r, cu $r \ge 1$ pe W, ea este, în particular, de clasă C^r şi pe întreaga mulţime U, deci şi în $a = F^{-1}(b)$. Astfel, din definiţie,

$$F(x) - F(a) = d_a F \cdot (x - a) + \|x - a\| \cdot r(x, a),$$

unde $r(x,a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Din (ii) rezultă că $d_a F$ este nesingulară; fie A inversa ei. În relaţia de mai sus punem $y = F(x)$ şi înmulţim la stânga cu A. Se obţine

$$A \cdot (y - b) = F^{-1}(y) + F^{-1}(b) + \|F^{-1}(y) - F^{-1}(b)\| A \cdot r\left(F^{-1}(y), F^{-1}(b)\right).$$

Prin urmare,

$$F^{-1}(y) = F^{-1}(b) + A \cdot (y - b) + \|y - b\| \tilde{r}(y, b),$$

dacă presupunem că $y \ne b$ şi punem

$$\tilde{r}(y, b) = -\frac{\|F^{-1}(y) - F^{-1}(b)\|}{\|y - b\|} A \cdot r\left(F^{-1}(y), F^{-1}(b)\right).$$

Din inegalitatea (**) rezultă că fracţia din expresia de mai sus este mărginită superior de 2, A este o matrice constantă, iar F^{-1} este continuă, deci $\lim\limits_{y \to b} \tilde{r}(y, b) = 0$, ceea ce încheie demonstraţia afirmaţiei.

Pentru a încheia demonstraţia teoremei, vom mai demonstra că

(vi) Dacă F este de clasă C^r pe U, atunci F^{-1} este de clasă C^r pe V.

Într-adevăr, am văzut că pentru $y \in V$ avem

$$d_y(F^{-1}) = \left[d_{F^{-1}(y)} F\right]^{-1}.$$

Deoarece F^{-1} este continuă pe V, iar imaginea sa este egală cu U, deoarece dF este de clasă C^{r-1} şi nesingulară pe U şi, în fine, componentele inversei unei matrici sunt funcţii de clasă C^∞ de componentele matricii date, rezultă că F^{-1} este cel puţin de clasă C^1. Dacă F^{-1} ar fi de clasă $k < r$, atunci elementele lui dF^{-1} ar fi de clasă $k - 1$, cel puţin pe V, dar, pe de altă parte, formula de mai sus arată că aceste componente sunt compuneri de funcţii de clasă cel puţin k, deci sunt cel puţin de clasă C^k. Prin urmare, F^{-1} este de clasă C^{k+1}; prin inducţie, rezultă că F^{-1} este de clasă C^r. ■

Fie $W \subset \mathbb{R}^n$ o submulţime deschisă. Următoarele două corolare rezultă atunci imediat din teorema de inversiune locală.

Corolarul 4.1. *Dacă $d_x F$ este nesingulară în fiecare punct $x \in W$, atunci F este o aplicaţie deschisă.*

Corolarul 4.2. *O condiţie necesară şi suficientă pentru o aplicaţie C^∞ să fie un difeomorfism între W şi $F(W)$ este ca ea să fie injectivă şi $d_x F$ să fie nesingulară în fiecare punct $x \in W$.*

4.1.2 Cazul aplicaţiilor netede între varietăţi

Teorema de inversiune locală (teorema difeormorfismului local), admite o formulare valabilă pentru aplicaţii netede între varietăţi diferenţiabile oarecare, nu doar între (deschişi din) spaţii euclidiene. Cheia acestei formulări este observaţia, făcută în capitolul precedent, că, în fond, aplicaţia tangentă într-un punct la o aplicaţie netedă nu este decât o generalizare naturală a diferenţialei într-un punct a unei aplicaţii netede între spaţii euclidiene, la care se reduce, în cazul în care atât domeniul cât şi codomeniul aplicaţiei considerate sunt deschişi din spaţii euclidiene.

Teorema 4.2. *Fie M şi N două varietăţi diferenţiabile şi $F : M \longrightarrow N$ o aplicaţie netedă. Dacă $p \in M$ şi aplicaţia tangentă în p a lui F, $F_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ este inversabilă (adică este un izomorfism liniar), atunci există o vecinătate deschisă $A \subset M$ a lui p şi o vecinătate deschisă $B \subset N$ a lui $F(p)$ astfel încât $F : A \longrightarrow B$ să fie un difeomorfism, în raport cu structurile de subvarietăţi deschise pe cele două vecinătăţi. În plus, $F_{*y}^{-1} = (F_{*x})^{-1}$, pentru orice $y \in B$, unde $y = F(x)$.*

Demonstraţie. Fie (U, φ) o hartă pe M în jurul lui p şi (V, ψ) o hartă pe N în jurul lui $F(p)$ astfel încât $F(U) \subset V$. Atunci, după cum se ştie, matricea lui F_{*p} relativ la bazele de coordonate asociate celor două hărţi este matricea jacobiană a reprezentantei locale a lui F în această pereche de hărţi. Dar, pe de altă parte, matricea Jacobi a lui $F_{\varphi\psi}$ este chiar matricea diferenţialei în $\varphi(p)$ a acestei aplicaţii netede între deschişi din spaţii euclidiene:

$$F_{\varphi\psi} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V).$$

Deoarece F_{*p} este un izomorfism, înseamnă că şi diferenţiala $d_{\varphi(p)}F_{\varphi\psi}$ este un izomorfism, deci este inversabilă. Aplicând teorema de inversiune locală pentru cazul euclidian, obţinem că există o vecinătate deschisă $\overline{U} \subset \varphi(U)$ a lui $\varphi(p)$ şi o vecinătate deschisă $\overline{V} \subset \psi(V)$ a lui $F_{\varphi\psi}(\varphi(p)) \equiv \psi(F(p))$ astfel încât aplicaţia $F_{\varphi\psi} : \overline{U} \longrightarrow \overline{V}$ să fie un difeomorfism. Dar, pe de altă parte,

$$F_{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}.$$

Cum φ şi ψ sunt. la rândul lor difeomorfisme, rezultă că F insăşi este un difeomorfism şi obţinem că

$$F = \psi^{-1} F_{\varphi\psi}\varphi,$$

adică inversa lui F are expresia

$$F^{-1} = \varphi^{-1} \circ (F_{\varphi\psi})^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\overline{V}) \longrightarrow \varphi^{-1}(\overline{U}).$$

Aşadar, dacă punem $A = \varphi^{-1}(\overline{U})$, $B = \psi^{-1}(\overline{V})$, atunci $F : A \longrightarrow B$ este un difeomorfism.

Reprezentarea locală a lui F^{-1} relativ la perechea de hărţi (V, ψ), (U, φ) (de fapt, relativ la restricţiile acestor hărţi la B, respectiv la A), va fi

$$(F^{-1})_{\psi\varphi} = \varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1} = (F_{\varphi\psi})^{-1},$$

de unde rezultă a doua parte a afirmaţiei teoremei, aplicând din nou teorema de inversiune locală pentru cazul euclidian. ∎

Observaţii. 1) Dacă F îndeplineşte condiţiile teoremei de inversiune locală în fiecare punct al varietăţii M, vom spune că F este *un difeomorfism local*. Remarcăm că această condiţie este mai slabă decât condiţia de difeomorfism. F poate fi un difeomorfism în jurul fiecărui punct al domeniului său de definiţie, fără a fi, însă, o aplicaţie bijectivă. Prin urmare, el are inverse locale, dar aceste inverse nu pot fi “lipite”, pentru a forma o inversă globală, care ar fi netedă, în virtutea faptului că noţiunea de diferenţiabilitate este o noţiune locală. Dacă, însă, F este un difeomorfism local şi este o bijecţie, atunci ea este chiar un difeomorfism (global), datorită unicităţii inversei unei aplicaţii.

2) Din teorema de inversiune locală rezultă, în mod evident, că între două varietăţi diferenţiabile poate exista un difeomorfism local dacă şi numai dacă varietăţile au aceeaşi dimensiune[1]. Remarcăm, însă, că egalitatea dimensiunilor nu implică nici într-un caz existenţa unui difeomorfism (fie şi numai local).

[1]Se poate demonstra, de fapt, chiar mai mult: între două spaţii euclidiene (şi, prin urmare, mai general, între două varietăţi diferenţiabile), nu pot exista nici măcar *omeomorfisme* decât dacă cele două spaţii au aceeaşi dimensiune. Această afirmaţie (numită *teorema de invarianţă a domeniului*) este un rezultat profund de topologie, care este mult mai dificil de demonstrat.

4.2 Teorema rangului

Cea mai importantă aplicaţie a teoremei difeomorfismului local, cel puţin din punctul nostru de vedere, este aşa-numita “teoremă a rangului”, care este, de fapt, o generalizare a teoremei de inversiune locală, aplicându-se şi la cazul în care domeniul şi codomeniul nu au aceeaşi dimeniune. Vom trata separat, ca şi în cazul teoremei de inversiune locală, cazul euclidian şi cazul varietăţilor diferenţiabile oarecare.

4.2.1 Cazul euclidian

Dacă $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este o aplicaţie liniară, rangul matricii asociate relativ la o pereche de baze este un invariant (nu se modifică dacă se schimă bazele), de aceea are sens să-l numim *rangul aplicaţiei* A. Pe de altă parte, dacă $U \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie netedă, iar $x_0 \in U$, atunci putem să-i asociem lui F în punctul x_0 diferenţiala $d_{x_0}F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, care este o aplicaţie liniară. Rangul acestei aplicaţii (care coincide cu rangul matricii Jacobi, dacă se fixează coordonate în fiecare dintre cele două spaţii euclidiene) se numeşte *rangul aplicaţiei netede* F *în punctul* x_0. Se observă o diferenţă esenţială. În cazul aplicaţiei liniare, rangul este o noţiune globală, în timp ce în cazul general este o mărime locală, ce poate varia de la un punct la altul.

Este clar că, dacă o aplicaţie netedă F se compune la dreapta sau la stânga cu difeomorfisme, rangul nu se schimbă, pentru că, local, totul se reduce la înmulţirea matricii diferenţialei cu nişte matrici inversabile.

Sunt foarte importante aplicaţiile care au rang constant (rangul este acelaşi în fiecare punct al unei mulţimi). Astfel de aplicaţii se pot compune cu anumite difeomorfisme astfel încât, cel puţin local, compunerea să fie sau o injecţie canonică sau o proiecţie canonică (în funcţie de raportul dimensiunilor domeniului şi codomeniului aplicaţiei). Mai precis, are loc

Teorema 4.3 (Teorema rangului)**.** *Fie* $A_0 \subset \mathbb{R}^n$*,* $B_0 \subset \mathbb{R}^m$ *submulţimi deschise,* $F : A_0 \longrightarrow B_0$ *o aplicaţie de clasă* C^r*. Presupunem că* $\operatorname{rank} F = k$ *pe mulţimea* A_0*. Dacă* $a \in A_0$ *şi* $b = F(a)$*, atunci există mulţimile deschise* $A \subset A_0$ *şi* $B \subset B_0$*, cu* $a \in A$ *şi* $b \in B$ *şi difeomorfismele* $G : A \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$*,* $H : B \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$*, unde* U *şi* V *sunt mulţimi deschise, astfel încât* $(H \circ F \circ G^{-1})(U) \subset V$*, iar*

$$(H \circ F \circ G^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Demonstraţie. Faptul că rangul aplicaţiei F este egal cu k în punctul a înseamnă că matricea aplicaţiei d_aF (adică matricea Jacobi a lui F în a) are un minor de tip $k \times k$ nenul. Renumerotând, la nevoie, coordonatele, putem presupune că acest minor este situat în stânga sus, adică este determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^k}{\partial x^k} \end{vmatrix}$$

Renumerotăm coordonatele standard pe $\mathbb{R}^n$ cu $(x, y) = (x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$, respectiv pe $\mathbb{R}^m$ cu $(v, w) = (v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^{m-k})$. Dacă acum rescriem F sub forma $F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$, atunci ipoteza noastră nu înseamnă altceva decât că matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial Q^1}{\partial x^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial Q^k}{\partial x^k} \end{pmatrix}$$

este nesingulară în a. Definim aplicaţia $\varphi : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ punând

$$\varphi(x, y) = (Q(x, y), y).$$

Matricea Jacobi a acestei aplicaţii în a este

$$J(\varphi)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(a) & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j}(a) \\ 0 & I_{n-k}, \end{pmatrix}$$

iar această matrice este,în mod clar, nesingulară, deoarece coloanele sale sunt liniar independente. Prin urmare, din teorema funcţiei inverse, există o vecinătate deschisă $A_1 \subset A_0$ a lui a şi o vecinătate deschisă $A_2 \subset \varphi(A_0)$ a lui $\varphi(a)$ astfel încât $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ să fie un difeomorfism.

Dacă scriem aplicaţia inversă $\varphi^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, unde f şi g sunt funcţii netede $f : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, atunci

$$(x, y) = \varphi(\varphi^{-1}(x, y)) = \varphi(f(x, y), g(x, y)) = (Q(f(x, y), g(x, y)), g(x, y)).$$

De aici rezultă că $g(x, y) = y$, deci

$$\varphi^{-1}(x, y) = (f(x, y), y).$$

■

4.2.2 Cazul varietăţilor

Teorema rangului, demonstrată mai sus în cazul euclidian are o generalizare imediată la cazul varietăţilor diferenţiabile oarecare. Trebuie să definim, mai întâi, noţiunea de rang al unei aplicaţii netede pe o varietate. Desigur, vom urma tehnica generală de studiere a aplicaţiilor netede între varietăţi, care utilizează reprezentările locale.

Definiţie. Fie $f : M^m \longrightarrow N^n$ o aplicaţie netedă între varietăţi diferenţiabile şi $p \in M$. Alegem o hartă (U, φ) pe M în jurul lui p şi o hartă (V, ψ) pe N în jurul punctului $f(p)$. Se numeşte *rangul* aplicaţiei f în punctul p rangul reprezentării locale $f_{\varphi\psi}$ a lui f în perechea de hărţi alese, calculat în punctul $\varphi(p)$, adică

$$\operatorname{rank}_p f = \operatorname{rank}_{\varphi(p)} f_{\varphi\psi} = \operatorname{rank}_{\varphi(p)} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Fie, acum, $f_{\varphi\psi}(x^1, \ldots, x^m) = (f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m))$ expresia în coordonate a reprezentării locale a lui f. Cum rangul unei aplicaţii netede între spaţii euclidiene este rangul matricii Jacobi a acelei aplicaţii, înseamnă că, pe baza definiţiei de mai sus, putem scrie că

$$\operatorname{rank}_p f = \operatorname{rank} J(f_{\varphi\psi})(\varphi(p)) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{\varphi(p)}$$

Propoziţia 4.2.1. *Definiţia rangului unei aplicaţii netede între varietăţi într-un punct nu depinde de alegerea hărţilor.*

Demonstraţie. Fie (U_1, φ_1) şi (V_1, ψ_1) o altă pereche de hărţi în jurul lui p, respectiv $f(p)$. Notăm $k = \operatorname{rank}_{\varphi(p)} f_{\varphi\psi}$ şi $k_1 = \operatorname{rank}_{\varphi_1(p)} f_{\varphi_1\psi_1}$. Trebuie, deci, să arătăm că avem $k_1 = k$. Este clar că

$$\begin{aligned} f_{\varphi_1\psi_1} &\equiv \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1}) = \\ &= (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ f_{\varphi\psi} \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1}). \end{aligned}$$

Prin urmare, avem, după regula de derivare a funcţiilor compuse,

$$\begin{aligned} J(f_{\varphi_1\psi_1})(\varphi_1(p)) &= J(\psi_1 \circ \psi^{-1})(f_{\varphi\psi}(\varphi \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(p))))\cdot \\ &\cdot J(f_{\varphi\psi})(\varphi \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(p))) \cdot J(\varphi \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) = \\ &= J(\psi_1 \circ \psi^{-1}) \left(f_{\varphi\psi}(\varphi(p)\right) \cdot J(f_{\varphi\psi})(\varphi(p)) \cdot \\ &\cdot J(\varphi \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)). \end{aligned}$$

Cum aplicaţiile $\psi_1 \circ \psi^{-1}$ şi $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ sunt schimbări de coordonate, deci difeomorfisme, matricile lor Jacobiene sunt inversabile, iar prin înmulţirea unei matrice cu matrice inversabile, la stânga sau la dreapta, nu se modifică rangul matricei. Aşadar, avem

$$\operatorname{rank} J(f_{\varphi_1\psi_1})(\varphi_1(p)) = \operatorname{rank} J(f_{\varphi\psi})(\varphi(p)),$$

de unde se obţine egalitatea cerută, $k_1 = k$. ■

De o importanţă deosebită se bucură în geometria varietăţilor diferenţiabile aplicaţiile care au rang constant, în particular cele care au rang maxim. Pentru aceste aplicaţii de rang constant se poate găsi, ca şi în cazul aplicaţiilor între spaţii euclidiene, o reprezentare locală foarte simplă, ele reducându-se, practic, la proiecţii sau incluziuni. Precizăm că această reprezentare, care presupune un sistem special de coordonate, are un caracter *local*, ea nu se poate extinde, de regulă, pe întreaga varietate (în fond, acest lucru nu se poate face nici măcar în cazul euclidian, decât în situaţii foarte speciale, de exemplu pentru aplicaţii liniare).

Teorema rangului din cazul euclidian (teorema 4.3) se poate reformula în modul următor.

Teorema 4.4. *Fie $f : M \to N$ o aplicaţie netedă, iar* $\dim M = m, \dim N = n$*. Dacă* $\operatorname{rank} f = k$ *în fiecare punct al lui M, unde $k \leq \min(m, n)$, atunci pentru orice punct $p \in M$ există o hartă (U, φ) pe M în jurul p şi o hartă (V, ψ) pe N în jurul lui $f(p)$ astfel încât $\varphi(p) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$, $\psi(f(p)) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, iar reprezentarea locală $f_{\varphi\psi} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ este dată de*

$$f_{\varphi\psi}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k \text{ poziţii}}).$$

Demonstraţie. Nu avem decât să alegem o pereche de hărţi oarecare în jurul lui p, resepctiv $f(p)$ şi apoi să aplicăm teorema rangului pentru spaţii euclidiene reprezentării local a aplicaţiei în perechea de şărţi considerate. Hărţile din teoremă se vor obţine, pur şi simplu, compunând hărţile iniţiale cu cele două difeomorfisme furnizate de teorema euclidiană a rangului. ■

4.3 Imersii, submersii şi scufundări

Definiţie. O aplicaţie netedă $f : M \to N$ se numeşte

(a) *imersie* dacă $\operatorname{rank} f = m = \dim M$, în fiecare punct al lui M;

(b) *submersie* dacă $\operatorname{rank} f = n = \dim N$, în fiecare punct al lui M.

(c) *scufundare* dacă este o imersie injectivă, iar aplicaţia $f : M \to f(M)$ este un omeomorfism pe imagine, unde pe $f(M)$ se consideră topologia indusă din spaţiul ambient (adică din varietatea N).

Cum, în general, $\operatorname{rank} f \leq \min(m, n)$, este clar că în cazul unei imersii trebuie să avem $m \leq n$, iar în cazul unei submersii $m \geq n$.

O aplicaţie netedă este un *difeomorfism local* dacă este, simultan, imersie şi submersie. În general, după cum vom vedea în cele ce urmează, o imersie este *local injectivă*, iar o submersie *local surjectivă*, într-un sens ce va fi precizat ulterior. Totuşi, aceste aplicaţii nu sunt, în general, injective ori surjective pe întreaga varietate. De aceea, un difeomorfism local nu este, în general, un difeomorfism global, pentru că nu este o aplicaţie inversabilă. El se poate inversa pe mulţimi deschise suficient de mici, dar, în general, inversele locale care se obţin şi care sunt netede, nu pot fi “lipite” pentru a forma o inversă globală. Dacă însă un difeomorfism local este, de asemenea, o aplicaţie bijectivă, atunci este şi un difeomorfism global, pentru că, din unicitatea inversei rezultă că inversele locale trebuie să fie compatibile.

4.3.1 Imersii

Ne vom ocupa, puţin mai în detaliu, în cele ce urmează, de imersii. Începem cu câteva exemple.

Exemplul 4.3.1. Aplicaţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (s^2, s^3)$ nu este o imersie, deoarece avem

$$J(f)(t) = \begin{pmatrix} 2s \\ 2s^2 \end{pmatrix},$$

prin urmare $J(f)(0) = 0$.

Exemplul 4.3.2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dată prin $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$. După cum se ştie din geometria curbelor şi a suprafeţelor, imaginea acestei aplicaţii este o elice cilindrică circulară, situată pe un cilindru de rază 1, care are ca axă de simetrie axa Ox^1. Matricea jacobiană a lui f într-un punct t oarecare va fi

$$J(f)(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \\ 1 \end{pmatrix},$$

Prin urmare rangul aplicaţiei este egal cu 1 în fiecare punct. Aşadar, f este o imersie şi, după cum se poate verifica uşor, este injectivă.

Exemplul 4.3.3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Această aplicaţie, a cărei imagine este cercul unitate cu centrul în origine, nu este, în mod clar, injectivă, deoarece este periodică de perioadă 1. Pe de altă parte, însă, avem

$$J(f)(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \end{pmatrix},$$

deci rangul aplicaţiei este 1 în fiecare punct, aşadar aplicaţia este o imersie. Se vede, pe de altă parte, că fiecare punct $t \in \mathbb{R}$ are o vecinătate pe care f este injectivă.

Exemplul 4.3.4. Ca un alt exemplu, ceva mai complicat, vom demonstra acum că injecţia canonică a sferei unitate bidimensionale în $\mathbb{R}^3$ este o imersie, adică are rangul 2 în fiecare punct al sferei. Fie, deci, $j : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $j(p) = p$ pentru orice $p \in S^2$. De data aceasta, pentru a face verificările, avem nevoie de un atlas pe sferă. Vom utiliza atlasul dat de proiecţiile ortogonale (vezi secţiunea 1.3.4). Presupunem, pentru fixarea ideilor, că punctul p se află în domeniul hărţii U_1^+ definită, după cum ştim, prin

$$\begin{aligned} U_1^+ &= \{x \in S^2 \mid x^1 > 0\}, \\ \varphi_1^+(x^1, x^2, x^3) &= (x^2, x^3). \end{aligned}$$

Atunci, după cum se vede imediat, $(\varphi_1^+)^{-1}(y^2, y^3) = (\sqrt{1 - (y^2)^2 - (y^3)^2}, y^2, y^3)$, prin urmare reprezentarea locală a aplicaţiei j în perechea de hărţi (U_1^+, φ_1^+), $(\mathbb{R}^3, 1_{\mathbb{R}^3})$ va fi dată de

$$j_{\varphi_1^+}(y^2, y^3) = \left(j \circ (\varphi_1^+)^{-1}\right)(y^2, y^3) = (\sqrt{1 - (y^2)^2 - (y^3)^2}, y^2, y^3).$$

Matricea jacobiană a acestei aplicaţii, într-un punct oarecare, va fi

$$J(j_{\varphi_1^+})(y^2, y^3) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{\sqrt{1 - (y^2)^2 - (y^3)^2}} & -\dfrac{y^3}{\sqrt{1 - (y^2)^2 - (y^3)^2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

prin urmare va avea rangul 2 pentru orice (y^2, y^3) din $\varphi_1^+(U_1^+)$. Calculele pentru celelalte cinci hărţi sunt perfect analoage şi nu le mai reproducem aici. Ele conduc, toate, la acelaşi rezultat. Cum, aşa cum am văzut, rangul aplicaţiei nu depinde de alegerea hărţilor, rezultă de aici că, chiar dacă utilizăm un alt atlas, aparţinând, însă, aceleiaşi structuri diferenţiabile, rezultatul va fi acelaşi.

Calcul făcut se poate repeta, fireşte, şi pentru incluziunea canonică a sferei unitate n-dimensionale în spaţiul euclidian cu $n+1$ dimensiuni.

Exemplul 4.3.5. Ca un ultim exemplu, considerăm aplicaţia $f : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, care asociază unui punct de pe sferă dreapta care trece prin originea lui $\mathbb{R}^{n+1}$ şi prin punctul de pe sferă ales. Este uşor de verificat că aplicaţia are o expresie analitică foarte simplă, anume $f(x) = [x]$, pentru orice $x \in S^n$. Alegem pe sferă atlasul stereografic şi pe spaţiul proiectiv atlasul standard, cu $n+1$ hărţi. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $x \in U_N$, iar $f(x) \equiv [x] \in U_1$. Reamintim că $U_N = S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$, $\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este dată de expresia

$$\varphi_N\left(x^1,\dots,x^n,x^{n+1}\right) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}},\dots,\frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right),$$

în timp ce inversa acestei aplicaţii, $\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_N$ este dată de relaţia

$$\varphi_N^{-1}\left(u^1,\dots,u^n\right) = \left(\frac{2u^1}{1+\|u\|^2},\dots,\frac{2u^n}{1+\|u\|^2},\frac{-1+\|u\|^2}{1+\|u\|^2}\right).$$

În ceea ce priveşte harta pe spaţiul proiectiv, avem

$$U_1 = \left\{\left[x^1,\dots,x^{n+1}\right] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R} \mid x^1 \neq 0\right\},$$

$$\varphi_1\left(\left[x^1,\dots,x^n,x^{n+1}\right]\right) = \left(\frac{x^2}{x^1},\dots,\frac{x^n}{x^1},\frac{x^{n+1}}{x^1}\right),$$

$$\varphi_1^{-1}\left(u^1,\dots,u^n\right) = \left[1,u^1,u^2,\dots,u^n\right].$$

După cum se ştie, reprezentarea locală a lui f în perechea de hărţi considerate este

$$f_{\varphi_N\varphi_1} \equiv \varphi_1 \circ f \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{aligned}
f_{\varphi_N\varphi_1}\left(u^1,\dots,u^n\right) &= (\varphi_1 \circ f)\left(\frac{2u^1}{1+\|u\|^2},\dots,\frac{2u^n}{1+\|u\|^2},\frac{-1+\|u\|^2}{1+\|u\|^2}\right)\\
&= \varphi_1\left(\left[\frac{2u^1}{1+\|u\|^2},\dots,\frac{2u^n}{1+\|u\|^2},\frac{-1+\|u\|^2}{1+\|u\|^2}\right]\right) =\\
&= \left(\frac{u^2}{u^1},\dots,\frac{u^n}{u^1},\frac{-1+\|u\|^2}{2u^1}\right).
\end{aligned}$$

Remarcăm, deocamdată, că f este o aplicaţie netedă. Vom determina acum matricea Jacobi a acestei aplicaţii, în perechea de hărţi considerate. Avem

$$J(f_{\varphi_N\varphi_1}) = \begin{pmatrix}
-\frac{u^2}{\left(u^1\right)^2} & \frac{1}{u^1} & 0 & \dots & 0\\
-\frac{u^3}{\left(u^1\right)^2} & 0 & \frac{1}{u^1} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-\frac{u^n}{\left(u^1\right)^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{u^1}\\
\frac{2\left(u^1\right)^2-\|u\|^2}{2\left(u^1\right)^2} & \frac{u^2}{u^1} & \frac{u^3}{u^1} & \dots & \frac{u^n}{u^1}
\end{pmatrix}$$

Un calcul simplu (dezvoltând, de exemplu, după prima coloană) ne conduce la concluzia că determinantul matricei Jacobi este egal cu $\|u\|^2/2\left(u^1\right)^3$, care este diferit de zero, întrucât am presupus că imaginea lui f este în U_1. Aşadar f are rangul n, adică este un difeomorfism local.

O consecinţă imediată a teoremei rangului este

Propoziţia 4.3.1. *Fie $f : M \longrightarrow N$ o imersie. Atunci pentru orice $p \in M$ există hărţile (U, φ) şi (V, ψ) în jurul lui p, respectiv $f(p)$ astfel încât să avem*

$$f_{\varphi\psi}(x) = (x, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ poziţii}}),$$

unde $x = (x^1, \dots, x^m) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Este clar că, în cazul particular în care f este chiar un difeomorfism local, atunci $m = n$, deci aplicaţia $f_{\varphi\psi}$ este chiar aplicaţia identică.

Observaţie. Deoarece matricea jacobiană într-un punct a unei aplicaţii netede relativ la o pereche de sisteme de coordonate este tocmai matricea aplicaţiei tangente (diferenţialei) aplicaţiei în punctul considerat, relativ la bazele canonice în spaţiile tangente, induse de sistemele de coordonate respective, putem spune că o aplicaţie $f : M \longrightarrow N$ este o imersie dacă şi numai dacă pentru orice $p \in M$ aplicaţia $f_{*,p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ este injectivă.

4.4 Subvarietăţi ale unui spaţiu euclidian

4.4.1 Subvarietăţi parametrizate ale unui spaţiu euclidian

Subvarietăţile parametrizate ale unui spaţiu euclidian sunt generalizări imediate ale noţiunilor de *curbă parametrizată* şi *suprafaţă parametrizată*, acestea fiind cele mai simple materializări ale acestei noţiuni. Avem, mai precis, următoarea definiţie:

Definiţie. Fie $U \subset \mathbb{R}^k$ o submulţime deschisă. Se numeşte *subvarietate parametrizată de dimensiune k* a spaţiului $\mathbb{R}^n$, cu $n \geq k$, orice imersie netedă $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Exemplul 4.4.1. Dacă avem $k = 1, n = 3$, iar $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ este o aplicaţie netedă, unde I este un interval de pe axa reală, atunci condiţia ca r să fie o imersie este chiar condiţia ca $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$. Prin urmare, subvarietăţile parametrizate 1-dimensionale ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt chiar *curbele parametrizate regulare*.

Exemplul 4.4.2. Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu. Atunci o aplicaţie netedă $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ este o imersie, după cum se poate verifica imediat, dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) \neq 0$ pentru orice $(u, v) \in U$. Aşadar, *subvarietăţile parametrizate 2-dimensionale ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt suprafeţele parametrizate regulare*.

După cum se ştie din geometria curbelor şi a suprafeţelor, în general suportul unei curbe parametrizate nu este o curbă (adică o varietate diferenţiabilă de dimensiune 1), după cum suportul unei suprafeţe parametrizate nu este o suprafaţă (adică o varietate diferenţiabilă de dimensiune 2). Un motiv este legat de prezenţa autointersecţiilor, legate de faptul că o imersie nu este o aplicaţie injectivă, ci doar local injectivă. Există, însă, şi alte motive, de natură topologică, pe care le vom examina mai târziu. Pe de altă parte, în general, o curbă nu este suportul unei singure curbe parametrizate, iar o suprafaţă nu este suportul unei singure suprafeţe parametrizate. Ce ştim, însă, este că o fiecare punct al unei curbe (suprafeţe) are o vecinătate (în topologia curbei, respectiv a suprafeţei, indusă de topologia spaţiului euclidian ambient) care este suportul unei curbe (suprafeţe) parametrizate. Parametrizarea curbei sau suprafeţei respective este mai mult decât o parametrizare obişnuită, pentru că se cere chiar ca ea să fie nu doar injectivă (ceea ce, încă o dată, de regulă nu se întâmplă) ci să fie chiar un omeomorfism pe imagine.

Vrem să utilizăm acum aceleaşi idei pentru a construi nişte obiecte din $\mathbb{R}^n$ care să fie, de data aceasta, chiar nişte varietăţi diferenţiabile. Pe moment, însă, plecăm de la o altă idee, aceea a reprezentării curbelor şi suprafeţelor cu ajutorul mulţimilor de nivel ale unor aplicaţii diferenţiabile cu valori într-un spaţiu euclidian de dimensiune 1 sau 2, de rang maxim (cu alte cuvinte, cu ajutorul unor submersii).

4.4.2 Definiţia subvarietăţii

Definiţie. O submulţime $M \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte subvarietate de dimensiune k a lui $\mathbb{R}^n$ (cu $k \leq n$) dacă orice punct $x \in M$ are o vecinătate deschisă (în $\mathbb{R}^n$) şi o submersie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ astfel încât

$$U \cap M = f^{-1}(0).$$

Dacă, în particular, în definiţia de mai sus, $k = n$, atunci condiţia de submersie este superfluă, prin urmare orice submulţime deschisă a unui spaţiu euclidian este o subvarietate diferenţiabilă a spaţiului respectiv, de dimensiune egală cu dimensiunea spaţiului ambient.

Observaţie. Se poate demonstra cu uşurinţă că o submulţime $M \subset \mathbb{R}^n$ este o subvarietate de dimensiune m dacă şi numai dacă pentru fiecare punct $x_0 \in M$ există o vecinătate deschisă U a lui x_0, o submulţime deschisă $V \subset \mathbb{R}^n$ şi un difeomorfism $\varphi : U \longrightarrow V$ astfel încât să avem $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Această proprietate serveşte, de multe ori, de definiţie a subvarietăţii.

Exemplul 4.4.3 (Sfera n-dimensională). Sfera n-dimensională $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se defineşte prin

$$S^n = \{x = (x^0, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \equiv (x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 - 1 = 0\} \equiv f^{-1}(0).$$

Este clar că aplicaţia $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 - 1$$

este o aplicaţie netedă care este o submersie pe $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, deci este, în particular, o submersie pe orice submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^{n+1}$ care nu conţine punctul 0. Dacă U este o astfel de submulţime, care, în plus, conţine întreaga sferă, sunt îndeplinite condiţiile definiţiei, de unde rezultă că sfera este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^{n+1}$, dimensiunea ei fiind egală cu $n + 1 - 1 = n$. Ne aducem aminte, desigur, că sfera este, pe de altă parte, o varietate diferenţiabilă de dimensiune n, deci ne putem aştepta să fim pe drumul cel bun în efortul nostru de a identifica submulţimi ale unor spaţii euclidiene care să fie varietăţi diferenţiabile.

Exemplul 4.4.4 (Torul n-dimensional). Torul n-dimensional $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ se defineşte, după cum se ştie, ca

$$T^n = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \left((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1, \ldots, (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 - 1\right) = (0, \ldots, 0)\}$$

Dacă definim acum aplicaţia $g : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ prin

$$g(x) = \left((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1, \ldots, (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 - 1\right),$$

atunci este clar că g este o submersie pe $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, iar $T^n = f^{-1}(0)$ şi raţionamentul din cazul sferei se poate aplica ad litteram şi aici.

Vom arăta acum că orice subvarietate se poate parametriza, local.

Teorema 4.5. *Presupunem că $M \subset \mathbb{R}^n$, iar $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $k \leq n$ este o submersie pe o submulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $U \cap M = g^{-1}(0)$. Dacă $y \in U \cap M$, atunci putem renumerota coordonatele în $\mathbb{R}^n$ astfel încât să existe submulţimile deschise $W \subset \mathbb{R}^k$ şi $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ cu $W \times V \subset U$ şi o funcţie netedă $h : W \longrightarrow V$ astfel încât aplicaţia $\Psi : W \longrightarrow W \times V$,*

$$\Psi(x) = (x, h(x))$$

să fie o parametrizare k-dimensională a lui M în jurul lui y, adică să fie o imersie injectivă cu $\Psi(W) = (W \times V) \cap M$ care să fie, în plus, omeomorfism pe imagine, în raport cu topologia de subspaţiu a lui M.

Demonstraţie. Matricea jacobiană $J(g)(y)$, de tip $(n-k) \times n$ are rangul egal cu $n-k$, deoarece g este o submersie. Renumerotând, la nevoie, coordonatele în $\mathbb{R}^n$, putem face astfel încât ultimele $n-k$ coloane ale acestei matrici să fie liniar independente. Dacă exprimăm un element din $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ în noul sistem de numerotare ca (x, z), cu $x \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^{n-k}$, atunci putem grupa ultimele $n-k$ coloane ale lui $J(g)(y)$ într-o matrice $(n-k) \times (n-k)$, $J_z(g)(y)$. Primele k coloane ale matricii $J(g)(y)$ formează o altă matrice, pe care o notăm cu $J_x(g)(y)$.

Considerăm aplicaţia $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $F(x, z) = (x, g(x, z))$. Prin diferenţiere se obţine

$$J(F)(x,z) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ J_x(g) & J_z(g) \end{bmatrix} (x,z)$$

şi, deci,

$$\det J(F)(y) = \det J_z(g)(y) \neq 0.$$

Don teorema de inversiune locală, rezultă că există o vecinătate U' a lui $y = (x_0, z_0)$, cu $U' \subset U$ astfel încât restricţia lui F la U' să fie un difeomorfism pe imaginea $U'' = F(U') \ni (x_0, 0)$. Alegem mulţimile deschise $W \subset \mathbb{R}^k$ şi $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ cu $W \times \{0\} \subset U''$ şi $y \in W \times V \subset U'$ şi definim $h : W \longrightarrow V$ prin ecuaţia

$$\Psi(x) \equiv (x, h(x)) = F^{-1}(x, 0).$$

Rezultă imediat faptul că Ψ este o imersie injectivă, deoarece F^{-1} este o imersie injectivă pe U'', fiind restricţia unui difeomorfism.

Pe de altă parte, pentru orice $(x, z) \in (W \times V) \cap M$ avem $g(x, z) = 0$ şi, deci, $F(x, z) = (x, 0)$, prin urmare $(x, z) = \Psi(x)$, ceea ce demonstrează egalitatea $\Psi(W) = (W \times V) \cap M$. Faptul că Ψ este un omeomorfism pe imagine rezultă imediat, deoarece, mulţimea $(W \times V) \cap M$ este deschisă în M, conform definiţiei topologiei de subspaţiu. ■

Corolarul 4.3. *Pentru g şi Ψ ca în teorema de mai sus, avem*

$$\operatorname{Im} d\Psi(x) = Ker\, dg(\Psi(x)),$$

pentru orice $x \in W$.

Demonstraţie. Aplicăm regula de diferenţiere a funcţiilor compuse aplicaţiei $g \circ \Psi$, care este identic nulă pe W. Obţinem atunci

$$dg(\Psi(x)) \circ d\Psi(x) = 0,$$

de unde rezultă că $\operatorname{Im} d\Psi(x) \subseteq Ker\, dg(\Psi(x))$. Pe de altă parte, deoarec Ψ este o imersie, iar g este o submersie, avem

$$\dim \operatorname{Im} d\Psi(x) = k = \dim Ker\, dg(\Psi(x)),$$

deci cele două subspaţii trebuie să coincidă. ■

Corolarul 4.4. *Orice subvarietate k-dimensională M a lui $\mathbb{R}^n$, cu $k \leq n$ este o varietate diferenţiabilă de dimensiune k.*

Demonstraţie. Este evident că M este un spaţiu topologic Hausdorff şi cu bază numărabilă în raport cu topologia de subspaţiu, deoarece aceste proprietăţi sunt ereditare. Mai rămâne doar să construim un atlas diferenţiabil de dimensiune k pe M. Este evident faptul că, deoarece M este o subvarietate, fiecare punct $x \in M$ are o vecinătate deschisă (în $\mathbb{R}^n$) U_x pentru care toate construcţiile din teoremă se pot face. Vom nota cu V_x, W_x, Ψ_x mulţimile, respectiv funcţia din teoremă asociate mulţimii U_x. Cum $x \in (W_x \times V_x) \cap M$, este clar că familia de mulţimi (deschise în topologia de subspaţiu a lui M) $\{W_x \times V_x\}_{x \in M}$ acoperă mulţimea M. Definim acum, pentru fiecare $x \in M$, $\varphi_x : (W_x \times V_x) \cap M \longrightarrow \mathbb{R}^k$,

$$\varphi_x(u) = \Psi_x^{-1}(u).$$

Este clar, din teoremă, că toate aceste aplicaţii sun omeomorfisme pe imagine. În plus, dacă $x, y \in M$, atunci avem

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} = \Psi_x^{-1} \circ \Psi_y : W_y \longrightarrow W_x$$

şi este clar că această aplicaţie este netedă. ∎

În general, imaginea unei imersii injective între deschişi din spaţii euclidiene nu este o subvarietate. Are totuşi, loc, un rezultat ceva mai slab:

Teorema 4.6. *Fie $X \subset \mathbb{R}^m$ un deschis şi $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ o imersie. Atunci fiecare punct $x_0 \in X$ are o vecinătate deschisă $X_0 \subset X$ astfel încât $f(X_0)$ să fie o subvarietate m-dimensională a lui $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. Renumerotând, la nevoie, coordonatele, putem presupune că matricea diferenţialei $d_{x_0} f$ are minorul din stânga–sus nenul, adică

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Mulţimea $X \times \mathbb{R}^{n-m}$ este, în mod evident, deschisă în $\mathbb{R}^n$. Considerăm aplicaţia, evident netedă,

$$\Psi : X \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi(x, y) = f(x) + (0, y).$$

Avem

$$\left[d_{(x_0,0)}\Psi\right] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & I_{n-m} \end{pmatrix},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x_0), \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^{m+1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^{m+1}}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x_0).$$

Deoarece $\det\left[d_{x_0,0}\Psi\right] = \det A \neq 0$, rezultă că $d_{(x_0,0)}\Psi$ este un automorfism liniar al lui $\mathbb{R}^n$.

Din teorema de inversiune locală aplicaţă lui Ψ, rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui $(x_0, 0)$ şi o vecinătate deschisă V a lui $\Psi(x_0, 0)$ astfel încât $\Psi : U \longrightarrow V$ este un difeomorfism. Fie $\Phi : V \longrightarrow U$, $\Phi = \Psi^{-1}$ şi $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, 0) \in U\}$. Atunci X_0 este o vecinătate deschisă a lui x_0 în $\mathbb{R}^m$ şi

$$\Phi(U \cap f(X_0)) = \Phi(\Psi(X_0 \times \{0\})) = X_0 \times \{0\} = U \cap \left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right).$$

Corolarul 4.5. *Fie I un interval deschis de pe axa reală şi $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă parametrizată netedă. Presupunem că $t_0 \in I$ şi $\gamma'(t_0) \neq 0$. Atunci există un interval deschis $I_0 \subset I$, cu $t_0 \in I_0$ astfel încât $\gamma(I_0) \subset \mathbb{R}^n$ să fie o curbă netedă (adică o subvarietate 1-dimensională a lui $\mathbb{R}^n$).*

Corolarul 4.6. *Fie X o submulţime deschisă în $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ şi $f : M \longrightarrow N$ – o imersie netedă. Atunci pentru fiecare $x_0 \in X$ există o vecinătate deschisă V a lui $(x_0, 0)$ în $\mathbb{R}^n$, o mulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$ şi un difeomorfism $\psi : V \longrightarrow U$ astfel încât $\psi(x, 0) = f(x)$ pentru orice $x \in X$ astfel încât $(x, 0) \in V$.*

∎

Dacă $M \subset \mathbb{R}^n$ este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$, atunci se poate constata cu uşurinţă că injecţia canonică $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $i(x) = x$, pentru orice $x \in M$, este o scufundare, iar imaginea sa este, desigur, chiar M. Orin urmare, *orice subvarietate a unui spaţiu euclidian este imaginea unei scufundări*. Afirmaţia inversă este, de asemenea, adevărată, adică avem:

Teorema 4.7. *Fie $X \subset \mathbb{R}^m$ o submulţime deschisă şi $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – o scufundare. Atunci $f(X)$ este o subvarietate m-dimensională a lui $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie. Fie $M = f(X)$ şi $y_0 \in M$. Conform teoremei 4.6, punctul $x_0 = f^{-1}(y_0)$ are o vecinătate deschisă $X_0 \subset X$ astfel încât $M_0 = f(X_0)$ este o subvarietate de dimensiune m a lui $\mathbb{R}^n$. Asta înseamnă că există o vecinătate U_1 a lui y_0 şi o vecinătate V_1 a lui 0 în $\mathbb{R}^n$, precum şi un difeomorfism $\Phi : U_1 \longrightarrow V_1$ astfel încât să avem $\Phi(M_0 \cap U_1) = V_1 \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Deoarece f este u omeomorfism pe imagine, fiind o scufundare, rezultă că M_0 este deschisă în M. Asta înseamnă că există un deschis $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $M_0 = M \cap U_2$. Dacă punem $U = U_1 \cap U_2$, atunci U este o vecinătate deschisă a lui y_0 în $\mathbb{R}^n$, iar $V = \Phi(U)$ este o vecinătate deschişă a lui 0 în $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Cum punctul y_0 a fost ales arbitrar, demonstraţia este încheiată.

■

4.4.3 Spaţiul tangent la o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ într-un punct

Teorema 4.8. *Fie M o subvarietate k-dimensională a lui $\mathbb{R}^n$ şi fie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $g : U' \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ două submersii definite pe vecinătăţi ale unui punct $y \in M$ astfel încât $U \cap M = f^{-1}(0)$ şi $U' \cap M = g^{-1}(0)$. Atunci nucleul lui $df(y)$ şi nucleul lui $dg(y)$ sunt unul şi acelaşi subspaţiu k-dimensional al lui $T_y\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n_y$ (spaţiul vectorial al vectorilor legaţi în punctul y), adică*

$$Ker\, df(y) = \{\xi \in T_y\mathbb{R}^n \mid df(y)(\xi) = 0\} = Ker\, dg(y) \subset T_y\mathbb{R}^n.$$

Acest subspaţiu se numeşte spaţiul tangent la subvarietatea *M în punctul y.*

Demonstraţie. Fie Ψ parametrizarea asociată lui f ca în demonstraţia teoremei 4.5. Deoarece $f \circ \Psi$ şi $g \circ \Psi$ sunt egale cu zero pe domeniile lor de definiţie, avem, ca în demonstraţia corolarului 4.4,

$$Ker\, df(y) = \mathrm{Im}\, d\Psi(\Psi^{-1}(y)) = Ker\, dg(y).$$

■

De remarcat că, renumerotând, eventual, coordonatele, se poate presupune că, notând $u = \Psi^{-1}(y)$, spaţiul tangent este generat de vectorii $\partial\Psi/\partial x^i(u)$, $i = 1, \ldots, k$.

Observaţie. Se poate verifica imediat că, în realitate, spaţiul tangent la o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ se poate identifica în mod natural cu spaţiul tangent la această subvarietate, privită ca varietate diferenţiabilă, cu structura descrisă mai sus.

Exemplul 4.4.5 (Spaţiul tangent la torul bidimensional). După cum am văzut, torul bidimensional $M = T^2$ se poate scrie ca $T^2 = g^{-1}(0)$, unde $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este submersia

$$g(x^1, x^2, x^3, x^4) = ((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1, (x^3)^2 + (x^4)^2 - 1).$$

Vrem să determinăm spaţiul tangent la tor în punctul $x_0 = (0, 1, 0.6, 0.8)$, punct care se poate verifica imediat că aparţine torului. După un calcul imediat, obţinem

$$Dg(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 1.6 \end{bmatrix}$$

După cum am văzut, spaţiul tangent $T_{x_0}M$ este nucleul diferenţialei $Dg(x_0)$, cu alte cuvinte avem

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 1.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = 0,$$

adică

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 3x^3 + 4x^4 = 0 \end{cases}.$$

4.5 Subvarietăţi ale unei varietăţi diferenţiabile

Suntem gata acum să definim noţiunea de subvarietate a unei varietăţi oarecare, nu numai a unui spaţiu euclidian.

Definiţie. O submulţime Q a unei varietăţi diferenţiabile de dimensiune n, M, se numeşte *subvarietate* k-dimensională dacă, pentru orice punct $q \in Q$ există o hartă (U, φ) pe M în jurul lui q astfel încât $\varphi(Q \cap U)$ să fie o subvarietate k-dimensională a lui $\mathbb{R}^n$. Întregul $n - k$ se numeşte *codimensiune* a lui Q.

Observaţii. 1) Despre hărţile de pe varietatea M care au proprietatea din definiţia subvarietăţii se spune că au *proprietatea de subvarietate* relativ la varietatea Q.
2) O hartă (U, φ) pe M are proprietatea de subvarietate relativ la subvarietatea Q dacă şi numai dacă $\varphi(Q \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$, unde $\mathbb{R}^k$ este subspaţiul lui $\mathbb{R}^n$ ce se obţine prin anularea ultimelor $n - k$ coordonate.
3) Dacă $M = \mathbb{R}^n$, atunci subvarietăţile lui M coincid cu subvarietăţile în sensul paragrafului precedent.

Vom demonstra mai întâi o lemă tehnică, ce are şi un interes intrinsec.

Lema 4.1. *Fie U şi V submulţimi deschise în $\mathbb{R}^m$, respectiv $\mathbb{R}^n$, privite ca subvarietăţi ale acestor spaţii euclidiene, de dimensiuni egale, fireşte, cu cele ale spaţiilor ambiente corespunzătoare. Dacă M este o subvarietate k-dimensională a lui U, N este o subvarietate n-dimensională a lui V, iar $f : U \longrightarrow V$ este o aplicaţie netedă (sau o imersie sau o submersie) astfel încât $f(U) \subset V$, atunci restricţia lui F la M este o aplicaţie netedă (sau o imersie, respectiv submersie).*

Demonstraţie. Fie $p \in M$ şi $q = f(p) \in N$. Din teorema funcţiilor implicite, rezultă că există parametrizările netede $\Phi : W \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ şi $\Psi : Y \subset \mathbb{R}^l \longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$, de forma

$$\Phi(x) = (x, z(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, \quad \Psi(y) = (y, w(y)) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}, \tag{4.2}$$

unde, eventual, s-a schimbat, la nevoie, ordinea coordonatelor. Scriem acum aplicaţia f sub forma

$$f(p) = f(x, z) = (F(x, z), G(x, z)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l. \tag{4.3}$$

Este clar că $(U' \cap M, \Phi^{-1})$ şi $(V' \cap N, \Psi^{-1})$ sunt hărţi pe M, respectiv N, în jurul lui p, respectiv q. Prin urmare, pentru a demonstra lema, este suficient să demonstrăm că dacă $f : U \longrightarrow V$ este o aplicaţie netedă (imersie, respectiv submersie), atunci aceleaşi proprietăţi le are aplicaţia

$$\left(f\big|_M\right)_{\Phi^{-1}\Psi^{-1}} \equiv \Psi^{-1} \circ f\big|_M \circ \Phi = F \circ \Phi : W \longrightarrow Y.$$

Dacă f este o aplicaţie netedă, atunci şi F este netedă (este compunerea lui f cu o proiecţie), deci şi $F \circ \Phi$ este netedă, deoarece parametrizarea Φ este netedă.

Dacă f este o imersie netedă, atunci toate trei componentele diferenţialei

$$D(\Psi^{-1} \circ f\big|_M \circ \Phi)(x) = D\Psi^{-1}(q) \circ Df(p) \circ D\Phi(x)$$

sunt aplicaţii liniare injective, deci diferenţiala este injectivă, ceea ce demonstrează că $\Psi^{-1} \circ f\big|_M \circ \Phi$ este o imersie.

Ceva mai complicat este cazul în care aplicaţia noastră esteo submersie. Atunci scriem matricea derivatei ca fiind o matrice de tip $(k + (m - k)) \times (l + (n - l))$,

$$Df(p) = \begin{bmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

unde notaţiile sunt suficient de sugestive. De exemplu, F_x este matricea care conţine derivatele parţiale ale funcţiei F în raport cu componentele vectorului x, iar celelalte notaţii au semnificaţii similare. De remarcat că, deoarece aplicaţia f este o submersie, trebuie să avem, în acest caz, $m \geq n$.

Deoarece aplicaţia $Df(p)$ este surjectivă, rezultă că pentru orice $\zeta \in T_y\mathbb{R}^k$, există o soluţie $(\xi_1, \xi_2) \in T_x\left(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}\right)$ a ecuaţiei liniare

$$\begin{bmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \\ w_y\zeta \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Pe de altă parte, din ecuaţiile (4.2), (4.2) şi din condiţia $f(M) \subseteq N$ rezultă, utilizând regula de derivare a funcţiilor compuse, că

$$D(F \circ \Phi)(x) = DF(x, z(x)) = F_x + F_z z_x; \tag{4.6}$$

$$D(G \circ \Phi)(x) = D(w \circ F \circ \Phi)(x) = w_y \circ (F_x + F_z z_x) = G_x + G_z z_x. \tag{4.7}$$

Comparând (4.5), (4.6) şi (4.7) găsim imediat că, odată fixat ξ_1, este suficient să punem $\xi_2 = z_x\xi_1$ şi obţinem o soluţie a ecuaţiei (4.5). Altfel spus, dacă se dă un $\zeta \in T_y\mathbb{R}^l$, atunci există un $\xi_1 \in T_x\mathbb{R}^k$ astfel încât

$$(F_x + F_z z_x)\xi_1 = \zeta.$$

Dar, în conformitate cu (4.6), aceasta este acelaşi lucru cu a spune că $D(F \circ \Phi)(x)$ este o surjecţie, ceea ce demonstrează că aplicaţia $\Psi^{-1} \circ f\big|_M \circ \Psi = F \circ \Phi : W \longrightarrow Y$ este o submersie. ■

4.6 Topologia de subvarietate

Am definit o subvarietate a unei varietăţi diferenţiabile utilizând submersii şi parametrizări. Este de aşteptat ca topologa de varietate a unei subvarietăţi a unei varietăţi diferenţiabile să fie chiar topologia indusă de topologia varietăţii ambiente (topologia de subspaţiu). Lucrurile stau chiar aşa, dar demonstraţia nu este tocmai trivială. Avem, prin urmare

Teorema 4.9. *Dacă Q este o subvarietate a unei varietăţi diferenţiabile M, atunci mulţimile deschise din Q sunt de forma $U = U' \cap Q$, unde U' este o submulţime deschisă a lui M. Altfel spus, topologia lui Q este topologia de subspaţiu.*

Demonstraţie. Considerăm, mai întâi, cazul cel mai simplu, în care $M = \mathbb{R}^n$, iar Q este o subvarietate k-dimensională a lui M de forma $\Psi(W)$, unde $\Psi : W \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow Q \subseteq U$ este o parametrizare cu func'ii implicite de dimensiune k, altfel spus,

$$\Psi(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, z^1(x), \dots, z^{n-k}(x)), \tag{4.8}$$

iar W şi U sunt submulţimi deschise în $\mathbb{R}^k$, respectiv $\mathbb{R}^n$. Din definiţia topologiei de varietate, o submulţime $V \subseteq Q$ este deschisă în această topologie dacă şi numai dacă $W_1 \equiv \Psi^{-1}(V)$ este deschisă în W (deci în $\mathbb{R}^k$). Prin urmare, V se va scrie sub forma

$$V = U_1 \cap Q,$$

unde U_1 este submulţimea deschisă a lui $\mathbb{R}^n$

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid x \in W_1, z^i(x) - 1 < y^i < z^i(x) + 1,\ 1 \le i \le k\};$$
$$x = (x^1, \dots, x^k),\ y = (y^1, \dots, y^{n-k}).$$

Invers, acum, dacă $V = U_1 \cap Q$, iar mulţimea $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă, atunci V este imaginea proiecţiei lui U_1 pe primele k componente, care este o submulţime deschisă $W_1 \subseteq W$. Prin urmare, mulţimea $V = \Psi(W_1)$ este deschisă în Q, ceea ce încheie demonstraţia în cazul special.

Mărim acum puţin generalitatea şi admitem că Q este o subvarietate k-dimensională oarecare, dar tot a lui $\mathbb{R}^n$. După cum am văzut, orice subvarietate, şi, în particular, orice subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ este o varietate diferenţiabilă în sine şi, utilizând teorema funcţiilor implicite, putem alege un atlas format din hărţi de forma $\{(V_\alpha, \Psi_\alpha^{-1})\}_{\alpha\in I}$, unde fiecare dintre aplicaţiile

$$\Psi_\alpha : W_\alpha \subset \mathbb{R}^k \to V_\alpha = U_\alpha \cap Q \subset \mathbb{R}^n$$

este o parametrizare de forma 4.8, eventual cu coordonatele rearanjate. Din definiţie, fiecare Ψ_α este surjectivă, U_α este deschisă în $\mathbb{R}^n$, iar $Q = \bigcup V_\alpha$.

Din definiţia topologiei de varietate, o submulţime V este deschisă în Q dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha \in I$ mulţimea $V \cap V_\alpha$ este deschisă în $\Psi_\alpha(W_\alpha)$ sau, conform primei părţi a demonstraţiei, dacă şi numai dacă, pentru orice $\alpha \in I$, avem $V \cap V_\alpha = U_{1,\alpha} \cap Q$, unde $U_{1,\alpha}$ este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$. Dar aceasta este acelaşi lucru cu a scrie

$$V = \bigcup_\alpha (V \cap V_\alpha) = \bigcup_\alpha (U_{1,\alpha} \cap Q) = \left(\bigcup_\alpha U_{1,\alpha}\right) \cap Q = U_1 \cap Q,$$

unde mulţimea $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ este, în mod evident, deschisă, fiind o reuniune de mulţimi deschise, prin urmare afirmaţia teoremei este adevărată şi în acest caz.

În sfârşit, considerăm acum cazul general. Fie $\{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma\in J}$ un atlas pe varietatea ambientă M, format din hărţi cu proprietatea de subvarietate relativ la subvarietatea Q. Utilizând definiţia subvarietăţii şi a topologiei de varietate a lui Q, o submulţime V este deschisă în Q dacă şi numai dacă, pentru orice $\gamma \in J$, mulţimea $\varphi_\gamma(V \cap U_\gamma)$ este deschisă în $\varphi_\gamma(Q \cap U_\gamma)$. Pe de altă parte, deoarece, utilizând din nou definiţia subvarietăţii, pentru orice $\gamma \in J$, mulţimea $\varphi_\gamma(Q \cap U_\gamma)$ este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$, utilizând pasul al doilea al demonstraţiei, obţinem că $\varphi_\gamma(V \cap U_\gamma)$ este deschisă în $\varphi_\gamma(Q \cap U_\gamma)$ dacă şi numai dacă avem $\varphi_\gamma(V \cap U_\gamma) = U_{1,\gamma} \cap \varphi_\gamma(Q \cap U_\gamma)$, unde $U_{1,\gamma}$ este o submulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Dar asta este acelaşi lucru cu a cere ca

$$V \cap U_\gamma = \varphi_\gamma^{-1}(U_{1,\gamma}) \cap Q,$$

pentru orice $\gamma \in J$, unde, deoarece φ_γ este continuă, mulţimea $\varphi_\gamma^{-1}(U_{1,\gamma})$ este deschisă în M. Dar asta înseamnă că V se poate scrie sub forma

$$V = U' \cap Q, \quad U' = \bigcup_{\gamma\in J} \varphi_\gamma^{-1}(U_{1,\gamma}),$$

iar ultima mulţime este deschisă în M, deci teorema este demonstrată. ■

4.7 Submersii, scufundări şi subvarietăţi

După cum am văzut, nici măcar în cele mai simple cazuri, imaginea unei varietăţi printr-o imersie, chiar dacă aceasta este injectivă, *nu* este o subvarietate[2]. Dacă, însă, această imersie este chiar o scufundare (adică este injectivă şi proprie) atunci, după cum vom vedea, imaginea unei varietăţi *este* o subvarietate. Mai mult chiar, orice subvarietate este imaginea unei scufundări. De asemenea, mulţimile de nivel ale submersiilor vor furniza alte exemple de subvarietăţi.

Ca şi în cazul subvarietăţilor spaţiilor euclidiene, avem următorul rezultat, care leagă imersiile şi scufundările de subvarietăţi:

Teorema 4.10. *Presupunem că M şi N sunt două varietăţi diferenţiabile, astfel încât $m = \dim M \leq \dim N = n$.*

(i) Fie $f : M \to N$ o imersie. Atunci f este, local, o scufundare, adică orice punct $p \in M$ are o vecinătate deschisă $U \subset M$ astfel încât $f|_U$ să fie o scufundare.

(ii) Dacă $f : M \to N$ este o scufundare, atunci $f(M)$ este o subvarietate de dimensiune m a lui N, iar $f : M \to f(M)$ este un difeomorfism.

[2]Imaginea unei imersii injective poate fi înzestrată cu o structură de varietate diferenţiabilă, difeomorfă cu domeniul de definiţie al imersiei. Totuşi, această varietate *nu* este, de regulă, o subvarietate a codomeniului.

Demonstraţie. (i) Fie $p \in M$ şi (U_0, φ) o hartă pe M în jurul lui P, iar (V, ψ) – o hartă pe N în jurul lui $f(p)$, astfel încât să avem $f(U_0) \subset V$. Atunci reprezentarea locală

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_0) \to \psi(V)$$

este o imersie între spaţii euclidiene, prin urmare, din teorema 4.6, există o vecinătate deschisă X a lui $\varphi(p)$ în $\varphi(U_0)$ astfel încât $f_{\varphi\psi}(X)$ să fie o subvarietae m-dimensională a lui $\mathbb{R}^n$. Cum $\psi : V \to \psi(V)$ este un difeomorfism, rezultă că dacă punem $U = \varphi^{-1}(X)$, atunci $f(U)$ este o subvarietate m-dimensională a lui N. Acum, din corolarul 4.6 rezultă că $f_{\varphi\psi}$ este un difeomorfism de la $X = \varphi(U)$ la $f_{\varphi\psi}(X) = (\psi \circ f)(U)$. Astfel, f este un difeomorfism de la U la $f(U)$, unde pe $f(U)$ se consideră topologia indusă de pe N. Prin urmare, $f|_U$ este o scufundare.

(ii) Fie f o scufundare. Pentru un $q \in f(M)$, fie (V, ψ) o hartă pe N în jurul lui q şi (U, φ) – o hartă pe M în jurul lui $p = f^{-1}(q)$ astfel încât $f(U) \subset V$. Deoarece f este u omeomorfism pe imagine, $f(U)$ este o submulţime deschisă în $f(M)$. Pe de altă parte, este clar că $f(U) = f(M) \cap V$. Rezultă din demonstraţia punctului (i) că $f(M) \cap V$ este o subvarietate m-dimensională a lui N. Cum q a fost ales arbitrar, rezultă că $f(M)$ este o subvarietate m-dimensională a lui N. Din (i) rezultă că f este un difeomorfism local de la M la $f(M)$ şi, cum este şi bijecţie, este chiar un difeomorfism. ■

O submersie poate fi utilizată, în egală măsură, pentru construirea de subvarietăţi, de data aceasta ale domeniului său de definiţie, nu ale codomeniului. Vom demonstra chiar un rezultat care nu se aplică numai submersiilor, ci şi aplicaţiilor care au rangul maxim (egal cu al codomeniului) doar în anumite puncte (cu alte cuvinte, sunt submersii doar în anumite puncte).

Fie $f : M \to N$ o aplicaţie netedă între varietăţi. Atunci un punct $p \in M$ se numeşte *regular* pentru aplicaţia f dacă $\operatorname{rank}_p f$ este maxim. Un punct $q \in N$ se va numi *o valoare regulară* a lui f dacă toate punctele din $f^{-1}(q)$ sunt regulare[3]. În particular, dacă f este o imersie, atunci toate punctele sale sunt regulare, deci toate punctele din codomeniu sunt valori regulare (în cazul în care contraimaginea unui pucnt din codomeniu este vidă, nu avem ce să verificăm, deci acel punct va constitui, în egală măsură, o valoare regulară).

Are loc următorul rezultat, deosebit de util în construirea de subvarietăţi.

Teorema 4.11. *Fie $f : M \to N$ o aplicaţie diferenţiabilă, astfel încât să avem $m = \dim M \geq n = \dim N$. Atunci dacă Q este o subvarietate a lui N, de dimensiune k, formată numai din valori regulare ale lui f, mulţimea $S = f^{-1}(Q)$ este fie mulţimea vidă, fie o subvarietate a lui M, de dimensiune $m - n + k$.*

Demonstraţie. Presupunem că $S \neq \emptyset$ şi fie $p_0 \in S$. Deoarece Q este o subvarietate, există o hartă $(\widetilde{V}, \psi)$ pe N în jurul lui $f(p_0)$ astfel încât $(\widetilde{V} \cap Q, \varphi|_{\widetilde{V} \cap Q})$ să fie o hartă pe Q. Fie (U, φ) o hartă pe M astfel încât să avem $f(U) \subset \widetilde{V}$. Atunci $\varphi(p_0)$ este un punct regular al aplicaţiei $\Phi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$;i, pe baza teoremei de reprezentare locală a submersiilor, există o vecinătate deschisă V a lui $\varphi(p_0)$ în $\mathbb{R}^m$, o mulţime deschisă $W \subset \mathbb{R}^m$ şi un difeomorfism $F : V \to W$ astfel încât aplicaţia $\Phi \circ F^{-1}$ este proiecţia standard a lui $\mathbb{R}^m$ pe $\mathbb{R}^n$. De remarcat că $\varphi^{-1}(V)$ este o vecinătate deschisă în M a lui p_0, iar perechea $(\varphi^{-1}(V), \varphi^{-1}F^{-1})$ este o hartă pe M. Deoarece ΦF^{-1} este proiecţia standard şi mulţimea

$$\psi f(\varphi^{-1}(V) \cap S) \subset \mathbb{R}^n$$

este formată din puncte de forma $(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$, rezultă că mulţimea

$$F\varphi(\varphi^{-1}(V) \cap S) \subset \mathbb{R}^n$$

este formată din puncte de forma $(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0, x^{n+1}, \ldots, x^m)$. Prin urmare, harta $(\varphi^{-1}(V), \varphi^{-1}F^{-1})$ are proprietatea că

$$(\varphi^{-1}F^{-1})(\mathbb{R}^{m-n+k} \cap W) = \varphi^{-1}(V) \cap S,$$

[3]Atenţie! O valoare regulară nu este, pur şi simplu, imaginea unui punct regular. Se poate întâmpla ca un acelaşi punct să fie imaginea unui punct regular şi al unuia care nu este regular (deci care este *singular*). Un asemenea punct nu va fi numit valoare regulară.

unde $\mathbb{R}^{m-n+k} \equiv \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$. Cum o astfel de hartă se poate construi pentru fiecare punct $p_0 \in S$, rezultă că S este, într-adevăr, o subvarietate a lui M, de dimensiune $m - n + k$. ■

Corolarul 4.7 (Teorema preimaginii)**.** *Dacă $f : M^m \longrightarrow N^n$ este o aplicaţie netedă, unde $m \geq n$, iar $q_0 \in N$ este o valoare regulată a lui f, atunci $f^{-1}(q_0)$ este fie mulţimea vidă, fie o subvarietate a lui M, de dimensiune $m - n$.*

Demonstraţie. Se aplică teorema precedentă pentru $k = 0$. ■

Exemplul 4.7.1 (Varietăţile lui Brieskorn). Varietăţile lui Brieskorn, pe care le vom descrie în cele ce urmează, joacă un rol foarte imprtant în construirea aşa-numitelor sfere nestandard, care sunt varietăţi omeomorfe cu sferele, dar cu structură diferenţială nedifeomorfă cu cea a sferei. Astfel de sfere există pentru dimensiuni suficient de mari (mai precis, pentru dimensiuni mai mari de 7), după cum a demonstrat Milnor. Deşi ele nu sunt foarte importante în aplicaţii, existenţa lor a fost cea care a determinat avântul topologiei diferenţiale, pentru că a demonstrat că varietăţile diferenţiabile omeomorfe, ca varietăţi topologice, nu sunt întotdeauna şi difeomorfe, de unde necesitatea căutării unor invarianţi diferenţiali.

Se numeşte *Varietate Brieskorn* submulţimea $W^{2n-1}(d)$ a lui $\mathbb{C}^{n+1}$ descrisă prin sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2 &= 0 \\ z_0\overline{z_0} + z_1\overline{z_1} + \ldots z_n\overline{z_n} &= 2, \end{aligned} \tag{4.9}$$

unde d este un număr întreg nenegativ. Identificând $\mathbb{C}n + 1$ cu $\mathbb{R}^{2n+2}$, remarcăm imediat că o varietate Brieskorn este definită printr-un sistem de trei ecuaţii reale (ultima ecuaţie din (4.9) este o ecuaţie reală, deoarece membrul stâng este, de asemenea, real). Prin urmare, este plauzibil ca, dacă ea este, într-adevăr, o varietate diferenţiabilă, să aibă dimensiunea egală cu $2n + 2 - 3 = 2n - 1$. Ideea nostră va fi să privim coordonatele complexe şi conjugatele lor ca fiind $2n + 2$ coordonate reale independente pe $\mathbb{R}^{2n+2}$ şi să adăugăm ecuaţiilor (4.9) conjugata compexă a primei ecuaţii. Vom avea, prin urmare, o aplicaţie diferenţiabilă $f : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin

$$f(z_0, \ldots, z_n, \overline{z_0}, \ldots, \overline{z_n}) = (z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2, \overline{z_0}^d + \overline{z_1}^2 + \cdots + \overline{z_n}^2, z_0\overline{z_0} + z_1\overline{z_1} + \ldots z_n\overline{z_n}).$$

În mod clar, aplicând corolarul precedent, este suficient să demonstrăm că jacobianul $J(f)$ al aplicaţiei f are rangul 3 pe mulţimea $W^{2n-1}(d)$. După cum este uşor de constatat, jacobianul aplicaţiei f este dat de

$$J(f) = \begin{pmatrix} dz_0^{d-1} & 2z_1 & \cdots & 2z_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0d\overline{z_0}^{d-1} & 2\overline{z_1} & \cdots & 2\overline{z_n} & \\ \overline{z_0} & \overline{z_1} & \cdots & \overline{z_n} & z_0 & z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}.$$

4.8 Scufundarea varietăţilor compacte în spaţii euclidiene

Se poate demonstra că orice varietate diferenţiabilă n-dimensională se poate scufunda într-un spaţiu euclidian de dimensiune $2n + 1$. Demonstraţia este destul de complicată, presupunând o serie de "fineţuri" tehnice, de aceea o vom amâna pentru partea finală a cărţii. Demonstraţia este, însă, elementară dacă impunem condiţia ca varietatea să fie compactă şi nu impunem, în schimb, nici o restricţie asupra dimensiunii spaţiului euclidian, care poate să fie oricât de mare. Desigur, un astfel de rezultat nu are prea mare aplicabilitate practică, el demosntrează, totuşi că, cel puţin în cazul varietăţilor compacte, are sens să definim chiar varietetatea ca fiind o subvarietate a unui spaţiu euclidian.

Teorema 4.12. *Fie M o varietate diferenţiabilă compactă de dimensiune n. Atunci există un $N \in \mathbb{N}$ şi o scufundare netedă $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$.*

Demonstraţie. Reamintim că pe orice varietate diferenţiabilă există un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ astfel încât:

(i) pentru fiecare $i \in I$, $\varphi_i(U_i)$ este bila de rază 2 centrată în origine $B(0, 2)$ din $\mathbb{R}^n$;

(ii) Dacă notăm, pentru fiecare $i \in I$, $V_i \equiv \varphi_i^{-1}(B(0,1))$, atunci

$$\bigcup_{i \in I} V_i = M,$$

adică mulţimile V_i continuă să acopere varietatea M.

Dacă, în particular, varietatea M este compactă, atunci din acest atlas se poate extrage întotdeauna un atlas finit, care are, să zicem, k hărţi. Cu ajutorul acestui atlas vom construi, în mod explicit, o scufundare a lui M în $\mathbb{R}^{(k+1)n}$. Este clar că această scufundare este, de regulă, mult mai slabă decât cea furnizată de teorema lui Whitney. M fiind o varietate compactă,orice atlas al său conţine cel puţin două hărţi. Prin urmare, în cel mai fericit caz, demonstraţia noastră furnizează o scufundare a lui M într-un spaţiu euclidian de dimensiune $3n$, ceea ce, în mod evident, nu este un optim. De exemplu, în cazul sferei de dimensiune 2, se ştie că această varietate este o subvarietate a spaţiului euclidian de dimensiune 3, în timp ce demonstraţia pe care o vom da ne dă o scufundare a sferei în $\mathbb{R}^6$.

Începem prin a construi o aplicaţie netedă $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ care să verifice:

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \|y\| \le 1 \\ 0 & \text{pentru } \|y\| \ge 2 \end{cases}$$

şi, în plus, $0 < \lambda(y) < 1$ pentru $1 < \|y\| < 2$.

În acest scop, pornim, ca şi în cazul partiţiei unităţii, cu aplicaţia (netedă, după cum am demonstrat în altă parte), $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \le 0 \\ e^{-1/x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}.$$

Dacă definim acum $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $\beta(t) = \alpha(t-1)\alpha(2-t)$, atunci β este, în mod evident, netedă. În plus, β este egală cu zero în afara intervalului deschis $(1,2)$ şi este strict pozitivă pe acest interval. Considerăm, în fine, aplicaţia $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma(\tau) = \frac{\displaystyle\int_\tau^2 \beta(t)dt}{\displaystyle\int_1^2 \beta(t)dt}.$$

Se observă imediat că γ este netedă. Mai departe, dacă $\tau \in [-1,1]$, atunci

$$\int_\tau^2 \beta(t)dt = \int_\tau^1 \beta(t)dt + \int_1^2 \beta(t)dt = \int_1^2 \beta(t)dt.$$

Primul termen al sumei din membrul drept al primei egalităţi se anulează deoarece β este egală cu zero în afara intervalului $(0,1)$. Aceasta înseamnă, prin urmare, că $\gamma(t) \equiv 1$ pe intervalul $[-1,1]$. Dacă $\tau > 2$ sau $\tau < -2$ atunci integrala de la numărător din definiţia lui γ se anulează, deoarece β este identic nulă pe intervalul de integrare. În sfârşit, dacă $\tau \in (1,2)$ atunci rezultă imediat din definiţie că $\gamma(\tau) \in (0,1)$.

Dacă, acum, definim $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $\lambda(y) = \gamma(\|y\|)$ atunci această aplicaţie verifică, după cum se constată imediat, proprietăţile cerute.

Următorul pas în demonstraţia noastră este să construim componentele scufundării. Definim, mai îtâi, pentru fiecare $i \in \{1,\ldots,k\}$, $\lambda_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$, prin

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \lambda(\varphi_i(x)) & \text{dacă } x \in U_i \\ 0 & \text{dacă } x \notin U_i \end{cases},$$

apoi punem, tot pentru fiecare $i \in \{1, \dots, k\}$, $\psi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x) \cdot \varphi_i(x) & \text{dacă } x \in U_i \\ 0 & \text{dacă } x \notin U_i \end{cases}.$$

Funcţiile λ_i şi ψ_i sunt, în mod clar, netede. Avem acum tot ce ne trebuie ca să putem construi scufundarea promisă. Definim, astfel, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+1)k}$ prin

$$f(x) = (\lambda_1(x), \psi_1(x), \dots, \lambda_k(x), \psi_k(x)).$$

Netezimea lui f rezultă din faptul că toate componentele sale sunt netede, aşa că vom trece direct la demonstrarea injectivităţii sale.

Din modul în care am construit atlasul pe varietatea noastră, rezultă că mulţimile V_i, $i = 1, \dots, k$, preimaginile bilei unitate deschise din $\mathbb{R}^n$ prin aplicaţiile φ_i, acoperă întreaga varietate. Presupunem că avem două puncte x_1 şi x_2 din M astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Vom avea de considerat două situaţii:

1) Există un indice i astfel încât $x_1, x_2 \in V_i$. Din $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă, în particular, şi că $\psi_i(x_1) = \psi_i(x_2)$. Dar pe V_i avem $\lambda_i \equiv 1$, prin urmare $\psi_i|_{V_i} \equiv \varphi_i|_{V_i}$. Dar φ_i este un omeomorfism pe imagine, deci este, în particular, injectivă, deci x_1 trebuie să fie egal cu x_2.

2) Există un $i \in \{1, \dots, k\}$ astfel încât $x_1 \in V_i$, iar $x_2 \notin V_i$. Dar atunci $\lambda_i(x_1) = 1$, în timp ce $\lambda_i(x_2) < 2$, prin urmare componentele de pe poziţia $(n+1)i$ ale lui $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ nu pot fi egale, deci această situaţie nu poate să apară.

Vom demonstra acum că f este o imersie. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că rangul lui f în fiecare punct este egal cu n. Pentru fiecare $x \in M$ există un $i \in \{1, \dots, k\}$ astfel încât $x \in V_i$. Pe mulţimea V_i, după cum am remarcat mai devreme, $\psi_i \equiv \varphi_i$, ceea ce înseamnă că ψ_i are rangul n, de unde rezultă că şi f are rangul n pe această mulţime. Cum proprietatea de a fi imersie este o proprietate locală, rezultă că f este o imersie pe întreaga varietate.

Am demonstrat până acum că f este o imersie injectivă. Cum domeniul de definiţie al lui f este un spaţiu compact, iar codomeniul este un spaţiu Hausdorff, rezultă că f este şi proprie, cu alte cuvinte că este o scufundare. ■

CAPITOLUL 5

Câmpuri de vectori

5.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale.

Definiţie. Se numeşte *câmp de vectori* (sau *câmp vectorial*) neted pe o varietate diferenţiabilă M orice aplicaţie netedă $X : V \longrightarrow TM$, unde $V \subseteq M$ este o submulţime deschisă, astfel încât, pentru orice $p \in V$, avem $X(p) \overset{\text{not}}{=} X_p \in T_pM$

Observaţie. Putem obţine definiţia unui câmp de vectori oarecare pe varietatea M renunţând la cerinţa ca aplicaţia X să fie netedă. De remarcat că, în fond, un câmp de vectori este o secţiune a proiecţiei canonice a fibratului tangent la subvarietatea deschisă V, $\pi : TV \longrightarrow V$. Într-adevăr, e uşor de constatat că avem

$$(\pi \circ X)(p) = \pi(X_p) = p = 1_V(p).$$

Din acest motiv, deoarece aplicaţia π este o surjecţie, este clar că pe V există câmpuri de vectori, deoarece orice surjecţie are secţiuni. Nu este însă la fel de evident că printre aceste secţiuni există unele care sunt netede.

Exemplul 5.1.1. Dacă (U, φ) este o hartă pe varietatea M, cu coordonatele x^i, $i = 1, \dots, n$, atunci definim

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow TM, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p .$$

După cum vom vedea, aceste n câmpuri de vectori vor juca un rol fundamental, deoarece, local, orice câmp neted se poate scrie ca o combinaţie liniară a unor câmpuri de acest tip.

Vom stabili acum un criteriu de netezime pentru un câmp de vectori, care este mult mai uşor de verificat decât condiţia din definiţie.

Propoziţia 5.1.1. *Fie $X : V \longrightarrow TM$ un câmp de vectori. Atunci X este neted dacă şi numai dacă pentru orice hartă (U, φ) pe M cu $V \cap U \neq \emptyset$ aplicaţiile $X^i : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$, definite prin*

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p , \quad \forall p \in U \cap V,$$

sunt netede[1].

[1] $X^i(p)$ sunt, prin urmare, componentele lui $X_p \in T_pM$ faţă de baza $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}_{1 \le i \le n}$ a acestui spaţiu.

Demonstrație. Fie (U, φ) o hartă ca în propoziție, cu coordonatele x^i şi $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ harta indusă pe fibratul tangent TM. Atunci reprezentarea locală a lui X va fi

$$X_{\varphi\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi.$$

Prin urmare, pentru orice $p \in V \cap U$ vom avea

$$\begin{aligned}\left(X_{\varphi\widetilde{\varphi}}\right)(x^1, \dots, x^n) &= (\widetilde{\varphi} \circ X)\,(\underbrace{\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)}_{\stackrel{\text{not}}{=} p}) = \widetilde{\varphi}(X_p) = \\ &= (x^1(p), \dots, x^n(p), X^1(p), \dots, X^n(p)).\end{aligned}$$

Cum funcţiile de coordonate x^i sunt netede, rezultă că X este un câmp neted dacă şi numai dacă funcţiile X^i (numite *componentele* sale în harta considerată) sunt netede. ■

Consecința 5.1. *Pentru orice hartă (U, φ), cu coordonatele $x^i, i = 1, \dots, n$ pe varietatea diferențiabilă M, câmpurile de vectori $\partial/\partial x^i, i = 1, \dots, n$ sunt netede.*

Demonstrație. Se constată imediat că pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, câmpul $\partial/\partial x^i$ are componentele $X^i = \delta^i_j$, cu alte cuvinte aceste componente sunt funcţii constante pe U, deci netede. ■

În cele ce urmează vom nota, pentru orice mulţime deschisă $V \subset M$, cu $\mathcal{X}_V(M)$ mulţimea câmpurilor de vectori netede pe V şi cu $\mathcal{F}_V(M)$ algebra funcţiilor netede pe V. Vom renunţa la indice în cazul în care $V = M$.

5.2 Câmpurile de vectori ca operatori diferenţiali

Definiție. Fie A o algebră. Se numeşte operator diferenţial pe A un operator liniar $D : A \longrightarrow A$ care verifică, în plus, condiţia ca pentru orice $f, g \in A$ să avem

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g) \quad \text{(regula lui Leibniz).}$$

Vom demonstra, în acest paragraf, că oricărui câmp vectorial neted pe o varietate C^∞ i se poate asocia un operator diferenţial pe algebra funcţiilor netede definite pe domeniul câmpului vectorial şi invers, orice astfel de operator diferenţial este asociat unui câmp vectorial.

Fie, deci $V \subset M$ o mulţime deschisă şi $X : V \longrightarrow TM$ un câmp vectorial (nu neapărat neted). Dacă $f \in \mathcal{F}_V(M)$ este o funcţie netedă pe V, atunci lui f îi putem asocia o funcţie $X(f) : V \longrightarrow \mathbb{R}$, punând, pentru orice $p \in V$,

$$X(f)(p) \stackrel{\text{def}}{=} X_p f.$$

În general, funcţia $X(f)$ nu este netedă. Avem, însă, următorul rezultat:

Propoziția 5.2.1. *Un câmp vectorial $X : V \longrightarrow TM$ este neted dacă şi numai dacă pentru orice $f \in \mathcal{F}_V(M)$, $X(f) \in \mathcal{F}_V(M)$.*

Demonstrație. Fie (U, φ) o hartă pe M cu coordonatele x^i astfel încât $U \cap V \neq \emptyset$ şi $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ harta indusă pe TM. Atunci, pentru orice $f \in \mathcal{F}_V(M)$, aplicaţia $X(f)$ este netedă dacă şi numai dacă este netedă reprezentarea sa locală în harta aleasă (şi deci, în orice hartă, deoarece harta a fot aleasă la întâmplare). Reprezentarea locală a lui $X(f)$ este $X(f)_\varphi \equiv X(f) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$. Prin urmare,

$$\begin{aligned}X(f)_\varphi(x^1, \dots, x^n) &= \left(X(f) \circ \varphi^{-1}\right)(x^1, \dots, x^n) = X(f)\left(\underbrace{\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)}_{\stackrel{\text{not}}{=} p}\right) \\ &= X(f)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^n X^i(p)\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Cum funcţiile $\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}$ sunt netede, deoarece funcţia f este netedă, rezultă că $X(f)$ este netedă dacă şi numai dacă sunt netede funcţiile X^i, deci dacă şi numai dacă este neted câmpul X. ■

Observaţie. În propoziţia de mai sus asumpţia că f este de clasă C^∞ este esenţială. Aplicarea unui câmp de vectori reduce ordinul de diferenţiabilitate cu o unitate, deci operaţia este internă numai în cazul algebrei funcţiilor infinit diferenţiabile.

Am asociat, astfel, fiecărui câmp de vectori neted $X \in \mathcal{X}_V(M)$ un operator, notat la fel, pe algebra funcţiilor infinit diferenţiabile pe V, $\mathcal{F}_V(M)$. Vom demonstra că acest operator are proprietăţi interesante pentru noi. Mai precis, avem

Propoziţia 5.2.2. *Pentru orice câmp vectorial neted $X \in \mathcal{X}_V(M)$, operatorul $X : \mathcal{F}_V(M) \longrightarrow \mathcal{F}_V(M)$, $f \longrightarrow X(f)$, este un operator diferenţial.*

Demonstraţie. Demonstraţia rezultă imediat din faptul că, în fiecare punct, operatorul se reduce la acţiunea unui vector tangent asupra algebrei germenilor în punctul respectiv, ţinând cont de faptul că vectorul tangent este, în fapt, o derivare a algebrei germenilor. ■

Afirmaţia inversă este, în egală măsură, adevărată:

Propoziţia 5.2.3. *Orice operator diferenţial pe o mulţime deschisă $V \subset M$ provine dintr-un câmp de vectori.*

Demonstraţie. Fie $D : \mathcal{F}_V(M) \longrightarrow \mathcal{F}_V(M)$ un operator diferenţial. Atunci, dacă $p \in V$, iar h este un reprezentant al unui germene de aplicaţie diferenţiabilă în punctul p, aplicaţia h este netedă pe o vecinătate deschisă suficient de mică $U \subset V$ a lui p, deci are sens să-i aplicăm operatorul $D|_U$. Prin urmare, numărul $(Dh)(p) \equiv (D|_U h)(p)$ este bine definit. Din faptul că D este un operator diferenţial, rezultă imediat faptul că aplicaţia $h \longrightarrow (Dh)(p)$ este o derivare a alegbrei $\mathcal{F}_p(M)$ a germenilor de aplicaţii diferenţiabile în punctul p, care determină un vector tangent $X_p \in T_pM$. Definim acum $X : V \longrightarrow TM$ prin $p \longrightarrow X_p$. Am definit, astfel, un câmp de vectori pe V. Este clar acum că oricare ar fi $f \in \mathcal{F}_V(M)$, avem $X(f) = D(f) \in \mathcal{F}_V(M)$, prin urmare câmpul vectorial astfel definit este neted. ■

Pentru orice mulţime deschisă $V \subset M$, mulţimea câmpurilor de vectori netede are o structură algebrică bine definită:

Propoziţia 5.2.4. *Pentru orice mulţime deschisă $V \subset M$, mulţimea câmpurilor de vectori netede pe V, $\mathcal{X}_V(M)$ are o structură de $\mathcal{F}_V(M)$-modul. Mai mult, dacă (U,φ) este o hartă pe M, atunci modulul $\mathcal{X}_U(M)$ este un modul liber de tip finit (cu alte cuvinte, admite o bază finită).*

Demonstraţie. Prima parte a demonstraţiei este cât se poate de simplă. Nu avem decât să definim adunarea şi înmulţirea cu funcţii punctual. Mai prescis, fie $X, Y \in \mathcal{X}_V(M)$ şi $f \in \mathcal{F}_V(M)$. Atunci definim

(a) $(X+Y)(p) \stackrel{\text{def}}{=} X_p + Y_p$;

(b) $(fX)(p) \stackrel{\text{def}}{=} f(p)\cdot X_p$,

unde operaţiile de după semnul egal se fac în spaţiul tangent T_pM, care este un spaţiu vectorial real, deci au sens. Se poate verifica cu multă uşurinţă faptul că $\mathcal{X}_V(M)$, împreună cu aceste două operaţii, este, într-adevăr, un $\mathcal{F}_V(M)$-modul la stânga. Presupunem acum că U este domeniul unei hărţi cu coordonatele notate cu x^i. După cum vom arăta în cele ce urmează, câmpurile $\{\partial/\partial x^i\}_{1\le i\le n}$ formează o bază în $\mathcal{X}_U(M)$. Ne-am convins, mai sus, că aceste câmpuri de vectori formează un sistem de generatori, deoarece orice câmp se poate scrie ca o combinaţie a lor. Să ne convingem acum că ele sunt liniar independente. Presupunem că există funcţiile netede $\alpha_i \in \mathcal{F}_U(M), i = 1,\dots,n$, astfel încât

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0. \tag{*}$$

În particular, relaţia (*) rămâne, în mod evident, adevărată şi dacă este aplicată unei funcţii de coordonate, x^j, adică avem

$$0 = sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_j.$$

Cum indicele j a fost ales la întâmplare, rezultă că toţi coeficienţii trebuie să se anuleze. ■

Observaţie. Din propoziţia de mai sus rezultă că, în fond, modulul cîmpurilor de vectori definite pe un domeniu al unei hărţi este de dimensiune egală cu dimensiunea varietăţii. Cum orice submulţime deschisă a domeniului unei hărţi este, de asemenea, domeniul unei hărţi, vom spune că *modulul câmpurilor de vectori este local liber de dimensiune* n, înţelegând prin aceasta că oricare punct $p \in M$ are o vecinătate deschisă U suficient de mică astfel încât $\mathcal{X}_U(M)$ să fie liber şi de dimensiune egală cu n. Dacă $V \subset M$ este o submulţime deschisă oarecare a lui M, atunci modulul câmpurilor de vectori nu este, în general, de dimensiune n. În particular, modulul câmpurilor de vectori definite pe întreaga varietate nu este, nici el,în majoritatea cazurilor, de dimensiune n. Motivul este că, de regulă, nu putem găsi, pe o varietate diferenţiabilă de dimensiune n, n câmpuri de vectori care să fie liniar independente peste algebra funcţiilor neted pe varietate pe întreaga varietate. Uneori, aşa cum se întâmplă, de exemplu, în cazul sferei bidimensionale, nu există nici măcar un câmp de vectori care să nu se anuleze în nici un punct. O varietate M pentru care modulul $\mathcal{X}(M)$ este de dimeniune $n = \dim M$ se numeşte *paralelizabilă.* Se poate arăta că această condiţie este echivalentă cu condiţia ca fibratul tangent al varietăţii să fie *trivial*, adică să avem $TM = M \times \mathbb{R}^n$. Asta înseamnă, într-un anume sens, că spaţiile tangente la varietate în diferite puncte pot fi aşezate astfel încât să fie “paralele”, de unde şi denumirea. O clasă foarte importantă de varietăţi paralelizabile este alcătuită de *grupurile Lie*, care sunt, după cum s-a văzut, nişte varietăţi diferenţiabile care au şi structură de grup, iar operaşiile de grup sunt netede. Dintre sfere, se poate arăta că singurele paralelizabile sunt S^1, S^3 şi S^7. Este de observat că toate aceste sfere sunt grupuri Lie şi de aici se poate trage concluzia că pe restul sferelor nu se pot defini structuri de grup compatibile cu structura diferenţială.

5.3 Algebra Lie a câmpurilor de vectori

Definiţie. Se numeşte *algebră Lie* un spaţiu vectorial A pe care este definită o aplicaţie biliniară antisimetrică, numită *paranteză Lie*, $[\cdot,\cdot] : A \times A \longrightarrow A$, care verifică următoarea proprietate, numită *identitatea lui Jacobi*:

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0, \qquad \forall a,b,c \in A. \tag{5.1}$$

Exemplul 5.3.1. Considerăm spaţiul vectorial real al matricelor pătrate de ordinul n. $M_n(\mathbb{R})$. Definim paranteza Lie prin

$$[A,B] = A \cdot B - B \cdot A, \qquad \forall A,B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Este uşor de constatat că operaţia stfel definită este, într-adevăr, o paranteză Lie în sensul definiţiei de mai sus.

Dacă privim paranteza Lie ca o operaţie internă suplimentară, atunci este clar că cuadrupletul $(A,+,\cdot,[\cdot,\cdot])$ este, într-adevăr, o algebră, fără a fi, însă, o algebră comutativă. De asemenea, în general, înmulţirea definită de paranteza Lie nu este comutativă. Din antisimetria parantezei Lie, rezultă că înmulţirea este *anticomutativă*, prin urmare, dacă ar fi şi comutativă, ar rezulta că paranteza Lie este identic nulă. În general, de aceea, se numeşte *algebră Lie comutativă* un spaţiu vectorial împreună cu o înmulţire internă trivială, compatibilă cu structura de spaţiu vectorial.

Intenţia noastră este, acum, să demonstrăm că modulul câmpurilor de vectori (care este, în particular, şi un spaţiu vectorial real), poate fi înzestrat cu o paranteză Lie, putând fi, astfel, transformat într-o algebră Lie.

Fie $X, Y \in \mathcal{X}_V(M)$. Definim operatorul $L : \mathcal{F}_V(M) \longrightarrow \mathcal{F}_V(M)$ prin

$$L(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \qquad \forall f \in \mathcal{F}_V(M).$$

Propoziţia 5.3.1. *Pentru orice $X, Y \in \mathcal{X}_V(M)$, $[X, Y]$, definit prin $[X, Y](f) = L(f)$, pentru orice $f \in \mathcal{F}_V(M)$ este un câmp de vectori neted pe V, iar dacă $U \subset V$ este o submulţime deschisă, atunci avem*

$$\left[X\big|_U, Y\big|_U\right] = [X, Y]\big|_U.$$

Demonstraţie. Prima parte a afirmaţiei este imediată şi este o consecinţă directă a faptului că atât X cât şi Y sunt operatori diferenţiali. Pentru a doua parte a demonstraţiei, remarcăm că, deoarece $X\big|_U - X$ este câmpul nul pe U, rezultă că $\left[X\big|_U - X, Y\right]$ este câmpul nul pe U şi, aşadar,

$$\left[X\big|_U, Y\right] - [X, Y] = 0.$$

Prin urmare, avem că $[X|_U, Y] = [X, Y]|_U$. Analog rezultă că $[X, Y|_U] = [X, Y]|_U$, iar combinând cele două rezultate parţiale, obţinem rezultatul cerut. ■

Teorema 5.1. *Fie $V \subset M$ o submulţime deschisă. Atunci $(\mathcal{X}_V(M), [\cdot, \cdot])$, unde $[\cdot, \cdot]$ este paranteza Lie a câmpurilor de vectori, este o algebră Lie.*

Demonstraţie. Remarcăm, înainte de toate, că $\mathcal{X}_V(M)$ este un spaţiu vectorial real, dacă restrângem înmulţirea exterioară la înmulţirea cu scalari (adică cu funcţii constante). Ca spaţiu vectorial, este însă infinit dimensional, chiar în cazul în care V este domeniul unei hărţi. La această structură liniară ne referim atunci când afirmăm că $\mathcal{X}_V(M)$, împreună cu paranteza Lie este o algebră Lie. Liniaritatea şi antisimetria parantezei Lie sunt evidente, plecând doar de la definiţie. Singurul lucru care mai rămâne de verificat este identitatea lui Jacobi. Fie, deci $X, Y, Z \in \mathcal{X}_V(M)$ şi $f \in \mathcal{F}_V(M)$. Avem atunci

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z](f)) - [Y, Z](X(f)) = X(Y(Z(f)) - Z(Y(f))) - \\ &- Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f))) = X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - \\ &- Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f))),\end{aligned} \tag{a}$$

$$[Y, [Z, X]](f) = Y(Z(X(f))) - Y(X(Z(f))) - Z(X(Y(f))) + X(Z(Y(f))), \tag{b}$$

$$[Z, [X, Y]](f) = Z(X(Y(f))) - Z(Y(X(f))) - X(Y(Z(f))) + Y(X(Z(f))). \tag{c}$$

Însumând membru cu membru egalităţile (a), (b) şi (c), obţinem

$$([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])(f) = 0,$$

de unde

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

adică identitatea lui Jacobi este verificată, ceea ce încheie demonstraţia teoremei. ■

5.4 Comportarea unui câmp de vectori la o aplicaţie netedă

Fie un câmp de vectori şi $\mu : M \to N$ o aplicaţie netedă şi injectivă. Două câmpuri vectoriale $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $Y \in \mathcal{X}(N)$ se numesc *μ-corespondente* dacă pentru orice $p \in M$ avem

$$\mu_{*,p} X_p = Y_{\mu(p)} \tag{*}$$

Dacă X şi Y sunt μ-corespondente, atunci vom scrie $Y = \mu_* X$.

Observaţie. Două lucruri trebuie precizate. Mai întâi, este esenţial ca aplicaţia μ să fie injectivă, deoarece, dacă avem $\mu(p) = \mu(q)$ pentru $p \neq q$, în general nu rezultă că $\mu_{*,p}X_p = \mu_{*,q}X_q$. În al doilea rând, aplicaţia μ *nu* defineşte un morfism μ_* între modulele de câmpuri de vectori $\mathcal{X}(M)$ şi $\mathcal{X}(N)$, decât în cazul în care ea este un difeomorfism. Egalitatea (*) nu poate fi privită ca o definiţie a câmpului vectorial Y, deoarece, dacă μ nu este surjectivă, această egalitate nu defineşte valorile lui Y în toate punctele, ci doar în punctele din imaginea aplicaţiei μ. De aceea, în cazul general, egalitatea $Y = \mu_* X$ nu trebuie privită ca reflectând acţiunea unui morfism $\mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(N)$.

Proprietatea (*) admite şi o descriere globală, după cum se poate observa din propoziţia următoare.

Propoziţia 5.4.1. *Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $Y \in \mathcal{X}(N)$ două câmpuri vectoriale. Ele sunt μ-corespondente dacă şi numai dacă pentru orice $f \in \mathcal{F}(N)$ are loc relaţia*

$$(Y(f)) \circ \mu = X(f \circ \mu). \tag{**}$$

Demonstraţie. Utilizând definiţia acţiunii aplicaţiei tangente asupra unui vector tangent într-un punct la o varietate, relaţia (*) se poate rescrie

$$X_p(f \circ \mu) = Y_{\mu(p)}$$

sau, încă,

$$(X(f \circ \mu))(p) = (Y(f))(\mu(p)),$$

relaţie care, ţinând cont de faptul că punctul p a fost ales arbitrar, este echivalentă cu (**). ■

Operaţia $*$ asupra câmpurilor vectoriale se comportă bine faţă de paranteza Lie a câmpurilor de vectori:

Propoziţia 5.4.2. *Dacă $Y_i = \mu_* X_i$, $i = 1, 2$ sunt două perechi de câmpuri vectoriale μ-corespondente, atunci şi parantezele lor Lie sunt μ-corespondente, adică*

$$[Y_1, Y_2] = \mu_*[X_1, X_2].$$

Demonstraţie. Intenţia este să utilizăm propoziţia 5.4.1. În acest scop, vom calcula, pentru o funcţie $f \in \mathcal{N}$, $([Y_1, Y_2](f)) \circ \mu$. Avem

$$\begin{aligned}([Y_1, Y_2](f)) \circ \mu &= Y_1(Y_2(f)) \circ \mu - Y_2(Y_1(f)) \circ \mu = X_1(Y_2(f) \circ \mu) - \\ &- X_2(Y_1(f) \circ \mu) = X_1(X_2(f \circ \mu)) - X_2(X_1(f \circ \mu)) = \\ &= [X_1, X_2](f \circ \mu),\end{aligned}$$

ceea ce, via propoziţia 5.4.1, încheie demonstraţia. ■

Un caz particular foarte important de câmpuri μ-corespondente apare atunci când aplicaţia netedă $\mu : M \longrightarrow N$ este un difeomorfism. Atunci această aplicaţie determină, într-adevăr, un morfism între de spaţii vectoriale reale între spaţiile de câmpuri de vectori de pe cele două varietăţi, morfism care se dovedeşte a fi chiar un izomorfism de algebre Lie.

Teorema 5.2. *Un difeomorfism $\mu : M \longrightarrow N$ defineşte o aplicaţie $\mu : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(N)$, $X \longrightarrow \mu_* X$, cu*

$$(\mu_* X)_q = \mu_{*,\mu^{-1}(q)} X_{\mu^{-1}(q)},$$

aplicaţie care este chiar un izomorfism de algebre Lie.

Demonstraţie. Fiind un difeomorfism, aplicaţia μ este o bijecţie. Pentru fiecare $p \in M$, aplicaţia tangentă $\mu_* : T_pM \longrightarrow T_{\mu(p)}N$ este un izomorfism liniar. Pe de altă parte, pentru orice $q \in N$, $(\mu_*X)_q \in T_qN$ există, prin urmare câmpul μ_*X este bine definit. X şi μ_*X sunt μ-corespondente, deci, utilizând propoziţia 5.4.1 şi faptul că μ este o bijecţie, obţine, pentru orice $f \in \mathcal{F}(N)$,

$$(\mu_*X)(f) = X(f \circ \mu) \circ \mu^{-1},$$

de unde rezultă că aplicaţia $(\mu_*X)(f)$ este, de asemenea, netedă, deci câmpul μ_*X este neted. Faptul că μ_* este un izomorfism de spaţii vectoriale rezultă din modul de definire, ţinând cont de faptul că toate aplcaţiile tangente sunt izomorfisme liniare, iar faptul că este un morfism de algebre Lie rezultă din propoziţia precedentă. Subliniem încă o dată faptul că atunci când ne referim la liniaritatea aplicaţiei μ_*, avem în vedere structurile de spaţiu vectorial real pe cele două mulţimi de câmpuri vectoriale şi nu structurile de modul peste algebrele de funcţii netede corespunzătoare. ■

5.5 Ecuaţii diferenţiale pe varietăţi şi curbe integrale ale câmpurilor vectoriale

Vom demonstra, mai întâi, un rezultat util în cele ce urmează.

Propoziţia 5.5.1. *Dacă $\mu : M \longrightarrow N$ este o aplicaţie netedă, atunci şi aplicaţia $\mu_* : TM \longrightarrow TN$, dată prin $\mu_*(X_p) = \mu_{*,p}(X_p)$ pentru orice $p \in M$ şi orice $X_p \in T_pM$ este, de asemenea, netedă.*

Demonstraţie. Fie $X_p \in T_pM$ şi $\mu_*(X_p) \in T_{\mu(p)}N$. Fie (U, φ) şi (V, ψ) hărţi în jurul lui p, respectiv $\mu(p)$, iar $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$, respectiv $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ hărţile induse pe TM, respectiv TN. Reprezentarea locală a lui μ_* în hărţile $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ şi $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ este $\mu_{*\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}} = \widetilde{\psi} \circ \mu_* \widetilde{\varphi}^{-1}$. Prin urmare,

$$\begin{aligned}
(\mu_{*\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}})(x^1, \dots, x^m, X^1, \dots, X^m) &= (\widetilde{\psi} \circ \mu_*)(\underbrace{\widetilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dot{s}, x^m, X^1, \dots, X^m)}_{\overset{\text{not}}{=} X_q}) \\
&= (\mu_{*\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}})(X_q) = \widetilde{\psi}\left(J(\mu_{\varphi\psi})(x^1, \dots, x^m) \cdot (X^1, \dots, X^m)\right) = \\
&= \left(\psi(\mu(q)), J(\mu_{\varphi\psi})(x^1, \dots, x^m) \cdot (X^1, \dots, X^m)\right) = \\
&= \left((\psi \circ \mu \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n), J(\mu_{\varphi\psi})(x^1, \dots, x^m) \cdot (X^1, \dots, X^m)\right).
\end{aligned}$$

Cum toate componentele lui $\mu_{*\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}}$ sunt netede, rezultă că aplicaţia în sine este netedă, deci, hărţile fiind alese arbitrar, aplicaţia μ_* este netedă. ■

Fie acum $\gamma : I \longrightarrow M$ o curbă netedă. Atunci

$$\gamma' = \gamma_* \circ \frac{\partial}{\partial t} : I \longrightarrow TM$$

este o curbă pe TM (netedă, pe baza propoziţiei precedente), numită *liftul canonic* al lui γ. Denumirea este justificată de faptul că proiectând curba γ' prin intermediul proiecţiei canonice π a lui TM, obţinem curba γ, adică

$$\pi \circ \gamma' = \gamma.$$

Practic, pentru fiecare $t \in I$, $\gamma'(t)$ este vectorul tangent în $\gamma(t)$ la curba γ.

Dacă $X \in \mathcal{X}(M)$ este un câmp de vectori, atunci relaţia

$$\gamma' = X \circ \gamma \tag{*}$$

se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordinul întâi* pe M. O curbă γ pe M cu $\gamma(0) = p$ şi care verifică ecuaţia (*) se numeşte *soluţie a ecuaţiei* sau *curbă integrală a câmpului X* ce porneşte din p.

Presupunem acum că $\gamma : I \longrightarrow M$ este o curbă netedă. Fie (U, φ) o hartă pe M astfel încât $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. Punem $\Gamma = \varphi \circ \gamma$. Atunci, ţinând cont de definiţia lui γ_*, ecuaţia (*) se va scrie, pentru orice $s \in \gamma^{-1}(U)$,

$$\gamma'(s) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\Gamma^i}{dt}\right)_s \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(s)}.$$

Presupunem acum că în harta U câmpul X se scrie

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Atunci ecuaţia (*) se va scrie sub forma sistemului

$$\frac{d\Gamma^i}{dt} = X^i(\Gamma^1(t), \dots, \Gamma^n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Exemplul 5.5.1. Fie $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ câmpul de vectori $X = x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$. Atunci o curbă $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma = (\Gamma^1, \Gamma^2)$ este o curbă integrală a câmpului X dacă şi numai dacă Γ^1 şi Γ^2 verifică sistemul de ecuaţii

$$\frac{d\Gamma^1}{dt} = \Gamma^1(t), \quad \frac{d\Gamma^2}{dt} = \Gamma^2(t).$$

Este clar că soluţia acestui sistem este de forma $\Gamma^1(t) = A \cdot e^t$, $\Gamma^2(t) = B \cdot e^t$, unde A, B sunt constante reale oarecare. Aşadar, dacă A şi B nu se anulează simultan, curba integrală este o dreaptă care trece prin origine, iar dacă se anulează simultan, atunci curba integrală este un punct.

Pentru studiul existenţei şi unicităţii curbelor integrale ale unui câmp de vectori se utilizează în mod esenţial faptul că, local, ecuaţia diferenţială de ordinul întâi asociată câmpului vectorial este echivalentă cu un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare pe un spaţiu euclidian. Vom reaminti, de aceea, teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei unui astfel de sistem.

Teorema 5.3. *Fie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicaţie netedă, unde $U \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi fie $a \in U$. Atunci există o vecinătate deschisă V a punctului a şi un interval deschis $J \subset \mathbb{R}$ cu $0 \in J$ astfel încât pentru fiecare $z \in V$ există o singură curbă netedă $C : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cu $C(0) = z$ (deci care pleacă din z) astfel încât*

$$\frac{dC^i}{dt} = f^i(C^1, \dots, C^n), \quad , i = \overline{1, n}.$$

În plus, dacă notă această curbă cu C_z, atunci aplicaţia

$$\phi : J \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad , \phi(s, z) = C_z(s)$$

este netedă (dependenţa netedă de datele iniţiale).

Suntem gata să formulăm acum teorema de existenţă şi unicitate a curbelor integrale ale unui câmp vectorial.

Teorema 5.4. *Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp vectorial neted pe M şi $p_0 \in M$. Atunci există o vecinătate deschisă V_0 a lui p_0 şi un interval deschis $J_0 \in \mathbb{R}$, cu $0 \in J_0$, astfel încât pentru orice $p \in V_0$ există o singură curbă integrală $c : J_0 \longrightarrow M$ a lui X, care pleacă din p. Orice curbă integrală a lui X care pleacă din p trebuie să coincidă cu această curbă pe o vecinătate a originii $0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Fie (U, φ) o hartă pe M, cu coordonatele x^i, astfel încât $p_0 \in U$. Presupunem că

$$X\big|_U = \sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

cu X^i netede pe $\varphi(U)$. Aplicăm teorema 5.3 cu $a = \varphi(p_0)$. Cu notaţiile din această teoremă, rezultă că există o vecinătate deschisă $V_0 = \varphi^{-1}$ a lui p_0 în M şi un interval deschis $J_0 = J \subset \mathbb{R}$, cu $0 \in J_0$ astfel încât pentru fiecare $p = \varphi^{-1}(z) \in V_0$ există o singură curbă $c = \varphi^{-1} \circ C : J_0 \longrightarrow M$, care pleacă din p şi care este o curbă integrală a câmpului X. ∎

Vom demonstra acum o lemă tehnică ce se va dovedi utilă în cele ce urmează.

Lema 5.1. *Fie $c : J \longrightarrow M$ o curbă integrală a lui X. Dacă $s \in J$ este fixat şi $\lambda_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este translaţia $\lambda_s(a) = a + s$, atunci curba $c_1 = c \circ \lambda_s$ este o curbă integrală a lui X cu domeniul de definiţie $J_1 = \lambda_{-s}(J)$, care porneşte din $c(s)$.*

Demonstraţie. Remarcăm, înainte de toate, faptul că liftul curbei c_1 este dat de

$$c_1' \equiv C_{1*} \circ \frac{\partial}{\partial t} = c_* \circ \lambda_{s*} \circ \frac{\partial}{\partial t}.$$

Dar $\frac{\partial}{\partial t}$ comută cu translaţiile, deci obţinem

$$c_1' = c_* \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \lambda_s = c' \circ \lambda_s = X \circ c_1,$$

adică c_1 este, într-adevăr o curbă integrală. Se verifică uşor afirmaţiile referitoare la condiţia iniţială şi la domeniul de definiţie. ∎

Următoarea propoziţie descrie o proprietate a curbelor integrale care este complet analoagă unei proprietăţi a soluţiilor unei probleme Cauchy pentru un sistem de ecuaţii.

Propoziţia 5.5.2. *Fie $X \in \mathcal{X}(M)$. Dacă $c_i : J_i \longrightarrow M, i = 1, 2$ sunt două curbe integrale ale lui X care pleacă din acelaşi punct al lui M, atunci ele coincid pe domeniul comun de definiţie, adică pe $J_1 \cap J_2$.*

Demonstraţie. Fie $S = \{s \in J_1 \cap J_2 \mid c_1(s) = c_2(s)\}$. Vom demonstra că $S = J_1 \cap J_2$. Ideea este să deomonstrăm că S este atât închisă cât şi deschisă în topologia de subspaţiu a lui $J_1 \cap J_2$. Cum $J_1 \cap J_2$ este un spaţiu conex, iar mulţimea S este nevidă (conform ipotezei, ea conţine cel puţin punctul 0), va rezulta că $S = J_1 \cap J_2$.

Fie, deci, $s \in S$. Atunci, conform lemei 5.1, curbele $c_11 = c_1 \circ \lambda_s$ şi $c_21 = c_2 \circ \lambda_s$ sunt curbe integrale ale lui X care pleacă din $c_1(s) = c_2(s)$. Atunci, din teorema de existenţă şi unicitate a curbelor integrale, c_{11} şi c_{21} coincid pe o vecinătate a originii din $\mathbb{R}$. Aşadar, c_1 şi c_2 coincid pe o vecinătate a lui s în $J_1 \cap J_2$, prin urmare punctul s are o întreagă vecinătate conţinută în mulţimea S, deci această mulţime este deschisă.

Vom demonstra acum că S este închisă în topologia de subspaţiu. Aceasta este totuna cu a demonstra că mulţimea $A \equiv J_1 \cap J_2 \setminus S$ este deschisă în această topologie. Dacă $A = \emptyset$, atunci demonstraţia propoziţiei este încheiată. Presupunând că $A \neq \emptyset$, fie $r \in A$. Atunci, din definiţia lui A, rezultă că $c_1(r) = c_2(r)$. M fiind un spa'iu topologic Hausdorff, $c_1(r)$ şi $c_2(r)$ au vecinătăţi deschise disjuncte. Pe de altă parte, deoarece c_1 şi c_2 sunt aplicaţii netede, deci continue, rezultă că $c_1 \neq c_2$ pe o întreagă vecinătate a lui r în $\mathbb{R}$. Această vecinătate este inclusă, deci, în A, de unde rezultă că mulţimea A este deschisă, deci S este închisă, ceea ce încheie demonstraţia teoremei. ∎

Observaţie. În demonstraţia propoziţiei de mai sus se utilizează în mod esenţial faptul că varietatea M este un spaţiu topologic Hausdorff. Această condiţie este necesară, într-adevăr, pentru ca teorema să fie adevărată. Pe o varietate care nu este Hausdorff se pot construi contraexemple.

În cele ce urmează, pentru fiecare punct $p \in M$, vom nota cu $J(p)$ intervalul maxim pe care se poate defini o curbă integrală a câmpului vectorial X, care pleacă din punctul p. O curbă integrală definită pe intervalul maximal se va numi *maximală* sau *maximă*.

Următoarea propoziţie ne spune că "translatând" o curbă integrală maximală, se obţine tot o curbă integrală maximală (se înţelege, plecând dintr-un alt punct).

Propoziţia 5.5.3. *Fie γ_p curba integrală maximală prin punctul $p \in M$. Dacă $s \in J(p)$, atunci curba $\gamma_p \circ \lambda_s$ este o curbă integrală maximală ce pleacă din punctul $\gamma_p(s)$, iar domeniul său de definiţie este $\lambda_{-s}(J(p))$.*

Demonstraţie. Din lema 5.1 rezultă că $\gamma_p \circ \lambda_s$ este, într-adevăr, o curbă integrală a lui X, cu domeniul de definiţie $\lambda_{-s}(J(p))$ şi care pleacă din punctul $p' = \gamma_p(s)$. Ea trebuie să coincidă pe acest interval cu curba maximală prin p', prin urmare trebuie să avem $\lambda_{-s}(J(p)) \subseteq J(p')$. Pe de altă parte, de asemenea din lema 5.1, rezultă că $\gamma_{p'} \circ \lambda_{-s}$ este o curbă integrală cu domeniul $\lambda_s(J(p))$, care pleacă din $\gamma_{p'}(-s) = p$ Şi, prin urmare, dintr-un raţionament analog cu cel de mai sus, $\lambda_s(J(p')) \subseteq J(p)$. Domeniul lui $\gamma_p \circ \lambda_s$ este, de aceea, egal cu $J(p')$ şi, deci, $\gamma_p \circ \lambda_s = \gamma_{p'}$. ■

Definiţie. Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ se numeşte *complet* dacă pentru orice $p \in M$ avem $J(p) = \mathbb{R}$.

Următoarea propoziţie ne oferă o condiţie echivalentă, uneori mai uşor de verificat.

Propoziţia 5.5.4. *Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ este complet dacă şi numai dacă există un interval $I \subset \mathbb{R}$, cu $0 \in I$, astfel încât orice curbă integrală a lui X să fie definită pe I.*

Demonstraţie. Condiţia este, în mod evident, necesară, deoarece, câmpul fiind complet, orice curbă integrală se poate extinde chiar la întregul $\mathbb{R}$. Presupunem acum că este verificată condiţia din enunţ. Atunci există un număr real $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $p \in M$, avem $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset J(p)$. Să admitem că există un punct $p \in M$ astfel încât $J(p) \neq \mathbb{R}$. Prin urmare, intervalul $J(p)$ trebuie să fie mărginit, fie inferior, fie supreior. Considerăm, pentru început, că este mărginit superior şi fie $b = \sup J(p)$. Atunci, dacă $p' = \gamma(b - \varepsilon)$, conform propoziţiei precedente, intervalul maximal pentru punctul p' va fi $J(p') = \lambda_{-b+\varepsilon}(J(p))$. Prin urmare, orice element al lui $J(p')$ este strict mai mic decât ε, ceea ce înseamnă că $J(p') \not\supseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, în contradicţie cu ipoteza. Dacă, pe de altă parte, $J(p')$ are un infimum a, un raţionament anaog ne conduce la concluzia că orice element al intervalului $J(p'')$, unde $p'' = \gamma(a + \varepsilon)$ este strict mai mare decât $-\varepsilon$, deci $J(p'') \not\supseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, ceea ce este, din nou, o contradicţie cu ipoteza. ■

Propoziţia demonstrată mai sus ne va permite să demonstrăm următoarea teoremă, foarte utilă în aplicaţii.

Teorema 5.5. *Orice câmp vectorial pe o varietate compactă M este complet.*

Demonstraţie. Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $p_0 \in M$. Atunci, conform teoremei 5.4, există o vecinătate $V_0 \subseteq M$ a lui p_0 şi un interval deschis $J_0 \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât din fiecare punct al lui V_0 pleacă o curbă integrală a lui X, definită pe J_0. Deoarece M este compactă, ea se poate acoperi cu o mulţime finită de mulţimi V_0. Intersecţia intervalelor J_0 corespunzătoare acestor mulţimi va fi un interval nedegenerat care conţine pe 0, deoarece o intersecţie a unui număr finit de intervale cu această proprietate. În plus, acest interval este, în mod evident, inclus în $J(p)$ pentru orice punct $p \in M$. Aplicând acum propoziţia precedentă, ajungem la rezultatul scontat. ■

5.6 Fluxul unui câmp de vectori

Definiţie. Fie $\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times M$ o submulţime deschisă şi $F : \mathcal{A} \to M$ o aplicaţie netedă. Spunem că perechea $(\mathcal{A}, F)$ este un *grup local cu un parametru* dacă sunt verificate următoarele trei condiţii:

1) pentru orice punct $p \in M$ mulţimea $\mathcal{A}_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{A}\}$ este un interval J_p de pe axa reală cu $0 \in J_p$;

2) $F(0, p) = p$ pentru orice $p \in M$;

3) $F_{s+t}(p) = F_s(F_t(p))$, pentru orice s, t, p pentru care operaţiile au sens, adică $(t, p), (s+t, p), (s, F_t(p)) \in \mathcal{A}$, unde aplicaţia F_t duce un punct $p \in M$ în $F(t, p)$.

Această noţiune va fi foarte utilă pentru legăturile pe care le are cu teoria câmpurilor de vectori. Începem prin a introduce un concept similar, legat de câmpurile vectoriale.

Definiţie. Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp vectorial. Notăm cu $\mathcal{D}(X)$ mulţimea

$$\mathcal{D}(X) = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in J(p)\}.$$

Se numeşte *flux maximal asociat câmpului* X aplicaţia $\Phi : \mathcal{D}(X) \longrightarrow M$ care are proprietatea că pentru orice $p \in M$ aplicaţia $\Phi_p : (t, p) \longrightarrow \Phi(t, p)$ este curba integrală maximalăî care trece prin punctul p (cu alte cuvinte, cea care are ca valoare iniţială pentru $t = 0$ punctul p).

Din definiţia fluxului maximal al unui câmp d evectori, este clar că ne aşteptăm ca acest flux să determine, practic, un grup de transformări cu un parametru. În mod evident, din cele demonstrate până acum relativ la curbele integrale ale unui câmp de vectori rezultă că primele două condiţii sunt îndeplinite. Pe de altă parte, am văzut că, dacă γ_p este curba maximală prin p, iar $s \in J(p)$, atunci curba maximală prin $q = \gamma_p(s)$ este $\gamma_p \circ \lambda_s$, cu alte cuvinte avem $\gamma_q(t) = \gamma_p(s+t)$, ceea ce înseamnă că, dacă operaţiile sunt definite, avem $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$, adică este verificată şi cea de-a treia condiţie. Toate acestea au sens, însă, doar în măsura în care suntem capabili să demonstrăm că mulţimea $\mathcal{D}(X)$ este deschisă, iar aplicaţia Φ este netedă. Vom demonstra mai târziu aceste afirmaţii. Pe moment, însă, vom studia relaţia *locală* care există între câmpuri de vectori şi grupuri de transformări cu un parametru.

Fie $(\mathcal{A}, F)$ un grup local uniparametric. Atunci, pentru orice $p \in M$ avem o curbă $t \longrightarrow F_t(p)$, definită pe mulţimea $\mathcal{A}_p$. Pentru fiecare $p \in M$ notăm cu $X(p) = F_0'(p)$ – vectorul tangent la curbă în origine. Prin urmare avem $X(p) \in T_pM$. Am definit, aşadar, un câmp de vectori $X : M \longrightarrow TM$, care se numeşte *generatorul infinitezimal* al grupului local uniparametric.

Propoziţia 5.6.1. *Dacă* $(\mathcal{A}, F)$ *este un grup local uniparametric, atunci generatorul său infinitezimal este un câmp neted şi pentru orice* $p \in M$ *curba* $t \longrightarrow F_t(p)$ *este o curbă integrală prin* p *a acestui câmp de vectori.*

Demonstraţie. Fie (U, φ) o hartă pe varietatea M şi $p \in U$. Deoarece $\mathcal{A}$ este o mulţime deschisă în topologia produs de pe $\mathbb{R} \times M$ şi ea conţine punctul $(0, p)$, iar $F(0, p) = p$, din continuitatea lui F rezultă că există un $\varepsilon > 0$ şi o vecinătate W a lui p astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{A}$, iar $F_t(W) \subset U$, pentru orice $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $W \subset U$ şi notăm $B = \varphi(W)$. Definim

$$G : (-\varepsilon, \varepsilon) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad G(t, x^1, \ldots, x^n) = \varphi(F(t, \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n))).$$

Este clar că G este netedă în ansamblul variabilelor, fiind o compunere de funcţii netede. Dacă $q \in W$, punem $x = (x^1, \ldots, x^n) = \varphi(q)$ şi scriem curba $t \longrightarrow F_t(q)$ sub forma

$$F_t(q) = \varphi^{-1}(G(t, x)) = \varphi^{-1}(G^1(t, x), \ldots, G^n(t, x)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Pe de altă parte, deoarece $G(t, x) = \varphi(F_t(q))$, avem

$$F_0'(t) = \left.\frac{dF_t}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial G^i}{\partial t}\right|_{t=0}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q. \tag{*}$$

Funcţiile $g^i(x) = \left.\frac{\partial G^i}{\partial t}\right|_{t=0}(x)$ sunt netede pe B. Funcţiile $X^i = g^i \circ \varphi$ sunt, prin urmare netede. Egalitatea (*) se mai poate scrie

$$X(q) = \sum_{i=1}^{n} X^i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q,$$

de unde rezultă că, de fapt, funcţiile X^i sunt componentele câmpului $X\big|_W$ în harta (U, φ), deci X este neted pe W. Cum punctul p a fost ales arbitrar, X este un câmp neted pe întreaga varietate.

Fie, acum $p \in M$. Vom arăta că aplicaţia $t \longrightarrow F_t(p)$ este o curbă integrală a lui X care trece prin p. Fixăm $t \in \mathcal{A}_p$. Notăm $q = F_t(p)$. Trebuie să verificăm că $F_t'(p) = X(F_t(p)) = X(q)$. Fie $f \in \mathcal{F}_q(M)$ un germene. Atunci avem

$$X(q)(f) = F_0'(q)(f) = \lim_{s \longrightarrow 0} (f(F_s(q)) - f(q)).$$

Deoarece $(t, p), (0, q) \in \mathcal{A}$, rezultă că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset \mathcal{A}_p$, iar $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{A}_q$ sau, ţinând cont de condiţia 3) din definiţia grupului local uniparametric,

$$F_s(q) = F_s(F_t(p)) = F_{t+s}(p),$$

pentru orice $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Prin urmare, avem

$$X(q)(f) = \lim_{s \longrightarrow 0} (f(F_{t+s}) - f(F_t(p))) = F_t'(f).$$

■

Inversa afirmaţiei din propoziţia precedentă este, de asemenea, adevărată, adică avem

Propoziţia 5.6.2. *Pentru orice câmp de vectori $X \in \mathcal{X}(M)$ există un grup local uniparametric care are ca generator infinitezimal chiar pe X.*

Vom împărţi demonstraţia acestei propoziţii în mai multe leme.

Lema 5.2. *Fie X un câmp de vectori $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $p \in M$. Atunci există un $\varepsilon > 0$, o vecinătate deschisă W a lui p, precum şi $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \longrightarrow M$ o aplicaţie netedă, astfel încât $F(0, q) = q$ şi $t \longrightarrow F(t, q)$ să fie o curbă integrală pentru X, oricare ar fi $q \in W$.*

Demonstraţie. Fie (U, φ) o hartă în jurul lui p şi $x_0 = \varphi(p)$. În această hartă, X are o reprezentare de forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Fie $g : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicaţia, evident netedă, de componente $g^i = X^i \circ \varphi^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Considerăm problema Cauchy

$$\frac{d}{dt} y(t, x) = g(y(t, x)), \quad y(0, x) = x \in D \equiv \varphi(U). \tag{*}$$

Dacă $B = B(x_0, r)$ este o bilă deschisă astfel încât $\overline{B} \subset \varphi(U)$, atunci există un $\varepsilon > 0$ şi o soluţie $y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \longrightarrow D$ a acestei probleme Cauchy. y este netedă pe $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B$. Dacă $W = \varphi^{-1}(B)$, funcţia $F(t, q) = \varphi^{-1}(y(t, \varphi(q)))$ va fi definită şi netedă pe $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$. Avem

$$F(0, q) = \varphi^{-1}(y(0, \varphi(q))) = \varphi^{-1}(\varphi(q)) = q,$$

pentu orice $q \in W$. Pe de altă parte, pentru orice $q \in W$, fie $x = \varphi(q)$. Atunci curba $t \longrightarrow F(t, q)$ se va putea transporta pe D ca

$$\varphi \circ F(t, q) = y(t, x).$$

Componentele lui y verifică sistemul (*), care este chiar sistemul asociat curbei noastre, prin urmare curba $t \longrightarrow F(t, q)$ este o curbă integrală a câmpului X. ■

Lema 5.3. *Fie $X \in \mathcal{X}(M)$, $\mathcal{F} \subset \mathbb{R} \times M$ o submulţime deschisă şi $F : \mathcal{F} \longrightarrow M$ o aplicaţie netedă astfel încât*

1) pentru orice $p \in M$, mulţimea

$$\mathcal{F}_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{F}\}$$

este un interval deschis cu $0 \in \mathcal{F}_p$;

2) $F(0, p) = p$, pentru orice $p \in M$;

3) curba $t \longrightarrow F_t(p)$ este o curbă integrală.

Atunci $(\mathcal{F}, F)$ este un grup local uniparametric.

Demonstraţie. În mod clar, perechea $(\mathcal{F}, F)$ verifică primele două condiţii din definiţia unui grup local cu un parametru, deci doar cea de-a treia condiţie mai rămâne de verificat. Fie, deci, $p \in M, t \in \mathcal{F}_p$ şi $q = F_t(p)$. Trebuie să arătăm că dacă $s \in \mathcal{F}_q$, iar $s + t \in \mathcal{F}_p$, atunci

$$F_s(q) = F_{s+t}(p). \tag{*}$$

Considerăm curba $u \longrightarrow F_u(p)$, care este o curbă integrală a lui X, cu $F_t(p)$=q. Curba $u \longrightarrow F_u(q)$ este şi ea o curbă integrală, iar $F_0(p) = q$. Cele două curbe trec prin q, deci ele coincid pe domeniul comun de definiţie, adică iau aceeaşi valoare în $t + u$, respectiv u, dacă sunt definite în punctele respective. Prin urmare, are loc relaţia (*).

Pe de altă parte, deoarece $t \longrightarrow F_t(p)$ este o curbă integrală pentru X, iar $F_0(p) = p$, putem scrie că

$$F_0'(p) = X(p),$$

adică X este generatorul infinitezimal al grupului local cu un parametru $(\mathcal{F}, F)$. ■

Demonstraţia propoziţiei 5.6.2. Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp de vectori şi fie ε_p, W_p, F_p obiectele produse de lema 5.2 pentru un punct oarecare $p \in M$. Dacă pentru $p_1, p_2 \in M$ avem $W_{p_1} \cap W_{p_2} \neq \emptyset$, atunci

$$F_{p_1}(t, q) = F_{p_2}(t, q)$$

pentru orice $q \in W_{p_1} \cap W_{p_2}$ şi $|t| < \min(\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2})$. Putem, deci, defini o aplicaţie F pe submulţimea deschisă $\mathcal{F} \subset \mathbb{R} \times M$,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{p \in M} (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times W_p$$

după cum urmează. Dacă $(t, q) \in \mathcal{F}$, atunci, din definiţia lui $\mathcal{F}$, există un $p \in M$ astfel încât $(t, q) \in (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times W_p$. Punem, atunci, $F(t, q) = F_p(t, q)$. Observaţia de mai sus ne garantează că definiţia nu depinde de alegerea lui p. F coincide pe $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times W_p$ cu F_p, deci este netedă. Condiţiile 1,2,3 din lema 2 sunt verificate, deci perechea $(\mathcal{F}, F)$ este un grup local cu un parametru, care se numeşte *flux local asociat câmpului X*. ■

Mai avem nevoie de încă o lemă care ne va ajuta să demonstrăm teorema centrală a acestei secţiuni.

Lema 5.4. *Dacă $(\mathcal{F}, F)$ este un grup local cu un parametru pe varietatea M, iar $K \subset M$ este compactă, atunci există un $\varepsilon > 0$ şi o vecinătate deschisă W a lui K în M, astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W \subset \mathcal{F}$.*

Demonstraţie. Pentru orice $p \in M$, $(0, p) \in \mathcal{F}$, iar $\mathcal{F}$ este deschisă în $\mathbb{R} \times M$, prin urmare există un $\varepsilon_p > 0$ şi o vecinătate deschisă U_p a lui p, astfel încât $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p \subset \mathcal{F}$. Alegem, pentru fiecare $p \in K$, ε_p şi U_p ca mai sus. Atunci familia $\{U_p \mid p \in K\}$ este o acoperire deschisă a lui K. Fie $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_l}\}$ o subacoperire finită a acestei acoperiri. Dacă acum alegem

$$W = \bigcup_{i=1}^{l}, \quad \varepsilon = \inf_{i \le l} \varepsilon_i,$$

W şi ε au proprietăţile cerute. ■

Teorema 5.6. *Pentru orice $X \in \mathcal{X}(M)$, mulţimea $\mathcal{D}(X)$ este deschisă în $\mathcal{R} \times M$, iar fluxul $\Phi : \mathcal{D}(X) \longrightarrow M$ este o aplicaţie netedă.*

Demonstraţie. Fie $X \in \mathcal{D}(X)$ şi $(\mathcal{D}(X), \Phi)$ fluxul său maximal. Fie $p \in M, t \in J(p)$. Trebuie să arătăm că există o vecinătate a perechii $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$, care este inclusă în $\mathcal{D}(X)$, iar pe această vecinătate aplicaţia Φ este netedă. Fie $(\mathcal{F}, F)$ un grup local cu un parametru generat de X ca în propoziţia 5.6.2. Presupunem că $t > 0$ (în cazul $t < 0$ demonstraţia este analogă). Fie

$$K = \{\Phi_p(s) \mid s \in [0, t]\}.$$

În mod evident, mulţimea K este compactă. Atunci, din lema 5.4 rezultă că există un $\varepsilon > 0$ şi o mulţime deschisă $W \subset M$, cu $K \subset W$ astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W \subset \mathcal{F}$. Fixăm un $\delta \in (0, \varepsilon)$ şi determinăm $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k\delta < t \leq (k + 1)\delta$ (cu alte cuvinte, $k = [t/\delta] - 1$, unde [ ] notează funcţia parte întreagă). Definim mulţimile deschise $U_k, U_{k-1}, \ldots, U_0$ astfel încât $W = U_k$ iar

$$U_{i-1} = F_\delta^{-1}(U_i) \cap W, \quad i = \overline{1, k}.$$

Mulţimile U_i sunt nevide, deoarece ele conţin punctele $p_0 = p, p_1 = F_\delta(p_0, \ldots, p_k = F_\delta(p_{k-1}))$. Într-adevăr, deoarece două curbe integrale coincid pe domeniul comun de definiţie, avem că $p_1 = \Phi_p(k), \ldots, p_k = \Phi_p(k\delta)$ şi, deci, aceste puncte sunt în K. În particular, $p_k \in U_k$ şi, deoarece $p_k = F_\delta(p_{k-1})$, rezultă că $p_{k-1} \in U_{k-1}$. Continuând, obţinemîn final că $p = p_0 \in U_0$.

Vom demonstra acum că $(-\varepsilon, k\delta + \varepsilon) \times U_0 \subset \mathcal{D}(X)$ sau, altfel spus, pentru orice $q \in U_0$ avem $(-\varepsilon, k\delta + \varepsilon) \subset J(q)$. Fixăm un $q = q_0 \in U_0$ şi definim

$$q_i = F_\delta(q_{i-1}), \quad i = \overline{1, k}.$$

Ca şi mai sus, se deduce că $q_i \in U_i, i = 0, 1, \ldots, k$. În particular, toate punctele q_i se află în W. Fie acum $J(q) = (a_q, b_q)$. Considerăm curba

$$u \longrightarrow F_u(q) = F_u(q_0).$$

Această curbă este o curbă integrală care pleacă din q, definită pe $J(q)$ (care conţine intervalul $(-\varepsilon, \varepsilon)$). Prin urmare, $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset (a_q, b_q)$ şi avem

$$\Phi_q(u) = F_u(q),$$

pentru orice $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pentru $k = 0$ afirmaţia este, prin urmare, adevărată. Fie $k > 0$. Presupunem că am arătat, pentru orice $i < k$, că $i\delta + \varepsilon \leq b_q$ şi

$$\Phi(i\delta + u) = F_u(q_i),$$

pentru $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Vom demonstra că aceste afirmaţii rămâan valabile şi pentru $i + 1$. Facem $u = \delta$ în afirmaţia precedentă şi obţinem

$$\Phi_q((i + 1)\delta) = F_\delta(q_i) = q_{i+1}.$$

Considerăm curba $u \longrightarrow F_u(q_{i+1})$. Această curbă este definită pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$, deoarece $q_{i+1} \in W$ şi este o curbă integrală care trece prin q_{i+1}. Atunci

$$\Phi_q((i + 1)\delta + u) = F_u(q_{i+1}), \tag{*}$$

pentru orice $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ şi $(i+1)\delta + u \in (a_q, b_q)$. Presupunem că nu avem $(i+1)\delta + \varepsilon \leq b_q$, adică $b_q < (i+1)\delta + \varepsilon$. Definim atunci curba $c : (a_q, (i + 1)\delta + \varepsilon) \longrightarrow M$ prin

$$c(s) = \begin{cases} \Phi_q(s) & \text{dacă} \quad s \in J(q), \\ F_u(q_{i+1}) & \text{dacă} \quad s \in ((i + 1)\delta - \varepsilon, (i + 1)\delta + \varepsilon). \end{cases}$$

unde $u = s - (i + 1)\delta$. Definiţia este corectă, datorită relaţiei (*). În plus, c este o curbă integrală a lui X care extinde curba Φ_q, ceea ce contrazice faptul că această din urmă curbă este maximală.

Prin urmare, $(i+1)\delta+\varepsilon \in J(q)$. În particular, relaţia (*) are loc pentru $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Raţionamentul inductiv ne permite să tragem concluzia că $k\delta+\varepsilon \leq b_q$;i

$$\Phi_q(k\delta+u) = F_u(q_k),$$

pentru orice $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Prin urmare, am arătat

$$(-\varepsilon, k\delta+\varepsilon) \subset \mathcal{D}(X)$$

şi, în plus,

$$\Phi_s(q) = \Phi_q(s) = F_{s-k\delta}(q) \circ F_\delta \circ \cdots \circ F_\delta(q),$$

pentru orice $s \in (k\delta-\varepsilon, k\delta+\varepsilon), q \in U_0$. Prin urmare, Φ este netedă pe $(k\delta-\varepsilon, k\delta+\varepsilon) \times U_0$, care este o vecinătate a lui (t, p). ∎

Fie acum $X \in \mathcal{X}(M)$ un câmp de vectori, iar $(\mathcal{D}(X), \Phi)$ fluxul său maximal. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, notăm

$$\mathcal{D}(X)_t = \{p \in M \mid p \in J(p)\} = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}(X)\}.$$

Din teorema 5.6 rezultă că mulţimea $\mathcal{D}(X)_t$ este deschisă în M pentru orice $t \in \mathbb{R}$, iar $\mathcal{D}(X)_0 = M$. În plus, dacă $0 < s < t$, atunci $\mathcal{D}(X)_t \subset \mathcal{D}(X)_s$, iar dacă $s < t < 0$, atunci $\mathcal{D}(X)_s \subset \mathcal{D}(X)_t$.

Definim, pentru un t fixat,

$$\Phi_t : \mathcal{D}(X)_t \longrightarrow M, \quad \Phi_t(p) = \Phi(t, p) = \Phi_p(t).$$

Atunci avem

Propoziţia 5.6.3. *Φ_t este un difeomorfism de la $\mathcal{D}(X)_t$ la $\mathcal{D}(X)_{-t}$, iar $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.*

Demonstraţie. Deaoarece $p \in \mathcal{D}(X)_t$, rezultă, conform definiţiei, că $t \in J(p)$. Fie $q = \Phi_p(t)$. Atunci $-t \in J(q)$, adică $q \in \mathcal{D}(X)_{-t}$. Aceasta nu înseamnă altceva decât că $\Phi_t(\mathcal{D}(X)_t) \subset \mathcal{D}(X)_{-t}$. Pe de altă parte,

$$(\Phi_{-t} \circ \Phi_t)(p) = \Phi_{-t+t}(p) = \Phi_0(p) = p,$$

pentru orice $p \in \Phi_t(\mathcal{D}(X)_t)$. Raţionamentul se poate aplica în egală măsură lui Φ_{-t} iar, cum Φ_t şi Φ_{-t} sunt ambele netede, rezultă imediat rezultatul scontat. ∎

Propoziţia 5.6.3 este motivul pentru care se spune că fluxul maximal asociat unui câmp de vectori este un *grup local cu un parametru de difeomorfisme*. Sensul acestei afirmaţii este că acela că aplicaţiile Φ_t formează un grup local în raport cu compunerea aplicaţiilor, adică sunt verificate toate axiomele unui grup, cu condiţia să aibă sens compunerea (de aici termenul de "local"). În plus, toate elementele acestui grup local sunt, după am văzut, difeomorfisme. Elementele acestui grup acţionează asupra punctelor unei varietăţi, mutându-le de-a lungul curbelor integrale ale câmpului de vectori.

Vrem să vedem acum cum se modifică curbele integrale ale unui câmp vectorial la acţiunea unui difeomorfism. Are loc următorul rezultat:

Propoziţia 5.6.4. *Dacă $\mu : M \longrightarrow M$ este un difeomorfism (sau, în alţi termeni, este un* automorfism *al lui M), iar $X \in \mathcal{X}(M)$ este un câmp vectorial pe M, carer este generatorul infinitezimal al grupului local cu un parametru $(\mathcal{F}, F)$, atunci câmpul vectorial $\mu_* X$ este generatorul infinitezimal al unui grup local cu un parametru $(\mathcal{G}, G)$ astfel încât, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem*

$$G_t = \mu \circ F_t \circ \mu^{-1}.$$

Demonstraţie. După cum se ştie, acţiunile pe funcţii netede ale câmpurilor $\mu_* X$ şi X sunt legate prin relaţia

$$(\mu_* X)(f) = X(f \circ \mu) \circ \mu^{-1},$$

adică avem

$$(\mu_* X)(f) = \left\{ \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{(f \circ \mu) \circ F_t - f \circ \mu}{t} \right\} \circ \mu^{-1} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f \circ (\mu \circ F_t \circ \mu^{-1}) - f}{t} =$$
$$= \left(\frac{d \left[f \circ (\mu \circ F_t \circ \mu^{-1}) \right]}{dt} \right)_{t=0}.$$

Cum, pe de altă parte,

$$(\mu_* X)(f) = \left(\frac{d(f \circ G_t)}{dt} \right)_{t=0},$$

se obţine rezultatul scontat. ■

Definiţie. Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ se numeşte *invariant* relativ la un difeomorfism $\mu : M \longrightarrow M$ dacă avem $\mu_* X = X$.

Propoziţia 5.6.5. *Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ este invariant faţă de un difeomorfism $\mu : M \longrightarrow M$ dacă şi numai dacă μ comută cu difeomorfismele Φ_t generate de feluxul câmpului X.*

Demonstraţie. Dacă X este invariant faţă de μ, atunci avem, prin definiţie, $\mu_* X = X$, iar fluxurile celor două câ,mpuri vectoriale coincid. Aşadar, utilizând propoziţia precedentă, avem

$$\mu \circ \Phi_t \circ \mu^{-1} = \Phi_t$$

pentru orice t sau, încă,

$$\mu \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \mu.$$

Invers, din comutativitate, adică

$$\mu \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \mu,$$

rezultă că

$$\Phi_t = \mu \circ \Phi_t \circ \mu^{-1},$$

adică cele două fluxuri coincid, deci şi câmpurile de vectori coincid. ■

5.7 Derivata Lie a unui câmp de vectori

Fie $(\mathcal{F}, F)$ un grup local uniparametric generat de câmpul vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ şi fie $Y \in \mathcal{X}(M)$ un alt câmp de vectori pe M. Definim, pentru un $t \in \mathbb{R}$, câmpul

$$Y_t \doteq (F_t)_* Y.$$

Este clar că, deoarece $(F_{t+s})_* = (F_t)_* \circ (F_s)_*$, vom avea

$$Y_{t+s} = (F_s)_* Y_t.$$

Vrem să definim acum "derivata" câmpului Y_t în raport cu parametru t. Avem

Propoziţia 5.7.1. *Aplicaţia* $\dfrac{dY_t}{dt} : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$*, definită prin*

$$\frac{dY_t}{dt}(f) = \frac{d(Y_t(f))}{dt},$$

defineşte un câmp vectorial neted pe M *pentru care avem*

$$\left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=s} = (F_s)_* \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=0}.$$

Demonstraţie. A demonstra că $\dfrac{dY_t}{dt}$ este un câmp vectorial neted revine la a verifica faptul că este un operator diferenţial, ceea ce rezultă imediat din faptul că Y_t şi d/dt sunt operatori diferenţiali. Mai departe, utilizăm faptul că, dacă $\mu : M \longrightarrow N$ este un difeomorfism, atunci

$$(\mu_* X)(f) = X(f \circ \mu) \circ \mu^{-1},$$

pentru orice $f \in \mathcal{F}(N)$. Aplicăm acest rezultat pentru $\mu = F_s$, $N = M$, $X = \left(\dfrac{dY_t}{dt}\right)_{t=0}$ şi obţinem

$$\begin{aligned}\left[(F_s)_* \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=0}\right] &= \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=0} (f \circ F_s) \circ F_s^{-1} = \left[\frac{d\left[Y_t(f \circ F_s) \circ F_s^{-1}\right]}{dt}\right]_{t=0} = \\ &= \left(\frac{d\left[(F_s)_* Y_t(f)\right]}{dt}\right)_{t=0} = \left.\frac{dY_{t+s}(f)}{dt}\right|_{t=0} = \left(\frac{dY_t(f)}{dt}\right)_{t=s} = \\ &= \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=s} (f).\end{aligned}$$

■

Demonstrăm acum o lemă pe care o vom utiliza în cele ce urmează.

Lema 5.5. *Fie* X *generatorul infinitezimal al grupului local uniparametric* $(I_\varepsilon \times U, G)$*, unde* $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$*, cu* $\varepsilon > 0$*, iar* $U \subset M$ *este o mulţime deschisă. Fie* f *o funcţie netedă pe* U *cu valori reale, şi* $f_t \doteq f \circ G_t : U \longrightarrow \mathbb{R}$*, pentru un* $t \in I_\varepsilon$*. Atunci există o funcţie netedă* $h_t : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *astfel încât pentru orice* $p \in U$

$$f_t(p) = f(p) + t h_t(p),$$

iar $h_0(p) = X_p(f)$*.*

Demonstraţie. Punem

$$h_t(p) = \int_0^1 \frac{\partial f_t}{\partial t}(ts, p) ds.$$

Atunci este clar că prima egalitate din enunţ este verificată şi avem

$$X_p f = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f \circ G_t(p) - f(t)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f_t(p) - f(p)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} h_t(p) = h_0(p).$$

■

Propoziţia 5.7.2. *Fie X un câmp vectorial neted pe M şi Φ fluxul său maximal. Atunci avem*

$$\frac{dY_t}{dt} = [Y_t, X]$$

pentru orice $Y \in \mathcal{X}(M)$, unde $Y_t = (\Phi_t)_* Y$.

Demonstraţie. Fie $Z_t = \dfrac{dY_t}{dt}$. Utilizând lema precedentă, obţinem, pentru orice $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$\begin{aligned}
Z_0(f) &\equiv \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=0}(f) = \left(\frac{dY_t(f)}{dt}\right) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}(Y_t(f) - Y(f)) = \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}[Y(f\circ\Phi_t)\circ\Phi_t^{-1} - Y(f)] = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left[Y(f + th_t)\circ\Phi_t^{-1} - Y(f)\right] = \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\,(Y(f) + tY(h_t) - Y(f)\circ\Phi_t)\circ\Phi_t^{-1} = \lim_{t\longrightarrow 0} Y(h_t) - \\
&- \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{Y(f)\circ\Phi_t - Y(f)}{t} = Y(X(f)) - X(Y(f)) = [Y, X](f).
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, din propoziţia 5.7.1, deducem că $Z_t = (\Phi_t)_* Z_0$, deci

$$Z_t = (\Phi_t)_*[Y, X] = [(\Phi_t)_* Y, (\Phi_t)_* X].$$

Dar, după cum se verifică imediat, X este invariant la difeomorfismele Φ_t, adică $(\Phi_t)_* X = X$, deci

$$Z_t = [(\Phi_t)_* Y, X] = [Y_t, X].$$

■

Propoziţia 5.7.3. *Fie X, Y două câmpuri vectoriale netede pe M şi Φ, Ψ fluxurile maximale ale celor două câmpuri. Atunci următoarele două afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$, *pentru orice s, t;*

(ii) $[X, Y] = 0$.

Demonstraţie. Dacă $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$, atunci rezultă că Y este invariant faţă de difeomorfismele Φ_t, adică $(\Phi_t)_* Y = Y$. Notând $Y_t = (\Phi_t)_* Y$, avem, din propoziţia 5.7.2,

$$0 = \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=0} = [Y, X],$$

de unde rezultă că $[X, Y] = -[Y, X] = 0$.

Invers, dacă $[X, Y] = 0$, atunci

$$\frac{dY_t}{dt} = (\Phi_t)_*\left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{t=0} = (\Phi_t)_*[Y, X] = 0@.$$

Aşadar $Y_t = (\Phi_t)_* Y = Y$ şi, deci câmpul Y este invariant faţă de difeomorfismele Φ_t, ceea ce este acelaşi lucru cu condiţia de comutare (i). ■

Definiţie. Se numeşte *derivată Lie* a unui câmp de vectori $Y \in \mathcal{X}(M)$ de-a lungul unui câmp $X \in \mathcal{X}(M)$ câmpul de vectori $L_X Y$ definit prin

$$(L_X Y)_p = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left[Y_p - ((\Phi_t)_* Y)_p\right],$$

pentru orice $p \in M$.

Propoziţia 5.7.4. *Pentru orice* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *avem*

$$L_X Y = [X, Y].$$

Demonstraţie. Avem, conform definiţiei,

$$(L_X Y)_p = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \left[Y_p - ((\Phi_t)_* Y)_p \right],$$

de unde, deoarece $\Phi_0 = 1_M$, rezultă că

$$(L_X Y)_p = -\left(\frac{d((\Phi_t)_* Y)}{dt} \right)_{t=0}$$

sau, încă,

$$L_X Y = -\left(\frac{dY_t}{dt} \right)_{t=0} = -[Y_0, X] = -[Y, X] = [X, Y].$$

■

Propoziţia 5.7.5. *Operatorul* $L_X : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ *este* $\mathbb{R}$*-liniar.*

Demonstraţie. Rezultă imediat din propoziţia 5.7.4 şi din $\mathbb{R}$-liniaritatea parantezei Lie. ■

CAPITOLUL 6

Grupuri şi algebre Lie

6.1 Introducere

Revenim, în acest capitol, asupra grupurilor Lie şi arătăm cum li se poate ataşa lor, în mod natural, o algebră Lie.

6.2 Câmpuri invariante la stânga

Definiţie. Fie G un grup Lie şi $X \in \mathcal{X}(G)$ un câmp de vectori pe G. Spunem că X este *invariant la stânga* (respectiv la dreapta) dacă pentru orice $g \in G$ avem

$$L_{g*}X = X \quad \text{(respectiv } R_{g*}X = X\text{)}.$$

Vom nota, în cele ce urmează, cu $\mathcal{I}$ aplicaţia $\mathcal{I} : G \longrightarrow G, x \longrightarrow x^{-1}$, care este, în mod evident, un difeomorfism (este netedă din chiar definiţia grupului Lie, iar inversa aplicaţiei este ea însăşi).

Remarcăm, înainte de toate, că $L_g, R_g, \mathcal{I}$ fiind difeomorfisme, ele, în particular, definesc automorfisme ale algebrei Lie a tuturor câmpurilor de vectori pe grupul Lie G. În particular, aceste izomorfisme se comportă bine, într-un anume sens, cu câmpurile de vectori invariante, fie la stânga, fie la dreapta. Mai precis, are loc următoarea propoziţie:

Propoziţia 6.2.1. *Fie G un grup Lie. Atunci:*

(i) Dacă X şi Y sunt două câmpuri invariante la stânga (respectiv la dreapta) pe G, atunci şi paranteza lor Lie $[X, Y]$ este invariantă la stânga (respectiv la dreapta).

(ii) Dacă X este invariant la stânga (respectiv la dreapta), atunci câmpul $\mathcal{I}_*X$ este invariant la dreapta (respectiv la stânga).

(iii) Dacă X este invariant la stânga (respectiv la dreapta), atunci şi $L_{*g}X$ şi $R_{*g}X$ sunt invariante la stânga (respectiv la dreapta).

Demonstraţie. Prima proprietate este o consecinţă directă a faptului că L_{g*} este un automorfism al algebrei Lie a câmpurilor de vectori pe G.

Pentru a demonstra (ii), remarcăm, înainte de toate faptul că relaţia

$$(gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1}$$

se poate scrie

$$\mathcal{I} \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ \mathcal{I}.$$

În sfârşit, pentru (iii), fie X un câmp invariant la stânga. Avem, pentru orice $g, h \in G$, ţinând cont de faptul că translaţiile la stânga comută cu cele la dreapta:

$$L_{h*}\left(R_{g*}X\right) = R_{g*}\left(L_{h*}X\right) = R_{g*}X,$$

ceea ce demonstrează faptul că $R_{g*}X$ este, de asemenea, invariant la stânga. La fel se tratează şi celelalte cazuri. ■

6.3 Grupuri de transformări şi spaţii factor

CAPITOLUL 7

Elemente de calcul tensorial şi forme diferenţiale

7.1 Introducere

Peste tot, în acest capitol, spaţiile vectoriale cu care vom lucra vor fi *reale* şi *finit dimensionale*. Majoritatea construcţiilor pe care le vom face se pot extinde, cu câteva modificări, la cazul spaţiilor vectoriale complexe, finit dimensionale. În ceea ce priveşte extensia la cazul spaţiilor vectoriale infinit dimensionale, aici apar anumite dificultăţi de natură tehnică. După cum se ştie din topologie, în cazul spaţiilor vectoriale finit dimensionale există (până la un omeomorfism) o singură topologie pe spaţiu în raport cu care operaţiile de spaţiu vectorial să fie continue. De aceea, când vorbim despre spaţii finit dimensionale, nu pomenim despre topologia lor, pentru că admitem, în mod implicit, că este topologia standard. Lucrurile stau cu totul altfel în cazul spaţiilor infinit dimensionale, unde trebuie precizată şi topologia. Chiar dacă este fixată topologia, în cazul infinit dimensional există mai multe noţiuni de *dual* al spaţiului, în funcţie de topologia ce se alege pe dualul algebric. Oricum, ca model pentru spaţiile cu care lucrăm ne serveşte spaţiul tangent la o varietate într-un punct, şi acest spaţiu este finit dimensional, deoarece în cadrul acestui curs ne limităm la examinarea varietăţilor finit dimensionale.

7.2 Noţiuni de algebră tensorială

Noţiunea de *tensor* pe un spaţiu vectorial V este o noţiune fundamentală în geometrie şi ea reuneşte, într-o abordare unitară, mai multe noţiuni, în aparenţă disparate, cu care ne-am întâlnit deja, în repetate rânduri: vector, covector (1-formă) şi formă biliniară. Vom vedea imediat că ceea ce au în comun aceste noţiuni este faptul că toate sunt *aplicaţii multiliniare* (adică liniare în fiecare argument), cu valori reale, definite pe un produs de un număr de copii ale spaţiului V şi un număr de copii ale dualului său, V^*.

Afirmaţia este evidentă pentru 1-forme şi pentru forme biliniare. O vom demonstra acum şi pentru cazul vectorilor. După cum se ştie din algebra liniară, spaţiul vectorial V este izomorf în mod *natural* cu *bidualul* său, V^{**}. În acest context, izomorfismul este natural deoarece pentru construirea sa nu este necesară fixarea unor baze în cele două spaţii. Reamintim că acest izomorfism este dat de aplicaţia

$$\Phi : V \to V^{**}, \quad \Phi(v)(\alpha) = \alpha(v),$$

pentru orice vector $v \in V$ şi orice 1-formă $\alpha \in V^*$.

Identificând, pentru un vector $v \in V$, vectorul cu aplicaţia $\Phi(v) : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(v)(\alpha) = \alpha(v)$ pentru orice 1-formă $\alpha \in V^*$, putem considera că v însuşi este o aplicaţie liniară $V^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Suntem conduşi, astfel, în mod natural, la următoarea definiţie.

Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional. Se numeşte *tensor de tip* (r, s) pe V orice aplicaţie $(r + s)$-liniară

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ exemplare}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s \text{ exemplare}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

unde r şi s sunt numere naturale. Perechea (r, s) se mai numeşte *valenţa* tensorului T. Se mai spune, de asemenea, că T este un tensor de r *ori covariant* şi de s *ori contravariant*. Numărul $r + s$ se numeşte *ordinul* tensorului. Prin convenţie, un scalar (un număr real) se consideră a fi un tensor de ordinul zero (adică de tip $(0, 0)$).

Exemple. *1) Un covector (o 1-formă) pe V este o aplicaţie $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$, adică este un tensor de tip $(1, 0)$ (o dată covariant). Acesta este motivul pentru care 1-formele se mai numesc şi* vectori covarianţi pe V.

2) Un vector $v \in V$, după cum am văzut mai devreme, poate fi privit ca fiind o aplicaţie (notată la fel) $v : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$, adică este un tensor de tip $(0, 1)$; de aceea, un astfel de obiect se mai numeşte şi vector contravariant pe V.

3) O formă biliniară pe V, $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este, în mod evident, un tensor de ordinul doi, de două ori covariant. În particular, un produs scalar *pe V este un tensor de ordinul al doilea, de două ori covariant.*

Vom nota, în continuare, cu $\mathcal{T}_r^s(V)$ mulţimea tuturor tensorilor de tip (r, s) pe spaţiul vectorial V. Conform celor spuse mai devreme, avem identificările $\mathcal{T}_0^0(V) \equiv \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_0^1(V) \equiv V$ şi $\mathcal{T}_1^0(V) \equiv V^*$. Introducem pe $\mathcal{T}_r^s(V)$ următoarele operaţii:

- adunarea:

$$\begin{aligned}(T + S)\left(v_1, \ldots, v_r, \alpha^1, \ldots, \alpha^s\right) := T\left(v_1, \ldots, v_r, \alpha^1, \ldots, \alpha^s\right) + \\ + S\left(v_1, \ldots, v_r, \alpha^1, \ldots, \alpha^s\right);\end{aligned}$$

- înmulţirea cu scalari:

$$(\lambda T)\left(v_1, \ldots, v_r, \alpha^1, \ldots, \alpha^s\right) = \lambda \cdot T\left(v_1, \ldots, v_r, \alpha^1, \ldots, \alpha^s\right),$$

pentru orice tensori $T, S \in \mathcal{T}_r^s(V)$, pentru orice vectori $v_1, \ldots, v_r \in V$, orice covectori $\alpha^1, \ldots, \alpha^s \in V^*$ şi orice scalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Este uşor de constatat că, împreună cu aceste două operaţii, $\mathcal{T}_r^s(V)$ devine un spaţiu vectorial real. Pentru a stabili dimensiunea acestui spaţiu, vom pune în evidenţă o bază, construită plecând de la o bază a spaţiului V. Fie, deci, pentru început,

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

o bază a spaţiului vectorial V (aici, fireşte, n este dimensiunea lui V). După cum se ştie din algebra liniară, $\mathcal{B}$ determină o bază a spaţiului dual V^*, *duala* sa

$$\mathcal{B}^* = \left\{e^1, \ldots, e^n\right\},$$

definită prin condiţiile

$$e^i\left(e_j\right) = \delta_j^i,$$

pentru orice indici $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Mulţimea tuturor selecţiilor posibile de r vectori (nu neapărat distincţi) din baza $\mathcal{B}$ şi s vectori (de asemenea, nu neapărat distincţi), din baza $\mathcal{B}^*$ formează o bază

$$\mathcal{B}_r^s = \left\{\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}\right)\right\}, \quad 1 \le i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \le n$$

a spaţiului $V^r \times (V^*)^s$. Exact aşa cum o aplicaţie liniară este determinată de valorile sale pe elementele unei baze, un tensor de tip (r, s), după cum se poate constata cu uşurinţă, este determinat de valorile sale pe elementele unei baze a spaţiului $V^r \times (V^*)^s$, de exemplu ale bazei $\mathcal{B}_r^s$, considerate mai sus.

Definim, pentru fiecare combinaţie de numere

$$1 \leq k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \leq n,$$

tensorul $\omega_{l_1 \cdots j_s}^{k_1 \cdots k_r}$ care acţionează pe elementele bazei $\mathcal{B}_r^s$ în modul următor:

$$\omega_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r} \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s} \right) = \delta_{i_1}^{k_1} \cdots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \cdots \delta_{l_s}^{j_s}. \tag{7.1}$$

Avem acum următorul rezultat.

Propoziţia 7.2.1. *Familia de tensori*

$$\mathcal{A}_r^s(V) := \left\{ \omega_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r} \mid 1 \leq k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \leq n \right\},$$

definiţi prin relaţia (7.1) formează o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{T}_r^s(V)$.

Demonstraţie. Verificăm, mai întâi că, într-adevăr, tensorii sunt liniar independenţi. Presupunem, prin urmare, că există o combinaţie liniară nulă a acestor tensori, adică avem o relaţie de forma

$$\lambda_{k_1 \cdots k_r}^{l_1 \cdots l_s} \cdot \omega_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r} = 0.$$

Evaluăm membrul stâng al acestei relaţii pe un element oarecare al bazei $\mathcal{B}_r^s$, $\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s} \right)$, şi obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{k_1 \cdots k_r}^{l_1 \cdots l_s} \cdot \omega_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r} \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s} \right) = \\ &= \lambda_{k_1 \cdots k_r}^{l_1 \cdots l_s} \cdot \delta_{i_1}^{k_1} \cdots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \cdots \delta_{l_s}^{j_s} = \lambda_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}. \end{aligned}$$

Cum elementul bazei a fost ales în mod arbitrar, rezultă că toţi coeficienţii combinaţiei liniare se anulează, adică tensorii sunt, într-adevăr, liniar independenţi. Mai trebuie să demonstrăm că aceşti tensori generează spaţiul vectorial $\mathcal{T}_r^s(V)$, adică formează, într-adevăr, o bază a acestui spaţiu. Ne reamintim, în acest scop, de afirmaţia noastră precedentă, anume că, fiind dat un tensor $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$, acesta este unic determinat de valorile sale pe elementele unei baze a spaţiului $V^r \times (V^*)^s$, de exemplu cele ale bazei $\mathcal{B}_r^s$. Pentru un element al acestei baze, notăm cu

$$T_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s} = T \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s} \right) \tag{7.2}$$

valoarea tensorului pe acest element al bazei. Numerele reale $T_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}$ determină în mod unic tensorul T. Vom demonstra că ele sunt, de fapt, tocmai coeficienţii descompunerii tensorului T în raport cu elementele mulţimii $\mathcal{A}_r^s(V)$, adică avem o exprimare de forma

$$T = T_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s} \cdot \omega_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}. \tag{7.3}$$

Asta se poate verifica imediat, evaluând ambii membrii ai relaţiei de mai sus pe elementele bazei $\mathcal{B}_r^s$. ■

Corolarul 7.1. *Spaţiul tensorilor de tip (r, s) peste un spaţiu vectorial n-dimensional V, $\mathcal{T}_r^s(V)$, este de dimensiune n^{r+s}.*

Demonstraţie. Demonstraţia este imediată, nu avem altceva de făcut decât să "numărăm" vectorii bazei $\mathcal{A}_r^s(V)$, care, după cum se constată cu uşurinţă, sunt, într-adevăr, în număr de n^{r+s}. ■

Definiţie. Numerele $T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$, definite prin relaţia (7.2) se numesc *componentele tensorului T relativ la baza $\mathcal{A}_r^s(V)$.*

Observaţie. Evident, pentru un tensor de tip $(0,1)$ (adică un vector din V), componentele sunt chiar componentele sale relativ la baza aleasă a spaţiului V, adică relativ la baza $\mathcal{B}$, în timp ce pentru un tensor de tip $(1,0)$ (o 1-formă), componentele sunt componentele 1-formei relativ la baza duală $\mathcal{B}^*$. Pentru o formă biliniară pe V, componentele nu sunt altceva decât elementele matricii sale în baza $\mathcal{B}$.

Observaţie. În mod evident, componentele sumei a doi tensori relativ la o anumită bază sunt sumele componentelor corespunzătoare ale celor doi tensori relativ la baza respectivă, iar componentele unui tensor înmulţit cu un scalar se obţin înmulţind componentele tensorului respectiv cu scalarul în cauză.

Exact aşa cum se întâmpă în cazul vectorilor şi al aplicaţiilor liniare, şi în cazul tensorilor este important să vedem cum anume se transformă componentele unui tensor la o schimbare de bază. Fireşte, în spaţiul tensorilor există multe baze şi nu toate provin dintr-o bază a spaţiului V, pe calea indicată de noi. Totuşi, noi vom lucra în exclusivitate cu astfel de baze, de aceea, problema noastră va fi: să se stabilească modul de transformare a componentelor unui tensor atunci când se schimbă baza în spaţiul vectorial V. Fireşte, prima problemă pe care va trebui să o rezolvăm este legată de modul în care se transformă elementele bazei lui $\mathcal{T}_r^s(V)$ la o schimbare a bazei în V.

Fie, deci,

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$$

o altă bază a spaţiului V. Presupunem că matricea de schimbare a bazei este matricea $A = \left(a_j^i\right)_{1\le i,j\le n}$. Asta înseamnă că elementele noii baze se exprimă în funcţie de elementele celei vechi după regula

$$\bar{e}_j = a_j^i \cdot e_i, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.4}$$

În mod corespunzător, dacă notăm cu $B = \left(b_j^i\right)_{1\le i,j\le n}$ inversa matricii A, atunci elementele bazelor duale sunt legate prin relaţia

$$\bar{e}^i = b_j^i \cdot e^j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Relaţiile (7.4) şi (7.5) pot fi inversate şi obţinem

$$e_j = b_j^i \cdot \bar{e}_i, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{7.6}$$

respectiv

$$e^i = a_j^i \cdot \bar{e}^j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.7}$$

Elementele bazei $\overline{\mathcal{A}}_r^s(V)$ a spaţiului $\mathcal{T}_r^s(V)$, construite plecând de la baza $\overline{\mathcal{B}}$ a spaţiului V, sunt determinate prin relaţiile

$$\overline{\omega}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}\left(\bar{e}_{i_1}, \ldots, \bar{e}_{i_r}, \bar{e}^{j_1}, \ldots, \bar{e}^{j_s}\right) = \delta_{i_1}^{k_1} \cdots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \cdots \delta_{l_s}^{j_s}. \tag{7.8}$$

Pentru a stabili modul în care se transformă componentele unui tensor, trebuie să stabilim, mai întâi, care este legătura dintre tensorii $\overline{\omega}$ şi ω. În acest scop, evaluăm un tensor $\overline{\omega}$ pe un element al bazei $\mathcal{B}_r^s$ şi obţinem, ţinând cont de relaţiile (7.6) şi (7.7):

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}\right) = \\
&= \overline{\omega}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}\left(b_{i_1}^{p_1}\bar{e}_{p_1}, \ldots, b_{i_r}^{p_r}\bar{e}_{p_r}, a_{q_1}^{j_1}\bar{e}^{q_1}, \ldots, a_{q_s}^{j_s}\bar{e}^{q_s}\right) = \\
&= b_{i_1}^{p_1}\cdots b_{i_r}^{p_r} a_{q_1}^{j_1}\cdots a_{q_s}^{j_s}\overline{\omega}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}\left(\bar{e}_{p_1}, \ldots, \bar{e}_{p_r}, \bar{e}^{q_1}, \ldots, \bar{e}^{q_s}\right) = \\
&= b_{i_1}^{p_1}\cdots b_{i_r}^{p_r} a_{q_1}^{j_1}\cdots a_{q_s}^{j_s}\delta_{p_1}^{k_1}\cdots\delta_{p_r}^{k_r}\delta_{l_1}^{q_1}\cdots\delta_{l_s}^{q_s} = \\
&= b_{i_1}^{k_1}\cdots b_{i_r}^{k_r} a_{l_1}^{j_1}\cdots a_{l_s}^{j_s}.
\end{aligned}$$

Avem, în consecinţă, relaţia importantă:

$$\overline{\omega}^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} = b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_r}_{i_r} a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_s}_{l_s}\omega^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}. \tag{7.9}$$

Vom stabili acum legătura dintre *componentele unui tensor* relativ la cele două baze tensoriale. Fie, deci, $T \in \mathcal{T}^s_r(V)$ un tensor de tip (r, s). Conform definiţiei, componentele lui T în baza $\overline{\mathcal{A}}^s_r(V)$ sunt date de:

$$\begin{aligned}
\overline{T}^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} &= T\left(\bar{e}_{i_1},\ldots,\bar{e}_{i_r},\bar{e}^{j_1},\ldots,\bar{e}^{j_s}\right) = \\
&= T\left(a^{k_1}_{i_1}e_{k_1},\ldots,a^{k_r}_{i_r}e_{k_r},b^{j_1}_{l_1}e^{l_1},\ldots,b^{j_s}_{l_s}e^{l_s}\right) = \\
&= a^{k_1}_{i_1}\cdots a^{k_r}_{i_r}b^{j_1}_{l_1}\cdots b^{j_s}_{l_s}T\left(e_{k_1},\ldots,e_{k_r},e^{l_1},\ldots,e^{l_s}\right) = \\
&= a^{k_1}_{i_1}\cdots a^{k_r}_{i_r}b^{j_1}_{l_1}\cdots b^{j_s}_{l_s}T^{l_1\cdots l_s}_{k_1\cdots k_r}.
\end{aligned}$$

Astfel, relaţia între componentele tensorului în cele două baze este

$$\overline{T}^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} = a^{k_1}_{i_1}\cdots a^{k_r}_{i_r}b^{j_1}_{l_1}\cdots b^{j_s}_{l_s}T^{l_1\cdots l_s}_{k_1\cdots k_r}. \tag{7.10}$$

Observaţie. În cazul tensorilor de tip $(0, 1)$ (adică al vectorilor din V), formulele (7.9) şi (7.10) se transformă în

$$\overline{\omega}_l = a^j_l\,\omega_j, \tag{7.11}$$

respectiv

$$\bar{v}^j = b^j_l\,v^l. \tag{7.12}$$

Remarcăm că, în acest caz, baza tensorială este, în realitate, chiar baza spaţiului V, iar relaţia (7.11) este, în fapt, identică cu relaţia (7.4).

Relaţia (7.12) este motivul pentru care vectorii din V (adică tensorii de tip $(0, 1)$ pe V) se mai numesc şi vectori *contravarianţi* pe V: componentele lor se transformă cu ajutorul *inversei* matricii de schimbare a bazei pe V.

În mod dual, covectorii (tensorii de tip $(1, 0)$ pe V) îşi schimbă componentele cu ajutorul matricii schimbării de bază în V, de aceea, ei se numesc *vectori covarianţi* pe V.

7.3 Produsul tensorial a doi tensori

Vom introduce acum o nouă operaţie fundamentală între tensori, care implică, de această dată, tensori ce pot avea valenţe diferite.

Definiţie. Fie $T \in \mathcal{T}^s_r(V)$ şi $S \in \mathcal{T}^q_p(V)$ doi tensori de tip (r, s) şi, respectiv, (p, q) pe spaţiul vectorial V. Se numeşte *produs tensorial* al celor doi tensori tensorul $T \otimes Q$, de tip $(r + p, s + q)$, definit prin

$$\begin{aligned}
&(T\otimes S)\left(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+p},\alpha^1,\ldots,\alpha^s,\alpha^{s+1},\ldots,\alpha^{s+q}\right) = \\
&= T\left(v_1,\ldots,v_r,\alpha^1,\ldots,\alpha^s\right)\cdot S\left(v_{r+1},\ldots,v_{r+p},\alpha^{s+1},\ldots,\alpha^{s+q}\right).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Se poate verifica imediat că definiţia este corectă, în sensul că $T\otimes S$ este, într-adevăr, un tensor de tip $(r+p, s+q)$ pe spaţiul vectorial V.

Componentele produsului tensorial a doi tensori se pot găsi cu uşurinţă dacă se cunosc componentele celor doi tensori. Într-adevăr, are loc următoarea propoziţie.

Propoziţia 7.3.1. *Fie $T \in \mathcal{T}_r^s(V)$ şi $S \in \mathcal{T}_p^q(V)$ doi tensori pe spaţiul vectorial V. Dacă fixăm o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ în V, atunci componentele produsului tensorial $T \otimes S \in \mathcal{T}_{r+p}^{s+q}(V)$ faţă de această bază se exprimă în funcţie de componentele tensorilor T şi S prin următoarea relaţie:*

$$\left(T \otimes S\right)_{i_1 \cdots i_{r+p}}^{j_1 \cdots j_{s+q}} = T_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s} \cdot S_{i_{r+1} \cdots i_{r+p}}^{j_{s+1} \cdots j_{s+q}}. \tag{7.14}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}\left(T \otimes S\right)_{i_1 \cdots i_{r+p}}^{j_1 \cdots j_{s+q}} &= \left(T \otimes S\right)\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_{r+p}}, e^{j_1}, \dots, e^{j_{s+q}}\right) = \\ &= T\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s}\right) \cdot \\ &\cdot S\left(e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_{r+p}}, e^{j_{s+1}}, \dots, e^{j_{s+q}}\right) = \\ &= T_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s} \cdot S_{i_{r+1} \cdots i_{r+p}}^{j_{s+1} \cdots j_{s+q}}.\end{aligned}$$

∎

Următoarea propoziţie, a cărei demonstraţie este lăsată în seama cititorului, rezumă două proprietăţi remarcabile ale produsului tensorial: compatibilitatea cu operaţiile din fiecare spaţiu de tensori de o valenţă dată şi asociativitatea.

Propoziţia 7.3.2. *Produsul tensorial are următoarele proprietăţi:*

1. $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) \otimes S = \alpha_1 T \otimes S + \alpha_2 T_2 \otimes S$;
2. $T \otimes (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) = \beta_1 T \otimes S_1 + \beta_2 T \otimes S_2$;
3. $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$.

Aici $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sunt scalari, $T, T_1, T_2, S, S_1, S_2, R$ sunt tensori, iar T_1 şi T_2, respectiv S_1 şi S_2 au aceeaşi valenţă.

Observaţie. Produsul tensorial a doi tensori *nu* este comutativ. În general, dacă S şi T sunt doi tensori, $S \otimes T \neq T \otimes S$. Există, totuşi, posibilitatea să se definească un produs comutativ, aşa-numitul *produs tensorial simetric*:

$$S \odot T = \frac{1}{2}\left(S \otimes T + T \otimes S\right). \tag{7.15}$$

Produsul simetric al tensorilor S şi T se mai notează uneori, pur şi simplu, cu ST.

Propoziţia precedentă este cea care ne oferă posibilitatea de a construi produse tensoriale de mai mult de doi tensori. În particular, dacă $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază a spaţiului V, atunci baza tensorială asociată $\mathcal{A}_r^s(V)$ a spaţiului vectorial $\mathcal{T}_r^s(V)$ poate fi descrisă cu uşurinţă cu ajutorul produselor tensoriale. Mai precis, are loc următoarea relaţie, care se poate demonstra imediat, prin calcul direct (mai precis, prin evaluarea pe elementele bazei $\mathcal{B}_r^s$):

$$\omega_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r} = e^{k_1} \otimes \dots e^{k_r} \otimes e_{l_1} \otimes \cdots \otimes e_{l_s}. \tag{7.16}$$

Observaţie. Relaţia (7.16) ne spune că spaţiul vectorial $\mathcal{T}_r^s(V)$ este generat de produse le tensoriale de r covectori şi s vectori pe V, de aceea se spune că $\mathcal{T}_r^s(V)$ este *produsul tensorial a r copii ale spaţiului V^* şi s copii ale spaţiului V* şi se scrie:

$$\mathcal{T}_r^s(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r \text{ copii}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s \text{ copii}}. \tag{7.17}$$

De exemplu,

$$\mathcal{T}_0^2(V) = V \otimes V.$$

De multe ori este comod să privim tensorii ca aplicaţii cu valori tot într-un spaţiu de tensori. Aceasta se poate face cu ajutorul izomorfismului dat de propoziţia următoare, a cărei demonstraţie nu o vom da aici.

Propoziţia 7.3.3. *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional şi (r, s), (r', s') două perechi de numere naturale astfel încât $r \geq r'$ şi $s \geq s'$. Atunci avem izomorfismul*

$$\mathcal{T}_r^s(V) = \mathcal{L}\big(\underbrace{V \times \dots \times V}_{s' \text{ copii}} \times \underbrace{V^* \times \dots V^*}_{r' \text{ copii}}, \mathcal{T}_{r-r'}^{s-s'}(V)\big),$$

unde prin $\mathcal{L}(\cdots)$ am notat spaţiul aplicaţiilor multiliniare definite pe produsul respectiv de copii ale spaţiului V şi ale dualului său, cu valori în spaţiul de tensori indicat.

Exemplul cel mai des utilizat de noi va fi cel în care $s' = s - 1$ şi $r' = r$. Asta înseamnă, fireşte, că $\mathcal{T}_{r-r'}^{s-s'}(V) \equiv V$. Astfel, de exemplu, tensorii de tip $(1, 1)$ pot fi priviţi ca fiind aplicaţii liniare de la V la V, iar cei de tip $(2, 1)$ – ca aplicaţii biliniare de la $V \times V$ la V.

7.4 Câmpuri tensoriale pe o varietate diferenţiabilă

Definiţie. Se numeşte *tensor de tip* (r, s) în punctul $x \in M$ al unei varietăţi diferenţiabile un tensor de tip (r, s) pe spaţiul tangent $T_x M$ în punctul x la varietate,

$$R : \underbrace{T_x M \times \dots T_x M}_{r \text{ copii}} \times \underbrace{T_x^* M \times \dots T_x^* M}_{s \text{ copii}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Se numeşte *câmp tensorial* de tip (r, s) pe o varietate M o aplicaţie care asociază fiecărui punct $x \in M$ un tensor de tip (r, s) în punctul x al varietăţii.

Un exemplu clasic de câmp tensorial este cel studiat mai devreme, al câmpurilor vectoriale. Un câmp vectorial pe o varietate este un câmp tensorial de tip $(0, 1)$.

Un câmp tensorial de tip $(1, 0)$ (adică un câmp de 1-forme sau de covectori) se numeşte *1-formă diferenţială* pe varietatea M. O 1-formă diferenţială este, de fapt, o secţiune a fibratului cotangent al varietăţii, T^*M. 1-forma se va numi netedă dacă ea este netedă ca aplicaţie $M \longrightarrow T^*M$. Vom nota cu $\mathcal{D}(M)$ mulţimea tuturor 1-formelor diferenţiale netede pe M. Ca şi în cazul spaţiului câmpurilor vectoriale netede pe M, $\mathcal{D}(M)$ are atât o structură de spaţiu vectorial real (infinit dimensional), cât şi o structură de $C^\infty(M)$-modul. Dacă (U, φ) este o hartă pe varietatea M, atunci, pe această hartă, o 1-formă diferenţială ω se poate scrie ca

$$\omega|_U = \omega_i dx^i,$$

unde ω_i sunt nişte funcţii reale definite pe U. Se dovedeşte, exact ca în cazul câmpurilor de vectori, că ω este netedă dacă şi numai dacă funcţiile ω_i sunt netede pentru orice hartă pe varietatea M.

La fel ca în cazul câmpurilor vectoriale, un câmp tensorial se poare defini, în acelaşi mod, pe orice submulţime deschisă a unei varietăţi diferenţiale. Mai mult, orice câmp tensorial R pe M induce un câmp tensorial pe orice submulţime deschisă $U \subset M$, câmp pe care îl vom nota cu $R|_U$.

Toate operaţiile cu tensori pot fi extinse în mod natural la câmpuri de tensori, definindu-le punctual. De exemplu, dacă R şi S sunt două câmpuri de tensori pe M, vom defini produsul lor tensorial punând

$$(R \otimes S)_x = R_x \otimes S_x,$$

pentru orice $x \in M$.

Să presupunem acum că R este un câmp tensorial de tip (r, s) pe varietatea M. Dacă $X_1, \ldots, X_r$ sunt câmpuri de vectori pe M, iar $\omega^1, \ldots, \omega^s$ sunt 1-forme, atunci putem defini o funcţie

$$R(X_1, \ldots, X_r, \omega^1, \ldots, \omega^s) : M \to \mathbb{R},$$

punând, pentru orice $x \in M$,

$$R(X_1, \ldots, X_r, \omega^1, \ldots, \omega^s)(x) = R_x(X_{1x}, \ldots, X_{rx}, \omega^1_x, \ldots, \omega^s_x). \tag{7.18}$$

Această funcţie este, în mod evident, *localizabilă* în sensul că dacă $U \subset M$ este o submulţime deschisă a varietăţii M, atunci avem, după cum se poate constata cu uşurinţă,

$$R(X_1, \ldots, X_r, \omega^1, \ldots, \omega^s)|_U = R\left(X_1|_U, \ldots, X_r|_U, \omega^1|_U, \ldots, \omega^s|_U\right).$$

Observaţie. Orice câmp tensorial pe o varietate M, privit ca o funcţie de câmpuri de vectori şi de 1-forme, ca mai sus (indiferent, pe moment, dacă acestea sunt netede sau nu) este aditiv şi omogen în raport cu înmulţirea unui câmp de vectori sau a unei forme cu o funcţie cu valori reale, definită pe M. Se înţelege, adunarea câmpurilor de vectori şi a 1-formelor, ca şi înmulţirea lor cu o funcţie, se definesc punctual (cu alte cuvinte, aceste operaţii sunt induse de structurile de spaţiu vectorial real pe spaţiile tangente şi cele cotangente la varietate în diferite puncte ale sale).

Fie acum (U, φ) o hartă locală pe M, cu coordonatele locale x^i, $i = 1, \ldots, n$. Atunci, după cum se ştie, coordonatele determină, în fiecare spaţiu tangent T_xM o bază a acestui spaţiu, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right\}_{1\le i\le n}$. Duala acestei baze, care este o bază a spaţiului *cotangent* este notată cu $\left\{dx^i\big|_x\right\}_{1\le i\le n}$. Faptul că cele două baze sunt duale una celeilalte înseamnă, după cum am văzut mai devreme, că

$$dx^i\Big|_x\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x\right) = \delta^j_i,$$

pentru fiecare pereche de indici $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Odată fixată baza de coordonate în T_xM, atunci, după metoda expusă în secţiunea precedentă, putem construi o bază a spaţiului tensorilor de tip (r, s) în punctul x al varietăţii,

$$\omega^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}(x) = dx^{k_1}\Big|_x \otimes \cdots \otimes dx^{k_r}\Big|_x \otimes \frac{\partial}{\partial x^{l_1}}\Big|_x \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{l_s}}\Big|_x, \tag{7.19}$$

unde $1 \le k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \le n$.

Dacă lăsăm punctul x să varieze în mulţimea deschisă U, obţinem o familie de câmpuri tensoriale pe U,

$$\begin{aligned}&\omega^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} = dx^{k_1} \otimes \cdots \otimes dx^{k_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{l_s}},\\ &1 \le k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \le n.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Aşadar, dacă R este un câmp tensorial de tip (r, s), definit (cel puţin) pe domeniul U al hărţii (U, φ), atunci pentru fiecare $x \in U$ valoarea lui R în x, R_x (care este un *tensor* de tip (r, s) pe T_xM), se poate descompune ca

$$R_x = R^{l_1\cdots l_s}_{k_1\cdots k_r}(x) \cdot \omega^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}(x) \tag{7.21}$$

unde coeficienţii descompunerii sunt daţi, după cum se ştie, de

$$R^{l_1\cdots l_s}_{k_1\cdots k_r}(x) = R_x\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\Big|_x, dx^{l_1}\Big|_x, \ldots, dx^{l_s}\Big|_x\right). \tag{7.22}$$

Din nou, dacă lăsăm punctul x să varieze în U, obţinem o descompunere a câmpului tensorial $R|_U$,

$$R|_U = R^{l_1\cdots l_s}_{k_1\cdots k_r} \cdot \omega^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}, \tag{7.23}$$

unde, de data aceasta, $R^{l_1\cdots l_s}_{k_1\cdots k_r}$ sunt *funcţii* pe U, cu valori reale.

Definiţie. Fie R un câmp tensorial de tip (r, s) pe varietatea M şi (U, φ) o hartă pe M, cu coordonatele locale x^i. Funcţiile

$$R_{k_1\cdots k_r}^{l_1\cdots l_s} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}, dx^{l_1}, \ldots, dx^{l_s}\right) \tag{7.24}$$

se numesc *componentele* câmpului tensorial R relativ la harta (U, φ).

Observaţie. În cazul în care câmpul tensorial R este dat doar pe o submulţime deschisă $A \subset M$ a varietăţii, atunci formula (7.24) reprezintă componentele lui R pe mulţimea $U \cap A$, care este, în fond, domeniul unei hărţi pe subvarietatea deschisă V a lui M.

Este important să stabilim cum anume se schimbă componentele unui câmp tensorial atunci când se trece de la o hartă de coordonate la alta. Fie, prin urmare, (V, ψ) o altă hartă de coordonate pe M, astfel încât $U \cap V \neq \emptyset$, iar coordonatele pe V le vom nota cu y^j, $j = 1, \ldots, n$. După cum se ştie, prin trecerea de la coordonatele x^i la coordonatele y^j, câmpurile vectoriale de coordonate se schimbă după regula

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{7.25}$$

1-formele exterioare de coordonate se vor schimba după regula

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j. \tag{7.26}$$

Prin urmare, după cum se constată cu uşurinţă, componentele unui câmp tensorial R, de tip (r, s), în raport cu coordonatele x^i, şi cele în raport cu coordonatele y^j, sunt legate prin relaţia

$$'R_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{l_s}} R_{k_1\cdots k_r}^{l_1\cdots l_s}, \tag{7.27}$$

unde am notat cu "$'$" componentele relativ la coordonatele y^i.

Definiţie. Un câmp tensorial pe o submulţime deschisă $A \subset M$ este *neted* dacă componentele sale relativ la orice hartă sunt funcţii netede.

Observaţie. Se poate constata, ca şi în cazul câmpurilor de vectori, că un câmp tensorial este neted dacă şi numai dacă în jurul fiecărui punct există o hartă în aşa fel încât componentele câmpului relativ la harta respectivă să fie funcţii netede.

Vom nota cu $\mathcal{T}_r^s(M)$ mulţimea tuturor câmpurilor tensoriale netede de tip (r, s) pe M. Este uşor de constatat, că şi în cazul mulţimii câmpurilor de vectori sau de 1-forme, că această mulţime se poate înzestra, în mod natural, atât cu o structură de spaţiu vectorial real, cât şi cu o structură de modul peste algebra funcţiilor netede $C^\infty(M)$.

Observaţie. Este clar că, în particular, $\mathcal{T}_0^1(M) \equiv \mathcal{X}(M)$ (modulul câmpurilor netede de vectori pe M), în timp ce $\mathcal{T}_1^0(M) \equiv \mathcal{D}(M)$ (modulul 1-formelor diferenţiale netede pe M).

Următoarea propoziţie este uşor de demonstrat şi o lăsăm pe seama cititorului.

Propoziţia 7.4.1. *Un câmp tensorial R de tip (r, s) pe o submulţime deschisă $A \subset M$ a unei varietăţi diferenţiabile este neted dacă şi numai dacă pentru orice câmpuri de vectori netede $X_1, \ldots, X_r$ şi orice 1-forme diferenţiale netede $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$) pe orice submulţime deschisă $B \subset A$ funcţia*

$$R|_B\left(X_1, \ldots, X_r, \alpha^1, \ldots, \alpha^s\right) : B \to \mathbb{R}$$

este netedă pe B.

Observaţii. (1) Un câmp tensorial neted de tip (r, s) pe o varietate difererenţiabilă M poate fi privit ca fiind o aplicaţie $(r+s)$-liniară

$$R : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ exemplare}} \times \underbrace{\mathcal{D}(M) \times \cdots \times \mathcal{D}(M)}_{s \text{ exemplare}} \to C^{\infty}(M).$$

(2) Propoziţia 7.3.3 poate fi extinsă la cazul câmpurilor tensoriale. Astfel, de exemplu, un câmp tensorial de tip $(1, 1)$ poate fi privit ca o aplicaţie $C^{\infty}(M)$-liniară de la $\mathcal{X}(M)$ la $\mathcal{X}(M)$.

CAPITOLUL 8

Metrica riemanniană

8.1 Noţiunea de metrică riemanniană

Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional. Un tensor de tip $(r, 0)$ T pe V se numeşte *simetric* dacă pentru orice permutare σ a numerelor $1, \dots, r$ avem

$$T(v_1, \dots, v_r) = T\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\big),$$

pentru orice vectori $v_1, \dots, v_r \in V$. În particular, un tensor de tip $(2, 0)$ este simetric dacă pentru orice $v, w \in V$ aven $T(v, w) = T(w, v)$.

Observaţie. Simetria unui tensor T se reflectă în simetria componentelor sale. Astfel, se constată imediat că un tensor de tip $(r, 0)$ este simetric dacă şi numai dacă componentele sale relativ la orice bază sunt simetrice, adică verifică relaţia

$$T_{i_1 \cdots i_r} = T_{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)},$$

pentru orice combinaţie a indicilor şi pentru orice permutare σ a numerelor $1, \dots, r$. În particular, din nou, un tensor de două ori covariant este simetric dacă şi numai dacă componentele sale relativ la orice bază verifică relaţia $T_{ij} = T_{ji}$.

Definiţie. Un câmp tensorial de tip $(r, 0)$ pe o varietate diferenţiabilă se numeşte *simetric* dacă valoarea sa în fiecare punct al varietăţii este un tensor simetric în acel punct.

Definiţie. Se numeşte *tensor metric* sau *metrică pseudo-riemanniană* pe o varietate diferenţiabilă M un câmp tensorial de două ori covariant $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ care este

(1) simetric;

(2) nedegenerat: dacă $g(X, Y) = 0$ pentru orice câmp vectorial nenul $Y \in \mathcal{X}(M)$, atunci $X = 0$.

Metrica se numeşte *riemanniană* dacă forma pătratică asociată formei biliniare g este pozitiv definită, cu alte cuvinte dacă avem $g(X, X) \geq 0$ pentru orice câmp $X \in \mathcal{X}(M)$, iar din $g(X, X) = 0$ rezultă că $X = 0$.

Observaţie. Fie (U, φ) o hartă locală pe M. Notăm cu g_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$ componentele lui g faţă de această hartă. Atunci condiţia de simetrie a metricii este echivalentă cu condiţia ca matricea $[g_{ij}]$ să fie simetrică, iar condiţia de nedegenerare este echivalentă cu condiţia ca această matrice să fie nedegenerată (adică determinantul său să fie diferit de zero).

Noţiunea de metrică riemanniană este echivalentă cu cea introdusă în capitolul 1, unde am şi demonstrat, bazându-ne pe partiţia diferenţiabilă a unităţii, că orice varietate diferenţiabilă admite cel puţin o metrică riemanniană. Remarcăm că acest lucru *nu* este adevărat pentru metrici pseudo-riemanniene care nu sunt riemanniene. De exemplu, pe sfera bidimensională nu există metrici de signatură 1 (signatura metricii este signatura formei pătratice asociate metricii).

O *varietate riemanniană (pseudo-riemannană)* este, prin definiţie, o pereche (M, g) formată dintr-o varietate netedă M şi o metrică riemanniană (respectiv pseudo-riemannană) pe ea.

8.2 Exemple de varietăţi riemanniene

8.2.1 Exemplele fundamentale

Există o serie de varietăţi riemanniene care au constituit, în fapt, însăşi motivaţia dezvoltării geometriei riemanniene, ca parte de sine stătătoare a geometriei diferenţiale.

(i) **Spaţiul euclidian n-dimensional** $\mathbb{R}^n$. Acesta este spaţiul cel mai important din toată geometria. În geometria riemanniană el este înzestrată cu o metrică riemanniană specială, g_0 numită *metrică euclidiană* sau *metrică plată*. În harta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$ această metrică are componentele

$$g_{0ij} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{8.1}$$

În unele cărţi se afirmă că metrica euclidiană este, de fapt, chiar produsul scalar euclidian. Această afirmaţie, totuşi, are un anumit grad de imprecizie, deoarece produsul scalar este definit pe $\mathbb{R}^n$, în timp ce metrica este, de fapt, o *familie* de produse scalare euclidiene, câte unul pe fiecare spaţiu tangent. Este adevărat, pe de altă parte, că toate spaţiile tangente sunt *canonic* izomorfe cu $\mathbb{R}^n$. Este important, totuşi, să facem distincţie între *spaţiul cu produs scalar* $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ şi *varietatea riemanniană* $(\mathbb{R}^n, g_0)$. În notaţii clasice, metrica euclidiană se scrie

$$ds^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + \cdots + x_n^2. \tag{8.2}$$

În cazurile particulare $n = 2$ şi $n = 3$ se utilizează, în mod frecvent, în afară de coordonatele carteziene, şi coordonatele *polare* (pentru $n = 2$), *sferice* şi *cilindrice* (pentru $n = 3$). Vom indica mai jos forma metricii euclidiene şi în aceste sisteme de coordonate.

(a) Coordonate polare. Trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la coordonatele polare (r, θ) se face prin intermediul schimbării de coordonate

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}. \tag{8.3}$$

În acest sistem de coordonate metrica euclidiană devine:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{8.4}$$

(b) Coordonate cilindrice. Trecerea de la coordonatele carteziene (x, y, z) la coordonatele cilindrice (r, θ, z) se face prin intermediul formulelor de transformare

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}. \tag{8.5}$$

Metrica euclidiană în coordonate cilindrice este

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \tag{8.6}$$

(c) Coordonate sferice. Coordonatele sferice (r, θ, φ) sunt legate de coordonatele carteziene (x, y, z) prin relaţiile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}. \tag{8.7}$$

Metrica euclidiană scrisă în coordonate sferice este

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\cos^2\theta d\varphi^2. \tag{8.8}$$

(ii) **Curbele şi suprafeţele din spaţiul euclidian**. Curbele şi suprafeţele, obiectele de studiu din geometria diferenţială clasică

8.2.2 Izometrii şi izometrii locale. Echivalenţă conformă

După cum se ştie din topologia diferenţială, două varietăţi diferenţiabile au aceleaşi proprietăţi diferenţiabile (şi, implicit, topologice), dacă între ele există o aplicaţie specială care ne permite să le identificăm, adică un *difeomorfism*. Dacă cele două varietăţi sunt înzestrate şi cu câte o metrică riemanniană, atunci, în general, difeomorfismele între ele nu lasă neapărat invariantă metrica. Pentru ca varietăţile (riemanniene de data aceasta), să poată fi identificate, trebuie ca între ele să existe un difeomorfism de un tip mai special, care să lase invariantă metrica. După cum vom vedea ceva mai departe, acest tip special de difeomorfism va lăsa invariante o serie întreagă de mărimi: distanţe, unghiuri, volume, etc.

Definiţie. Un difeomorfism $F : M \longrightarrow N$ între două varietăţi riemanniene se numeşte *izometrie* dacă pentru orice $p \in M$ aplicaţia tangentă $F_{*,p} : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ este o izometrie liniară, cu alte cuvinte dacă

$$\langle v, w\rangle_p = \langle F_{*,p}(v), F_{*,p}(w)\rangle_{F(p)}$$

pentru orice $v, w \in T_pM$.

Definiţie. O aplicaţie netedă $F : M \longrightarrow N$ între două varietăţi riemanniene se numeşte *izometrie locală* dacă pentru orice punct $p \in M$ există o vecinătate deschisă $U \subset M$ a sa astfel încât $F|_U : U \longrightarrow F(U) \subset N$ să fie o izometrie în raport cu structurile riemanniene induse.

Observaţie. Este clar că orice izometrie locală între două varietăţi riemanniene este, în particular, un difeomorfism local, dar ar putea să nu fie un difeomorfism global, ceea ce înseamnă că s-ar putea să nu fie o izometrie globală.

Există şi o noţiune ceva mai generală:

Definiţie. Spunem că varietatea riemanniană (M, g) este *local izometrică* cu varietatea riemanniană (M, h) dacă pentru fiecare punct $p \in M$ există o vecinătate deschisă $U \subset M$ a sa, precum şi o izometrie locală $F : U \longrightarrow F(U) \subset N$.

Este clar, din definiţiile de mai sus, că pentru ca două varietăţi riemanniene să fie cel puţin local izometrice ele, este necesar ca ele să aibă aceeaşi dimensiune. De remarcat, însă, că izometria locală este o condiţie relativ slabă, din ea nu rezultă câtuşi de puţin, de exemplu, că varietăţile sunt difeomorfe, nici măcar local. Vom indica, de exemplu, în cele ce urmează, pe torul bidimensional, o structură riemanniană în raport cu care torul este local izometric cu $\mathbb{R}^2$, cu metrica euclidiană (vom spune, în astfel de situaţii, că varietatea riemanniană respectivă este *local plată*). Pe de altă parte, torul nu este difeomorf cu planul euclidian.

O izometrie între spaţii riemanniene păstrează lungimile şi unghiurile. Concret, izometria locală a două varietăţi riemanniene se concretizează prin existenţa unor sisteme de coordonate în care cele două metrici să aibă aceleaşi componente. În multe aplicaţii, însă, este suficient ca cele două metrici să fie proporţionale (adică, într-un anumit sistem de coordonate, componentele lor să fie proporţionale). În acest caz, lungimile, de regulă, nu se mai păstrează, unghiurile, însă, da. Prin analogie cu transformările conforme din analiza complexă, vom spune, în acest caz, că cele două metrici sunt *conform echivalente*. Avem, mai precis, următoarea definiţie:

Definiţie. Două metrici riemanniene g_1, g_2 pe o varietate riemanniană M se numesc *conform echivalente* sau, pur şi simplu, *conforme*, dacă există o funcţie strict pozitivă $f \in C^\infty(M)$ astfel încât să avem $g_2 = f \cdot g_1$. Două varietăţi riemanniene (M_1, g_1) şi (M_2, g_2) se numesc *conform echivalente* dacă există un difeomorfism $F : M_1 \longrightarrow M_2$, numite *echivalenţă conformă* astfel încât metricile F^*g_2 şi g_1 să fie conforme. Mai general, vom spune că varietatea riemanniană (M_1, g_1) este *local conformă* cu varietatea riemanniană (M_2, g_2) dacă pentru orice punct $p \in M_1$ există o vecinătate deschisă $U \subset M_1$ a sa şi un difeomorfism pe imagine $F : U \longrightarrow F(U) \subset M_2$ astfel încât metricile $F^*g_2|_{F(U}$ şi $g_1|_U$ să fie conforme. În sfârşit, vom spune că o varietate riemanniană (M, g) este *local conform plată* dacă ea este local conformă cu $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu metrica euclidiană.

Propoziţia 8.2.1. *Fie S^n_R sfera de rază R, cu centrul în origine din $\mathbb{R}^{n+1}$, înzestrată cu metrica indusă de metrica euclidiană din $\mathbb{R}^{n+1}$. Atunci S^n_R este local conform plată.*

Demonstraţie. Intenţia noastră este să demonstrăm că proiecţiile stereografice din polul nord, respectiv din polul sud ai sferei sunt echivalenţe conforme.

Fie, prin urmare, $N = (0, 0, \ldots, 0, R)$ – polul nord al sferei şi $F : U_N \equiv S^n_R \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – proiecţia stereografică din polul nord. Determinarea expresiei acestei proiecţii se face exact ca şi în cazul sferei de rază unitate şi se obţine:

$$F(p) = \frac{R}{R - p^{n+1}} \left(p^1, \ldots, p^n\right),$$

pentru fiecare punct $p = \left(p^1, \ldots, p^n, p^{n+1}\right) \in U_N$, în timp ce inversa lui F este dată de

$$F^{-1}(x) = \left(\frac{2R^2x^1}{\|x\|^2 + R^2}, \ldots, \frac{2R^2x^n}{\|x\|^2 + R^2}, \frac{\|x\|^2 - R^2}{\|x\|^2 + R^2}\right),$$

pentru fiecare punct $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n$.

Fie g_R metrica indusă pe S^n_R şi g_0 – metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^n$. Vom demonstra în cele ce urmează că metricile $\left(F^{-1}\right)^* g_R$ şi g_0 sunt conforme.

Fie, prin urmare, $x \in \mathbb{R}^n$ şi $v = v^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \in T_x\mathbb{R}^n$. Utilizăm acum faptul că S^n_R este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^{n+1}$, prin urmare F^{-1} poate fi privită ca o aplicaţie netedă de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^{n+1}$. Interpretând $\mathbb{R}^n$ ca fiind subspaţiul lui $\mathbb{R}^{n+1}$ obţinut punând $x^{n+1} = 0$, putem fixa un sistem de coordonate pe $\mathbb{R}^{n+1}$, care va induce un sistem de coordonate pe $\mathbb{R}^n$. Avem

$$\left(F^{-1}\right)^* g_R(v, v) = g_R\left(\left(F^{-1}\right)_{*,x}(v), \left(F^{-1}\right)_{*,x}(v)\right).$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\left(F^{-1}\right)_{*,x}(v) &= v^j \frac{\partial\left(F^{-1}\right)^h}{\partial x^j} \left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_{F^{-1}(x)} = \\ &= \frac{2R^2}{\|x\|^2 + R^2} v - \frac{4R^2 < v, x >}{\left(\|x\|^2 + R^2\right)^2}\left(x^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{F^{-1}(x)} + R \left.\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right|_{F^{-1}(x)}\right).\end{aligned}$$

Aici indicele de însumare h variază de la 1 la $n + 1$, în timp ce indicele k – de la 1 la n. $<, >$ este produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^n$.

Acum, conform definiţiei metricii induse,

$$g_R\left(\left(F^{-1}\right)_{*,x}(v), \left(F^{-1}\right)_{*,x}(v)\right) = \left\langle\left(F^{-1}\right)_{*,x}(v), \left(F^{-1}\right)_{*,x}(v)\right\rangle,$$

unde, de data aceasta, $<,>$ este produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^{n+1}$. Un calcul simplu, care utilizează doar următoarele fapte:

- baza $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right\}$ pe $T_{F^{-1}(x)}\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ este ortonormată în raport cu metrica euclidiană;
- când sunt priviţi ca vectori în $\mathbb{R}^{n+1}$ (cu ultima componentă nulă), v şi x sunt perpendiculari pe $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}$ (adică produsul lor scala cu acest vector se anulează),

ne conduce la următorul rezultat:

$$\left(F^{-1}\right)^* g_R(v, v) = \frac{4R^4}{\left(\|x\|^2 + R^2\right)^2}\|v\|^2 = \frac{4R^4}{\left(\|x\|^2 + R^2\right)^2} g_0(v, v),$$

ceea ce înseamnă că F este o echivalenţă conformă. Exact la fel se demonstrează şi că proiecţia stereografică din polul sud este o echivalenţă conformă. ■

Modele ale spaţiului hiperbolic Vom descrie nisţe

CAPITOLUL 9

Conexiuni

9.1 Motivaţie: derivare şi conexiune în $\mathbb{R}^n$

După cum se ştie, un câmp de vectori neted pe $\mathbb{R}^n$, sau, mai general, pe o submulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$, poate fi privit ca fiind o aplicaţie netedă $Y : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Să presupunem că pe U avem un sistem (global) de coordonate carteziene, $(x^1, \dots, x^n)$. Pentru un $i \in \{1, \dots, n\}$ fixat, putem defini *derivata parţială* a câmpului vectorial Y. Dacă Y are descompunerea

$$Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

atunci punem

$$\frac{\partial Y}{\partial x^i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Derivata parţială este, în mod evident, din nou, o aplicaţie netedă de la U la $\mathbb{R}^n$, prin urmare este un câmp de vectori neted pe U. Această derivată parţială poate fi privită ca fiind, de fapt, o derivată a lui Y *în direcţia* câmpului vectorial de coordonate $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Fie acum X un câmp vectorial neted oarecare pe mulţimea deschisă U. Prin analogie cu ceea ce s-a făcut mai sus, putem defini aşa-numita *derivată covariantă* a lui Y în direcţia lui X, punând

$$D_X Y = X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Observaţie. Remarcăm un lucru esenţial referitor la derivata covariantă: valoarea sa într-un punct $p \in U$ depinde numai de câmpul Y şi *de valoarea lui X în punctul p*. De aceea, are sens să scriem şi

$$(D_X Y)(p) = D_{X_p} Y.$$

9.2 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă. O **conexiune liniară** pe M este o aplicaţie, $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ astfel încât

1. $\nabla_{X_1 + X_2}(Y) = \nabla_{X_1}(Y) + \nabla_{X_2}(Y)$.

2. $\nabla_X(Y_1+Y_2)=\nabla_X(Y_1)+\nabla_X(Y_2)$.
3. $\nabla_{fX}(Y)=f\nabla_X(Y)$, unde $f\in C^\infty(M)$.
4. $\nabla_X(fY)=f\nabla_X(Y)+X(f)\cdot Y$, unde $f\in C^\infty(M)$.

Propoziţia 9.2.1. $\nabla_X(Y)(x)$ *depinde numai de* X_x *şi de* Y. *Cu alte cuvinte, dacă* $X_x=X'_x$, *atunci* $\nabla_X(Y)(x)=\nabla_{X'}(Y)(x)$.

Demonstraţie. Presupunem, mai întâi, că există o vecinătate U a lui x astfel încât $X|_U=X'|_U$. Alegem o funcţie $: M\longrightarrow\mathbb{R}$ care este egală cu 1 pe o vecinătate $V\subset U$ a lui x şi se anulează pe $M\setminus U$. Atunci $fX=fX'$ şi, utilizând proprietate a 4) din definiţie, obţinem

$$f\nabla_X(U)=\nabla_{fX}(Y)=\nabla_{fX'}(Y)=f\nabla_{X'}(Y).$$

Scriind relaţia de mai sus în punctul x, obţinem (ţinând cont de faptul că $f(x)=1$),

$$\nabla_X(Y)(x)=\nabla_{X'}(Y)(x).$$

Aşadar, are sens să vorbim despre $\nabla_X(Y)(x)$ şi dacă X nu este definit pe întreaga varietate M, ci doar pe o vecinătate a punctului x. Alegem acum o hartă (U,φ) în jurul punctului x şi scriem $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ în U. Atunci, din 2) şi 4),

$$\nabla_X(Y)=\nabla_{X^i\frac{\partial}{\partial x^i}}(Y)=X^i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(Y).$$

Prin urmare,

$$\nabla_X(Y)(x)=X^i(x)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(Y)(x),$$

unde în membrul drept apar numai $X^i(x)$, $i=1,\dots,n$, adică doar componentele lui X_x. ■

Propoziţia 9.2.2. *Fie* ∇ *o conexiune pe o varietate* M *şi* (U,φ) *o hartă pe* M. *Atunci* $\nabla|_U$ *este determinată de* n^3 *funcţii netede* $\Gamma^k_{ij}\in C^\infty(U)$. *Mai mult,* n^3 *astfel de funcţii determină o conexiune* ∇ *pe* U.

Demonstraţie. $\nabla|_U$ este determinată de funcţiile Γ^k_{ij} (în număr de n^3) date de relaţiile:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{9.1}$$

Într-adevăr, fie $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ şi $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ două câmpuri de vectori din $\mathcal{X}(U)$. Atunci

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y)&=\nabla_{X^i\frac{\partial}{\partial x^i}}(Y)=X^i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\\&=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}Y^j\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}+Y^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)=\\&=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}Y^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}+X^iY^j\left(\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\\&=\left[X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}Y^k\right)+X^i\left(\Gamma^k_{ij}Y^j\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\nabla_X(Y)=X^iY^k_{;i}\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{9.2}$$

unde
$$Y^k_{;i} = \frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j. \tag{9.3}$$
Din formulele 9.2 şi 9.3 rezultă că funcţiile Γ^k_{ij}, date de 9.1, determină, într-adevăr, conexiunea ∇ pe U.

Să presupunem acum că se dau n^3 funcţii $\Gamma^k_{ij} \in C^\infty(U)$ şi definim operatorul ∇ prin relaţia 9.1. Vom demonstra acum că acest operator este, într-adevăr, o conexiune pe U. Fie, deci $f \in C^\infty(U)$. Atunci
$$\nabla_X (fY) = X^i \left(fY^k\right)_{;i} \frac{\partial}{\partial x^k},$$
unde
$$\left(fY^k\right)_{;i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(fY^k\right) + \Gamma^k_{ij} fY^j = \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \cdot Y^k + f \cdot Y^k_{;i}.$$
Prin urmare
$$\nabla_X (fY) = \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \cdot Y^k + X^i f Y^k_{;i}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = X(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X (Y).$$
■

Corolarul 9.1. *Pe orice varietate netedă M există o conexiune.*

Demonstraţie. Fie $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas pe varietatea M. Aşa cum arată Propoziţia 9.2.2, pe domeniul de coordonate U_α al fiecărei hărţi se poate construi o conexiune, dându-se n^3 funcţii netede Γ^k_{ij}. Le putem alege, de exemplu, egale cu zero pe toate. Se obţine, astfel, o familie de conexiuni $\{\nabla^\alpha\}_{\alpha \in A}$. Alegem, acum $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – o partiţie diferenţiabilă a unităţii subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ şi punem
$$\nabla = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha \nabla^\alpha,$$
adică
$$\nabla_X (Y) = \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha \nabla^\alpha_X (Y)$$
şi se verifică uşor că acest operator defineşte, într-adevăr, o conexiune pe întreaga varietate M. ■

9.3 Curbura şi torsiunea unei conexiuni

Fie M o varietate diferenţiabilă şi ∇ o conexiune pe ea.

Definiţie. Se numeşte *tensor de torsiune* asociat conexiunii ∇ aplicaţia
$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$
dată de
$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{9.4}$$
Se numeşte *tensor de curbură* asociat conexiunii ∇ aplicaţia
$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$
$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{9.5}$$

Teorema 9.1. *R este o aplicaţie $C^\infty(M)$-triliniară, iar T este o aplicaţie $C^\infty(M)$-biliniară. Aceasta înseamnă că R este un câmp tensorial de tip* $(3, 1)$*, iar T este un câmp de tensori de tip* $(2, 1)$.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că R este triliniar. Liniaritatea în primele două variabile şi aditivitatea în cea de-a treia rezultă direct din proprietăţile operatorului de derivare covariantă şi cele ale parantezei Lie a câmpurilor de vectori. Mai rămâne de verificat doar omogenitatea în cea de-a treia variabilă. Fie, deci, $f \in C^\infty(M)$ şi $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Atunci

$$\begin{aligned}
R(X,Y,fZ) &= \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) = \\
&= \nabla_X\big(Y(f)\cdot Z + f\nabla_Y Z\big) - \nabla_Y\big(X(f)\cdot Z + \\
&+ f\nabla_X Z\big) - [X,Y](f)\cdot Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = \\
&= X\,(Y(f))\cdot Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + \\
&+ f\nabla_x\nabla_Y Z - Y\big(X(f)\big)\cdot Z - X(f)\nabla_Y Z - \\
&- Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - [X,Y](f)\cdot Z - \\
&- f\nabla_{[X,Y]}Z = f\,(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \\
&- \nabla_{[X,Y]}Z\big) + \underbrace{(X\,(Y(f)) - Y\,(X(f)))}_{=[X,Y](f)} - [X,Y](f) = \\
&= fR(X,Y,Z).
\end{aligned}$$

R este, după cum se poate observa, antisimetric în primele două variabile.

Pentru T, remarcăm, înainte de toate, că este o aplicaţie antisimetrică, deci este suficient să verificăm liniaritatea în prima variabilă. Aditivitatea rezultă din definiţia conexiunii, vom verifica deci omogenitatea. Fie $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Atunci

$$\begin{aligned}
T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] = f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - \\
&- Y(f)\cdot X - (f\cdot[X,Y] - Y(f)\cdot X) = fT(X,Y).
\end{aligned}$$

■

Vrem să determinăm acum componentele celor doi tensori relativ la o bază. Fie, deci, $\{e_a\}$ o bază (locală) de câmpuri de vectori. Facem următoarele notaţii:

$$[e_a, e_b] = \gamma^c_{ab} e_c, \tag{9.6}$$

iar $\nabla_{e_a} = \nabla_a$. În particular, vom utiliza, adesea, notaţia ∇_i în loc de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$. Avem:

$$\begin{aligned}
R(e_a,e_b,e_c) &= \nabla_a\nabla_b e_c - \nabla_b\nabla_a e_c - \nabla_{[e_a,e_b]}e_c = \nabla_a\left(\Gamma^d_{bc}e_d\right) - \\
&- \nabla_b\left(\Gamma^d_{ac}e_d\right) - \nabla_{\gamma^e_{ab}e_e}e_c = e_a\left(\Gamma^d_{bc}\right)\cdot e_d + \\
&+ \Gamma^d_{bc}\nabla_a e_d - e_b\left(\Gamma^d_{ac}\right)\cdot e_d - \Gamma^d_{ac}\nabla_b e_d - \\
&- \gamma^e_{ab}\nabla_e e_c = e_a\left(\Gamma^d_{bc}\right)\cdot e_d - e_b\left(\Gamma^d_{ac}\right)\cdot e_d + \\
&+ \Gamma^d_{bc}\Gamma^f_{ad}e_f - \Gamma^d_{ac}\Gamma^f_{bd}e_f - \gamma^e_{ab}\Gamma^f_{ec}e_f = \Bigg(e_a\left(\Gamma^f_{bc}\right) - \\
&- e_b\left(\Gamma^f_{ac}\right) + \Gamma^d_{bc}\Gamma^f_{ad} - \Gamma^d_{ac}\Gamma^f_{bd} - \gamma^e_{ab}\Gamma^f_{ec}\Bigg)e_f
\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$R(e_a,e_b,e_c) = R^f_{abc}e_f.$$

Am demonstrat deci:

Propoziţia 9.3.1. *Dacă $\{e_a\}$ este o bază locală de câmpuri vectoriale pe M, atunci componentele tensorului de curbură faţă de această bază sunt date de*

$$R^f_{abc} = e_a\left(\Gamma^f_{bc}\right) - e_b\left(\Gamma^f_{ac}\right) + \Gamma^d_{bc}\Gamma^f_{ad} - \Gamma^d_{ac}\Gamma^f_{bd} - \gamma^e_{ab}\Gamma^f_{ec}. \tag{9.7}$$

Într-o bază de coordonate, câmpurile de vectori din bază acţionează asupra unei funcţii pur şi simplu prin derivare parţială în raport cu una dintre coordonate, iar vectorii din bază comută (parantezele lor Lie sunt zero). Prin urmare,

Consecinţa 9.1. *Într-o bază de coordonate $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ componentele tensorului de curbură sunt date de*

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}. \tag{9.8}$$

Ne ocupăm acum de tensorul de torsiune. Într-o bază arbitrară, avem:

$$\begin{aligned} T(e_a, e_b) \equiv T^c_{ab}e_c = \nabla_a e_b - \nabla_b e_a - [e_a, e_b] = \Gamma^c_{ab}e_c - \Gamma^c_{ba}e_c - \\ - \gamma^c_{ab}e_c = \left(\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ab}\right)e_c. \end{aligned}$$

Prin urmare

Propoziţia 9.3.2. *Componentele tensorului de torsiune într-o bază $\{e_a\}$ sunt date de*

$$T^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ab}. \tag{9.9}$$

Consecinţa 9.2. *Componentele tensorului de torsiune într-o bază de coordonate $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ sunt date de*

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}. \tag{9.10}$$

9.4 Câmpuri de vectori de-a lungul unei curbe

În geometria riemanniană apar în mod natural "câmpuri de vectori" care sunt definite doar de-a lungul unei curbe de pe o varietate diferenţiabilă. Un exemplu notoriu este furnizat chiar de familia vectorilor tangenţia la curba respectivă, în fiecare punct al său. Deoarece submulţimea varietăţii pe care sunt definite (adică suportul curbei) nu este o submulţime deschisă a a varietăţii, ele nu pot fi considerate ca fiind câmpuri vectoriale în toată puterea cuvântului, de aceea, o serie de operaţii (în special diferitele operaţii de derivare) nu le pot fi aplicate. Există, totuşi, nevoia practică de a deriva astfel de câmpuri de vectori, pentru a obţine alte câmpuri, definite tot de-a lungul curbei. Soluţia este să demonstrăm că ele pot fi extinse cel puţin la o vecinătate deschisă a curbei (în fapt, chiar la întreaga varietate). Putem deriva apoi o extensie (în general, există mai multe) şi apoi restrângem derivata la suportul curbei. Desigur, acest procedeu ridică, aşa cum se intâmplă de multe ori, problema corectitudinii definiţiei, cu alte cuvinte aceea a dependenţei de alegerea extensiei câmpului de vectori. Din fericire, după cum vom vedea, definiţia este independentă de fixarea unei extensii, de aceea definiţia este corectă.

După această descriere aproximativă a intenţiilor noastre, suntem gata să trecem la o formulare mai precisă a noţiunilor şi a rezultatelor.

Definiţie. Fie $\gamma : I \longrightarrow M$ o curbă parametrizată netedă (un drum neted) pe o varietate diferenţiabilă M, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis. Se numeşte *câmp vectorial de-a lungul curbei* γ o familie de vectori $V(t)$ astfel încât pentru orice $t \in I$, avem $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Fie acum (U, φ) o hartă locală pe varietatea M, cu coordonatele locale $x^i, i = 1, \dots, n = \dim M$, astfel încât $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. Atunci, pentru fiecare $t \in I$, vectorul $V(t)$ are o descompunere de forma

$$V(t) = V^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}.$$

Câmpul $V(t)$ se numeşte *neted* dacă pentru orice hartă (U, φ) toate funcţiile $V^i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt netede.

Observaţie. Un câmp vectorial pe varietatea M de-a lungul unei curbe netede $\gamma : I \longrightarrow M$ poate fi privit ca fiind o aplicaţie $V : I \longrightarrow TM$ astfel încât pentru orice $t \in I$ să avem $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Câmpul este neted dacă şi numai dacă această aplicaţie este netedă. Într-adevăr, fie (U, φ) o hartă oarecare pe M, cu coordonatele x^i, $i = 1, \ldots, n$, astfel încât să avem $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. Fie $\widetilde{U} \equiv \pi^{-1}(U)$ harta indusă pe TM (unde $\pi : TM \longrightarrow M$ este proiecţia canonică a fibratului tangent). Atunci, în mod evident, $\widetilde{U} \cap V(I) \neq \emptyset$. După cum se ştie, coordonatele în harta indusă de (U, φ) pe fibratul tangent sunt date de aplicaţia $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\widetilde{\varphi}(X_x) = \left(x^1(x), x^2(x), \ldots, x^n(x), X^1, \ldots, X^n\right),$$

pentru orice $x \in U$, unde X^i sunt componentele lui X_x relativ la harta (U, φ). Reprezentarea locală a aplicaţiei V în perechea de hărţi $(I, 1_I)$ şi $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ este, atunci, dată de

$$V_\varphi \equiv \widetilde{\varphi} \circ V \circ 1_I : \gamma^{-1}(U \cap \gamma(I)) \to \mathbb{R}^{2n},$$

$$\begin{aligned} V_\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(V(t)) &= \left(\varphi(\gamma(t)), V^1(t), \ldots, V^n(t)\right) = \\ &= \left((\varphi \circ \gamma)(t), V^1(t), \ldots, V^n(t)\right). \end{aligned}$$

Cum aplicaţia $\varphi \circ \gamma$ este, în mod evident, netedă, rezultă că aplicaţia V este netedă dacă şi numai dacă aplicaţiile V^i sunt funcţii netede de t, cu alte cuvinte, dacă şi numai dacă $V(t)$ este un câmp neted de-a lungul curbei γ, în sensul definiţiei de mai sus.

Dacă $\gamma : I \longrightarrow M$ este o curbă netedă, iar $J \subset I$ este un interval *compact*, atunci restricţia lui γ la J, $\gamma|_J$ se numeşte *segment* al curbei γ. Despre curba γ (sau despre un segment al său), vom spune că *nu are autointersecţii* dacă γ (sau restricţia sa, în cazul segmentelor) este o aplicaţie injectivă. Un segment $\gamma|_J$ al curbei γ se va numi *segment elementar* dacă el nu are autointersecţii, iar suportul său, $\gamma(J)$ este conţinut, în întregime, în domeniul U al unei hărţi de coordonate (U, φ) pe varietatea M.

Rezultatul central al acestui paragraf este concentrat în teorema care urmează.

Teorema 9.2. *Fie $\gamma : I \longrightarrow M$ o curbă parametrizată netedă şi $V(t)$ un câmp vectorial de-a lungul lui γ. Atunci pe fiecare interval compact $J \subset I$ astfel încât segmentul de curbă $\gamma|_J$ să fie elementar, restricţia lui $V(t)$ la acest segment poate fi prelungită la un câmp de vectori neted, definit pe întreaga varietate, mai precis, există un câmp vectorial neted $X \in \mathcal{X}(M)$ astfel încât $X_{\gamma(t)} = V(t)$ pentru orice $t \in J$.*

Ideea fundamentală a demonstraţiei este să utilizăm faptul că segmentul de curbă este elementar. Asta înseamnă, în particular, că suportul său este inclus într-o hartă de coordonate, prin urmare câmpul $V(t)$ este unic determinat, pe segmentul de curbă respectiv, de componentele sale relativ la bazele canonice de coordonate. Aceste componente sunt nişte funcţii netede definite pe J cu valori reale. Putem interpreta aceste funcţii ca fiind nişte funcţii cu valori reale definite pe suportul curbei (deci pe o submulţime a varietăţii) cu valori reale. Vom demonstra că ele pot fi extinse la nişte funcţii reale netede definite pe întreaga varietate. Mai precis, avem următorul rezultat:

Lema 9.1. *Fie $\gamma : I \longrightarrow M$ o curbă netedă regulată şi $\gamma|_J$ un segment elementar al său. Dacă $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, atunci există o funcţie netedă $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ astfel încât*

$$\tilde{g}(\gamma(t)) = g(t),$$

pentru orice $t \in J$.

Demonstraţia lemei. Cum segmentul de curbă considerat este elementar, există o hartă (U, φ) pe M, cu coordonatele $(x^1, \ldots, x^n)$, astfel încât $\gamma(J) \subset U$. Deoarece curba γ este regulată, rezultă că pentru orice $t_0 \in I$ matricea Jacobi a lui γ are rangul 1, ceea ce înseamnă, în particular, că există un indice $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât funcţia (reală, de o variabilă reală) $t \mapsto x^{i_0}(\gamma(t))$ să aibă derivata nenulă în punctul t_0. Conform teoremei funcţiei inverse, funcţia $x^{i_0} \circ \gamma$ este un difeomorfism local în jurul punctului t_0. Mai precis, există un interval deschis $J_1 \subset J$, astfel încât

$t_0 \in J_1$ şi un interval deschis $J_2 \subset \mathbb{R}$ astfel încât $x^{i_0}(\gamma(t_0)) \in J_2$, precum şi o funcţie diferenţiabilă $y : J_2 \longrightarrow J_1$ astfel încât $y\left(x^{i_0}(\gamma(t))\right) = t$, pentru orice $t \in J_1$. Fie $V_{t_0} = \left(x^{i_0}\right)^{-1}(J_1)$. Atunci V este o vecinătate deschisă în M a punctului $x_0 = \gamma(t_0)$, iar funcţia $\tilde{f}_{t_0} : V_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}_{t_0} = g \circ y \circ x^{i_0}$ este o funcţie netedă (fiind o compunere de funcţii netede). Atunci $\tilde{f}_{t_0}$ este restricţia la V a unei funcţii netede $f_{t_0} : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Avem, prin urmare, pentru orice $t \in J_1$,

$$f_{t_0}(\gamma(t)) = \tilde{f}_{t_0}(\gamma(t)) = g\left(y\left(x^{i_0}(\gamma(t))\right)\right) = g(t).$$

Deoarece intervalul J este compact, mulţimea $A = J \setminus J_1$ este, de asemenea compactă, prin urmare mulţimea $\gamma(A)$ este o submulţime închisă a varietăţii M. În plus, ea nu conţine punctul $\gamma(t_0)$, deoarece segmentul de curbă considerat este elementar, prin urmare, în particular, el nu are autointersecţii. De aceea,

$$V_{t_0} \cap \gamma(A) = \emptyset.$$

Fie acum W_{t_0} o vecinătate deschisă relativ compactă a lui $\gamma(t_0)$, inclusă în V_{t_0}. Deoarece mulţimea $\gamma(J)$ este compactă, în intervalul J există un număr finit de puncte $t_1, \dots, t_r$ astfel încât vecinătăţile corespunzătoare

$$W_1 = W_{t_1}, \dots, W_r = W_{t_r}$$

acoperă mulţimea $\gamma(J)$. Atunci vecinătăţile deschise

$$U_1 = U_{t_1}, \dots, U_r = U_{t_r}$$

constituie o acoperire deschisă a compactului $\gamma(J)$ ce îndeplinesc toate condiţiile teoremei de existenţă a partiţiei unităţii pe această mulţime. Fie, deci, $\{h_1, \dots, h_r\}$ o partiţie a unităţii pe $\gamma(J)$, subordonată acestei acoperiri. Se consideră funcţia

$$f = f_1 h_1 + \dots + f_r h_r.$$

f este, în mod evident, netedă pe întreaga varietate. În plus, din construcţie, avem, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$f_i(\gamma(t)) = g(t)$$

dacă $\gamma(t) \in U_i$, iar $h_i(\gamma(t)) = 0$, dacă $\gamma(t) \notin U_i$, rezultă că

$$f(\gamma(t)) = g(t)$$

pentru orice $t \in J$. ■

Observaţii. 1) Se poate demonstra, utilizând, de asemenea, un argument legat de partiţia unităţii, că rezultatul lemei rămâne adevărat şi dacă renunţăm la ipoteza că segmentul de curbă este elementar, păstrând, totuşi, cerinţa ca el să nu aibă autointersecţii.

2) Dacă $\gamma : I \longrightarrow M$ este o curbă parametrizată *regulată*, având, eventual autointersecţii, atunci orice punct al său $\gamma(t_0)$ se află pe un segment elementar $\gamma|_J$. Într-adevăr, fie (U, φ) o hartă locală în jurul lui $\gamma(t_0)$, cu coordonatele $\left(x^1, \dots, x^n\right)$. După cum s-a remarcat în demonstraţia lemei, γ fiind regulată, rezultă că în punctul t_0 cel puţin una dintre funcţiile $x^{i_0} \circ \gamma$ va avea derivata în raport cu t diferită de zero. Să notăm, ca mai sus, cu i_0 indicele corespunzător unei astfel de funcţii. În particular, derivata lui $x^{i_0} \circ \gamma$ va fi diferită de zero pe un întreg interval compact $J \subset I$, care conţine punctul t_0. Dacă alegem J suficient de mic în aşa fel încât să fie inclus în domeniul pe care $x^{i_0} \circ \gamma$ este un difeomorfism pe imagine (în jurul lui t_0), atunci funcţia aceasta va fi, în particular, injectivă, de unde rezultă că şi funcţia γ va fi injectivă pe J. Este clar, de asemenea, că putem alege J suficient de mic în aşa fel încât $\gamma(J) \subset U$, prin urmare $\gamma|J$ va fi un segment elementar al curbei γ, care conţine punctul $\gamma(t_0)$.

Demonstraţia teoremei 9.2. Presupunem că $\gamma|J$ este un segment elementar al curbei $\gamma : I \longrightarrow M$. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $\gamma(J) \subset U$, unde (U, φ) este o hartă pe M, cu coordonatele $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$. Avem, atunci, pentru $V(t)$, descompunerea

$$V(t) = v^k(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\gamma(t)},$$

unde funcţiile $v^k, k = \overline{1,n}$ sunt definite şi netede pe un interval deschis ce conţine intervalul închis J (altfel spus, sunt *netede pe* J). Conform lemei precedente, există funcţiile netede $X^k \in C^\infty(U)$[1] astfel încât să avem

$$X^k(\gamma(t)) = v^k(t), \quad k = 1, \ldots, n,$$

pentru orice $t \in J$. Relaţia

$$X_U = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

defineşte un câmp vectorial neted pe U care, pe mulţimea compactă $A = \gamma(J) \subset U$ coincide cu $V(t)$, adică, pentru orice $t \in J$, avem:

$$X_{U\gamma(t)} = V(t).$$

Acum, din lema **??** rezultă că există un câmp vectorial neted definit pe întreaga varietate, $X \in \mathcal{X}(M)$ astfelîncât să avem

$$X_{\gamma(t)} = V(t),$$

pentru orice $t \in J$. ■

Observaţie. Demonstraţia teoremei se poate adapta, în mod evident, pentru cazul unui câmp tensorial oarecare definit de-a lungul unei curbe, care, la fel, se poate descrie, local, cu ajutorul componentelor.

9.5 Transportul paralel

Fie (M, ∇) o varietate cu o conexiune liniară pe ea. În general, dacă $x, y \in M$ sunt două puncte distincte din M, spaţiile tangente $T_x M$ şi $T_y M$ sunt izomorfe, deoarece sunt spaţii vectoriale de aceeaşi dimensiune. Totuşi, cu excepţia varietăţilor paralelizabile, nu există un izomorfism natural (independent de alegerea coordonatelor) între cele două spaţii. Dacă însă $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ este o curbă netedă astfel încât $x = \gamma(a)$ şi $y = \gamma(b)$, atunci, utilizând conexiunea, se poate defini un izomorfism special între spaţiile tangente în x şi y, care nu depinde de alegerea coordonatelor în jurul punctelor de pe imaginea curbei, dar depinde de curbă. Un astfel de izomorfism se numeşte **transport paralel** de-a lungul curbei γ.

Combinând acum noţiunea de conexiune şi cea de câmp de vectori de-a lungul unei curbe, vom defini **derivata covariantă** a unui câmp de vectori de-a lungul unei curbe γ:

Definiţie. Fie (M, ∇) o varietate cu conexiune şi $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ o curbă netedă pe M. Notăm cu $C^\infty(\gamma)$ mulţimea câmpurilor de vectori netede de-a lungul curbei γ. Se numeşte **derivare covariantă** de-a lungul lui γ operatorul

$$\frac{D}{dt} : C^\infty(\gamma) \to C^\infty(\gamma), \qquad \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(V). \tag{9.11}$$

Observaţie. Formula (9.11) are sens chiar dacă $\frac{d\gamma}{dt}$ nu este un câmp de vectori definit pe întrega varietate, deoarece, conform Propoziţiei 9.2.2, valoarea într-un punct a derivatei covariante nu depinde decât de valoarea câmpului de vectori în direcţia căruia se face derivarea *în punctul respectiv*.

[1] În fapt, în lemă am demonstrat că ele pot fi definite chiar pe întreaga varietate, dar pe noi ne interesează doar ce se întâmplă pe deschisul U.

Proprietăţile fundamentale ale operatorului de derivare covariantă de-a lungul unei curbe sunt rezumate în următoarea lemă:

Lema 9.2. *Fie (M, ∇) o varietate înzestrată cu o conexiune liniară şi $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ o curbă netedă pe varietatea M. Atunci*

1. *Dacă V şi W sunt două câmpuri de vectori netede de-a lungul curbei γ, atunci*

$$\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}. \tag{9.12}$$

2. *Dacă $f \in C^\infty(a, b)$ şi $V \in C^\infty(\gamma)$, atunci*

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot V + f \cdot \frac{DV}{dt}. \tag{9.13}$$

3. *Dacă $V \in C^\infty(\gamma)$ şi $V_t = Y_{\gamma(t)}$, unde $Y \in C^\infty(M)$ atunci*

$$\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} (Y) (\gamma(t)). \tag{9.14}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din proprietăţile conexiunii. ■

Consecinţa 9.3. *Dacă V este un câmp neted de-a lungul curbei netede γ pe M, iar într-o hartă locală (U, φ) avem*

$$V_t = v^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)} \tag{9.15}$$

*(vezi ecuaţia (**??**)), atunci în această hartă avem pentru derivata covariantă a câmpului V de-a lungul curbei γ expresia:*

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma^k_{ji} v^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{9.16}$$

unde

$$\gamma^j : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \gamma^j = x^j \circ \gamma, \quad i, j = 1, \ldots n \tag{9.17}$$

sunt componentele funcţiei (evident, netedă pe $[a, b]$) $\varphi \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{dt} &= \frac{D}{dt}\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \\
&+ v^i \nabla_{\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{d\gamma^j}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \\
&= \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma^k_{ji} v^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

■

Definiţie. Un câmp de vectori $V \in C^\infty(\gamma)$ se numeşte **paralel** de-a lungul lui γ dacă $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.

Observaţie. Conform consecinţei precedente, V este paralel de-a lungul lui γ dacă şi numai dacă în orice hartă locală (U, φ) în jurul unui punct din $\gamma([a, b])$ componentele v^k verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dv^k}{dt} + \frac{d\gamma^j}{dt}\Gamma^k_{ji}v^i = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{9.18}$$

Propoziţia 9.5.1. *Dacă se dă o curbă netedă $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ şi un vector $V_a \in T_{\gamma(a)}M$ atunci există un singur câmp vectorial paralel V de-a lungul lui γ astfel încâ $V_{\gamma(a)} = V_a$.*

Demonstraţie. Este clar că este suficient dacă demonstrăm propoziţia pentru cazul particular în care suportul curbei γ este inclus într-un domeniu de coordonate. Ori, în cazul acesta, este necesar să arătăm că sistemul de ecuaţii

$$\frac{dv^k}{dt} + \frac{d\gamma^j}{dt}\Gamma^k_{ji}v^i = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

cu condiţia iniţială

$$v^i(a) = V^i_a$$

are o soluţie unică. Dar, sistemul fiind liniar, rezultatul se demonstrează prin metodele standard ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale liniare. ■

Definiţie. Aplicaţia $\tau_\gamma : T_xM \longrightarrow T_yM$, unde $x = \gamma(a)$ şi $y = \gamma(b)$ dată prin $\tau_\gamma(V_a) = V_b$ pentru un câmp de vectori paralel de-a lungul lui γ se numeşte **transport paralel** de-a lungul lui γ.

Observaţii. 1. Se poate verifica uşor că τ_γ este un izomorfism liniar.

2. Transportul paralel de-a lungul unei curbe este o aplicaţie corect definită (în sensul că nu depinde de alegerea hărţilor de coordonate) dar, în general, depinde de curba aleasă (se spune că transportul paralel este **dependent de drum**).

9.6 Conexiunea Levi-Civita

Acest curs este destinat geometriei riemanniene, de aceea nu vom intra în prea multe detalii în ceea ce priveşte teoria generală a conexiunilor liniare definite pe o varietate diferenţiabilă, cu toate că această teorie este deosebit de interesantă. Ne îndreptăm mai întâi atenţia asupra unor legături ce se pot stabili între metrica riemanniană şi o conexiune definită pe o varietate liniară.

Propoziţia 9.6.1. *Fie (M, g) o varietate riemanniană. Dacă ∇ este o conexiune pe M, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Pentru orice câmpuri de vectori $X, Y, Y' \in \mathcal{X}(M)$ avem

$$Xg(Y, Y') = g(\nabla_X(Y), Y') + g(Y, \nabla_X(Y')). \tag{9.19}$$

ii) Pentru orice curbă netedă $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ transportul paralel $\tau_\gamma : T_{\gamma(a)} \longrightarrow T_{\gamma(b)}$ este o izometrie liniară.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că afirmaţia i) este echivalentă cu afirmaţia
i')Pentru orice curbă netedă $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ şi orice câmpuri de vectori $V, W \in C^\infty(\gamma)$ are loc

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right).$$

Este clar că i) rezultă imediat din i'). Pe de altă parte, dacă i') este adevărată pentru V, W, iar $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, atunci este foarte uşor de văzut că i') rămâne adevărată şi dacă V sau W se înlocuieşte cu $f \cdot V$

(respectiv $f \cdot W$). Să presupunem acum că i) este adevărată pe M. Atunci rezultă că i) este adevărată, în particular, pe orice hartă de coordonate, deci putem alege X arbitrar şi $Y = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y' = \frac{\partial}{\partial x^j}$ într-o astfel de hartă. Dar $\nabla_X (Y)(x)$ depinde numai de $X(x)$, prin urmare i') este adevărată dacă atât V cât şi W sânt câmpuri de vectori de coordonate, restrânse la curba γ. Dar orice câmp de-a lungul lui γ este o combinaţie liniară de câmpuri de această formă, cu coeficienţii funcţii netede, deci i') rezultă din observaţia pe care am făcut-o mai sus.

Trecem acum la demonstraţia propriu-zisă a propoziţiei.

i') $\Longrightarrow$ ii) Fie V şi W două câmpuri de vectori paralele de-a lungul curbei γ, adică

$$\frac{DV}{dt} \equiv 0, \quad \frac{DW}{dt} \equiv 0.$$

De aici rezultă, pe baza punctului i'), că $\frac{d}{dt} g(V, W) = 0$ de-a lungul curbei γ, adică $g(V, W)$ este o constantă de-a lungul curbei γ. În particular, putem spune că

$$g(V_a, W_a) = g(V_b, W_b),$$

adică transportul paralel este o izometrie, ceea ce demonstrează punctul ii).

ii) $\Longrightarrow$ i'). Alegem, pentru început n câmpuri paralele de-a lungul curbei γ, $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ astfel încât $P_1(a), \ldots, P_n(a)$ să fie o bază ortonormată în spaţiul tangent $T_{\gamma(a)}M$. Transportul paralel fiind o izometrie, rezultă că $\{P_1(t), P_n(t)\}$ formează o bază ortonormată în $T_{\gamma(t)}$ pentru fiecare $t \in [a, b]$. Alegem acum două câmpuri de vectori de-a lungul lui γ, V şi W, care au, faţă de baza aleasă, descompunerile

$$V(t) = v^i(t) P_i(t), \quad W(t) = w^j(t) P_j(t).$$

Prin urmare, ţinând cont de faptul că baza este ortonormată, avem

$$g(V, W) = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

şi deci vom avea

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt}. \tag{*}$$

Pe de altă parte, însă, pentru derivatele covariante ale lui V şi W de-a lungul curbei avem

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \frac{dw^i}{dt} P_i,$$

aşadar,

$$g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) = g\left(\frac{dv^i}{dt} p_i, w^j P_j\right) = \frac{dv^i}{dt} w^j g(P_i, P_j) =$$
$$= \frac{dv^i}{dt} w^j \delta_{ij} = \frac{dv^i}{dt} w^i$$

şi, analog,

$$g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) = v^i \frac{dw^i}{dt},$$

ceea ce demonstrează că relaţia (*) este, în fapt, tocmai i'), iar propoziţia este demonstrată. ■

Definiţie. O conexiune ∇ se numeşte **simetrică** sau **fără torsiune** dacă pentru orice câmpuri de vectori $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ are loc relaţia

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y]. \tag{9.20}$$

Observaţie. Este uşor de constatat că o conexiune este simetrică dacă şi numai dacă, în orice hartă, coeficienţii Christoffel sunt simetrici în indicii inferiori. Într-adevăr, dacă (U, φ) este o hartă cu coordonatele x^i, atunci, dacă aplicăm formula (9.20) pentru o pereche de câmpuri de vectori de coordonate, obţinem (ţinând cont de faptul că pentru câmpurile de coordonate paranteza Lie este nulă), că o conexiune este simetrică dacă

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru,

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

ceea ce, în mod evident, poate avea loc doar dacă $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. De remarcat, totuşi, că această echivalenţă între simetria conexiunii şi simetria coeficienţilor de conexiune este valabilă doar dacă ne referim la coeficienţii de conexiune asociaţi unei hărţi (cu alte cuvinte, asociaţi unei baze de câmpuri vectoriale de coordonate). Coeficienţii de conexiune ai unei conexiuni simetrice relativ la o bază locală de câmpuri vectoriale oarecare *nu sunt neapărat simetrici*.

Teorema 9.3. *Fie (M, g) o varietate riemanniană. Atunci pe M există o singură conexiune ∇ (numită* conexiune riemanniană *sau* conexiune Levi-Cività*) astfel încât*

a) ∇ este simetrică

b) Are loc una dintre condiţiile echivalente din Propoziţia 9.6.1 (altfel spus, conexiunea ∇ este metrică*).*

Demonstraţie. Vom demonstra mai intâi unicitatea, demonstrând că, dacă există, conexiunea trebuie să verifice o anumită formulă, apoi vom defini conexiunea prin această formulă şi vom demonstra că, într-adevăr, ea verifică proprietăţile unei conexiuni liniare. Fie, deci, X, Y, Z trei câmpuri vectoriale pe M şi să presupunem că ∇ este o conexiune pe M, compatibilă cu metrica şi simetrică. Utilizând, alternativ, compatibilitatea cu metrica şi simetria conexiunii, ca şi simetria metricii, obţinem, succesiv:

$$\begin{aligned}
g\big(\nabla_X(Y), Z\big) &= Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_X(Z)) = Xg(Y,Z) - \\
&- g(Y, \nabla_Z(X) + [X,Z]) = Xg(Y,Z) - \\
&- g(Y, \nabla_Z(X)) - g(Y,[X,Z]) = Xg(Y,Z) - \\
&- g(Y,[X,Z]) - g(\nabla_Z(X), Y) = Xg(Y,Z) - \\
&- g(Y,[X,Z]) - Zg(X,Y) + g(X, \nabla_Z(Y)) = \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z]) + \\
&+ g(X, \nabla_Y(Z) + [Z,Y]) = Xg(Y,Z) - \\
&- Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z]) + g(X,[Z,Y]) + \\
&+ g(\nabla_Y(Z), X) = Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) - \\
&- g(Y,[X,Z]) + g(X,[Z,Y]) + Yg(Z,X) - \\
&- g(Z, \nabla_Y(X)) = Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- g(Y,[X,Z]) + g(X,[Z,Y]) + Yg(Z,X) - \\
&- g(Z, \nabla_X(Y) + [Y,X]) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - \\
&- Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]) + \\
&+ g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) - g(\nabla_X(Y), Z).
\end{aligned}$$

Aşadar,

$$g\big(\nabla_X(Y), Z\big) = \frac{1}{2}\big(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + \\ + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y])\big). \tag{9.21}$$

Cum g este o metrică nedegenerată, iar relaţia (9.21) este verificată pentru orice X, Y, Z, rezultă că ea defineşte în mod unic un operator $\nabla : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$. Mai rămâne de arătat că acest operator este, într-adevăr, o conexiune. Linearitatea în raport cu primul argument şi aditivitatea în raport cu al doilea rezultă imediat din proprietăţile de linearitate şi simetrie ale metricii şi ale parantezei Lie a câmpurilor de vectori. Ne vom limita, de aceea, la a demonstra identitatea lui Leibniz. Fie, deci $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ şi $f \in C^\infty(M)$. Avem

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X(fY), Z) &= Xg(fY,Z) + fYg(Z,X) - Zg(X,fY) + \\
&+ g(fY,[Z,X]) - g(X,[fY,Z]) + \\
&+ g(Z,[X,fY]) = X(f\cdot g(Y,Z)) + \\
&+ fYg(Z,X) - Z(f\cdot g(X,Y)) + \\
&+ f\cdot g(Y,[Z,X]) - g(X, f[Y,Z] - Z(f)Y) + \\
&+ g(Z, f[X,Y] + X(f)Y) = X(f)g(Y,Z) + \\
&+ fXg(Y,Z) + fYg(Z,X) - Z(f)g(X,Y) - \\
&+ fZg(X,Y) + f\cdot g(Y,[Z,X]) - \\
&- g(X, f[Y,Z]) + g(X, Z(f)Y) + \\
&+ g(Z, f[X,Y]) + g(Z, X(f)Y) = \\
&+ f\big(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + \\
&+ g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y])\big) + \\
&+ 2g(X(f)Y, Z) = 2fg(\nabla_X(Y), Z) + \\
&+ 2g(X(f)Y, Z) = 2g(f\nabla_X(Y) + X(f)Y, Z).
\end{aligned}$$

Utilizând, din nou, nedegenerarea lui g, obtinem

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y,$$

adică tocmai identitatea lui Leibniz. ■

Vom stabili acum expresia coeficienţilor de conexiune asociaţi conexiunii Levi-Civita într-o hartă de coordonate pe varietatea M. Fie, deci (U, φ) o hartă pe M, cu coordonatele locale $x^i, i = 1, \ldots, n$. Notăm cu g^{ij} componentele inversei matricii metricii g în baza de coordonate asociată hărţii. Este uşor de verificat că, în fapt, aceste funcţii sunt componentele unui câmp tensorial de două ori contravariant, de aceea ele se numesc *componente contravariante* ale metricii g. De menţionat faptul că a afirma că g^{ij} sunt componentele contravariante ale metricii este echivalent cu a afirma că

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

unde se aplică regula de însumare a lui Einstein, iar δ^i_j este simbolul lui Kronecker o dată covariant şi o dată contravariant. Această egalitate, de fapt, este echivalentă cu identitatea matricială

$$\left[g^{ij}\right]\cdot[g_{kl}] = I_n,$$

unde I_n este, fireşte, matricea identitate de dimensiune n.

Avem, acum, următorul rezultat.

Teorema 9.4. *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi ∇ conexiunea Levi-Civita asociată. Dacă (U, φ) este o hartă pe M cu coordonatele x^i, atunci coeficienţii lui Christoffel ai conexiunii în raport cu acest sistem de coordonate sunt daţi de formula*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(g_{jl,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}\right), \tag{9.22}$$

unde virgula înseamnă derivare parţială în raport cu coordonatele.

Demonstraţie. Vom pleca de la formula (9.21) care defineşte conexiunea Levi-Civita şi în care punem $X = \partial/\partial x^j$, $Y = \partial/\partial x^k$, $Z = \partial/\partial x^l$. Întrucât, după cum se ştie, comutatorul a două câmpuri de coordonate se anulează, formula citată se simplifică în mod simţitor şi obţinem

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^k} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) - \frac{\partial}{\partial x^l} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right).$$

Utilizând definiţia coeficienţilor Christoffel şi cea a coeficienţilor metricii, această formulă devine

$$g\left(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\left(g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l}\right)$$

sau, utilizând omogenitatea lui g,

$$g_{il}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l}\right).$$

Înmulţim ambii membrii ai ecuaţiei precedente cu g^{ml} (şi, se înţelege, însumăm după l) şi obţinem

$$g^{ml} g_{il}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ml}\left(g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l}\right)$$

sau

$$\delta^m_i \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ml}\left(g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l}\right).$$

Cum $\delta^m_i \neq 0$ doar dacă $i = m$, se obţine

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{ml}\left(g_{lk,j} + g_{jl,k} - g_{jk,l}\right),$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

9.7 Exemple

9.7.1 Spaţiul euclidian n-dimensional

Este clar că în cazul spaţiului euclidian n-dimensional, întrucât toţi coeficienţii metricii sunt constanţi, toate derivatele lor sunt egale cu zero şi, drept consecinţă, toţi coeficienţii Christoffel sunt, de asemenea, egali cu zero.

9.7.2 Suprafeţe în spaţiul euclidian tridimensional

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă netedă. Metrica pe această suprafaţă este prima formă fundamentală. Astfel, dacă alegem o parametrizare locală a suprafeţei, $(U, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v))$, atunci componentele metricii vor fi

$$\begin{cases} g_{11} & \equiv E = \mathbf{r'}_u^2, \\ g_{12} & = g_{21} \equiv F = \mathbf{r'}_u \cdot \mathbf{r'}_v, \\ g_{22} & \equiv G = \mathbf{r'}_v^2. \end{cases}$$

Este foarte uşor de constatat că inversa matricii metricii, relativ la această parametrizare este

$$[g]^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

cu alte cuvinte, componentele contravariante ale metricii sunt

$$\begin{cases} g^{11} & = \frac{G}{EG-F^2}, \\ g^{12} & = g^{21} = -\frac{F}{EG-F^2}, \\ g^{22} & = \frac{E}{EG-F^2}. \end{cases}$$

Considerăm, în continuare, că u este prima coordonată, iar v este cea de-a doua. Obţinem atunci următoarele formule pentru coeficienţii Christoffel:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{12,1} + g_{21,1} - \\ - g_{11,2}) = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left[GE'_u - F(2F'_u - E'_v) \right],$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{22,1} + g_{12,2} - \\ - g_{12,2}) = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(GE'_v - FG'_u \right),$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{12,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{22,2} + g_{22,2} - \\ - g_{22,2}) = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left[G(2F'_v - G'_u) - FG'_v \right],$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{21}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + \frac{1}{2} g^{22}(g_{21,1} + g_{12,1} - \\ - g_{11,2}) = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left[-FE'_u + E(2F'_u - E'_v) \right],$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{21}(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}) + \frac{1}{2} g^{22}(g_{22,1} + g_{12,2} - \\ - g_{12,2}) = \frac{1}{2(EG - F^2)} (-FE'_v + EG'_u),$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{21}(g_{12,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) + \frac{1}{2} g^{22}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = \\ = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left[-F(2F'_v - G'_u) + EG'_v \right].$$

Sintetizând, am obţinut următoarele formule:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left[GE'_u - F(2F'_u - E'_v)\right] \\
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left(GE'_v - FG'_u\right) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left[G(2F'_v - G'_u) - FG'_v\right]
\end{aligned}
\tag{9.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left[-FE'_u + E(2F'_u - E'_v)\right] \\
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2(EG-F^2)}(-FE'_v + EG'_u) \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\left[-F(2F'_v - G'_u) + EG'_v\right].
\end{aligned}
$$

9.7.3 Sfera bidimensională

Considerăm sfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

cu parametrizarea locală

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}, \qquad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Prima formă fundamentală se poate obţine imediat:

$$\begin{cases} E = x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = 1 \\ F = x'_\theta x'_\varphi + y'_\theta y'_\varphi + z'_\theta z'_\varphi = 0 \\ G = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = \sin^2\theta \end{cases},$$

deci $EG - F^2 = \sin^2\theta$.

Aplicând formulele (9.23) se obţine pentru coeficienţii Christoffel ai sferei:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1 = 0 & &\Gamma_{11}^2 = 0 \\
&\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0 & &\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg}\theta \\
&\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta\cos\theta & &\Gamma_{22}^2 = 0
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

9.7.4 Spaţiul hiperbolic bidimensional

Un exemplu foarte important de varietate riemanniană este aşa-numitul plan hiperbolic, ce serveşte drept model pentru geometria neeuclidiană a lui Bolyai şi Lobacevski. Fie, deci

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}. \tag{9.25}$$

H este, în mod evident, o submulţime deschisă a planului euclidian şi este, deci, o varietate diferenţiabilă de dimensiune doi, având un atlas format dintr-o singură hartă, anume chiar aplicaţia identică. Cu alte cuvinte, putem utiliza ca şi coordonate pe H chiar coordonatele carteziene x şi y. Vom înzestra H cu o metrică diferită de metrica euclidiană, şi anume

$$g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}. \tag{9.26}$$

Este clar că g este, într-adevăr, o metrică riemanniană pe H. Varietatea riemanniană (H, g) se numeşte *plan hiperbolic* sau *spaţiu hiperbolic bidimensional*.

Se constată imediat că metrica are componentele contravariante date de

$$g^{ij} = y^2\delta^{ij}.$$

Avem, prin urmare,

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + \frac{1}{2}g^{12}(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}) = 0,\\
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}) + \frac{1}{2}g^{12}(g_{21,2} + g_{22,1} -\\
&\quad - g_{12,2}) = \frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y},\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) + \frac{1}{2}g^{12}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = 0,\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{21}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,1} + g_{21,1} -\\
&\quad - g_{11,2}) = -\frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y},\\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}g^{21}(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}) + \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} -\\
&\quad - g_{12,2}) = 0,\\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{21}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) + \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) =\\
&= \frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Sintetizând, am obţinut pentru coeficienţii Christoffel ai planului hiperbolic expresiile

$$\begin{array}{ll}
\Gamma^1_{11} = 0 & \Gamma^2_{11} = \dfrac{1}{y}\\
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\dfrac{1}{y} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\\
\Gamma^1_{22} = 0 & \Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{y}
\end{array} \tag{9.27}$$

CAPITOLUL 10

Geodezice şi aplicaţia exponenţială

În cele ce urmează, dacă nu se precizează altfel, M va fi o varietate riemanniană, iar ∇ va fi conexiunea Levi-Civita indusă de metrica varietăţii.

Definiţie. O curbă netedă $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ se numeşte *geodezică* în cazul în care câmpul vectorial al vitezelor $\frac{d\gamma}{dt}$ este paralel de-a lungul curbei γ, cu alte cuvinte, dacă este verificată ecuaţia:

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \equiv 0. \tag{10.1}$$

Propoziţia 10.0.1. *Dacă (U, φ) este o hartă pe M, cu coordonatele locale x^i, iar $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$, $i = 1, \ldots, n$ sunt coordonatele unui punct oarecare de pe curba γ, atunci ecuaţiile geodezicelor, în coordonatele locale x^i, sunt*

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0, \quad , k = 1, \ldots, n. \tag{10.2}$$

Demonstraţie. Dacă $V_t = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ este un câmp de vectori de-a lungul curbei γ, atunci V_t este paralel de-a lungul curbei γ dacă şi numai dacă

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{ji}\frac{d\gamma^j}{dt}v^i = 0, \quad , k = 1, \ldots, n.$$

Dacă aplicăm aceste ecuaţii pentru câmpul vitezelor curbei γ, $V_t \equiv \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$, atunci ele se transformă în sistemul de ecuaţii (10.2). ∎

10.1 Exemple

10.1.1 Spaţiul hiperbolic bidimensional

Coeficienţii Christoffel ai planului hiperbolic au fost determinaţi în capitolul precedent (vezi (9.27). Putem, deci, scrie ecuaţiile geodezicelor. Pentru $i = 1$ avem (notând derivarea în raport cu t cu un punct):

$$\ddot{x} + \Gamma^1_{11}\dot{x}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{x}\dot{y} + \Gamma^1_{22}\dot{y}^2 = 0,$$

i.e.

$$\ddot{x} - \frac{2}{y}\dot{x}\dot{y} = 0.$$

Pentru $i = 2$, pe de altă parte, avem

$$\ddot{y} + \Gamma_{11}^2 \dot{x}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{22}^2 \dot{y}^2 = 0,$$

i.e.

$$\ddot{y} + \frac{1}{y}\dot{x}^2 - \frac{1}{y}\dot{y}^2 = 0.$$

Avem de rezolvat, prin urmare, sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2}{y}\dot{x}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{1}{y}\dot{x}^2 - \frac{1}{y}\dot{y}^2 = 0 \end{cases}. \tag{10.3}$$

Acesta este un sistem de ecuaţii diferenţiale *neliniare* şi, de aceea, nu avem metode generale de rezolvare. Totuşi, o examinare mai atentă ne arată că sistemul are particularităţi care pot simplifica lucrurile. Mai precis, în ecuaţiile sistemului nu apare în mod explicit nici funcţia x şi nici variabila independentă t. Vom reduce ordinul sistemului punând

$$p = \frac{dx}{dy}.$$

Avem atunci:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = p\dot{y},$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}(p\dot{y}) = \frac{dp}{dy}\dot{y}^2 + p\ddot{y}.$$

Sistemul (10.3) devine atunci

$$\begin{cases} \frac{dp}{dy}\dot{y}^2 + p\ddot{y} - \frac{2}{y}p\dot{y}^2 = 0 \\ \ddot{y} + \frac{1}{y}p^2\dot{y}^2 - \frac{1}{y}\dot{y}^2 = 0 \end{cases},$$

sau, încă,

$$\begin{cases} p\ddot{y} + \dot{y}^2\left(\frac{dp}{dy} - \frac{2}{y}p\right) = 0 \\ \ddot{y} + \frac{1}{y}\dot{y}^2(p^2 - 1) = 0 \end{cases}. \tag{10.4}$$

Dacă îl înlocuim pe $\ddot{y}$ din a doua ecuaţie în prima, se obţine

$$\dot{y}^2\left(\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}(p^3 + p)\right) = 0.$$

Dacă am avea $\dot{y} = 0$, atunci, din ecuaţiile geodezicelor ar rezulta că şi $\dot{x} = 0$, deci ar rezulta că geodezica este degenerată, reducându-se la un punct. Presupunem, prin urmare, că $\dot{y} \neq 0$. Atunci, din ecuaţia precedentă, obţinem că

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y}(p^3 + p).$$

Integrând prin părţi, obţinem că

$$p = \frac{dx}{dy} = \pm\frac{cy}{\sqrt{1 - c^2y^2}}, \tag{10.5}$$

unde c este o constantă de integrare. Dacă $c = 0$, atunci geodezicele ce se obţin sunt curbele din semiplanul $y > 0$ de ecuaţie $x = const$, adică sunt nişte semidrepte (deschise) verticale.

Dacă se consideră că $c \neq 0$, atunci punem $c = 1/a$ şi integrăm încă o dată ecuaţia (10.5) şi obţinem

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2,$$

unde b este o altă constantă de integrare. Aşadar, în acest caz, geodezicele sunt semicercuri deschise cu centrul pe axa Ox.

Semiplanul H, cu metrica g, este utilizat ca un model al geometriei neeuclidiene de tip Bolyai-Lobacevski (*geometria hiperbolică*). În acest model, punctele sunt chiar punctele semiplanului, în timp ce dreptele sunt geodezicele varietăţii riemanniene (H, g), adică semidreptele deschise cu originea pe axa Ox şi semicercurile deschise cu originea pe această axă.

Este uşor de verificat că H verifică axiomele geometriei euclidiene, cu excepţia axiomei paralelelor. Într-adevăr, este clar, de exemplu, că prin fiecare două puncte distincte ale lui H trece o dreaptă şi numai una. Dacă cele două puncte au aceeaşi coordonată x, atunci ele se află pe o semidreaptă verticală, în caz contrar ele determină un cerc cu centrul pe axa Ox şi numai unul.

Pe de altă parte, printr-un punct exterior unei drepte hiperbolice se pot duce o infinitate de drepte care nu intersectează dreapta dată. Reamintim că aceste drepte se numesc *nesecante*. Printre ele, există două care se intersectează cu dreapta dată la “infinit”, cu alte cuvinte pe axa Ox. Acestea se numesc *paralele* ale dreptei date. Prin urmare, în H, printr-un punct exterior unei drepte se pot duce *două* paralele la dreapta dată, în contrast cu geometria euclidiană, unde, după cum este bine cunoscut, există doar una.

10.2 Sfera bidimensională

Fie S^2 sfera bidimensională, adică

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Pe S^2 considerăm metrica riemanniană indusă de metrica euclidiană a spaţiului ambient (adică *prima formă fundamentală*). Alegem ca şi coordonate coordonatele sferice obişnuite $x^1 = \theta, x^2 = \varphi$. După cum se ştie, componentele metricii în acest sistem de coordonate sunt

$$g_{11} = \sin^2\varphi, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

Coeficienţii Christoffel au fost determinaţi în capitolul precedent (vezi (9.24).

Putem scrie acum ecuaţiile geodezicelor. Pentru θ avem

$$\ddot{\theta} + \Gamma^1_{11}\dot{\theta}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \Gamma^1_{22}\dot{\varphi}^2 = 0$$

sau

$$\ddot{\theta} + 2\operatorname{ctg}\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0.$$

Pentru φ, pe de altă parte, avem

$$\ddot{\varphi} + \Gamma^2_{11}\dot{\theta}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \Gamma^2_{22}\dot{\varphi}^2 = 0$$

sau

$$\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 = 0.$$

Aşadar, sistemul de ecuaţii pentru geodezicele sferei este

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\operatorname{ctg}\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \\ \ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}. \tag{10.6}$$

O soluţie a acestor ecuaţii se vede cu ochiul liber: $\theta = const$ şi $\varphi = at + b$, unde a şi b sunt constante. Este evident ce reprezintă aceste ecuaţii: un cerc mare al sferei, situat în plan vertical. Să presupunem acum că θ nu este constantă, adică $\dot{\theta} \neq 0$. Atunci putem alege în calitate de variabilă independentă pe θ şi, utilizând ecuaţiile geodezicelor, obţinem, notând cu $'$ derivata în raport cu θ,

$$\varphi'' - 2\operatorname{ctg}\varphi \cdot \varphi'^2 - \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Facem schimbarea de funcţie $w = \operatorname{ctg}\varphi$ şi un calcul simplu arată că pentru această funcţie este verificată ecuaţia diferenţială liniară

$$w'' + w = 0.$$

Soluţia acestei ecuaţii este, după cum se ştie,

$$w = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

cu a şi b constante arbitrare, de unde, revenind la substituţia făcută, se obţine

$$\operatorname{ctg}\varphi = a\cos\theta + b\sin\theta$$

sau, încă,

$$a\cos\theta\sin\varphi + b\sin\theta\sin\varphi - \cos\varphi = 0.$$

Dar această ecuaţie ne spune, în fapt, că cele trei coordonate carteziene (x, y, z) ale unui punct de pe geodezică verifică ecuaţia

$$ax + by - z = 0,$$

ceea ce înseamnă că geodezica se află într-un plan care trece prin centrul sferei, adică este un cerc mare al sferei (sau un arc al unui astfel de cerc).

10.3 Teorema de existenţă şi unicitate pentru geodezice

Sistemul de ecuaţii al geodezicelor, în coordonate locale, este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea, de o formă specială. Pentru astfel de sisteme, definite pe spaţii euclidiene, există rezultate standard de existenţă şi unicitate a soluţiilor, ce se demonstrează în teoria ecuaţiilor diferenţiale. Astfel, dacă $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$, iar $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ este o submulţime deschisă, cu coordonatele $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, iar $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este o aplicaţie netedă, atunci o ecuaţie (vectorială) de acelaşi tip cu ecuaţiile geodezicelor se va scrie:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = F\left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right).$$

Pentru o astfel de ecuaţie există următorul rezultat de existenţă şi unicitate a soluţiilor:

Teorema 10.1. *Fie* $(\mathbf{u_1}, \mathbf{v_1}) \in U$. *Atunci există o vecinătate* W *a lui* $(\mathbf{u_1}, \mathbf{v_1})$ *şi un număr real* $\epsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $(\mathbf{u_0}, \mathbf{v_0}) \in W$ *ecuaţia diferenţială*

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = F\left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$$

are o soluţie unică $t \longrightarrow \mathbf{u}(t)$ *definită pe intervalul* $(-\epsilon, \epsilon)$ *şi care satisface condiţiile iniţiale*

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u_0}, \quad , \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v_0}.$$

Pentru a traduce această teoremă într-o afirmaţie referitoare la ecuaţiile geodezicelor, trebuie să amintim, mai întâi, anumite rezultate referitoare la fibratul tangent al unei varietăţi diferenţiabile.

10.4 Fibratul tangent

Definiţie. Fie M o varietate diferenţiabilă. Se numeşte *fibrat tangent* al varietăţii M reuniunea disjunctă a tuturor spaţiilor tangente la varietate:

$$TM = \coprod_{x \in M} T_x M.$$

Vrem să demonstrăm că această mulţime poartă o structură naturală de varietate diferenţiabilă, a cărei dimensiune este dublul dimensiunii varietăţii M. În acest scop, trebuie, înainte de toate, să înzestrăm TM cu o structură de spaţiu topologic. Tehnica utilizată în acest scop, standard în topologia generală, constă în transportul unei structuri prin intermediul unor aplicaţii.

Fie X o mulţime oarecare, acoperită cu o familie de submulţimi $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$:

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Presupunem că pentru fiecare $\alpha \in A$ există câte un spaţiu topologic U'_α şi câte o aplicaţie bijectivă $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha$.

Următoarea lemă arată cum se pot utiliza spaţiile topologice U'_α şi bijecţiile h_α pentru a construi o structură de spaţiu topologic pe mulţimea, iniţial amorfă, X.

Lema 10.1. *Presupunem că pentru fiecare $\alpha, \beta \in A$ astfel încât $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ au loc proprietăţile:*

1. *$h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ este o submulţime deschisă în U'_α;*
2. *$h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow U'_\beta$ este o aplicaţie continuă.*

Atunci există o singură topologie pe X astfel încât:

1. *U_α este deschisă în X pentru orice $\alpha \in A$;*
2. *$h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha$ este un omeomorfism pentru orice $\alpha \in A$.*

Demonstraţie. Din cele două ipoteze ale lemei rezultă, deoarece şi $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ este deschisă în U_β, că $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ este un omeomorfism pe imagine, adică aplicaţia

$$h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{10.7}$$

este un omeomorfism. Vom spune acum că o mulţime $U \subset X$ este deschisă dacă pentru orice $\alpha \in A$ mulţimea $h_\alpha(U \cap U_\alpha)$ este deschisă în spaţiul topologic U'_α. Faptul că mulţimile deschise astfel definite formează, într-adevăr, o topologie pe mulţimea X, iar condiţia 1) din enunţul lemei este verificată în mod trivial. Mai rămâne de verificat condiţia 2). În acest scop, fixăm un indice $\alpha \in A$ şi considerăm o mulţime $V \subseteq U_\alpha$. Dacă mulţimea V este deschisă în X, atunci conform definiţiei topologiei din X, mulţimea $h_\alpha(V) \equiv h_\alpha(V \cap_U \alpha)$ trebuie să fie deschisă în U'_α. De aici rezultă că aplicaţia h_α^{-1} este continuă (deoarece contraimaginea oricărei mulţimi deschise este, de asemenea, o mulţime deschisă). Trebuie să arătăm acum că aplicaţia h_α este continuă. Fie, deci $U \subseteq U'_\alpha$ o submulţime deschisă. Deoarece aplicaţia h_α este o bijecţie, rezultă că există o mulţime $V \subseteq U_\alpha$ astfel încât $U = h_\alpha(V)$ Ceea ce trebuie, deci, să demonstrăm este că mulţimea $V \equiv h_\alpha^{-1}(U)$ este deschisă în X. Conform definiţiei mulţimilor deschise din X, V este deschisă dacă şi numai dacă pentru orice $\beta \in A$ mulţimea $h_\beta(V \cap U_\beta)$ este deschisă în U'_β. Remarcăm, înainte de toate că, deoarece $V \subseteq U_\alpha$, avem că

$$V \cap U_\beta \subseteq U_\alpha \cap U_\beta, \qquad \text{pentru orice} \quad \beta \in A.$$

Pe de altă parte, deoarece $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ este un omeomorfism, mulţimea $h_\beta(V \cap U_\beta)$ este deschisă în $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ dacă şi numai dacă $h_\alpha(V \cap U_\beta)$ este deschisă în $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq U'_\alpha$. Dar asta rezultă imediat din ipoteza că $h_\alpha(V)$ este deschisă în U'_α. ■

Fie acum M o varietate diferenţiabilă şi $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ un atlas pe ea. Atunci, după cum se observă cu uşurinţă, TM poate fi acoperită cu mulţimi de forma

$$TU_\alpha = \coprod_{x \in U_\alpha} T_x M,$$

iar pentru fiecare $\alpha \in A$ avem câte o bijecţie

$$h_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow T\varphi(U_\alpha) = \varphi(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \tag{10.8}$$

dată de

$$h_\alpha(v_x) = (x_\alpha^1(x), \ldots, x_\alpha^n, v^1, \ldots, v^n), \tag{10.9}$$

unde

$$v_x = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha{}^i}\right|_x \in T_x M, \; x \in U_\alpha.$$

Este uşor de verificat acum că, dacă în lema precedentă înlocuim mulţimea X cu TM, iar aplicaţiile h_α sunt cele definite de formula (10.8), condiţiile lemei sunt verificate şi se obţine, astfel, o structură de spaţiu topologic pe mulţimea TM.

Dacă acum considerăm pe TM această structură topologică, nu este greu de verificat că are loc următoarea teoremă:

Teorema 10.2. *TM este o varietate diferenţiabilă de dimensiune $2n$, cu hărţi de coordonate date de (TU_α, h_α), unde h_α sunt date de relaţia (10.8).*

Presupunem acum că (M, g) este o varietate riemanniană. Vom arăta că pe fibratul tangent al varietăţii putem identifica unele mulţimi deschise de o formă specială. Mai precis, are loc următorul rezultat:

Propoziţia 10.4.1. *Fie $x_0 \in M$ şi $0_{x_0} \in T_{x_0}M$ – vectorul nul şi $W \subseteq TM$ o vecinătate deschisă a lui 0_{x_0} în TM. Atunci există o vecinătate deschisă $V \subseteq W$ a lui 0_{x_0} în TM de forma*

$$V = \{v_x \in TM | x \in U, \|v_x\| < \epsilon\},$$

unde $U \subseteq M$ este o vecinătate a lui x, iar $\epsilon > 0$.

Demonstraţie. Fie (U_1, φ) o hartă de coordonate în jurul lui x_0, cu coordonatele x^i. Notăm, ca de obicei, cu g_{ij} componentele metricii faţă de acest sistem de coordonate:

$$g_{ij}(x) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right\rangle$$

Prin urmare, pentru un $x \in U_1$, dacă avem un vector $v_x \in T_x M$, dat prin componentele sale, $v_x = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$, atunci pătratul normei vectorului este dat de

$$\|v_x\|^2 = g_{ij}(x) v^i v^j.$$

Deoarece funcţiile $g_{ij} : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt netede, este clar că aplicaţia $\|\cdot\| : TU_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ este, de asemenea, o funcţie netedă, deci este, în particular, continuă. Prin urmare, o mulţime V de forma celei din enunţul propoziţiei trebuie să fie deschisă. Fie acum $h : TU_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ o hartă pe fibratul tangent TM, dată de

$$h(v_x) = (x^1(x), \ldots, x^n(x), v^1, \ldots, v^n),$$

unde $v_x = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \in T_x M$, iar $x \in U_1$. Deoarece h este un omeomorfism pe imagine, putem alege o vecinătate $V_1 \subseteq W$ a lui 0_{x_0} de forma

$$V_1 = \{v_x \in TM | x \in U_2, |v_x| < \epsilon_1\},$$

unde $U_2 \subseteq U_1$ este o vecinătate a lui x_0, iar

$$|v_x| = \sqrt{(v^1)^2 + \cdots + (v^n)^2}.$$

Fie acum $\delta > 0$ un număr real şi

$$B = \{x \in U_2|\ |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \delta\},$$

unde

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \sqrt{\left(x^1(x) - x^1(x)\right)^2 + \cdots + (x^n(x) - x^n(x))^2}.$$

Deoarece φ este un omeomorfism pe imagine, iar B este contraimaginea prin φ a unei mulţimi compacte din $\mathbb{R}^n$ (bila închisă cu centrul în $\varphi(x_0)$ şi de rază δ), rezultă că B este, de asemenea, o mulţime compactă.

Deoarece aplicaţia $\|\cdot\|$, restrânsă la mulţimea compactă

$$S = \{v_x \in TM | x \in B, |v_x| = 1\}$$

este continuă, rezultă că există o constantă pozitivă $\epsilon_2 > 0$ astfel încât

$$\|v_x\| \geq \epsilon_2 |v_x|$$

pentru orice v_x pentru care $x \in B$. Prin urmare, mulţimea

$$V = \{v_x \in TM|\ |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta, \|v_x\| < \epsilon\},$$

cu $\epsilon = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$ este o vecinătate a lui 0_{x_0} de forma cerută şi $V \subseteq W$. ■

10.5 Aplicaţia exponenţială

Suntem gata, acum, să enunţăm rezultatul privitor la existenţa şi unicitatea geodezicelor:

Teorema 10.3. *Fie (M, g) o varietate riemanniană. Atunci pentru fiecare punct $x_0 \in M$ există o vecinătate deschisă U a sa şi două numere reale pozitive $\epsilon, \delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in U$ şi $v \in T_x M$, cu $\|v\| < \epsilon$ există o singură geodezică*

$$\gamma_v : (-2\delta, 2\delta) \longrightarrow M$$

astfel încât

$$\gamma_v(0) = x, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v.$$

În plus, $\gamma_v(t)$ depinde neted de t şi de $v_x \in \{v \in TU | \|v\| < \epsilon\}$.

Demonstraţie. Rezultă imediat din teorema 10.1 şi propoziţia 10.4.1 ■

Observaţii. 1. În teorema de mai sus, δ se poate alege egal cu 1, dacă înlocuim ϵ cu $\epsilon \cdot \delta$. De fapt, dacă $\gamma_v : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ este o geodezică, atunci $\gamma_{\delta v} = \gamma_v(\delta t),\ t \in (-2, 2)$, este, de asemenea, o geodezică.

2. Din teoria ecuaţiilor diferenţiale rezultă că există o singură geodezică *maximală*, definită pe cel mai mare interval posibil.

Definiţie. Să presupunem că 1 se află în domeniul de definiţie al geodezicei γ_v. Definim atunci aplicaţia exponenţială punând

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

Observaţie. Se poate constata cu uşurinţă că $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$.

Fie (M, g) o varietate riemanniană. Pentru un $x \in M$, alegem, ca în Teorema 10.3, U o vecinătate a lui p şi un $\epsilon > 0$ astfel încât aplicaţia exponenţială $\exp_y(v)$ să existe pentru $y \in U$ şi $v \in T_y M$, cu $\|v\| < \epsilon$ şi să depindă neted de y şi de v. Fie $V \subseteq TU \subset TM$ mulţimea vectorilor v care îndeplinesc condiţiile de mai sus şi definim aplicaţia

$$F : V \longrightarrow M \times M$$

prin

$$F(v_y) = (y, \exp_y v_y).$$

Este clar că aplicaţia F este netedă şi că $F(0_x) = (x, x)$.

Propoziţia 10.5.1. *F este un difeomorfism local în jurul lui 0_x.*

Demonstraţie. Presupunem că (U, φ) este o hartă în jurul lui x. Atunci orice vector $v = v_y \in V$ este de forma $v_y = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y$, prin urmare, ca element al lui V, v_y are coordonatele $(x^1(y), \dots, x^n(y), v^1, \dots, v^n)$. Pe $M \times M$ avem o hartă $(U \times U, \varphi \times \varphi)$, cu coordonatele $(x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n)$, în jurul punctului (x, x). Diferenţiala lui F în punctul 0_x este dată de

$$F_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{0_x} \right) = \left.\frac{\partial}{\partial {x_1}^i}\right|_x + \left.\frac{\partial}{\partial {x_2}^i}\right|_x$$
$$F_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial v^i}\right|_{0_x} \right) = \left.\frac{\partial}{\partial {x_1}^i}\right|_x .$$

Aşadar, matricea lui F_* este $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ I & I \end{smallmatrix}\right)$. ■

Presupunem acum că vecinătatea lui 0_x pe care F este difeomorfism este de forma

$$V = \{v_y | y \in V, \ \|v_y\| < \epsilon\}.$$

Alegem o vecinătate W a lui x astfel încât

$$F(V) \supseteq W \times W.$$

Am demonstrat, în fapt, următoarea teoremă:

Teorema 10.4. *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi ∇ conexiunea Levi-Civita. Atunci pentru fiecare punct $x \in M$ există o vecinătate W şi un număr real pozitiv $\epsilon > 0$ astfel încât*

1. *Pentru orice $y, y' \in W$ există un singur vector $v \in T_y M$, cu $\|v\| < \epsilon$ astfel încât curba $t \longrightarrow \exp_y(tv)$ să fie o geodezică de la y la y'.*

2. *Aplicaţia $W \times W \longrightarrow TM$, $(y, y') \longrightarrow v$ este netedă.*

3. *Pentru orice $y \in W$, aplicaţia $\exp_y : \{v \in T_y M | \|v\| < \epsilon\} \longrightarrow M$ este un difeomorfism pe o mulţime deschisă $U_y \supseteq W$.*

Observaţii. 1. O vecinătate U_y ca cea din teorema de mai sus se numeşte *vecinătate normală* a lui y. După cum se vede, U_y este imaginea prin aplicaţia exponenţială a unei bile deschise de rază ϵ, centrată în originea spaţiului tangent $T_y M$, $B_\epsilon(0)$.

2. Vecinătatea W din teorema de mai sus este o vecinătate normală a punctului x, dar nu numai: ea este o vecinătate normală pentru fiecare din punctele sale.

10.5.1 Coordonate normale

Este clar că un punct oarecare dintr-o vecinătate U_x ca cea din teorema de mai sus se poate uni cu x printr-o singură geodezică (cu alte cuvinte, U_x este o mulţime *stelată* în raport cu x).

Pe de altă parte, orice vecinătate stelată a lui O_x în T_x se aplică prin $\exp_x$ într-o vecinătate stelată a lui x pe M. Cum vecinătăţile stelate ale lui 0_x formează o bază de vecinătăţi ale 0_x, rezultă că vecinătăţile stelate ale lui x formează o bază de vecinătăţi ale lui x pe M.

Alegem în T_xM o bază ortonormată faţă de care coordonatele unui vector sunt η^i. Definim pe U_x un sistem de coordonate x^i punând $x^i = \eta^i \circ \exp_x^{-1}$:

$$x^i(y) = \left(\eta^i \circ \exp_x^{-1}\right)(y) = \eta^i\left(\exp_x^{-1}(y)\right), \quad \forall y \in U_x.$$

Coordonatele x^i astfel definite se numesc *coordonate normale* în jurul punctului x.

Dacă $c(t)$ este o geodezică ce trece prin x pentru $t = 0$, ecuaţiile ei parametrice, în coordonate normale, vor fi $x^i(t) = a^i t$, unde a^i sunt constante. Într-adevăr, fie $V_0 \subset T_xM$ o vecinătate a originii lui T_xM pe care $\exp_x$ este un difeomorfism. Pentru orice vector $v \in V_0$ avem geodezica $c(t) = \exp_x(tv)$. Dacă $v = a^k e_k$, atunci

$$x^i(t) = \eta^i\left(ta^k e_k\right) = a^k t \eta^i(e_k) = a^k t \delta^i_k = a^i t.$$

Propoziţia 10.5.2. *Într-un sistem de coordonate normale în jurul lui x,*

$$\Gamma^i_{jk}(x) + \Gamma^i_{kj}(x) = 0.$$

Demonstraţie. Considerăm geodezica ce trece prin x şi are ecuaţiile (în coordonate normale):

$$\begin{cases} x^i(t) = 0 \\ x^j(t) = t \\ x^k(t) = t \end{cases}, \qquad \text{unde } j \text{ şi } k \text{ sunt fixaţi şi } i \neq j,\ i \neq k.$$

Ecuaţiile geodezicelor sunt

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0,$$

iar, în cazul nostru:

$$0 + \Gamma^i_{jk}(x) + \Gamma^i_{kj}(x) = 0.$$

Analog se poate proceda pentru orice triplet de indici (i, j, k). ■

Ţinând cont de faptul că ∇ este o conexiune simetrică (adică, în cele din urmă, coeficienţii Christoffel sunt simetrici în indicii inferiori), rezultă imediat că:

Corolarul 10.1. *În coordonate normale în jurul lui x, avem* $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$.

Observaţie. În general, rezultatele din propoziţia şi corolarul precedente sunt valabile *numai în punctul x*. Numai în cazul unor varietăţi riemanniene foarte speciale putem găsi un sistem de coordonate relativ la care coeficienţii Christoffel să se anuleze pe o întreagă mulţime deschisă.

10.5.2 Exemple

Vom arăta, în acest paragraf, cum anume se calculează aplicaţia exponenţială pentru câteva dintre exemplele cele mai întâlnite de varietăţi riemanniene: spaţii euclidiene şi câteva dintre cele mai comune suprafeţe.

Aplicaţia exponenţială a lui $\mathbb{R}^n$. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi v un vector tangent la $\mathbb{R}^n$ în punctul x. Atunci, după cum se ştie, geodezica ce trece prin x şi este tangentă la v în punctul x este o dreaptă, de ecuaţie

$$\gamma_v(t) = x + t \cdot v.$$

Prin urmare, expresia aplicaţiei exponenţiale este

$$\exp_x(v) = \gamma_v(1) = x + v,$$

adică este translaţia cu x.

Aplicaţia exponenţială pentru cilindru. Fie $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dată prin $F(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1$. Este clar că 0 este o valoare regulată a aplicaţiei netede F, deci mulţimea $C = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ este o subvarietate netedă de dimensiune doi a lui $\mathbb{R}^3$. Fie $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C$ parametrizarea $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C$, dată de

$$i(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

Matricea Jacobi a aplicaţiei i este:

$$\mathrm{J}\, i = \begin{pmatrix} -\sin s & 0 \\ \cos s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, aplicaţia tangentă acţionează, pe vectorii bazei din $T_x\mathbb{R}^2$, în modul următor:

$$\begin{aligned} i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_x\right) &= \mathrm{J}\, i(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin s & 0 \\ \cos s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -x^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_y + x^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_y \overset{not}{=} w_1, \\ i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x\right) &= \mathrm{J}\, i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin s & 0 \\ \cos s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_y \overset{not}{=} w_2, \end{aligned}$$

unde $y = i(x)$. Se observă imediat că i_* duce o bază ortonormată din $T_x\mathbb{R}^2$ într-o bază ortonormată a lui $T_{i(x)}C$, prin urmare aplicaţia i este o izometrie. Se poate verifica cu uşurinţă că, din acest motiv, are loc relaţia:

$$i \circ \exp_{\mathbb{R}^2} = \exp_C \circ i_*.$$

Fie, deci, $v \in T_yC$. Atunci, în mod evident, v se poate exprima în funcţie de baza $\{w_1, w_2\}$, adică există două numere reale α şi β astfel încât să avem:

$$v = \alpha w_1 + \beta w_2 = i_*\left(\alpha \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_x + \beta \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x\right).$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} \exp_y(v) &= \exp_y \circ i_*\left(\alpha \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_x + \beta \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x\right) = i \circ \exp_x\left(\alpha \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_x + \beta \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x\right) = \\ &= i \circ \exp_{(s_0,t_0)}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = i(s_0 + \alpha, t_0 + \beta) = \\ &= (\cos(\alpha + s_0), \sin(\alpha + s_0), \beta + t_0). \end{aligned}$$

Deci:

$$\boxed{\exp_{(\cos(s_0),\sin(s_0),t_0)}\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right) = (\cos(\alpha+s_0), \sin(\alpha+s_0), \beta+t_0).}$$

Aplicaţia exponenţială pentru con. Construcţia este, în multe privinţe, analoagă cu construcţia pe care am făcut-o pentru cilindru. Considerăm mulţimea

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \big| x^3 > 0\}$$

şi aplicaţia $F : \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dată prin

$$F(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - \frac{1}{\alpha^2 - 1}(x^3)^2, \quad \text{cu } \alpha > 1.$$

Este clar, din nou, că 0 este valoare regulată pentru aplicaţia netedă F, deci conul[1] $C = F^{-1}(0)$ este o subvarietate netedă de dimensiune doi a lui $\mathbb{R}^3$.

Fie $U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Definim o imersie $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ prin

$$h(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

şi notăm $V = h(\mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi))$. Este clar că V este, în fond, planul $\mathbb{R}^2$ fără origine.. Definim, mai departe, aplicaţia $i : V \longrightarrow C$, astfel încât

$$i \circ h(r, \varphi) = \left(\frac{r}{\alpha}\cos\alpha\varphi, \frac{r}{\alpha}\sin\alpha\varphi, \frac{r}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 1}\right).$$

Vom arăta acum că aplicaţia i este o izometrie. Mai întâi, matricea Jacobi a aplicaţiei h este

$$\mathrm{J}h = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} h_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_x\right) &= \mathrm{J}h \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = \\ &= \cos\varphi \left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_{h(x)} + \sin\varphi \left.\frac{\partial}{\partial u^2}\right|_{h(x)} \overset{not}{=} V_1. \end{aligned}$$

În mod analog,

$$\begin{aligned} h_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial \varphi}\right|_x\right) &= \mathrm{J}h \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\end{pmatrix} = \\ &= -r\sin\varphi \left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_{h(x)} + r\cos\varphi \left.\frac{\partial}{\partial u^2}\right|_{h(x)} \overset{not}{=} V_2. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, matricea Jacobi a aplicaţiei $i \circ h$ este:

$$\mathrm{J}(i \circ h) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}\cos\alpha\varphi & -r\sin\alpha\varphi\\ \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\varphi & r\cos\alpha\varphi\\ \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-1} & 0\end{pmatrix},$$

[1] Atenţie, aici este vorba de o singură pânză a conului, fără vârf!

prin urmare,

$$
\begin{aligned}
(i \circ h)_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_x \right) &= \mathrm{J}(i \circ f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \cos \alpha\varphi & -r \sin \alpha\varphi \\ \frac{1}{\alpha} \sin \alpha\varphi & r \cos \alpha\varphi \\ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \cos \alpha\varphi \\ \frac{1}{\alpha} \sin \alpha\varphi \\ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cos \alpha\varphi \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{i(h(x))} + \\
&+ \frac{1}{\alpha} \sin \alpha\varphi \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_{i(h(x))} + \\
&+ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} \left. \frac{\partial}{\partial x^3} \right|_{i(h(x))} \overset{not}{=} W_1
\end{aligned}
$$

şi

$$
\begin{aligned}
(i \circ h)_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_x \right) &= \mathrm{J}(i \circ f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \cos \alpha\varphi & -r \sin \alpha\varphi \\ \frac{1}{\alpha} \sin \alpha\varphi & r \cos \alpha\varphi \\ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -r \sin \alpha\varphi \\ r \cos \alpha\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -r \sin \alpha\varphi \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{i(h(x))} + \\
&+ r \cos \alpha\varphi \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_{i(h(x))} \overset{not}{=} W_2.
\end{aligned}
$$

Se observă imediat că $\{V_1, V_2\}$ este o bază ortonormată în $T_{h(x)}V$, în timp ce imaginea sa, $\{W_1, W_2\}$ este o bază ortonormată în $T_{i(h(x))}C$, deci i_* duce o bază ortonormată într-o bază ortonormată, de unde rezultă că i este o izometrie, deci

$$i \circ \exp_V = \exp_C \circ i_*.$$

Deoarece inversa aplicaţiei h este, după cum se constată cu uşurinţă,

$$h^{-1}(s, t) = \left(\sqrt{s^2 + t^2}, \operatorname{arctg} \frac{t}{s} \right),$$

rezultă imediat că expresia lui i este

$$
\begin{aligned}
i(s, t) = \Bigg(&\frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{\alpha} \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{t}{s}, \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{\alpha} \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{t}{s}, \\
&\frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} \Bigg).
\end{aligned}
$$

Această expresie se poate simplifica în mod considerabil dacă α este un număr natural. În cele ce urmează, vom pune $\alpha = 3$. Utilizând formulele

$$
\begin{aligned}
\cos 3u &= 3 \cos u - 4 \cos^3 u \\
\sin 3u &= 4 \sin^3 u - 3 \sin u,
\end{aligned}
$$

se obţine, după un calcul foarte simplu,

$$i(s,t)=\left(-s+\frac{4}{3}\frac{s^3}{s^2+t^2}, t-\frac{4}{3}\frac{t^3}{s^2+t^2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{s^2+t^2}\right),$$

iar $W_1 = i_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_x\right)$, $W_2 = i_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_x\right)$. Fie acum $x=(s_0,t_0)\in V$ şi $y=i(s_0,t_0)\in C$. Atunci, dacă $v = \alpha W_1+\beta W_2 \in T_yC$, rezultă că

$$\begin{aligned}
\exp_y v &= \exp_y \circ i_*\left(\alpha\frac{\partial}{\partial s}\Big|_x+\beta\frac{\partial}{\partial t}\Big|_x\right)=\\
&= i\circ\exp_x\left(\alpha\frac{\partial}{\partial s}\Big|_x+\beta\frac{\partial}{\partial t}\Big|_x\right)=i(\alpha+s_0,\beta+t_0)=\\
&=\Bigg(-(\alpha+s_0)+\frac{4}{3}\frac{(\alpha+s_0)^3}{(\alpha+s_0)^2+(\beta+t_0)^2}, \beta+t_0-\\
&-\frac{4}{3}\frac{(\beta+t_0)^3}{(\alpha+s_0)^2+(\beta+t_0)^2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\alpha+s_0)^2+(\beta+t_0)^2}\Bigg).
\end{aligned}$$

Aplicaţia exponenţială pentru sferă. Sfera se poate obţine în acelaşi mod ca şi conul şi cilindrul, considerând, de data aceasta, aplicaţia $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ dată de

$$F(x^1,x^2,x^3)=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1.$$

E clar că 0 este valoare regulară pentru F, iar $S^2=F^{-1}(0)$. Considerăm aplicaţia $i:\mathbb{R}^2\longrightarrow S^2$,

$$i(u,v)=(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u).$$

Matricea Jacobi a lui i este

$$\mathrm{J}\,i=\begin{pmatrix}-\sin u\cos v & -\cos u\sin v\\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v\\ \cos u & 0\end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
i_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_x\right) &= \mathrm{J}\,i\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin u\cos v & -\cos u\sin v\\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v\\ \cos u & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix}-\sin u\cos v\\ -\sin u\sin v\\ \cos u\end{pmatrix}=-\frac{x^1x^3}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{i(x)}-\\
&-\frac{x^2x^3}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{i(x)}+\\
&+\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\Big|_{i(x)}\overset{not}{=}W_1.
\end{aligned}$$

În acelaşi mod, se obţine că

$$i_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_x\right)=-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{i(x)}+x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{i(x)}\overset{not}{=}W_2.$$

Cum W_1 şi W_2 formează o bază ortonormată a lui $T_{i(x)}S^2$, rezultă că aplicaţia i este izometrică, deci

$$i \circ \exp_{\mathbb{R}^2} = \exp_{S^2} \circ i_*.$$

Dacă $y = i(u_0, v_0)$, iar $w = \alpha W_1 + \beta W_2$ este un vector din $T_y S^2$, atunci

$$\begin{aligned}
&\exp_y w = \exp_y i_* \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u}\bigg|_x + \beta \frac{\partial}{\partial v}\bigg|_x \right) = \\
&= i \circ \exp_x \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u}\bigg|_x + \beta \frac{\partial}{\partial v}\bigg|_x \right) = i(\alpha + u_0, \beta + v_0) = \\
&= (\cos(\alpha + u_0)\cos(\beta + v_0), \cos(\alpha + u_0)\sin(\beta + v_0), \sin(\alpha + u_0)).
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
&\exp_{(\cos u_0 \cos v_0, \cos u_0 \sin v_0, \sin u_0)} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) = \\
&= (\cos(\alpha + u_0)\cos(\beta + v_0), \cos(\alpha + u_0)\sin(\beta + v_0), \sin(\alpha + u_0)).
\end{aligned}$$

10.6 Geodezice minimale

Pentru o curbă $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$, lungimea L este dată de

$$L(\gamma) = L_a^b(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt.$$

Considerăm funcţia *lungime a arcului* de curbă,

$$s(t) = L_a^t(\gamma) = \int_a^t \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| du.$$

Dacă γ este o geodezică, atunci

$$\frac{d}{dt} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 = 2 \left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

de unde rezultă că $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$ este constantă; mai precis, dacă $\gamma = \gamma_v$, cu $v \in T_x M$, atunci $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \equiv \|v\|$, astfel că $s(t) = \|v\| \cdot t$ pentru curba $\gamma_v : (-2\delta, 2\delta) \longrightarrow M$. Prin urmare, parametrul de-a lungul unei geodezice nu poate fi arbitrar: el trebuie să fie proporţional cu lungimea arcului de curbă. Dacă, în particular, $\gamma(s) = \exp sv$ cu $\|v\| = 1$, atunci γ are ca parametru chiar lungimea arcului. Despre o astfel de geodezică vom spune că este *parametrizată natural* sau că este *normalizată*.

Observaţie. Dacă $y, y' \in M$ şi $v \in T_y M$ astfel încât $y' = \exp_y(v)$, atunci $\|v\|$ este lungimea geodezicei $\exp_y(tv)$ între y şi y', deci afirmaţia de la punctul 1) al teoremei 10.4 se poate reformula, afirmând că, abstracţie făcând de o reparametrizare prin înmulţire cu o constantă, există o singură geodezică de la y la y' a cărei lungime să fie mai mică de ϵ.

Următoarea teoremă afirmă că, cel puţin local, geodezicele sunt cele mai scurte curbe care unesc două puncte de pe varietatea M:

Teorema 10.5. *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi ∇ conexiunea Levi-Civita asociată metricii varietăţii. Fie W şi ϵ ca în teorema 10.4 şi $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ o geodezică de lungime $L(\gamma) < \epsilon$ care uneşte punctele $\gamma(0) = y$ şi $\gamma(1) = y'$, $y, y' \in W$. Atunci pentru orice drum ω pe M care uneşte y cu y' avem $L(\gamma) \leq L(\omega)$. Mai mult, dacă în relaţia de mai sus avem egalitate, atunci ω şi γ coincid după o reparametrizare (ceea ce nu înseamnă neapărat că ω este o geodezică, ea are doar acelaşi suport cu o geodezică).*

Pentru demonstrarea teoremei vom utiliza mai multe leme. Prima dintre ele este cu caracter tehnic:

Lema 10.2. *Fie $\alpha : \Omega \longrightarrow M$, o aplicaţie netedă cu parametrii (s,t), unde Ω este un domeniu din $\mathbb{R}^2$. Atunci în fiecare punct din Ω avem:*

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{D}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Demonstraţie. Deoarece este suficient să demonstrăm teorema local, presupunem că există o hartă (U,φ) pe M astfel încât $\alpha(\Omega) \subseteq U$. Atunci, după cum se ştie, expresia în coordonate a derivatei covariante $\frac{D}{dt}$ de-a lungul unei curbe este

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\frac{\alpha^j}{\partial t}v^i\right)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

unde $\alpha^j = x^j \circ \alpha$, iar $V = v^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$ este un câmp de vectori de-a lungul curbei $t \longrightarrow \alpha(s,t)$, parametrul s fiind fixat. Alegem, în calitate de V, câmpul de vectori

$$V = \frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{\partial\alpha^i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Obţinem atunci

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{\partial^2\alpha^k}{\partial t\partial s} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\alpha^j}{\partial t}\frac{\partial\alpha^i}{\partial s}$$

Deoarece coeficienţii lui Christoffel sunt simetrici în indicii inferiori, iar la derivatele de ordinul al doilea ordinea de derivare este inversabilă, este clar că membrul drept al expresiei de mai sus este simetric în s şi t, de unde rezultă egalitatea din enunţul lemei. ∎

Lema 10.3 (Lema lui Gauss)**.** *Fie $U_y \subseteq M$ o vecinătate normală a lui y. Atunci geodezicele care trec prin y sunt traiectorii ortogonale la hipersuprafeţele*

$$S_y(c) = \{\exp_y(v) | v \in T_yM, \|v\| = c\}, \quad c < \epsilon.$$

Demonstraţie. Afirmaţia teoremei nu înseamnă altceva decât că toate tangentele la curbele de pe $S_y(c)$ sunt ortogonale la geodezicele ce emană din y şi trec prin acelaşi punct. Fie, deci, $v : [a,b] \longrightarrow T_yM$ o curbă În spaţiul tangent la M în y, situată pe sfera unitate din acest spaţiu tangent, adică astfel încât $\|v(t)\| = 1$ pentru orice valoare a parametrului din intervalul de definiţie. Atunci o curbă oarecare de pe hipersuprafaţa $S_y(c)$ este de forma $\omega : [a,b] \longrightarrow M$,

$$\omega(t) = \exp_y(cv(t)).$$

Pentru un $t_0 \in [a,b]$, geodezica radială determinată de $v(t_0)$ este $\gamma_{v(t_0)} : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$,

$$\gamma_{v(t_0)}(r) = \exp_y(rv(t_0)).$$

Punctul de intersecţie al celor două curbe este

$$\gamma_{v(t_0)}(c) = \omega(t_0).$$

Prin urmare, este suficient să demonstrăm că vectorii

$$\left.\frac{d}{dt}\exp_y(cv(t))\right|_{t=t_0}$$

şi

$$\left.\frac{d}{dr}\exp_y(rv(t_0))\right|_{r=c}$$

Intenţia este să utilizăm lema precedentă. În acest scop, considerăm funcţia de două variabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$, dată de

$$\alpha(r, t) = \exp_y(rv(t)).$$

Atunci, în mod evident,

$$\left.\frac{d}{dt}\exp_y(cv(t))\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right|_{t=t_0, r=c},$$

iar

$$\left.\frac{d}{dr}\exp_y(rv(t_0))\right|_{r=c} = \left.\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right|_{t=t_0, r=c}.$$

Este, prin urmare, suficient să demonstrăm că functia reală de două variabile reale (r şi t)

$$g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)$$

este identic nulă. Vom demonstra, mai întâi că această funcţie este constantă în raport cu una dintre variabile şi pe urmă vom arăta că se anulează într-un punct, ceea ce înseamnă că se anulează peste tot. Avem, din metricitatea conexiunii

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) &= \underbrace{g\left(\frac{D}{\partial r}\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)}_{=0} + g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = \\ &= g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right),\end{aligned}$$

unde egalitatea cu zero a primului termen rezultă din faptul că aplicaţia $r \longrightarrow \alpha(r, t)$ este o geodezică, iar în al doilea termen am modificat ordinea de derivare, în conformitate cu lema precedentă. Din definiţia exponenţialei, pe de altă parte, avem

$$g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial r}\right) = \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right\|^2 = \|v\|^2 = 1,$$

aşadar

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial}{\partial t}g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial r}\right) &= g\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial r}\right) + g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right) = \\ = 2g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right).\end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\frac{\partial}{\partial r}g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = 0,$$

de unde rezultă că

$$g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)$$

este o funcţie numai de t, deci e o constantă, ca funcţie de r. Pe de altă parte, avem $\alpha(0, t) = y$, pentru orice $t \in [a, b]$, aşadar

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0, t) \equiv 0,$$

prin urmare

$$g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) = 0$$

pentru orice $(r, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$. ■

Lema 10.4. *Fie $y \in M$ şi U_y o vecinătate normală a lui y, de rază ϵ. Fie $\gamma : [a,b] \longrightarrow U_y \setminus \{y\}$ o curbă netedă pe porţiuni. Atunci este clar că fiecare punct $\gamma(t)$ se poate reprezenta în mod unic sub forma*

$$\gamma(t) = \exp_y(r(t) \cdot v(t)),$$

unde $v(t) \in T_y M$, $\|v\| = 1$, iar $0 < r(t) < \epsilon$. Atunci

$$L_a^b(\gamma) \geq |r(b) - r(a)|,$$

iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă v este constant, iar $r = r(t)$ este o funcţie monotonă.

Demonstraţie. Considerăm funcţia

$$\alpha(r,t) = \exp_y(rv(t)), \quad 0 < r < \epsilon,\ t \in [a,b].$$

Atunci, pe baza regulii de derivare a funcţiilor compuse,

$$\frac{d\gamma}{dt} = r'(t)\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Conform lemei lui Gauss, vectorii $\frac{\partial\alpha}{\partial r}$ şi $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ sunt perpendiculari, deci avem

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 = r'^2(t)\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2$$

Dar $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right\|^2 = \|v\| = 1$, prin urmare din relaţia de mai sus rezultă că

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 \geq r'^2(t),$$

iar egalitatea are loc doar în cazul particular în care $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$ (acolo unde această egalitate are sens).

De aici rezultă că

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt \geq \int_a^b |r'(t)|dt = \mathrm{var}(r) \geq |r(b) - r(a)|.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă sunt îndeplinite două condiţii:

1. $\mathrm{var}(r) = |r(b) - r(a)|$, ceea ce înseamnă că funcţia r este monotonă;
2. $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$ aproape peste tot. Dar, exponenţiala fiind un difeomorfism, derivatele sale sunt, în particular, continue, deci egalitatea aproape peste tot înseamnă, de fapt, egalitate.

■

Demonstraţia teoremei 10.5. Fie U_y o vecinătate normală a lui y, de rază $\epsilon > 0$ şi $y' = \exp_y(rv)$, cu $\|v\| = 1$ şi $0 < r < \epsilon$. Vom arăta că dacă ω este o curbă netedă pe porţiuni de la y la y', atunci $L(\omega) \geq r$. Fie $0 < \delta < r$ şi considerăm, în U_y, două sfere, $S(\delta)$ şi $S(r)$, de rază δ, respectiv r. Atunci există un segment ω' al lui ω care uneşte cele două sfere şi care este cuprins, în întregime, între cele două sfere. Într-adevăr, ω fiind o curbă continuă, trebuie să intersecteze sfera $S(\delta)$. Fie a' cel mai mare număr din intervalul $[a,b]$ pentru care $\omega(a') \in S(\delta)$ şi b' cel mai mic număr din acelaşi interval pentru care $\omega(b') \in S(r)$. Atunci segmentul $\omega' = \omega|_{[a',b']}$ al lui ω îndeplineşte, într-adevăr, condiţia cerută. Este clar că $L(\omega) > L(\omega')$. Pe de altă parte, deoarece $\omega' : [a', b'] \longrightarrow U_x \setminus \{y\}$, din lema precedentă rezultă că avem

$$L(\omega) \geq L(\omega') \geq r - \delta, \quad \text{pentru orice } \delta > 0.$$

Dacă facem acum $\delta \longrightarrow 0$, ajungem la concluzia că $L(\omega) \geq r$. Să presupunem acum că avem $L(\omega) = r$. Atunci din nou, pentru un $\delta \in (0, \epsilon)$ putem trage concluzia că ω conţine un segment ω' care uneşte $S(\delta)$ cu $S(r)$. În plus, după cum am văzut, avem $L(\omega') \geq r - \delta$. Pe de altă parte, dacă ω se obţine prin concatenarea segmentelor de curbă ω_1, ω' şi ω_2, unde ω_1 este segmentul care are un capăt în punctul y, iar ω_2 este cel cu cu un capăt în punctul y', atunci $r = L(\omega) \geq L(\omega_1) + L(\omega') + L(\omega_2)$ şi este clar că $L(\omega_1) \geq \delta$, prin urmare $L(\omega') \leq r - \delta$, deci $L(\omega') = r - \delta$. Pentru diferite alegeri ale lui δ aceste segmente de curbă fie au aceeaşi direcţie, fie sunt disjuncte. Aşadar, pentru δ suficient de mic, ele trebuie să aibă aceeaşi direcţie şi, aşadar, dacă reparametrizăm ω astfel încât parametrul să fie chiar lungimea arcului, ea trebuie să conţină segmentul de curbă $t \longrightarrow \exp_y(tv)$, $0 \leq t \leq r$, $\|v\| = 1$, unde v este direcţia comună a segmentelor. De aceea, ω trebuie să coincidă, după reparametrizare, cu geodezica. ■

10.7 Vecinătăţi convexe. Teorema lui Whitehead

Definiţie. O submulţime $U \subset M$ se numeşte *convexă* dacă există o singură geodezică ce trece prin x şi y şi este inclusă în U.

Definiţie. Fie $(x^1, \dots, x^n)$ un sistem de coordonate locale pe M în jurul unui punct x. Se numeşte *vecinătate sferică* alui x o mulţime de forma

$$S(x, r) = \left\{ y \in U \mid \sum_{i=1}^{n} \left(x^i(y) - x^i(x) \right)^2 < r^2 \right\}.$$

Lema 10.5. *Fie $(x^1, \dots, x^n)$ coordonate* normale *cu centrul în $x_0 \in M$ şi $S(x_0, r)$ o vecinătate sferică a lui x_0. Atunci există $b > 0$ astfel încât dacă $0 < r < b$, orice geodezică tangentă la $S(x_0, r)$ în $y \in \partial S(x_0, r)$ este în exteriorul lui $S(x_0, r)$, cel puţin într-o vecinătate a lui y.*

Demonstraţie. Fie $x^i = c^i(t)$ ecuaţiile parametrice ale unei geodezice ale unei geodezice ce este tangentă la $S(x_0, r)$ în $y = c(0)$. Considerăm funcţia

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(c^i(t) \right)^2.$$

Avem, în mod evident, $F(0) = r^2$, deoarece y se află pe frontiera vecinatăţii sferice de rază r. Prin derivare, obţinem:

$$\left(\frac{dF}{dt} \right) \bigg|_{t=0} = 2 \sum_{i=1}^{n} c^i(0) \left(\frac{dc^i}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

$$\left(\frac{d^2F}{dt^2} \right) \bigg|_{t=0} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{dc^i}{dt} \right)^2 + c^i(t) \frac{d^2c^i}{dt^2} \right]_{t=0}.$$

Utilizând ecuaţiile geodezicelor, obţinem că

$$\left(\frac{d^2F}{dt^2} \right) \bigg|_{t=0} = \sum_{j,k=1}^{n} \left[\left(\delta_{jk} - \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jk} c^i(t) \right) \frac{dc^j}{dt} \frac{dc^k}{dt} \right]_{t=0}.$$

În x_0 avem $\Gamma^i_{jk} = 0$, deci $\left(\frac{d^2F}{dt^2} \right) \bigg|_{t=0}$ este o formă pătratică pozitiv definită în x_0, de unde rezultă că $\exists b > 0$ astfel încât $\left(\frac{d^2F}{dt^2} \right)$ să fie pozitiv definită în $S(x_0, b)$. Dacă $0 < r < b$, atunci $\left(\frac{d^2F}{dt^2} \right) < 0$ şi, deci, $F(t) > r^2$ pentru $t \neq 0$, într-o vecinătate a lui $0 \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 10.6 (Whitehead)**.** *Fie (M, g) o varietate riemanniană. Atunci orice punct $x \in M$ are o vecinătate normală sferică $S(x, r)$ astfel încât*

1. *$S(x, r)$ este convexă.*
2. *Orice punct $y \in S(x, r)$ are o vecinătate normală care conţine $S(x, r)$.*

Demonstraţie. Fie $W(x)$ o vecinatate normală a lui x şi coordonatele normale $(x^1, \dots, x^n)$. Considerăm, din nou, aplicaţia $G : v_y \longrightarrow (y, \exp_y v_y) \in M \times M$. După cum am văzut, aplicaţia G este nesingulară în 0_x, deci există o vecinătate V a lui 0_x în TM şi un numă pozitiv $a < b$ astefel încât $F : V \longrightarrow S(x, a) \times S(x, a)$ este un difeomorfism. Se poate lua a suficient de mic şi putem micşora, la nevoie, vecinătatea V astfel încât $\exp_x(tv) \in S(x, b)$ pentru $(y, v) \in V$ şi $|t| < 1$.

Fie, acum, două puncte $y_1, y_2 \in S(x, a)$ şi $v = F^{-1}(y_1, y_2) \in V$. Atunci geodezica ce trece prin y_1 şi este tangentă vectorului v în y_1, uneşte punctele y_1 şi y_2 în $S(x, b)$.

Considerăm acum un $r > 0$ astfel încât $r < a$. Fie $x^i = c^i(t)$, $1 \leq i \leq n$, ecuaţiile geodezicei $c(t)$ care uneşte $y_1, y)2$ în $S(x, b)$. Să arătăm că $c(t)$ este în $S(x, r)$. Pentru aceasta, considerăm funcţia F din demonstraţia lemei precedente, pentru $t \in [0, 1]$. Dacă $c(t)$ ar avea un punct în exteriorul vecinătăţii sferice $S(x, r)$, am avea $F(t) \geq r^2$ pentru un $t \in [0, 1]$. Fie $t_0 \in (0, 1)$, valoarea lui t pentru care $F(t)$ îşi atinge maximul. Atunci, în acest punct, avem

$$0 = \left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=t_0} = 2\sum_{i=1}^{n} c^i(t_0)\left(\frac{dc^i}{dt}\right)_{t=t_0},$$

ceea ce arată că $c(t)$ este tangentă la $S(x, r_0)$ în punctul $c(t_0)$, unde $r_0 = F(t_0)$. şi, astfel, $c(t)$ ar fi în interiorul lui $S(x, r_0)$, în contradicţie cu lema precedentă. Dea aici rezultă afirmaţia 1) din teoremă. Dacă notăm $V_y = V \cap T_y M$, concluzia din 2) rezultă din faptul că aplicaţia $\exp_y : V_y \longrightarrow S(x, a)$ este un difeomorfism şi $S(x, r) \subset S(x, a)$. ■

10.8 O proprietate extremală a geodezicelor

Din discuţia de până acum au rezultat două proprietăţi remarcabile ale geodezicelor:

- Ele sunt "cele mai drepte" curbe de pe suprafaţă (asta înseamnă, în fond, condiţia de autoparalelism). Această proprietate este valabilă pentru orice conexiune liniară, nu doar pentru conexiunea Levi-Civita.
- În cazul conexiunii Levi-Civita, geodezicele sunt, local cel puţin, cele mai scurte curbe care unesc două puncte date.

Exemplul sferei ne convinge imediat că a doua proprietate nu este valabilă global. Dacă y şi y' sunt două puncte oarecare de pe o varietate (deci ele nu sunt, neapărat, "suficient de apropiate") atunci dacă există o geodezică ce le uneşte, această geodezică nu este, în mod obligatoriu, cea mai scurtă curbă între cele două puncte. Următoarea teoremă ne spune că, dacă această geodezică nu e cea mai scurtă curbă între cele două curbe, atunci este cea mai lungă:

Teorema 10.7. *Geodezicele conexiunii Levi-Civita pe o varietate riemanniană (M, g) sunt extremale pentru lungimea arcului printre toate curbele parametrizate natural care unesc două puncte date ale varietăţii.*

Reamintim, înainte de toate, un rezultat standard din calculul variaţional:

Lemă (Lema lui Euler)**.** *Fie $\mathcal{H}$ mulţimea funcţiilor netede $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ care au proprietatea că $\gamma(a) = x_1$, $\gamma(b) = x_2$, unde x_1 şi x_2 sunt două puncte fixate. Dacă curbele γ sunt date prin ecuaţiile $x^i = x^i(t)$, iar L este o funcţie netedă de $x^i(t)$, $\dot{x}^i(t)$ şi t, atunci integrala*

$$S = \int_a^b L(x, \dot{x}, t)dt$$

ia o valoare extremă (pe funcţiile din $\mathcal{H}$) dacă şi numai dacă funcţiile $x^i(t)$ verifică ecuaţiile

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{10.10}$$

Integrala S se numeşte funcţională acţiune*, iar funcţia L –* lagrangean.

Demonstraţia teoremei 10.7. Fie $x^i = x^i(t)$ o curbă pe varietatea riemanniană (M, g). După cum se ştie, lungimea arcului este dată de integrala

$$I(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt,$$

Prin urmare, lagrangeanul este

$$L(x, \dot{x}, t) \equiv \sqrt{g_{ij}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^j}.$$

Datorită prezenţei radicalului, acest lagrangean nu este foarte comod în calcule, de aceea vom utiliza, în schimb, lagrangeanul

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}L^2 = \frac{1}{2}g_{ij}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Vom arăta mai întâi că extremalele acţiunilor pentru cei doi lagrangeeni sunt aceleşi. Ecuaţiile lui Euler pentru lagrangeanul $\mathcal{L}$ sunt

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = L\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{dL}{ds}.$$

Dar, de-a lungul curbei, $L \equiv 1$, deci $\frac{dL}{ds} = 0$, de unde rezultă că ecuaţiile Euler pentru L sunt verificate dacă şi numai dacă sunt verificate ecuaţiile Euler pentru $\mathcal{L}$. Mai departe, dacă ţinem cont de forma lagrangeanului $\mathcal{L}$, ecuaţiile Euler pentru acest lagrangean se scriu

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\dot{x}^j) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$$

sau

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^k + g_{ij}\ddot{x}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Din simetria metricii rezultă că ecuaţiile de mai sus se pot scrie

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$$

Dacă înmulţim ambii membri cu g^{li} obţinem:

$$g_{ij}g^{li}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}g^{li}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{10.11}$$

sau

$$\delta^l_j\ddot{x}^j + \Gamma^l_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{10.12}$$

sau, încă,

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{10.13}$$

care sunt tocmai ecuaţiile geodezicelor. ■

Teorema precedentă se poate utiliza pentru determinarea coeficienţilor lui Christoffel, dacă se cunoaşte forma metricii. Practic, nu avem altceva de făcut decât să scriem ecuaţiile Euler-Lagrange pentru lagrangeanul geodezic, şi apoi identificăm coeficienţii cu cei ai ecuaţiilor canonice ale geodezicelor. Această metodă este, în majoritatea cazurilor, mai eficientă decât utilizarea directă a expresiei coeficienţilor Christoffel în funcţie de componentele metricii. Vom ilustra metoda pe exemplul sferei bidimensionale.

Exemplul 10.8.1. Pentru sferă,

$$[g] = \begin{bmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, lagrangeanul geodezic pentru metrica sferei este

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right].$$

Avem

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \sin^2\varphi\dot{\theta}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0,$$

deci prima ecuaţie se scrie

$$\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0$$

sau

$$\ddot{\theta} + 2\operatorname{ctg}\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \tag{10.14}$$

Pentru a doua coordonată, avem

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi},$$

de unde rezultă că a doua ecuaţie Lagrange se scrie

$$\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 = 0. \tag{10.15}$$

Acestea sunt chiar ecuaţiile geodezicelor pe care le-am obţinut la începutul capitolului.

10.9 Alte exemple de determinare a geodezicelor

Avem acum la îndemână un mijloc deosebit de eficient pentru determinarea ecuaţiilor geodezicelor. Vom utiliza acest mijloc pentru a stabili ecuaţiile geodezicelor pentru anumite clase de suprafeţe şi, în limita posibilităţilor, a le integra. Menţionăm că, deşi, aşa cum am văzut, problema Cauchy pentru ecuaţiile geodezicelor întotdeauna are soluţie unică, determinarea acestei soluţii, în mod analitic, este, de regulă, imposibilă şi, chiar când este posibilă, ea ne conduce, de multe ori, la primitive care nu se pot exprima în raport cu funcţiile elementare. Cu atât mai interesante sunt cazurile particulare în care integrarea ecuaţiilor geodezicelor se poate face.

10.9.1 Suprafeţe de rotaţie

O clasă de suprafeţe des întâlnite este clasa suprafeţelor de rotaţie,obţinute prin rotirea unei curbe în jurul unei drepte. Aceste suprafeţe admit parametrizări de forma

$$x = f(u)\cos v, \tag{10.16}$$
$$y = f(u)\sin v, \tag{10.17}$$
$$z = g(u). \tag{10.18}$$

Un calcul imediat demonstrează că metrica suprafeţei (i.e. prima formă fundamentală) este dată de

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{bmatrix}, \tag{10.19}$$

în timp ce coeficienţii Christoffel diferiţi de zero sunt

$$\Gamma^1_{22} = -f'(u) \cdot f(u),\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{f'(u)}{f(u)}. \tag{10.20}$$

Geodezicele acestor suprafeţe au fost identificate încă din secolul al XVIII-lea şi ele sunt descrise de următoarea teoremă, stabilită de matematicianul francez Alexis-Claude Clairaut:

Teorema 10.8 (Clairaut)**.** *Geodezicele unei suprafeţe de revoluţie verifică ecuaţia*

$$r \cos\phi = const, \tag{10.21}$$

unde r este distanţa de la punctul curent al suprafeţei la axa de rotaţie, în timp ce ϕ este unghiul dintre geodezică şi paralela care trece prin punctul respectiv. Mai mult, orice curbă care satisface relaţia (10.21) şi nu set o paralelă este o geodezică. Cercurile paralele sunt geodezice dacă şi numai dacă raza lor este staţionară.

Demonstraţie. Utilizând coeficienţii Christoffel de mai sus, ecuaţiile geodezicelor pentru o suprafaţă de rotaţie se scriu:

$$\begin{cases} \ddot{u} - ff' \cdot \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + \dfrac{2f'}{f}\dot{u}\dot{v} = 0. \end{cases} \tag{10.22}$$

■

CAPITOLUL 11

Varietăţile riemanniene ca spaţii metrice

11.1 Varietăţi complete. Teorema Hopf-Rinow

Definiţie. O varietate riemanniană (M, g) se numeşte *extensibilă* dacă există o altă varietate riemaniană (M', g') astfel încât M este izometrică cu o subvarietate deschisă *proprie* a lui M'. În caz contrar, M se numeşte *inextensibilă*.

Definiţie. O varietate riemanniană se numeşte *geodezic completă* dacă $\forall x \in T_x M$, aplicaţia exponenţială $\exp_x$ este definită pentru orice $v \in T_x M$ sau, altfel spus, dacă orice geodezică ce trece prin x are ca domeniu de definiţie întreaga axă reală.

Propoziţia 11.1.1. *Dacă M este completă, atunci este inextensibilă.*

Demonstraţie. Presupunem că M ar fi extensibilă. Atunci există o varietate riemanniană M' astfel încât M să fie izometrică cu o subvarietate deschisă proprie a lui M' pe care o identificăm cu M. Deoarece M' este conexă, frontiera ∂M a lui M în M' este nevidă. Fie $x \in \partial M$ şi $U' \subset M'$ o vecinătate normală a lui x în M'. Fie $y \in U' \cap M$ şi $\widetilde{\gamma}(t)$ o geodezică în M' cu $\widetilde{\gamma}(0) = x$ şi $\widetilde{\gamma}(1) = y$. Atunci curba $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(1 - t)$, $|t| < \delta$ este o geodezică în M, cu $\gamma(0) = y$. Această geodezică nu este definită pentru anumiţi $t \leq 1$, ceea ce contrazice faptul că M este o varietate completă. ∎

Definiţie. Fie $x, y \in M$. Definim funcţia $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ punând:

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) | \gamma \text{ este o curbă netedă pe porţiuni de la } x \text{ la } y\} \tag{11.1}$$

Propoziţia 11.1.2. *Perechea (M, d) este un spaţiu metric, adică aplicaţia d verifică proprietăţile:*

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ – *inegalitatea triunghiului;*

2. $d(x, y) = d(y, z)$ – *simetrie;*

3. $d(x, y) \geq 0$ *şi* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ – *pozitiv definire;*

pentru orice $x, y, z \in M$.

Demonstraţie. Cea mai mare parte din afirmaţii rezultă imediat din proprietăţile infimumului şi cele ale lungimii unui arc de curbă. Singurul lucru ce necesită o demonstraţie este acela că din $d(x, y) = 0$ rezultă $x = y$. Presupunem contrariul şi alegem o bilă normală $B_r(x)$ de rază r, centrată în x, care nu-l conţine pe y. O astfel de bilă există, deoarece M este un spaţiu Hausdorff, iar bilele normale centrate în x formează o bază de vecinătăţi ale lui x. Deoarece $d(x, y) = 0$, rezultă că există o curbă γ de la x la y, de lungime mai mică de r. Dar segmentul de curbă din γ conţinut în $B_r(x)$ are lungimea cel puţin egală cu r, ceea ce este o contradicţie. ■

Observaţie. Dacă există o geodezică minimală γ ce uneşte x cu y, atunci $d(x, y) = L(\gamma)$.

Propoziţia 11.1.3. *Topologia indusă de distanţa d de pe M coincide cu topologia lui M.*

Prima demonstraţie. Din observaţia de mai sus rezultă că, dacă r este suficient de mic, atunci bila normală $B_r(x)$ coincide cu bila metrică $B'_r(x)$. Deci bilele metrice conţin bile normale şi invers. ■

A doua demonstraţie. Vom furniza o a doua demonstraţie acestei propoziţii, de data aceasta în mod direct, fără a face apel la noţiunea de geodezică. ■

Corolarul 11.1. *Dacă $x_0 \in M$, atunci funcţia $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$ este continuă.*

Teorema 11.1 (Hopf-Rinow)**.** *Dacă (M, g) este o varietate riemanniană, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este geodezic complet.*
2. *Submulţimile mărginite şi închise ale lui M sunt compacte.*
3. *M este complet, ca spaţiu metric.*

În plus, dacă oricare dintre cele trei condiţii de mai sus are loc, atunci

4. *$\forall x, y \in M$, există o geodezică γ ce uneşte x cu y astfel încât $d(x, y) = L(\gamma)$.*

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 4). Fie $r = d(x, y)$ şi $B_\delta(x)$ – o bilă normală de centru x şi de rază δ. Vom nota frontiera ei cu $S = S_\delta(x)$. Este clar că S este imaginea, prin aplicaţia exponenţială $\exp_x$ a sferei cu centrul în origine şi de rază δ din T_xM. Exponenţiala fiind o aplicaţie continuă, iar sfera din spaţiul tangent – o mulţime compactă, rezultă că şi S este compactă. Pe de altă parte, după cum am văzut, dacă fixăm punctul y, aplicaţia definită prin $d(y, z)$ este continuă în al doilea argument, deci îşi atinge valorile extreme pe mulţimea compactă S. Fie deci x_0 punctul de pe S care minimizează distanţa $d(y, z)$ pentru $z \in S$. Atunci $x_0 = \exp_x \delta v$, unde $v \in T_xM$, astfel încât $\|v\| = 1$. Notăm cu γ geodezica parametrizată natural

$$\gamma(s) = \exp_x sv.$$

Vom arăta că $\gamma(r) = y$. Considerăm ecuaţia

$$d(\gamma(s), y) = r - s \tag{11.2}$$

şi fie $A = \{s \in [0, r] | \text{relaţia (11.2) are loc}\}$. Mulţimea A este, în mod evident, nevidă, deoarece (11.2) are loc cel puţin pentru $s = 0$. Ea este, de asemenea, închisă, deoarece este o mulţime de nivel a unei funcţii continue. Fie $s_0 \in A$. Vom arăta că dacă $s_0 < r$, atunci (11.2) are loc şi pentru $s_0 + \delta'$, cu un $\delta' > 0$ suficient de mic. De aici rezultă că $\sup A = r$. Deoarece A este închisă, rezultă că $r \in A$, ceea ce arată că $\gamma(r) = y$.

Peentru a arăta că (11.2) este adevărată pentru $s_0 + \delta'$, fie $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ o bilă normală centrată în $\gamma(s_0)$, de rază δ' şi cu frontiera $S' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_0))$. Fie de asemenea, x'_0 punctul de minim al funţiei $d(z, y)$, pentru $z \in S'$. Este suficient să arătăm că $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$. Într-adevăr, dacă $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$, atunci, deoarece

$$d(\gamma(s_0), y) = \delta' + \min d(z, y) = \delta' + d(x'_0, y)$$

şi

$$d(\gamma(s_0), y) = r - s_0,$$

rezultă că

$$r - s_0 = \delta' + d(x_0', y) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), y) \tag{11.3}$$

sau

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), y) = r - (s_0 + \delta'),$$

ceea ce este tocmai formula (11.2), aplicată pentru $s_0 + \delta'$.

Pentru a demonstra că $\gamma(s_0 + \delta') = x_0'$, să observăm că, din inegalitatea triunghiului şi prima egalitate din (11.3) rezultă că

$$d(x, x_0') \geq d(x, y) - d(y, x_0') = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

Pe de altă parte, curba netedă pe porţiuni ce uneşte x cu x_0' ce merge de la x la $\gamma(s_0)$ de-a lungul lui γ şi de la $\gamma(s_0)$ la x_0' de-a lungul segmentului de geodezică de lungime δ', are lungimea $s_0 + \delta'$. Prin urmare, $d(x, x_0') = s_0 + \delta'$, iar o astfel de curbă este o geodezică şi deci este netedă, prin urmare, $\gamma(s_0 + \delta') = x_0'$.

1) $\Rightarrow$ 2). Fie $A \subset M$ o submulţime mărginită şi închisă. A fiind mărginită, există o bilă B, în metrica d, centrată într-un punct $x \in A$, astfel încât $A \subseteq B$. Din 4) rezultă că există o bilă $B_r(0)$ centrată în originea spaţiului tangent $T_x M$ astfel încât $B \subset \exp_x \overline{B_r(0)}$. Fiind imaginea continuă a unei mulţimi compacte, $\exp_x \overline{B_r(0)}$ este compactă. Prin urmare, A este o submulţime închisă a unei mulţimi compacte. M fiind, ca spaţiu topologic, un spaţiu Hausdorff, rezultă că şi mulţimea A este compactă.

2) $\Rightarrow$ 3) Este suficient să observăm că o submulţime $\{x_n\}$ formată din termenii unui şir Cauchy este mărginită şi, deci, din 2), are închiderea compactă. Prin urmare, $\{p_n\}$ are un subşir convergent şi, fiind un şir fundamental, trebuie să fie convergent, în ansamblu.

3) $\Rightarrow$ 1). Să presupunem că M nu ar fi geodezic completă. Atunci există o geodezică parametrizată natural γ pe M care să fie definită pentru $s < s_0$, dar nu şi pentru $s = s_0$. Fie $\{s_n\}$ un şir convergent la s_0, cu $s_n < s_0$ pentru orice n natural. Şirul $\{s_n\}$ fiind un şir convergent de numere reale, el este, în particular, un şir Cauchy, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un indice n_0 astfel încât dacă $n, m > n_0$, atunci $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Rezultă, de aici, că

$$d\left(\gamma(s_n), \gamma(s_m)\right) \leq |s_n - s_m| < \varepsilon,$$

adică şirul $\{\gamma(s_n)\}$ este un şir Cauchy pe M. Deoarece M este complet, ca spaţiu metric cu metrica d, şirul acesta trebuie să fie convergent, deci există un $x_0 \in M$ astfel încât $\gamma(s_n) \longrightarrow x_0$.

Fie (W, δ) o vecinătate total normală a lui x_0. Alegem n_1 astfel încât dacă $n, m > n_1$, atunci $|s_n - s_m| < \delta$ şi $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$. Atunci există o singură geodezică g de lungime mai mică de δ care uneşte $\gamma(s_n)$ cu $\gamma(s_m)$. Este clar că, acolo unde γ este definită, g este egală cu γ. Deoarece $\exp_{\gamma(s_n)}$ este un difeomorfism pe $B_\delta(0)$ şi $\exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, rezultă că g extinde γ dincolo de s_0. ■

11.2 Teorema Myers-Steenrod

Fie (M, g) şi (M', g') două varietăţi riemanniene. Deoarece o izometrie de varietăţi riemanniene păstrează lungimile curbelor, este clar că ea păstrează şi distanţa dintre puncte, deci, dacă d şi d' sunt funcţiile distanţă de pe cele două varietăţi, atunci, dacă varietăţile riemanniene (M, g) şi (M', g') sunt izometrice, atunci şi spaţiile metrice (M, d) şi (M', d') sunt izometrice. Teorema care urmează ne asigură că afirmaţia inversă este, în egală măsură, adevărată:

Teorema 11.2 (Myers-Steenrod)**.** *Fie (M, g) şi (M', g') două varietăţi riemanniene şi d, respectiv d', funcţiile distanţă pe ele. Dacă $f : M \longrightarrow M'$ este o izometrie între spaţiile metrice (M, d) şi (M', d'), atunci f este o izometrie de varietăţi riemaniene.*

Demonstraţie. Orice izometrie de spaţii metrice este un omeomorfism, deci, în particular, aplicaţia f din enunţ trebuie să fie, cel puţin un omeomorfism. Fie $x \in M$ şi $x' = f(x)$. Alegem U' – o vecinătate normală a lui x' în M' şi U – o vecinătate normală a lui x în M astfel încât $f(U) \subseteq U'$. Pentru orice $X_x \in T_xM$, cu $\|X_x\| = 1$, fie γ unica geodezică în U, parametrizată natural, cu condiţiile iniţiale (x, X_x). Deoarece γ este un segment[1] în raport cu d, iar f este o izometrie, rezultă că şi $f(\gamma)$ este un segment în raport cu d', deci $f(\gamma)$ este o geodezică în U', cu originea în x'. Deoarece $\gamma = \gamma(s)$ este parametrizată natural, cu arcul s, iar $d'(f(\gamma(s_1)), f(\gamma(s_2))) = d(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) = |s_2 - s_1|$, rezultă că şi $f(\gamma)$ e parametrizată natural, arcul fiind tot s.

Fie $F(X_x)$ versorul vectorului tangent la $f(\gamma)$ în x'. F este, deci o aplicaţie de la sfera unitate cu centrul în originea spaţiului T_xM la sfera unitate cu centrul în originea spaţiului $T_{x'}M'$. Este clar că dacă se schimbă sensul vectorului X_x, atunci se schimbă şi sensul vectorului $F(X_x)$, prin urmare aplicaţia F este antisimetrică:

$$F(-X_x) = -F(X_x).$$

F se poate extinde la o aplicaţie $F_1 : T_xM \longrightarrow T_{x'}M$, punând

$$F_1(v) = \begin{cases} \|v\| \cdot F\left(\frac{v}{\|v\|}\right) & \text{dacă } v \neq 0_x \\ 0 & \text{dacă } v = 0_x \end{cases}.$$

Se observă imediat că funcţia F_1 astfel definită este omogenă:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha v) &= \|\alpha v\| F\left(\frac{\alpha v}{\|\alpha v\|}\right) = |\alpha|\|v\| F\left(\operatorname{sgn}\alpha \frac{v}{\|v\|}\right) = \\ &= \underbrace{\operatorname{sgn}\alpha \cdot |\alpha|}_{=\alpha} \cdot \|v\| \cdot F\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \alpha \cdot \|v\| F\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \alpha \cdot F_1(v). \end{aligned}$$

Deoarece f are o inversă, care este tot o izometrie, este clar că F_1 este o aplicaţie injectivă. Mai mult, este, de asemenea, clar că

$$f(\exp_x(v)) = \exp_{x'}(F_1(v)), \tag{*}$$

unde $\exp_x$ este exponenţiala unei vecinătăţi a lui $0_x \in T_xM$ pe U, iar $\exp_{x'}$ este exponenţiala unei vecinătăţi a lui $0_{x'} \in T_{x'}M'$ pe U'.[2]

Micşorând, la nevoie, vecinătăţile normale U şi U', se poate face astfel încât aplicaţiile $\exp_x$ şi $\exp_{x'}$ să fie difeomorfisme. Atunci relaţia (*) se poate scrie:

$$f = \exp_{x'} \circ F_1 \circ \exp_x^{-1}. \tag{**}$$

Prin urmare,

$$f_{*,x} = (\exp_{x'})_{*,0_{x'}} \circ (F_1)_{*,0_x} \circ (\exp_x^{-1})_{*,x}.$$

Pe de altă parte, dacă facem identificările $T_{0_x}(T_xM) \equiv T_xM$, precum şi $T_{0_{x'}}(T_{x'}M') \equiv T_{x'}M'$, atunci

$$(\exp_{x'})_{*,0_{x'}} = 1_{T_{x'}M'}$$

şi

$$(\exp_x^{-1})_{*,0_x} = 1_{T_xM}.$$

Prin urmare,

$$f_{*,x} = (F_1)_{*,0_x}.$$

[1] Aceasta înseamnă că lungimea lui γ este egală cu distanţa dintre capetele sale.

[2] Relaţia (*) este o consecinţă a omogenităţii aplicaţiei F_1.

Fireşte, toate relaţiile de mai sus au sens doar dacă aplicaţia F_1 este o aplicaţie netedă.

Acum pentru a demonstra că f este o izometrie de varietăţi riemanniene, trebuie să demonstrăm că este un difeomorfism şi că pentru fiecare $x \in M$ aplicaţia $f_{*,x} : T_x M \longrightarrow T_{x'} M$ este o izometrie liniară. În cazul nostru concret, însă, este suficient să arătăm a doua parte, din care rezultă că f este un difeomorfism local în jurul fiecărui punct şi deci, fiind bijecţie, este chiar un difeomorfism global. Aşadar, singurul lucru care trebuie arătat este că F_1 este o izometrie liniară (de aici rezultă, în particular, şi diferenţiabilitatea lui F_1, ca aplicaţie liniară între spaţii finit dimensionale), pentru că atunci obţinem, F_1 fiind liniară,

$$f_{*,x} = F_1,$$

deci $f_{*,x}$ este, de asemenea, o izometrie liniară.

Vom demonstra, mai întâi, că

$$g'(F_1(X), F_1(Y)) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in T_x M.$$

Deoarece F_1 este omogenă, e clar că este suficient să facem demonstraţia pentru cazul în care X şi Y sunt versori în $T_x M$, deci $F_1(X)$ şi $F_1(Y)$ sunt versori în $T_{x'} M'$. Fie

$$\cos\alpha = g(X, X), \quad \cos\alpha' = g'(F_1(X), F_1(Y)).$$

Fie, de asemenea, $\gamma(s)$ şi $\mu(s)$ geodezicele din U cu condiţiile iniţiale (x, X) şi (x, Y). Punem

$$\gamma_1(s) = f(\gamma(s)), \qquad \mu_1(s) = f(\mu(s)).$$

Atunci $\gamma_1(s)$ şi $\mu_1(s)$ sunt geodezice în U', verificând condiţiile iniţiale $(x', F_1(X))$, respectiv $(x', F_1(Y))$. Vom arăta că

$$\begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} = \lim_{s\longrightarrow 0} \frac{1}{2s} d(\gamma(s), \mu(s)), \\ \sin\frac{\alpha'}{2} = \lim_{s\longrightarrow 0} \frac{1}{2s} d'(\gamma_1(s), \mu_1(s)). \end{cases} \tag{11.4}$$

În mod evident, este suficient să demonstrăm prima formulă. Considerăm, în vecinătatea normală U a lui x, coordonatele normale $x^1, \dots, x^n$. Pe U considerăm metrica riemanniană h pentru care $h_{ij} = \delta_{ij}$ (metrica euclidiană) şi notăm cu δ distanţa definită de această metrică. Presupunând că

$$\overline{\lim_{s\longrightarrow 0}} \frac{1}{2s} d(\gamma(s), \mu(s)) > \sin\frac{\alpha}{2},$$

vom obţine o contradicţie. (Cazul inegalităţii inverse se tratează similar). Alegem $c > 1$ astfel încât

$$\overline{\lim_{s\longrightarrow 0}} \frac{1}{2s} d(\gamma(s), \mu(s)) > c\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Alegând U suficient de mică, putem presupune că $\frac{1}{c} h < g < ch$ pe U, în sensul că

$$\frac{1}{c} h(Z, Z) < g(Z, Z) < ch(Z, Z), \quad \forall Z \in T_z M,\ z \in U.$$

Vom obţine, prin urmare că, pentru orice $y, z \in U$,

$$\frac{1}{c}\delta(y, z) < d(y, z) < c\delta(y, z),$$

de unde, în particular,

$$\frac{c}{2s}\delta(\gamma(s), \mu(s)) > \frac{1}{2} d(\gamma(s), \mu(s)) > c\sin\frac{\alpha}{2},$$

pentru s suficient de mic. Pe de altă parte, h fiind metrica euclidiană,

$$\frac{1}{2s}\delta(\gamma(s),\mu(s)) \simeq \sin\frac{\alpha}{2},$$

pentru s mic, ceea ce este o contradicţie, care demonstrează că

$$\overline{\lim_{s\longrightarrow 0}}\frac{1}{2s}d(\gamma(s),\mu(s)) = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Analog se arată că

$$\underline{\lim_{s\longrightarrow 0}}\frac{1}{2s}d(\gamma(s),\mu(s)) = \sin\frac{\alpha}{2},$$

deci, în final,

$$\lim_{s\longrightarrow 0}\frac{1}{2s}d(\gamma(s),\mu(s)) = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Revenim acum la demonstraţia teoremei. Deoarece f păstrează distanţa, din formulele (11.4) rezultă că $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha'}{2}$, prin urmare

$$\begin{aligned} g(X,Y) = \cos\alpha = \left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} = \left(1-2\sin^2\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} = \\ = \cos\alpha' = g'(F_1(X),F_1(Y)). \end{aligned}$$

Vom arăta acum că F_1 este liniară. Am văzut deja că F_1 este omogenă, deci mai rămâne doar să arătăm că este aditivă. Fie $\{X_1,\dots,X_n\}$ o bază ortonormată în T_xM. Deoarece F_1 păstrează produsul scalar în spaţiul tangent, rezultă că $\{F_1(X_1),\dots F_1(X_n)\}$ formează o bază ortonormată pentru spaţiul $T_{x'}M'$. Fiind daţi X şi Y din T_xM, avem:

$$\begin{aligned} g'\big(F_1(X+Y),X_i'\big) &= g(X+Y,X_i) = g(X,X_i)+g(Y,X_i) = \\ &= g'\big(F_1(X),X_i'\big)+g'\big(F_1(Y),X_i'\big) = \\ &= g'\big(F_1(X)+F_1(Y),X_i'\big), \end{aligned}$$

pentru orice $i\in\{1,\dots,n\}$, deci

$$F_1(X+Y) = F_1(X)+F_1(Y).$$

■

CAPITOLUL 12

Curbura unei varietăţi riemanniene

Reamintim că dacă (M, ∇) este o varietate diferenţiabilă înzestrată cu o conexiune liniară, atunci tensorul de curbură se defineşte prin relaţia

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{12.1}$$

Propoziţia 12.0.1 (Identitatea lui Bianchi)**.** *Dacă (M, g) este o varietate riemanniană, iar R este tensorul de curbură al conexiunii Levi-Civita, atunci*

$$R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{12.2}$$

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}
&R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \\
&- \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X + \\
&+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y = \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \\
&+ \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) + \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[X,Y]} Z - \\
&- \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y.
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Acum din simetria conexiunii Levi-Civita rezultă imediat că avem relaţiile

$$\begin{cases} \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \\ \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z] \\ \nabla_Z X - \nabla_X Z = [Z, X] \end{cases}, \tag{12.4}$$

de unde rezultă că relaţia (12.3) se poate scrie

$$\begin{aligned}
&R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y,Z]} X + \\
&+ \nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Z,X]} Z + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X,Y]} Z
\end{aligned} \tag{12.5}$$

sau, dacă utilizăm din nou simetria conexiunii Levi-Civita,

$$\begin{aligned}
&R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = \\
&= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,
\end{aligned}$$

unde pentru scrierea ultimei egalităţi am utilizat identitatea lui Jacobi pentru paranteza Lie a câmpurilor de vectori. ■

Dacă X, Y, Z sunt câmpuri de vectori de forma $\frac{\partial}{\partial x^i}$, unde x^i sunt coordonate locale, atunci

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = R^i_{jkl} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Se obţine deci, din propoziţia precedentă, următorul rezultat.

Consecinţa 12.1 (Identitatea lui Bianchi pentru componente)**.** *Dacă (M, g) este o varietate riemanniană, iar R este tensorul de curbură al conexiunii Levi-Civita, iar (U, φ) este o hartă pe M, cu coordonatele x^i, atunci componentele tensorului de curbură faţă de această hartă verifică relaţia:*

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0. \tag{12.6}$$

Dacă $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$, atunci facem notaţia

$$(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y, Z), T). \tag{12.7}$$

Acest simbol verifică următoarele proprietăţi:

Propoziţia 12.0.2. *1.* $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0.$

2. $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T).$

3. $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z).$

4. $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y).$

Demonstraţie. 1) Avem:

$$\begin{aligned}&(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = g(R(X, Y, Z), T)+\\&+ g(R(Y, Z, X), T) + g(R(Z, X, Y), T) =\\&= g(R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y), T).\end{aligned}$$

Dar primul argument al lui g din ultimul membru este egal cu zero, datorită identităţii lui Bianchi, deci demonstraţia este încheiată.

2) Aplicând definiţia simbolului $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ şi antisimetria lui R în primele două argumente, obţinem

$$\begin{aligned}(X, Y, Z, T) &= g(R(X, Y, Z), T) = -g(R(Y, X, Z), T) =\\&= -(Y, X, Z, T).\end{aligned}$$

3) Afirmaţia este echivalentă, după cum se poate constata imediat, cu condiţia

$$(X, Y, Z, Z) = 0,$$

pe care o vom demonstra.

$$\begin{aligned}(X, Y, Z, Z) = g(R(X, Y, Z), Z) = g(&\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z-\\&- \nabla_{[X,Y]} Z, Z).\end{aligned}$$

Din metricitatea conexiunii Levi-Civita rezultă că

$$Xg(\nabla_Y Z, Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z),$$

de unde
$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z).$$
În acelaşi mod, utilizând metricitatea conexiunii, din
$$[X, Y]g(Z, Z) = 2g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z)$$
deducem că
$$g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z) = \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z).$$
Aşadar,
$$(X, Y, Z, Z) = Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z).$$
Pe de altă parte,
$$Yg(Z, Z) = 2g(\nabla_Y Z, Z)$$
de unde
$$g(\nabla_Y Z, Z) = \frac{1}{2} Yg(Z, Z)$$
şi, analog,
$$g(\nabla_X Z, Z) = \frac{1}{2} Xg(Z, Z).$$
În concluzie, avem
$$\begin{aligned}(X, Y, Z, Z) = &\underbrace{\frac{1}{2}X(Yg(Z, Z)) - \frac{1}{2}Y(Xg(Z, Z))}_{=\frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z)} - \\ &- \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z) = 0.\end{aligned}$$

4) Din punctul 1) rezultă relaţiile
$$\begin{aligned}(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0\\ (Y, Z, T, X) + (Z, T, Y, X) + (T, Y, Z, X) = 0\\ (Z, T, X, Y) + (T, X, Z, Y) + (X, Z, T, Y) = 0\\ (T, X, Y, Z) + (X, Y, T, Z) + (Y, T, X, Z) = 0.\end{aligned}$$
Însumând, obţinem
$$2(Z, X, Y, T) + 2(T, Y, Z, X) = 0,$$
de unde
$$(Z, X, Y, T) = (Y, T, Z, X).$$
∎

Fie $\{e_i\}$ o bază într-un spaţiu tangent la varietate într-un punct. Atunci
$$g(R(e_i, e_j, e_k), e_s) = g(R^l_{ijk} e_l, e_s) = g_{ls} \cdot R^l_{ijk} = R_{ijks}.$$
Prin urmare, propoziţia precedentă se scrie, pe componente, în modul următor:

Consecinţa 12.2. *1.* $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0.$

2. $R_{ijks} = -R_{jiks}.$

3. $R_{ijks} = -R_{ijsk}.$

4. $R_{ijks} = R_{ksij}.$

12.1 Complemente algebrice

Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional şi $R : V \times V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicaţie 4-liniară astfel încât:

1. $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4)$.
2. $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$.
3. $R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) = 0$.

Propoziţia 12.1.1. *Dacă o aplicaţie 4-liniară $R : V^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ verifică proprietăţile 1)–3) din definiţia de mai sus, atunci ea verifică şi proprietatea*

4. $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2)$.

Demonstraţie. Este complet analoagă cu demonstraţia punctului 4) din propoziţia 12.0.2. ■

Propoziţia 12.1.2. *Fie R şi T două aplicaţii 4-liniare care verifică proprietăţile 1)–3). Dacă*

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = T(v_1, v_2, v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$

atunci $R \equiv T$.

Demonstraţie. Putem presupune că $T \equiv 0$. Pe urmă considerăm, în locul aplicaţiilor R şi T aplicaţiile $R - T$ şi 0. Presupunem, deci, că $R(v_1, v_2, v_1, v_2) = 0$ pentru orice pereche de vectori $v_1, v_2 \in V$. Înlocuim acum vectorul v_2 cu vectorul $v_2 + v_4$, unde v_4 este un vector oarecare din V. Avem, deci,

$$0 = R(v_1, v_2 + v_4, v_1, v_2 + v_4) = R(v_1, v_2, v_1, v_4) + \\ + R(v_1, v_4, v_1, v_2) \stackrel{4)}{=} 2R(v_1, v_2, v_1, v_4).$$

Prin urmare,

$$R(v_1, v_2, v_1, v_4) = 0, \quad \forall v_1, v_2, v_4 \in V. \tag{12.8}$$

Mai departe, dacă în (12.8) înlocuim v_1 cu $v_1 + v_3$, v_3 fiind un vector oarecare din V, se obţine:

$$0 = R(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4).$$

Aplicând, în această relaţie, proprietăţile 4) şi 2), obţinem

$$0 = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - \\ - R(v_1, v_4, v_2, v_3),$$

deci

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_2, v_3, v_1, v_4) \tag{12.9}$$

şi, analog,

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_1, v_2, v_4). \tag{12.10}$$

Însumând membru cu membru relaţiile (12.9) şi (12.10), rezultă:

$$2R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4).$$

Dacă acum, în această ecuaţie, adunăm în ambii membrii ai acestei ecuaţii $R(v_1, v_2, v_3, v_4)$, obţinem:

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) + \\ + R(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Dar membrul drept al relaţiei de mai sus este egal cu zero în virtutea proprietăţii 3), deci se obţine $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$, aşa cum trebuia. ■

Presupunem acum că pe spaţiul vectorial V avem un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Fie σ un plan (un subspaţiu de dimensiune 2) în V şi $\{v_1, v_2\}$ – o bază a lui σ. Dacă $R : V^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ este o aplicaţie 4-liniară care verifică proprietăţile 1)–3), atunci definim mărimea $K_R(\sigma)$ prin

$$K_R(\sigma) = \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{\langle v_1, v_1\rangle \cdot \langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_2\rangle^2}. \tag{12.11}$$

Propoziţia 12.1.3. *Aplicaţia $K_R(\sigma)$ este corect definită, în sensul că membrul drept al relaţiei (12.11) depinde numai de aplicaţia R şi de planul σ şi nu depinde de baza aleasă în σ.*

Demonstraţie. Fie $\{w_1, w_2\}$ o altă bază în σ, unde

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{cases},$$

iar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
&\frac{R(w_1, w_2, w_1, w_2)}{\langle w_1, w_1\rangle \cdot \langle w_2, w_2\rangle - \langle w_1, w_2\rangle^2} = \\
&= R(a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2, a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2)/ \\
&\Big(\langle a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{11}v_1 + a_{12}v_2\rangle \cdot \langle a_{21}v_1 + a_{22}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2\rangle - \\
&- \langle a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2\rangle^2\Big)
\end{aligned}$$

Vom calcula separat numărătorul şi numitorul acestei fracţii:

$$\begin{aligned}
&R(a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2, a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = \\
&= a_{11}a_{21}a_{11}a_{21}\underbrace{R(v_1, v_1, v_1, v_1)}_{=0} + \\
&+ a_{11}a_{21}a_{11}a_{22}\underbrace{R(v_1, v_1, v_1, v_2)}_{=0} + a_{11}a_{21}a_{12}a_{21}\underbrace{R(v_1, v_1, v_2, v_1)}_{=0} + \\
&+ a_{11}a_{21}a_{12}a_{22}\underbrace{R(v_1, v_1, v_2, v_2)}_{=0} + a_{11}a_{22}a_{11}a_{21}\underbrace{R(v_1, v_2, v_1, v_1)}_{=0} + \\
&+ a_{11}a_{22}a_{11}a_{22}R(v_1, v_2, v_1, v_2) + a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}\underbrace{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}_{=-R(v_1,v_2,v_1,v_2)} + \\
&+ a_{11}a_{22}a_{12}a_{22}\underbrace{R(v_1, v_2, v_2, v_2)}_{=0} + \\
&+ a_{12}a_{21}a_{11}a_{21}\underbrace{R(v_2, v_1, v_1, v_1)}_{=0} + a_{12}a_{21}a_{11}a_{22}\underbrace{R(v_2, v_1, v_1, v_2)}_{=-R(v_1,v_2,v_1,v_2)} + \\
&+ a_{12}a_{21}a_{12}a_{21}\underbrace{R(v_2, v_1, v_2, v_1)}_{=R(v_1,v_2,v_1,v_2)} + a_{12}a_{21}a_{12}a_{22}\underbrace{R(v_2, v_1, v_2, v_2)}_{=0} + \\
&+ a_{12}a_{22}a_{11}a_{21}\underbrace{R(v_2, v_2, v_1, v_1)}_{=0} + a_{12}a_{22}a_{11}a_{22}\underbrace{R(v_2, v_2, v_1, v_2)}_{=0} + \\
&+ a_{12}a_{22}a_{12}a_{21}\underbrace{R(v_2, v_2, v_2, v_1)}_{=0} + a_{12}a_{22}a_{12}a_{22}\underbrace{R(v_2, v_2, v_2, v_2)}_{=0} =
\end{aligned}$$

$$= (a_{11}^2a_{22}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}^2a_{21}^2)R(v_1, v_2, v_1, v_2) =$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 R(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
&\langle w_1, w_1\rangle\langle w_2, w_2\rangle - \langle w_1, w_2\rangle^2 = \langle a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{11}v_1 + a_{12}v_2\rangle\cdot \\
&\cdot \langle a_{21}v_1 + a_{22}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2\rangle - \langle a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2\rangle^2 = \\
&= (a_{11}^2\langle v_1, v_1\rangle + 2a_{11}a_{12}g(v_1, v_2) + a_{12}^2\langle v_2, v_2\rangle)\cdot(a_{21}^2\langle v_1, v_1\rangle + \\
&+ 2a_{21}a_{22}g(v_1, v_2) + a_{22}^2\langle v_2, v_2\rangle) - (a_{11}a_{21}\langle v_1, v_1\rangle + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\langle v_1, v_2\rangle + \\
&+ a_{12}a_{22}\langle v_2, v_2\rangle)^2 = a_{11}^2a_{21}^2(\langle v_1, v_1\rangle)^2 + 2a_{11}^2a_{21}a_{22}\langle v_1, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle + a_{11}^2a_{22}^2\langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle + \\
&+ 2a_{11}a_{12}a_{21}^2\langle v_1, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle + 4a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}(\langle v_1, v_2\rangle)^2 + 2a_{11}a_{12}a_{22}^2\langle v_1, v_2\rangle\langle v_2, v_2\rangle + \\
&+ a_{12}^2a_{21}^2\langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle + 2a_{12}^2a_{21}a_{22}\langle v_1, v_2\rangle\langle v_2, v_2\rangle + a_{12}^2a_{22}^2(\langle v_2, v_2\rangle)^2 - a_{11}^2a_{21}^2(\langle v_1, v_1\rangle)^2 - \\
&- (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2(\langle v_1, v_2\rangle)^2 - a_{12}^2a_{22}^2(\langle v_2, v_2\rangle)^2 - 2a_{11}a_{21}(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\langle v_1, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle - \\
&- 2a_{11}a_{21}a_{12}a_{22}\langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle - 2a_{12}a_{22}(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\langle v_1, v_2\rangle\langle v_2, v_2\rangle = \\
&= ((\langle v_1, v_1\rangle)^2(a_{11}^2a_{21}^2 - a_{11}^2a_{21}^2) + \langle v_1, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle(2a_{11}^2a_{21}a_{22} + 2a_{11}a_{12}a_{21}^2 - 2a_{11}^2a_{21}a_{22} - \\
&- 2a_{11}a_{12}a_{21}^2) + \langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle(a_{11}^2a_{22}^2 + a_{12}^2a_{21}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}) + \\
&+ ((\langle v_1, v_2\rangle)^2(4a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} - a_{11}^2a_{22}^2 - a_{12}^2a_{21}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}) + \langle v_1, v_2\rangle\langle v_2, v_2\rangle(2a_{11}a_{12}a_{22}^2 + \\
&+ 2a_{12}^2a_{21}a_{22} - 2a_{11}a_{12}a_{22}^2 - 2a_{12}^2a_{21}a_{22}) + ((\langle v_2, v_2\rangle)^2(a_{12}^2a_{22}^2 - a_{12}^2a_{22}^2) = \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2(\langle v_1, v_1\rangle g(v_2, v_2) - (\langle v_1, v_2\rangle)^2).
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
&\frac{R(w_1, w_2, w_1, w_2)}{\langle w_1, w_1\rangle\cdot\langle w_2, w_2\rangle - \langle w_1, w_2\rangle^2} = \\
&= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2(\langle v_1, v_1\rangle\cdot\langle v_2, v_2\rangle - (\langle v_1, v_2\rangle)^2)} = \\
&= \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{\langle v_1, v_1\rangle\cdot\langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_2\rangle^2} \equiv K_R(\sigma).
\end{aligned}$$

■

Consecinţa 12.3. *Dacă $\{v_1, v_2\}$ este un reper ortonormat în σ, atunci*

$$K_R(\sigma) = R(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

Considerăm acum aplicaţia $R_1 : V^4 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$R_1(v_1, v_2, v_3, v_4) = \langle v_2, v_4\rangle\langle v_3, v_1\rangle - \langle v_2, v_3\rangle\langle v_1, v_4\rangle. \tag{12.12}$$

Se poate verifica imediat că R_1 este o aplicaţie 4-liniară ce îndeplineşte condiţiile 1)–3). În plus,

Propoziţia 12.1.4.

$$K_{R_1}(\sigma) = 1,$$

pentru orice plan $\sigma \subset V$.

Demonstraţie. Fie $\{v_1, v_2\}$ o bază *ortonormată* a lui σ. Atunci, după cum s-a văzut,

$$K_{R_1}(\sigma) = R_1(v_1, v_2, v_1, v_2) = \underbrace{\langle v_2, v_2\rangle}_{=1}\underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{=1} - \underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{=0}\underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{=0} = 1.$$

■

Aplicaţia R_1 joacă un rol special, pentru că ea epuizează, abstracţie făcând de o dilatare, toate aplicaţiile de acest tip pentru care $K(\sigma)$ este constantă, adică are loc următoarea propoziţie:

Propoziţia 12.1.5. *Fie $R : V^4 \to \mathbb{R}$ o aplicaţie 4-liniară pentru care sunt verificate condiţiile 1)–3). Dacă $K(\sigma) = c$ pentru orice plan $\sigma \subset V$, atunci $R = cR_1$.*

Demonstraţie. Egalitatea are loc pentru sisteme de vectori de forma (v_1, v_2, v_1, v_2), deci, conform propoziţiei 12.1.2, ea trebuie să aibă loc pentru orice sisteme de vectori. ■

12.2 Curbura secţională a unei varietăţi riemanniene

Ne întoarcem acum la curbura unei varietăţi riemanniene.

Definiţie. Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $x \in M$. Dacă $\sigma \subset T_xM$ este un plan bidimensional şi $\{v_1, v_2\}$ este o bază în σ, atunci se numeşte *curbură secţională* a lui M în x, în direcţia σ, mărimea

$$K_x(\sigma) = -\frac{(v_1, v_2, v_1, v_2)}{g(v_1, v_1)\cdot g(v_2, v_2) - (g(v_1, v_2))^2}. \tag{12.13}$$

Observaţie. 1. Dacă notăm

$$R_x = -(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)|_x : T_xM \times T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R},$$

atunci este clar că aplicaţia R_x verifică proprietăţile 1)–3), iar

$$K_x(\sigma) \equiv K_{R_x}(\sigma).$$

Din observaţia de mai sus şi din rezultatele din secţiunea precedentă rezultă imediat următoarele afirmaţii:

Propoziţia 12.2.1. *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $x \in M$. Atunci:*

1. *Curbura secţională $K_x(\sigma)$ este bine definită.*
2. *Tensorul de curbură este unic determinat în punctul x dacă se cunoaşte valoarea curburii secţionale pentru toate planele bidimensionale $\sigma \subset T_xM$.*
3. *M are curbură riemanniană constantă egală cu K_0 dacă şi numai dacă*

$$(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = -K_0 \cdot R_1.$$

Observaţii. 1. Dacă $\{e_i\}$ este o bază în T_xM şi σ este un plan generat de doi vectori ai bazei e_i şi e_j, cu $i \neq j$, atunci

$$K_x(\sigma) = -\frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}.$$

2. M are curbură secţională constantă, egală cu K_0 dacă şi numai dacă tensorul de curbură are o structură foarte simplă:

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}).$$

Prin urmare, în cazul unui spaţiu cu curbura secţională constantă, toate componentele covariante ale tensorului de curbură sunt constante (de fapt, se observă că valorile admise sunt 0, $\pm K_0$, $\pm 2K_0$).

12.3 Curbura varietăţilor bidimensionale

12.3.1 Teorema egregium. Ecuaţiile lui Gauss

Teorema 12.1 (Teorema egregium)**.** *Curbura totală a unei suprafeţe se poate exprima numai cu ajutorul coeficienţilor primei forme fundamentale şi derivatelor lor parţiale de ordinul unu şi doi.*

Demonstraţie. După cum se ştie, curbura totală a unei suprafeţe este dată de formula

$$K_t = \frac{DD" - D'^2}{EG - F^2}, \tag{12.14}$$

unde

$$E = \mathbf{r}_u'^{\,2}, \ F = \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v', \ G = \mathbf{r}_v'^{\,2}$$

sunt coeficienţii primei forme fundamentale, iar

$$D = \frac{1}{H}(\mathbf{r}_u', \mathbf{r}_v', \mathbf{r}_{u^2}''), \ D' = \frac{1}{H}(\mathbf{r}_u', \mathbf{r}_v', \mathbf{r}_{uv}''), \ D'' = \frac{1}{H}(\mathbf{r}_u', \mathbf{r}_v', \mathbf{r}_{v^2}'')$$

sunt coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale a suprafeţei, în parametrizarea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

Prin urmare, tot ceea ce trebuie demonstrat este că discriminantul celei de-a doua forme fundamentale, $DD''-D'^2$, se poate exprima în funcţie de E, F, G şi derivatele lor de ordinul unu şi doi. Vom utiliza, în acest scop, identitatea:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}' & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}' \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}' & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}' \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}' & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b}' & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}' \end{vmatrix}$$

Prin urmare,

$$H^2(DD'' - D'^2) = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_u'^{\,2} & \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v' & \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{v^2}'' \\ \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v' & \mathbf{r}_v'^{\,2} & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{v^2}'' \\ \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{u^2}'' & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{v^2}'' & \mathbf{r}_{u^2}'' \cdot \mathbf{r}_{v^2}'' \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \mathbf{r}_u'^{\,2} & \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v' & \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{uv}'' \\ \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v' & \mathbf{r}_v'^{\,2} & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{uv}'' \\ \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{uv}'' & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{uv}'' & \mathbf{r}_{uv}''^{\,2} \end{vmatrix}.$$

Pe de altă parte, dacă derivăm, în raport cu u şi v, relaţiile

$$\mathbf{r}_u'^{\,2} = E, \quad , \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v' = F, \quad \mathbf{r}_v'^{\,2} = G$$

obţinem sistemul de relaţii:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{u^2}'' &= \frac{1}{2}E_u', & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{u^2}'' &= F_u' - \frac{1}{2}E_v' \\ \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{v^2}'' &= F_v' - \frac{1}{2}G_u', & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{u^2}'' &= \frac{1}{2}G_v' \\ \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_{uv}'' &= \frac{1}{2}E_v', & \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_{uv}'' &= \frac{1}{2}G_u'. \end{aligned}$$

Obţinem atunci:

$$H^2(DD''-D'^2)=\begin{vmatrix} E & F & F'_v-\frac{1}{2}G'_u\\ F & G & \frac{1}{2}G'_v\\ \frac{1}{2}E'_u & F'_u-\frac{1}{2}E'_v & \mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{r}''_{v^2}\end{vmatrix}-$$
$$-\begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E'_v\\ F & G & \frac{1}{2}G'_u\\ \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u & {\mathbf{r}''_{uv}}^2\end{vmatrix}$$

Dacă dezvoltăm şi ordonăm după E, F, G, obţinem:

$$\begin{aligned}4H^2\left(DD''-D'^2\right)&=4H^2\left(\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{r}''_{v^2}-{\mathbf{r}''_{uv}}^2\right)+E\big({G'_u}^2+\\&+E'_vG'_v-2F'_uG'_v\big)+F\big(E'_uG'_v-E'_vG'_u-2F'_uG'_u-\\&-2E'_vF'_v+4F'_uF'_v\big)+G\big({E'_v}^2+E'_uG'_u-2E'_uF'_v\big).\end{aligned}$$

Pe de altă parte, după cum am văzut,

$$\begin{cases}\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{r}''_{v^2}=F'_v-\frac{1}{2}G'_u\\ \mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{r}''_{uv}=\frac{1}{2}E'_v\end{cases}.$$

Dacă derivăm prima ecuaţie în raport cu u şi a doua în raport cu v şi apoi le scădem, obţinem

$$\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{r}''_{v^2}-{\mathbf{r}''_{uv}}^2=F''_{uv}-\frac{1}{2}G''_{u^2}-\frac{1}{2}E''_{v^2},$$

de unde, în final,

$$\begin{aligned}DD''-D'^2&=\frac{1}{2}(2F''_{uv}-G''_{u^2}-E''_{v^2})+\frac{1}{4H^2}\Big[E({G'_u}^2+E'_vG'_v-\\&-2F'_uG'_v)+F(E'_uG'_v-E'_vG'_u-2F'_uG'_u-2E'_vF'_v+\\&+4F'_uF'_v)+G({E'_v}^2+E'_uG'_u-2E'_uF'_v)\Big].\end{aligned}$$

Aşadar, pentru curbura totală are loc formula

$$\begin{aligned}K_t=\frac{1}{(EG-F^2)^2}&\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}E''_{v^2}+F''_{uv}-\frac{1}{2}G''_{u^2} & \frac{1}{2}E'_u & F'_u-\frac{1}{2}E'_v\\ F'_v-\frac{1}{2}G'_u & E & F\\ \frac{1}{2}G'_v & F & G\end{vmatrix}-\right.\\&\left.-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u\\ \frac{1}{2}E'_v & E & F\\ \frac{1}{2}G'_u & F & G\end{vmatrix}\right)\end{aligned}\tag{12.15}$$

■

12.3.2 Ecuaţiile Gauss şi Codazzi-Mainardi pentru o suprafaţă

În cazul curbelor netede în $\mathbb{R}^3$, dacă se dau două funcţii netede, dintre care una strict pozitivă, atunci există, abstracţie făcând de o deplasare a spaţiului, o singură curbă netedă pentru care cele două funcţii date sunt funcţia de curbură, respectiv de torsiune, prin urmare se poate spune că torsiunea şi curbura determină curba, până la o deplasare a spaţiului.

În cazul suprafeţelor, o mare parte din informaţie se obţine utilizând primele două forme fundamentale ale suprafeţei şi ne putem pune întrebarea: dacă se dau două forme pătratice, dintre care una pozitiv definită, există o suprafaţă pentru care cele două forme să fie primele două forme fundamentale? Răspunsul este, în general negativ, motivul fiind că primele două forme fundamentale ale unei suprafeţe sunt supuse unor restricţii. Aceste restricţii (cunoscute, în general, sub numele de *ecuaţiile fundamentale ale unei suprafeţe*), formează două sisteme de ecuaţii, aparţinând lui Gauss, respectiv matematicienilor italieni Codazzi şi Mainardi.

Înainte de a formula ecuaţiile fundamentale ale unei suprafeţe, remarcăm faptul că pentru o suprafaţă parametrizată coeficienţii lui Christoffel au o semnificaţie foarte precisă:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''_{u^2} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}'_v + D\mathbf{n} \\ \mathbf{r}''_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + D'\mathbf{n} \\ \mathbf{r}''_{v^2} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}'_v + D\mathbf{n} \end{aligned} \tag{12.16}$$

De asemenea, derivatele în raport cu u şi v ale versorului normalei, $\mathbf{n}$, au următoarea descompunere:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_u &= a_{11}\mathbf{r}'_u + a_{21}\mathbf{r}'_v \\ \mathbf{n}'_v &= a_{12}\mathbf{r}'_u + a_{22}\mathbf{r}'_v \end{aligned} \tag{12.17}$$

unde coeficienţii sunt daţi de

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{FD' - GD}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{FD - ED'}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Teorema 12.2 (Gauss, Codazzi, Mainardi)**.** *Dacă*

$$\Phi = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 \tag{12.19}$$

şi

$$\Psi = D\mathrm{d}u^2 + 2D'\mathrm{d}u\mathrm{d}v + D''\mathrm{d}v^2 \tag{12.20}$$

sunt prima, respectiv a doua formă fundamentală a unei suprafeţe, iar K_t este curbura ei totală, atunci au loc relaţiile:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} = EK_t \\ &\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} - \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = FK_t \\ &\frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial u} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial v} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = GK_t \\ &\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} = FK_t, \end{aligned} \tag{Gauss}$$

numite ecuaţiile lui Gauss*, precum şi relaţiile*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = D\Gamma^1_{12} + D'(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - D''\Gamma^2_{11} \\ &\frac{\partial D'}{\partial v} - \frac{\partial D''}{\partial u} = D\Gamma^1_{22} + D'(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - D''\Gamma^2_{12}, \end{aligned} \tag{Codazzi-Mainardi}$$

numite ecuaţiile Codazzi-Mainardi.

Demonstraţie. Avem, în mod evident, relaţia

$$\mathbf{r}'''_{u^2v} - \mathbf{r}'''_{uvu} = 0.$$

Dar

$$\mathbf{r}''_{u^2} = \Gamma^1_{11}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}'_v + D\mathbf{n},$$

deci

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'''_{u^2v} &= \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v}\mathbf{r}'_u + \Gamma^1_{11}\mathbf{r}''_{uv} + \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}\mathbf{r}'_v + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}''_{v^2} + \frac{\partial D}{\partial v}\mathbf{n} + D\mathbf{n}'_v = \\
&= \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v}\mathbf{r}'_u + \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + D'\mathbf{n}) + \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}\mathbf{r}'_v + \\
&+ \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{22}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}'_v + D''\mathbf{n}) + \frac{\partial D}{\partial v}\mathbf{n} + D(a_{12}\mathbf{r}'_u + a_{22}\mathbf{r}'_v) = \\
&= \mathbf{r}'_u\left(\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + a_{12}D\right) + \\
&+ \mathbf{r}'_v\left(\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + a_{22}D\right) + \\
&+ \mathbf{n}\left(\frac{\partial D}{\partial v} + \Gamma^1_{11}D' + \Gamma^2_{11}D''\right).
\end{aligned}$$

În mod analog,

$$\mathbf{r}''_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + D'\mathbf{n},$$

deci

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'''_{uvu} &= \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_u + \Gamma^1_{12}\mathbf{r}''_{u^2} + \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_v + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}''_{uv} + \frac{\partial D'}{\partial u}\mathbf{n} + D'\mathbf{n}'_u = \\
&= \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_u + \Gamma^1_{12}(\Gamma^1_{11}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}'_v + D\mathbf{n}) + \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}\mathbf{r}'_v + \\
&+ \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}\mathbf{r}'_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}'_v + D'\mathbf{n}) + \frac{\partial D'}{\partial u}\mathbf{n} + D'(a_{11}\mathbf{r}'_u + a_{21}\mathbf{r}'_v) = \\
&= \mathbf{r}'_u\left(\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + a_{11}D'\right) + \\
&+ \mathbf{r}'_v\left(\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + a_{21}D'\right) + \\
&+ \mathbf{n}\left(\frac{\partial D'}{\partial u} + \Gamma^1_{12}D + \Gamma^2_{12}D'\right).
\end{aligned}$$

Dacă facem scăderea, obţinem:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{r}'''_{u^2v} - \mathbf{r}'''_{uvu} = \\
&= \mathbf{r}'_u\left(\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + a_{12}D - a_{11}D'\right) + \\
&+ \mathbf{r}'_v\left(\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + a_{22}D - a_{21}D'\right) + \\
&+ \mathbf{n}\left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} + \Gamma^1_{12}D - D'(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) + \Gamma^2_{12}D''\right).
\end{aligned}$$

Deoarece vectorii $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ şi $\mathbf{n}$ sunt liniari independenţi, o combinaţie liniară a lor se poate anula doar dacă se anulează fiecare coeficient. Dacă se egalează cu zero coeficientul lui $\mathbf{n}$, se vede că rezultă prima dintre ecuaţiile Codazzi-Mainardi. Dacă egalăm cu zero coeficientul lui $\mathbf{r}$ rezultă, utilizând expresiile lui a_{21} şi a_{22}, prima ecuaţie a lui Gauss, iar din coeficientul lui $\mathbf{r}'_u$ rezultă a doua ecuaţie a lui Gauss. Restul de trei ecuaţii se pot obţine, pe aceeaşi cale, utilizând, de data aceasta, relaţia

$$\mathbf{r}'''_{uv^2} = \mathbf{r}'''_{vuv}.$$

■

12.3.3 Curbura secţională a unei suprafeţe

Ecuaţiile lui Gauss (în care membrii drepţi sugerează nişte componente ale tensorului de curbură) ne permit să suspectăm existenţa unei legături între curbura totală (gaussiană) a unei suprafeţe şi curbura ei secţională, calculată în raport cu metrica definită de prima formă fundamentală. Într-adevăr, o astfel de legătură există:

Teorema 12.3. *Curbura secţională într-un punct al unei suprafeţe este egală cu curbura totală a suprafeţei în punctul respectiv.*

Demonstraţie. Să remarcăm, mai întâi, că teorema este corect formulată (ne putem permite să vorbim de curbura secţională într-un punct, întrucât spaţiul tangent într-un punct la o suprafaţă are un singur subspaţiu bidimensional, egal cu spaţiul însuşi, deci precizarea punctului în care se calculează curbura este suficientă).

În cazul unei suprafeţe, curbura secţională este dată de

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \equiv -\frac{R_{1212}}{EG - F^2}.$$

Mai departe,

$$R_{1212} = g_{k2}R^k_{121} = g_{12}R^1_{121} + g_{22}R^2_{121} \equiv FR^1_{121} + GR^2_{121}.$$

Utilizând ecuaţiile lui Gauss, obţinem că

$$\begin{aligned} R^1_{121} &\equiv \frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = \\ &= FK_t, \\ R^2_{121} &\equiv \frac{\partial\Gamma^2_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} = \\ &= -EK_t. \end{aligned}$$

Prin urmare, $R_{1212} = -(EG - F^2)K_t$, de unde se obţine $K = K_t$. ■

12.4 Varietăţi de curbură constantă

Definiţie. O varietate riemanniană se numeşte *varietate de curbură constantă* dacă ea are curbura secţională constantă (cu alte cuvinte, curbura secţională nu depinde nici de punct nici de direcţiile bidimensionale din spaţiile tangente).

Vom da acum un exemplu foarte important de varietate de curbură constantă. După cum vom vedea mai târziu, acest exemplu este generic, în sensul că orice varietate de curbură constantă este local izometrică cu o varietate de acest tip.

Teorema 12.4. *Fie M varietatea diferenţiabilă n-dimensională*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | 1 + \frac{\alpha}{4}\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 > 0\}, \tag{12.21}$$

unde α este o constantă reală, înzestrată cu o metrică riemanniană g de componente

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}, \tag{12.22}$$

unde $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ este funcţia dată prin

$$F(x) = 1 + \frac{\alpha}{4}\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 > 0. \tag{12.23}$$

Atunci (M, g) este o varietate de curbură constantă.

Demonstraţie. Fie $f = \ln F$. Atunci avem

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\delta_{ij}\left(\frac{2}{F^3}\frac{\partial F}{\partial x^k}\right) = -2\frac{\delta_{ij}}{F^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Prin urmare, pentru simbolurile lui Christoffel obţinem:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{im}\left(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}\right) = \\ &= -\left(\delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k} + \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \delta_{jk}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right).\end{aligned}$$

Curbura secţională $K(u, v)$ este liniară în vectorii u şi v, deci este suficient să o calculăm pentru $u = \frac{\partial}{\partial x^i}$ şi $v = \frac{\partial}{\partial x^j}$, cu $i \neq j$, prin urmare

$$K(u, v) = -\frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}.$$

Mai departe,

$$R_{ijij} = R^m_{iji}g_{mj} = \frac{\delta_{mj}}{F^2}R^m_{iji} = \frac{1}{F^2}R^j_{iji}.$$

(Atenţie, nu se face însumare după j! Indicele este fixat). Pentru componentele tensorului de curbură avem, după cum se ştie, formula:

$$R^j_{iji} = \frac{\Gamma^j_{ji}}{\partial x^i} - \frac{\Gamma^j_{ii}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{ji}\Gamma^j_{il} - \Gamma^l_{ii}\Gamma^j_{jl}.$$

Vom determina acum coeficienţii Christoffel care intră în această formulă:

$$\Gamma^j_{ji} = -\left(\underbrace{\delta_{jj}}_{=1}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \underbrace{\delta_{ji}}_{=0}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \underbrace{\delta_{ji}}_{=0}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = -\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Analog,

$$\Gamma^j_{ii} = -\left(\underbrace{\delta_{ji}}_{=0}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \underbrace{\delta_{ji}}_{=0}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \underbrace{\delta_{ii}}_{=1}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Prin urmare,

$$R_{iji}^{j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} + \sum_{l=1}^{n} \left(\Gamma_{ji}^{l} \Gamma_{il}^{j} - \Gamma_{ii}^{l} \Gamma_{jl}^{j} \right).$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ji}^{l} \Gamma_{il}^{j} &= \left(\delta_{lj} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \delta_{li} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \underbrace{\delta_{ji}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) \cdot \\
&\cdot \left(\underbrace{\delta_{ji}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial x^l} + \delta_{jl} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \delta_{il} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \\
&= \left(\delta_{lj} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \delta_{li} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \cdot \left(\delta_{lj} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \delta_{li} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left[(\delta_{lj})^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 - (\delta_{li})^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)^2 \right] = \\
&= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ii}^{l} \Gamma_{jl}^{j} &= \sum_{l=1}^{n} \left(\delta_{li} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \delta_{li} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \delta_{ii} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) \cdot \\
&\cdot \left(\delta_{jj} \frac{\partial f}{\partial x^l} + \delta_{jl} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \delta_{jl} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^l} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta_{li} - \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) = \\
&= \left[2 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 - \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^l} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$R_{iji}^{j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} - \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)^2 + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^l} \right)^2.$$

În cazul nostru, $f(x) = \ln \left(1 + \frac{\alpha}{4} \sum_{l=1}^{n} (x^l)^2 \right)$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x^l} = \frac{\alpha x^l}{2F}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^l} = \frac{1}{4F^2} \left(2\alpha F - (\alpha x^l)^2 \right)$$

şi obţinem pentru componenta R_{iji}^{j} a tensorului de curbură expresia:

$$\begin{aligned}
R_{iji}^{j} &= -\frac{1}{4F^2} \left(2\alpha F - (\alpha x^j)^2 \right) - \frac{1}{4F^2} \left(2\alpha F - (\alpha x^i)^2 \right) - \\
&- \frac{(\alpha x^i)^2}{4F^2} - \frac{(\alpha x^j)^2}{4F^2} + \sum_{l=1}^{n} \frac{(\alpha x^l)^2}{4F^2} = \\
&= -\frac{\alpha}{F} + \sum_{l=1}^{n} \frac{(\alpha x^l)^2}{4F^2} = -\frac{\alpha}{F} + \frac{\alpha^2}{4F^2} \sum_{l=1}^{n} (x^l)^2.
\end{aligned}$$

Ţinând cont acum de faptul că $F(x) = 1 + \frac{\alpha}{4}\sum_{l=1}^{n}(x^l)^2$, se obţine, în final,

$$R_{iji}^{j} = -\frac{\alpha}{F^2}.$$

Aşadar,

$$R_{ijij} = \frac{1}{F^2}R_{iji}^{j} = -\frac{\alpha}{F^4}.$$

Pe de altă parte, $g_{ii} = g_{jj} = \frac{1}{F^2}$, iar $g_{ij} = 0$, deci

$$K(u, v) = -\frac{-\frac{\alpha}{F^4}}{\frac{1}{F^4}} = \alpha.$$

■

12.5 Curbura Ricci şi curbura scalară

Fie $u = v_n$ un vector unitate din T_xM. Considerăm o bază ortonormată $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ în hiperplanul lui T_xM ortogonal la u şi considerăm următoarele expresii:

$$Ric_x(u) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g\left(R(u, v_i, u), v_i\right)$$

$$K(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ric_x(v_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1} g\left(R(v_i, v_j, v_i), v_j\right).$$

Vom demonstra că aceste două mărimi nu depind de baza ortonormată aleasă $Ric_x(u)$ se numeşte *curbura Ricci în punctul x în direcţia u*, iar $K(x)$ este *curbura scalară în x*.

Definim, mai întâi, o aplicaţie biliniară pe T_xM în felul următor: Fie $u, v \in T_xM$. Definim $Q(u, v)$ ca fiind urma aplicaţiei

$$w \longrightarrow R(u, w, v).$$

Din triliniaritatea lui R (tensorul de curbură), rezultă imdediat că Q este o aplicaţie biliniară. Fie acum $u \in T_xM$ un vector de lungime 1. Îl completăm, apoi, la o bază ortonormată $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = u\}$ a lui T_xM. Avem:

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{n} g\left(R(u, v_i, v), v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g\left(R(v, v_i, u), v_i\right) = Q(v, u),$$

adică Q este simetrică. Mai mult, se observă imediat că $Q(u, u) = (n-1)Ric_x(u)$. Prin urmare, aplicaţia $Ric_x(u)$ este definită în mod intrinsec.

Pe de altă parte, formei biliniare şi simetrice Q îi corespunde o aplicaţie liniară autoadjunctă K, dată de

$$g\left(K(u), v\right) = Q(u, v).$$

Dacă alegem o bază ortonormată $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avem

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} K &= \sum_{j=1}^{n} g\left(K(v_j), v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} Q(v_j, v_j) = \\ &= (n-1)\sum_{j=1}^{n} Ric_x(v_j) = n(n-1)K(x),\end{aligned}$$

prin urmare şi $K(x)$ este bine definită.

Uneori, forma biliniară $\frac{1}{n-1}Q$ se numeşte *tensor Ricci.*

Alegem acum un sistem de coordonate x^i în jurul punctului x. Fie $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ şi g^{ij} elementele inversei matricei tensorului metric. Atunci coeficienţii formei biliniare $\frac{1}{n-1}Q$ în baza $\{X_i\}$ sunt date de

$$\frac{1}{n-1}R_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} R_{ijk}^{j} = \frac{1}{n-1}R_{ijks}g^{sj}.$$

Observă, acum, că dacă $A : T_xM \longrightarrow T_xM$ este un operator liniar autoadjunct, iar $B : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ este forma biliniară asociată prin $B(u, v) = g\,(A(u), v)$, atunci urma lui A este egală cu $\sum_{i,k=1}^{n} B(X_i, X_k)g^{ik}$. Aşadar, curbura scalară este dată de

$$K(x) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,k=1}^{n} R_{ik}g^{ik}.$$

Încheiem această secţiune cu o lemă utilă mai târziu, a cărei demonsttraţie nu o vom prezenta aici (ea se reduce la un calcul foarte lung).:

Lema 12.1. *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ o suprafaţă parametrizată şi fie (s, t) coordonate în $\mathbb{R}^2$. Fie $V(s, t)$ un câmp de vectori de-a lungul lui f. Atunci:*

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} = -R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}, V\right). \tag{12.24}$$

12.6 Câmpuri Jacobi

Fie M o varietate riemanniană şi fie $x \in M$. După cum s-a văzut la lema lui Gauss, dacă $\exp_x$ este definită în $v \in T_xM$ şi dacă $w \in T_v(T_xM)$, atunci

$$(d\exp_x)_v(w) = \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0),$$

unde f este suprafaţa parametrizată dată de

$$f(t, s) = \exp_x tv(s), \quad t \in [0, 1], s \in [-\epsilon, \epsilon],$$

iar $v(s)$ este o curbă în T_xM cu $v(0) = v, v'(0) = w$.

Vrem să obţinem informaţii despre $\left|(d\exp_x)_v(w)\right|$, care, intuitiv, exprimă rata de deviere a geodezicelor $t \longrightarrow \exp_x tv(s)$ care plează din x.

Vom studia, într-un cadru ceva mai general, câmpul

$$(d\exp_x)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0),$$

de-a lungul geodezicei $\gamma(t) = \exp_x(tv),\ t \in [0, 1]$.

Vom arăta că $\frac{\partial f}{\partial s}$ satisface o ecuaţie diferenţială de un tip special. Remarcăm mai întâi că, deoarece γ este o geodezică, avem, pentru orice pereche (t, s), $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ (geodezicele sunt curbe autoparalele). Pe de altă parte, din lema 12.1,

$$0 = \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} -$$
$$- R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Dacă punem $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = J(t)$, rezultă că J verifică ecuaţia

$$\frac{D^2 J}{dt^2} - R\left(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)\right) = 0. \tag{12.25}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia lui Jacobi.*

Definiţie. Fie $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ o geodezică Un câmp de vectori J de-a lungul lui γ se numeşte *câmp Jacobi* dacă verifică ecuaţia Jacobi (12.25) pentru orice $t \in [0,1]$.

Un câmp Jacobi este determinat de condiţiile iniţiale $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$. Într-adevăr, fie $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ câmpuri paralele şi ortonormate de-a lungul lui γ. Vom scrie:

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i(t), \quad a_{ij} = g\left(R(\gamma'(t, e_i(t, \gamma'(t)), e_j(t)\right),$$
$$i, j = 1, \ldots, n = \dim M.$$

Atunci

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} f_i''(t) e_i(t),$$

şi

$$R(\gamma', J, \gamma') = \sum_{j=1}^{n} g\left(R(\gamma', J, \gamma'), e_j\right) e_j =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} f_i g\left(R(\gamma', e_i, \gamma'), e_j\right) e_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_i a_{ij} e_j.$$

Prin urmare, ecuaţia (12.25) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i(t) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

care e un sistem liniar de ordinul al doilea, deci soluţia sa este unic determinată dacă se dau valorile iniţiale. Pentru fiecare alegere a condiţiilor iniţiale $J(0)$ şi $\frac{DJ}{dt}(0)$ există câte un câmp Jacobi definit pe un interval $[0,a]$, deci, în total, avem $2n$ câmpuri Jacobi liniar independente de-a lungul lui γ.

Observaţie. $\gamma'(t)$ şi $t\gamma'(t)$ verifică ecuaţia lui Jacobi, deci sunt câmpuri Jacobi.

Exemplul 12.6.1 (Câmpuri Jacobi pe varietăţi de curbură constantă). Fie M o varietate riemanniană de curbură secţională constantă K şi fie $\gamma : [0,\ell] \longrightarrow M$ o geodezică parametrizată natural. Fie J un câmp Jacobi de-a lungul lui γ, ortogonal la γ'. Afirmăm că

$$R(\gamma', J, \gamma') = -KJ.$$

Într-adevăr, pentru orice câmp T de-a lungul lui γ avem

$$g\left(R(\gamma', J, \gamma'), T\right) = -K\{\underbrace{(\gamma;, \gamma')}_{=1} g(J,T) - g(\gamma', T)\underbrace{g(J, \gamma')}_{=0}\} =$$
$$= -Kg(J,T),$$

de unde rezultă afirmaţia făcută. Prin urmare, ecuaţia Jacobi devine, în acest caz:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0. \tag{12.26}$$

Fie $w(t)$ un câmp paralel de-a lungul lui γ, cu $g(\gamma', w) = 0$ şi $\|w(t)\| = 1$. Atunci se verifică imediat că

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t\sqrt{K}}{\sqrt{K}} w(t), & \text{dacă } K > 0 \\ t w(t), & \text{dacă } K = 0 \\ \dfrac{\sinh(t\sqrt{-K}}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{dacă } K < 0 \end{cases}$$

este o soluţie a ecuaţiei (12.26) cu condiţiile iniţiale $J(0) = 0$ şi $\frac{DJ}{dt}(0) = w(0)$.

Am văzut că, dacă se dă $x \in M$, $v \in T_x M$ şi $w \in T_v(T)xM)$, putem construi un câmp Jacobi de-a lungul geodezicei $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, dată de $\gamma(t) = \exp_x tv$. Pentru aceasta, considerăm suprafaţa parametrizată dată de $f(t,s) = \exp_x tv(s)$, unde $v(s)$ este o curbă în $T_x M$ cu $v(0) = v$, $v'(0) = w$, şi punem $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$. Pentru acest câmp, $J(0) = 0$.

Vom arăta că, de fapt, acesta este singurul mod de a construi câmpuri Jacobi cu $J(0) = 0$ de-a lungul unei geodezice.

Propoziţia 12.6.1. *Fie $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ o geodezică şi J un câmp Jacobi de-a lungul geodezicei, cu proprietatea că $J(0) = 0$. Punem $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ şi $\gamma'(0) = v$. Considerăm w ca un element al spaţiului $T_{av}\left(T_{\gamma(0)}M\right)$ şi construim o curbă $v = v(s)$ în $T_{\gamma(0)}M$ cu $v(0) = av$, $v'(0) = w$. Punem $f(t,s) = \exp_x\left(\frac{t}{a}v(s)\right)$, unde $x = \gamma(0)$, şi definim un câmp Jacobi $\overline{J}$ prin $\overline{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$. Atunci $\overline{J} = J$ pe intervalul* $[0,a]$.

Demonstraţie. Pentru $s = 0$ avem

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{D}{dt}\left((d\exp_x)_{tv}(tw)\right) = \frac{D}{dt}\left(t(d\exp_x)_{tv}(w)\right) = \\ &= (d\exp_x)_{tv}(w) + t\frac{D}{dt}\left((d\exp_x)_{tv}(w)\right). \end{aligned}$$

De aceea, pentru $t = 0$, avem:

$$\frac{D\overline{J}}{dt}(0) = \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = (d\exp_x)_0(w) = w,$$

unde am ţinut cont de faptul că diferenţiala aplicaţiei $\exp_x$ în 0_x este aplicaţia identică. Deoarece $J(0) = \overline{J}(0) = 0$ şi $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\overline{J}}{dt}(0) = w$, din teorema de unicitate a soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea (mai precis ale unei probleme Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea), rezultă că $J = \overline{J}$. ∎

Corolarul 12.1. *Fie $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ o geodezică. Atunci un câmp Jacobi J de-a lungul lui γ cu $J(0) = 0$ este dat de*

$$J(t) = (d\exp_x)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0,a].$$

De multe ori suntem interesaţi nu atât în câmpul Jacobi în sine, cât în modulul său, întrucât acesta este cel care ne dă mărimea devierii geodezice. Următoarea propoziţie arată cum anume se poate exprima aceast modul în funcţie de curbura varietăţii riemanniene în cauză:

Propoziţia 12.6.2. *Fie $x \in M$ şi $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ o geodezică pentru care $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$. Fie $w \in T_v(T_x M)$, $\|w\| = 1$ şi J un câmp Jacobi de-a lungul lui γ dat de*

$$J(t) = (d \exp_x)_{tv}(tw), \quad 0 \leq t \leq a.$$

Atunci dezvoltarea Taylor a lui $\|J(t)\|^2$ în jurul lui $t = 0$ este dată de

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{2} g(R(v, w, v), w)t^4 + R(t), \tag{12.27}$$

unde $\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{R(t)}{t^4} = 0$.

Demonstraţie. Avem, în mod evident, $\|J(t)\|^2 = g(J(t), J(t))$. Deoarece $J(0) = 0$ şi $J'(0) = w$, primiii trei coeficienţi ai dezvoltării Taylor vor fi:

$$\begin{aligned}
&g(J, J) = g(0, 0) = 0,\\
&[g(J, J)]'(0) = 2g(J, J')(0) = 2g(0, w) = 0,\\
&[g(J, J)]''(0) = 2g(J', J')(0) + 2\underbrace{g(J'', J)(0)}_{=0} = 2g(w, w) =\\
&= 2\|w\|^2 = 2.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, deoarece din ecuaţia lui Jacobi avem

$$J'' = R(\gamma'(0), \underbrace{J(0)}_{=0}, \gamma'(0)) = 0,$$

rezultă că

$$[g(J, J)]'''(0) = 6g(J', J'')(0) + 2g(J''', J)(0) = 0.$$

Afirmăm acum că are loc următorul rezultat:

$$\nabla_{\gamma'} \left(R(\gamma', J, \gamma') \right)(0) = R(\gamma'(0), J'(0), \gamma'(0)). \tag{12.28}$$

Într-adevăr, pentru orice câmp de vectori W de-a lungul curbei γ avem

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{D}{dt}(R(\gamma', J, \gamma'), W\right) &= \frac{d}{dt} g(R(\gamma', W, \gamma'), J) -\\
- g(R(\gamma', J, \gamma'), W') &= g\left(\frac{D}{dt}(R(\gamma', W, \gamma'), J\right) +\\
+ g(R(\gamma', W, \gamma'), J') &= g(R(\gamma', J', \gamma'), W),
\end{aligned}$$

de unde, pentru $t = 0$, se obţine (12.28).

Acum, din (12.28) şi ecuaţia Jacobi, rezultă că

$$J'''(0) = R(\gamma'(0), J'(0), \gamma'(0)).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
[g(J, J)]^{(4)} &= 8g(J', J''')(0) + 6\underbrace{g(J'', J'')(0)}_{=0} + 2\underbrace{g(J^{(4)}, J)(0)}_{=0} =\\
&= 8g(J', J''')(0) = 8g(J', R(\gamma', J', \gamma'))(0) =\\
&= 8g(R(v, w, v), w).
\end{aligned}$$

Aşadar, dezvoltarea Taylor a lui $\|J(t)\|^2$ este dată de

$$\begin{aligned}\|J(t)\|^2 &= g(J,J)(0) + [g(J,J)]'(0)t + \frac{1}{2!}[g(J,J)]''(0)t^2 + \\ &+ \frac{1}{3!}[g(J,J)]'''(0)t^3 + \frac{1}{4!}[g(J,J)]^{(4)}(0)t^4 + R(t) = \\ &= 0 + t^2 + 0 + \frac{1}{3}g(R(v,w,v),w) + R(t).\end{aligned}$$

■

Următorul corolar ne arată cum putem lega pătratul normei unui câmp Jacobi de curbura secţională a unei varietăţi riemanniene într-o direcţie bidimensională.

Corolarul 12.2. *Dacă $\gamma : [0,\ell] \longrightarrow M$ din propoziţia precedentă este o geodezică parametrizată prin lungimea arcului, iar $g(v,w) = 0$, atunci $g(R(v,w,v),v) = -K(x,\sigma)$, unde σ este 2-planul din T_xM generat de v şi w, prin urmare*

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(x,\sigma)t^4 + R(t). \tag{12.29}$$

Mai mult, extrăgând radicalul din ambii membrii ai ecuaţiei (12.29) şi apoi devoltând în serie radicalul din membrul drept, se obţine

Corolarul 12.3. *În aceleaşi ipoteze ca şi în corolarul precedent,*

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(x,\sigma)t^3 + \widetilde{T}(t), \tag{12.30}$$

unde $\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\widetilde{R}(t)}{t^3} = 0$.

Observaţie. Formula (12.30) ne oferă o interpretare geometrică a semnului curburii secţionale. Într-adevăr, să considerăm suprafaţa parametrizată

$$f(t,s) = \exp_x tv(s), \quad t \in [0,\delta], \quad s \in (-\varepsilon,\varepsilon),$$

unde δ este suficient de mic pentru ca $\exp_x$ să fie definită, iar $v(s)$ este o curbă în T_xM, cu $\|v(s)\| = 1$, $v(0) = v$, $v'(0) = w$. Se observă că semidreptele $t \longrightarrow tv(s)$, $t \in (0,\delta]$ care pleacă din x deviază faţă de semidreapta $t \longrightarrow tv(0)$ cu viteza

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial s}tv(s)\right)(0)\right\| = \|tw\| = t.$$

Pe de altă parte, (12.30) arată că geodezica $t \longrightarrow \exp_x(tv(s))$ deviază faţă de geodezica $\gamma(t) = \exp_x(tv(0))$ cu o viteză ce diferă de t printr-un termen de ordinul al treilea în t, $-\frac{1}{6}K(x,\sigma)t^3$. Dacă $K > 0$, devierea este mai mică de t, altfel este mai mare. Remarcăm că această “refocalizare” sau “divergenţă” a geodezicelor este, în general, un fenomen local, deoarec dezvoltarea Taylor pe care am utilizat-o pentru studiul devierii geodezicelor este valabilă doar local, în majoritatea cazurilor.

12.7 Puncte conjugate

Noţiunea de *puncte conjugate* de-a lungul unei geodezice este strâns legată de devierea geodezicelor şi de câmpurile Jacobi, un punct conjugat cu un punct dat fiind un punct în care geodezicele vecine ce pleacă din primul punct refocalizează.

Definiţie. Fie $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ o geodezică. Se spune că un punct $\gamma(t_0)$ este **conjugat** cu $\gamma(t_0)$ de-a lungul lui γ, unde $t_0 \in (0, a]$, dacă există un câmp Jacobi neidentic nul de-a lungul lui γ astfel încât $J(0) = J(t_0) = 0$. Numărul maxim de câmpuri Jacobi de acest tip liniar independente se numeşte **multiplicitatea** lui $\gamma(t_0)$.

Observaţii. 1. Relaţia de conjugare este simetrică: dacă $\gamma(0)$ este conjugat cu $\gamma(0)$ de-a lungul geodezicei γ, atunci şi invers este adevărat, doar că geodezica γ şe înlocuieşte cu geodezica $\gamma_1 : [0, a] \longrightarrow M$, $\gamma_1(t) = \gamma(a - t)$.

2. Există cel mult $n = \dim M$ câmpuri Jacobi linear independente pe M.

3. Deoarece câmpul Jacobi $J(t) = t\gamma'(t)$ nu se anulează decât pentru $t = 0$, rezultă că multiplicitatea unui punct conjugat este cel mulrt egală cu $n - 1$.

Exemplul 12.7.1. Admitem, pe moment, că sfera S^n are curbură constantă egală cu 1. $J(t) = \sin t \cdot w(t)$ verifică relaţia $J(t) = J(\pi) = 0$, deci punctele antipodale (diametral opuse) ale unei sfere sunt conjugate de-a lungul oricărei geodezice ce trece prin ele (toate geodezicele sunt cercuri mari de pe sferă).

Definiţie. Mulţimea tuturor punctelor conjugate cu un punct $x \in M$ pentru toate geodezicele ce trec prin x se numeşte **locul conjugat** al lui x şi se notează cu $C(x)$.

Exemple. *1. Pe sfera S^n, $C(x) = \{-x\}$, pentru orice $x \in S^n$.*

2. În $\mathbb{R}^n$, $C(x) = \emptyset$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Următoarea propoziţie exprimă legătura care xistă între punctele conjugate de-a lungul uei geodezice şi punctele critice ale aplicaţiei exponenţiale.

Propoziţia 12.7.1. *Fie $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ o geodezică. Punem $x = \gamma(0)$. Atunci punctul $y = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$, este conjugat cu x de-a lungul lui γ dacă şi numai dacă vectorul $v_0 = t_0\gamma'(0)$ este punct critic pentru $\exp_x$. În plus, multiplicitatea lui y, ca punct conjugat cu x, este egală cu dimensiunea nucleului aplicaţiei liniare $(d \exp_x)_{v_0}$.*

Demonstraţie. Punctul $y = y(t_0)$ este conjugat cu x de-a lungul lui γ dacă şi numai dacă există un câmp Jacobi nenul J de-a lugul lui γ cu $J(0) = J(t_0) = 0$. Fie $v = \gamma'(t_0)$ şi $w = J'(0)$. Deoarece $J(0) = 0$, conform corolarului 12.1, $J(t) = d(\exp_x)_{tv}(w)$, $t \in [0, a]$. J este neidentic nul, prin urmare, dacă şi numai dacă $w \neq 0$. Aşadar, $y = \gamma(t_0)$ este conjugat cu x de-a lungul lui γ dacă şi numai dacă

$$0 = J(t_0) = (d \exp_x)_{t_0 v}(t_0 w), \quad w \neq 0.$$

Multiplicitatea lui y este egală cu numărul de câmpuri Jacobi liniar independente de-a lungul lui γ ce se anulează în 0 şi t_0 Se poate verifica cu uşurinţă că $J_1, \ldots, J_k$ sunt liniar independente de-a lungul lui γ dacă şi numai dacă $J_1'(0), \ldots, J_k'(0)$ sunt vectori liniar independenţi în $T_x M$. De aici rezultă cea de-a doua afirmaţie a propoziţiei. ■

12.8 Proprietăţi suplimentare ale câmpurilor Jacobi

Propoziţia 12.8.1. *Fie J un câmp Jacobi de-a lungul geodezicei $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$. Atunci*

$$g(J(t), \gamma'(t)) = g(J'(0), \gamma'(0)) \cdot t + g(J(0), \gamma'(0)), \; t \in [0, a].$$

Demonstraţie. Din ecuaţia lui Jacobi obţinem că

$$[g(J', \gamma')]' = g(J'', \gamma') = g(R(\gamma', J, \gamma'), gamma') = 0.$$

Prin urmare, $g(J', \gamma') = g(J'(0), \gamma'(0))$. În plus,

$$[g(J, \gamma')]' = g(J', \gamma') = g(J'(0), \gamma'(0)).$$

Integrând ultima ecuaţie, obţinem relaţia cerută. ■

Corolarul 12.4. *Dacă* $g(J, \gamma')(t_1) = g(J, \gamma')(t_2)$*, cu* $t_1, t_2 \in [0, a]$*,* $t_1 \neq t_2$*, atunci* $g(J, \gamma')$ *nu depinde de* t*. În particular, dacă* $J(0) = J(a) = 0$*, atunci* $g(J, \gamma')(t) \equiv 0$*.*

Corolarul 12.5. *Presupunem că* $J(0) = 0$*. Atunci* $g(J'(0), \gamma'(0)) = 0$ *dacă şi numai dacă* $g(J, \gamma')(t) \equiv 0$*. În particular, spaţiul câmpurilo Jacobi* J *cu* $J(0) = 0$ *şi* $g(J, \gamma')(t) \equiv 0$ *este de dimensiune* $n - 1$*.*

Propoziţia 12.8.2. *Fie* $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ *o geodezică. Fie* $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$ *şi* $V_2 \in T_{\gamma(a)}M$*. Dacă* $\gamma(a)$ *nu este conjugat cu* $\gamma(0)$*, atunci există un singur câmp Jacobi de-a lungul lui* γ *astfel încât* $J(0) = V_1$ *şi* $J(a) = V_2$*.*

CAPITOLUL 13

Subvarietăţi riemanniene

13.1 Introducere

În acest capitol ne vom ocupa de anumite generalizări ale suprafeţelor din spaţiul euclidian tridimensional, *subvarietăţile riemanniene*, care sunt, pur şi simplu, subvarietăţi ale unei varietăţi riemanniene, înzestrate cu metrica indusă. Strict vorbind, majoritatea rezultatelor din acest capitol se pot extinde fără dificultăţi majore la cazul *imersiilor izometrice*. Am decis să ne restrângem la subvarietăţi riemanniene mai mult din motive tehnice, pentru a putea formula cu mai multă uşurinţă rezultatele. Cititorul interesat poate găsi tratarea generală în cartea lui do Carmo [**?**].

13.2 Câmpuri de vectori tangenţi şi normali

Ne amintim că în geometria diferenţială a suprafeţelor din spaţiul euclidian am considerat, în fiecare punct al suprafeţei, câte un reper al spaţiului vectorial al vectorilor legaţi din $\mathbb{R}^3$, cu originea în acel punct. Doi dintre vectorii utilizaţi erau, întotdeauna, tangenţi la suprafaţă, în timp ce a la treilea era normalla suprafaţă. Având la dispoziţie acum limbajul varietăţilor diferenţiabile, putem spune că ceea ce se făcea acolo era o descompunere a spaţiului tangent la $\mathbb{R}^3$ într-un punct al suprafeţei într-o sumă directă a spaţiului tangent la suprafaţă (care este un subspaţiu al spaţiului tangent la $\mathbb{R}^3$) şi un subspaţiu 1-dimensional, normal la suprafaţă (adică, în fond, complementul ortogonal al spaţiului tangent).

Vom face acum o construcţie analoagă în cazul subvarietăţilor riemanniene. Desigur, spaţiul tangent la subvarietate nu va mai fi, neapărat, de dimensiune 2, iar subspaţiul ortogonal nu va mai fi, neapărat, de dimensiune 1, ca în cazul suprafeţelor. Începem cu câteva definiţii, ca să putem introduce totul pe o bază riguroasă.

Definiţie. Fie N şi P două varietăţi diferenţiabile şi $F : N \longrightarrow P$ oaplicaţie diferenţiabilă. Se numeşte *câmp vectorial neted pe P, de-a lungul lui F*, orice aplicaţie $Z : N \longrightarrow TP$ astfel încât $\pi \circ Z = F$, unde $\pi : TP \longrightarrow P$ este proiecţia fibratului tangent la P:

$$\begin{tikzcd} & TP \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, "Z"] \arrow[r, "F"] & P \end{tikzcd}$$

Astfel, practic, F este o lege care asociază fiecărui punct $x \in N$ un vector tangent $Z(x) \in T_{F(x)}P$, adică un fel de “câmp vectorial” pe $F(N)$. Remarcăm, totuşi, că $F(N)$ nu este, de regulă, o submulţime deschisă a lui P, de aceea, nu avem de-a face cu un câmp vectorial pe P în adevăratul sens al cuvântului. Notăm cu $\mathcal{X}(F)$ mulţimea tuturor câmpurilor vectoriale de-a lungullui F. Definind în mod evident (adică punctual) operaţiile de adunare şi înmulţire cu funcţii netede, nu e deloc greu de constatat că $\mathcal{X}(F)$ este un $C^\infty(N)$-modul.

Vom aplica această construcţie acum la un caz foarte particular. Fie $i : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ o scufundare a unei varietăţi de dimensiune n într-o varietate de dimensiune $k = n + m$. Pentru a simplifica exprimarea, vom presupune, fără a reduce generalitatea, că $M \subset \overline{M}$, iar i este scufundarea canonică (adică incluziunea). Asta înseamnă, în particular, că $i(M) = M$. Vom nota cu $\overline{\mathcal{X}}(M)$ mulţimea câmpurilor vectoriale de-a lungul lui i, definite ca mai sus, adică $\overline{\mathcal{X}}(M) = \mathcal{X}(i)$.

Remarcăm, înainte de toate, că $\overline{\mathcal{X}}(M)$ are multe elemente. De exemplu, pentru orice câmp vectorial pe $\overline{M}$, $Y \in \mathcal{X}(\overline{M})$, $Y|_M \in \overline{\mathcal{X}}(M)$. Într-adevăr, pentru orice $x \in M$, avem

$$(\pi \circ Y|_M)(x) = \pi(Y|_M(x)) = \pi(Y_x) = x = i(x),$$

adică $\pi \circ Y|_M = i$, ceea ce trebuia demonstrat.

Mai mult, se poate constata cu uşurinţă că modulul câmpurilor de vectori tangenţi la M, $\mathcal{X}(M)$, este u submodulal modulului câmpurilor vectoriale de-a lungul incluziunii, $\overline{\mathcal{X}}(M)$.

Să presupunem acum că $\overline{M}$ este înzestrată cu o metrică riemanniană $\overline{g}$ iar M este o subvarietate *riemanniană* a sa (adică este înzestrată cu metrica indusă de incluziune). Atunci, pentru fiecare $x \in M$, T_xM este un subspaţiu n-dimensional al spaţiului tangent în x la $\overline{M}$, $T_x\overline{M}$ şi avem următoarea descompunere ca sumă directă:

$$T_x\overline{M} = T_xM \oplus T_xM^\perp, \tag{13.1}$$

unde $T_xM^\perp$ este *complementul ortogonal* al lui T_xM în $T_x\overline{M}$:

$$T_xM^\perp = \left\{v \in T_x\overline{M} \mid \overline{g}_x(v, w) = 0, \forall w \in T_xM\right\}.$$

Descompunerea (13.1) dtermină două aplicaţii liniare (proiecţiile ortogonale):

$$\pi_T : T_x\overline{M} \to T_xM, \quad \pi_N : T_x\overline{M} \to T_xM^\perp,$$

pe care le vom numi, respectiv, *proiecţia tangentă* şi *proiecţia normală*.

Definiţie. Spunem că un câmp vectorial $Z \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ este *normal* la M dacă pentru fiecare punct $x \in M$ vectorul Z_x este normal, adică $Z_x \in T_xM^\perp$.

Vom nota cu $\mathcal{X}(M)^\perp$ mulţimea câmpurilor vectoriale normale din $\overline{\mathcal{X}}(M)$. Este uşor de văzut că este vorba de un submodul al lui $\overline{\mathcal{X}}(M)$.

Aplicaţiile π_T şi π_N induc, la rândul lor, nişte aplicaţii, notate la fel,

$$\pi_T : \overline{\mathcal{X}}(M) \to \mathcal{X}(M), \quad \pi_N : \overline{\mathcal{X}}(M) \to \mathcal{X}(M)^\perp,$$

definite prin

$$\pi_T(Z)(x) = \pi_T(Z_x),$$
$$\pi_N(Z)(x) = \pi_N(Z_x),$$

pentru orice $Z \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ şi orice $x \in M$. Este uşor de verificat că aceste două aplicaţii sunt $C^\infty(M)$-liniare, adică sunt morfisme de module. Prin urmare, orice câmp vectorial $Z \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ admite o scriere unică sub forma

$$Z = \pi_T(Z) + \pi_N(Z),$$

ceea ec înseamnă că avem o descompunere în sumă directă (de module de această dată!):

$$\overline{\mathcal{X}}(M) = \mathcal{X}(M) \oplus \mathcal{X}(M)^\perp. \tag{13.2}$$

13.3 Conexiunea indusă

Considerăm, ca şi în secţiunea precedentă, o varietate riemanniană $(\overline{M}, \overline{g})$ şi o subvarietate riemanniană (M, g) a sa. Ca să studiem legătura care există dintre geometria subvarietăţii şi cea a varietăţii, vrem să construim o lege de derivare a câmpurilor vecoriale (nu neapărat tangente), pe M, cu alte cuvinte a elementelor lui $\overline{\mathcal{X}}(M)$, în direcţii *tangente* la M. Un lucru perfect analog se face în cazul suprafeţelor din spaţiul euclidian, unde se defineşte a doua formă fundamentală a suprafeţei studiind variaţia versorului normalei la suprafaţă. Această variaţie indică *forma* suprafeţei, privită ca subvarietate riemanniană a spaţiului euclidian ambient. Această formă depinde de scufundarea aleasă, deşi peoprietăţile intrinseci ale suprafeţei nu depind.

Avem deja, în mod evident, două derivate covariante, $\overline{\nabla}$, conexiunea Levi-Civita a metricii $\overline{g}$, care acţionează asupra câmpurilor vectoriale pe $\overline{M}$, şi ∇, conexiunea Levi-Civita asociată metricii g, care acţionează doar asupra câmpurilor vectoriale *tangente* la M. Prin urmare, nici unul dintre aceşti operatori de derivare nu se poate aplica în mod direct unui câmp oarecare din $\overline{\mathcal{X}}(M)$.

Definim, prin urmare, o aplicaţie

$$\widetilde{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times \overline{\mathcal{X}}(M) \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}(M),$$

după cum urmează. Intenţionăm să utilizăm conexiunea $\overline{\nabla}$ pentru a defini $\widetilde{\nabla}$. Remarcăm, însă, că dacă $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $Y \in \overline{\mathcal{X}}(M)$, atunci $\overline{\nabla}_X Y$ nu are sens, întrucât $X, Y \notin \mathcal{X}(\overline{M})$. Procedăm, în consecinţă, în modul următor. Pentru fiecare $x \in M$, există o vecinătate deschisă $\overline{U}$ a lui x şi extensiile $\overline{X}$ şi $\overline{Y}$ ale lui X, respectiv Y, la nişte câmpuri vectoriale netede pe $\overline{U}$. Evident, aceste extensii nu sunt unice, dar deocamdată nu ne preocupăm de acest aspect. Are sens, acum, să calculăm derivata covariantă (pe $\overline{M}$) a lui $\overline{Y}$ în direcţia lui $\overline{X}$, $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$. Definim acum

$$\widetilde{\nabla}_X Y\big|_{\overline{U}\cap M} := \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\Big|_{\overline{U}\cap M}.$$

Lăsând x să varieze pe întregul M, se obţine, în acest mod, un câmp vectorial $\widetilde{\nabla}_X Y \in \overline{\mathcal{X}}(M)$. Problema, acum, este dacă acest câmp este bine definit, adică dacă el depinde sau nu de alegerea extensiilor câmpurilor X şi Y. Diferenţiabilitatea este clară, deoarece difereţiabilitatea este o proprietate locală şi câmpul $\overline{\nabla}_X Y$ este, prin construcţie, diferenţiabil în jurul fiecărui punct.

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că mulţimea deschisă $\overline{U}$ este domeniul unui sistem de coordonate $\left(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^{n+m}\right)$ pe $\overline{M}$. Presupunem că, relativ la acest sistem de coordonate, $\overline{Y}$ are descompunerea

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n+m} \overline{Y}^i \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i} \equiv \overline{Y}^i \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}.$$

Atunci

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{X}\left(\overline{Y}^i\right)\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i} + \overline{Y}^i \overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\right).$$

Pe de altă parte, într-un punct $y \in \overline{U} \cap M$, avem:

$$\overline{X}_y\left(\overline{Y}^i\right) = X_y\left(\overline{Y}^i\right) = X_y\left(\overline{Y}^i\Big|_{\overline{U}\cap M}\right),$$

în timp ce

$$\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\right)\right)(y)$$

depinde, după cum se ştie, numai de X_y, prin urmare restricţia lui $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ depinde doar de câmpurile X şi Y şi nu de extensiile lor, aşadar $\widetilde{\nabla}_X Y$ este un câmp vectorial pe M, bine definit. Remarcăm că, în general, acest câmp *nu* este tangent la M, nici măcar în cazul în care Y este şi el un câmp vectorial tangent.

Operatorul $\widetilde{\nabla}$, în ciuda numelui său (conexiune indusă), nu este, propriu-zis o conexiune, nici pe M, nic pe $\overline{M}$. Reamintim că o conexiune (operator de derivare covariantă), duce o pereche de câmpuri tangente la o varietate tot într-un câmp vectorial tangent la aceeaşi varietate. Ori, conexiunea indusă duce o pereche formată dintr-un câmp tangent la M şi un alt câmp pe M, nu neapărat tangent, tot într-un câmp pe M, de asemenea, nu neapărat tangent. Totuşi, conexiunea indusă are, în esenţă, toate proprietăţile conexiunii Levi-Civita (în raport cu metrica $\overline{g}$) dacă, fireşte, suntem atenţi cu ce fel de câmpuri vectoriale lucrăm. Avem, astfel, următoarea propoziţie:

Propoziţia 13.3.1. *Fie $\widetilde{\nabla}$ conexiunea indusă pe scufundarea $i : M \hookrightarrow \overline{M}$. Atunci,pentru orice câmpuri vectoriale $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $Z, W \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ şi orice funcţie $f \in C^\infty(M)$, avem:*

(1) $\widetilde{\nabla}_{X+Y} Z = \widetilde{\nabla}_X Z + \widetilde{\nabla}_Y Z$*;*

(2) $\widetilde{\nabla}_X (Z + W) = \widetilde{\nabla}_X Z + \widetilde{\nabla}_X W$*;*

(3) $\widetilde{\nabla}_{fX} Z = f \widetilde{\nabla}_X Z$*;*

(4) $\widetilde{\nabla}_X f W = (Xf)W + f \widetilde{\nabla}_X W$*;*

(5) $\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X = [X, Y]$*;*

(6) $X\overline{g}(Z, W) = \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_X Z, W\right) + \overline{g}\left(Z, \widetilde{\nabla}_X W\right)$*.*

Demonstraţie. Demonstraţia este aproape trivială. În jurul fiecărui punct $x \in M$ se consideră o vecinătate deschisă în $\overline{M}$, $\overline{U}$ şi se extind toate câmpurile vectoriale, precum şi funcţia f, la această vecinătate. Toate cele şases proprietăţi au loc, dacă se înlocuieşte conexiunea indusă cu conexiunea $\overline{\nabla}$, iar câmpurile vectoriale şi funcţia alese cu extensiile lor. Rezultatul dorit rezultă acum dacă se ţine cont de faptul că:

$$\left.\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\right)\right|_M = \widetilde{\nabla}_X Z, \quad \left.\overline{X}(\overline{f})\right|_M = X(f), \overline{g}(\overline{X}, \overline{Y})|_M = \overline{g}(X, Y) =$$
$$= g(X, Y), \quad [\overline{X}, \overline{Y}]|_M = [X, Y].$$

∎

Aşa cum am menţionat mai devreme, dacă X şi Y sunt două câmpuri vectoriale *tangente* la M, câmpul $\widetilde{\nabla}_X Y$ nu este, în general, un câmp vectorial tangent. El va avea, prin urmare, o componentă tangenţială şi o componentă normală, care sunt, în fapt, proiecţia tangenţială $\pi_T\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)$, respectiv proiecţia normală $\pi_N\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)$. Vom examina acum separat cele două componente ale conexiunii induse şi vom vedea care este semnificaţia lor geometrică.

Propoziţia 13.3.2. *Dacă M este o subvarietate riemanniană a lui $\overline{M}$, ∇ este conexiunea Levi-Civita pe M, în timp ce $\widetilde{\nabla}$ este conexiunea indusă, atunci, pentru orice $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ avem*

$$\nabla_X Y = \pi_T\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right).$$

Demonstraţie. Fie $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ şi $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ – extensiile lor locale pe o submulţime deschisă din $\overline{M}$. Utilizăm formula lui Koszul pentru metrica $\overline{g}$ şi conexiunea Levi-Civita asociată, $\overline{\nabla}$:

$$\begin{aligned}2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\right) &= \overline{X}\overline{g}\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right) + \overline{Y}\overline{g}\left(\overline{Z}, \overline{X}\right) - \overline{Z}\overline{g}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) - \\ &- \overline{g}\left(\overline{X}, [\overline{Y}, \overline{Z}]\right) + \overline{g}\left(\overline{Y}, [\overline{Z}, \overline{X}]\right) + \overline{g}\left(\overline{Z}, [\overline{X}, \overline{Y}]\right) \equiv \\ &\equiv F\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}\right).\end{aligned}$$

Dacă ne restrângem la M, avem

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, Z\right) = \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\right).$$

Pe de altă parte, din demonstraţia propoziţie precedente deducem imediat că

$$F\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}\right)\big|_M = F(X, Y, Z) = 2g\left(\nabla_X Y, Z\right),$$

aşadar

$$g\left(\nabla_X Y, Z\right) = \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\right) = g\left(\pi_T\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right), Z\right),$$

unde, pentru a scrie ultima ecuaţie, am utilizat faptul că Z este un câmp vectorial *tangent* la M. Cum g este nedegenerată, afirmaţia propoziţiei este adevărată. ■

Astfel, componenta tangenţială a conexiunii induse este chiar conexiunea Levi-Cività a metricii induse pe M. Partea normală, în schimb, ne va da informaţii despre modul în care variază direcţiile normale la varietatea M, deci ea joacă un rol similar celei de-a doua forme fundamentale a unei suprafeţe din spaţiul euclidian tridimensional. De aceea vom utiliza acelaşi nume pentru acest obiect. Avem următorul rezultat:

Propoziţia 13.3.3. *Aplicaţia $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}^{\perp}$, definită prin*

$$B(X, Y) = \pi_N\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

numită a doua formă fundamentală *a subvarietăţii riemanniene $M \hookrightarrow \overline{M}$, este o aplicaţie $C^\infty(M)$-biliniară, simetrică.*

Demonstraţie. Întrucât $\widetilde{\nabla}$ este $C^\infty(M)$-liniară în primul argument şi $\mathbb{R}$-liniară în cel de-al doilea argument, în timp ce proiecţia normală este $C^\infty(M)$-liniară, rezultă că şi B are aceleaşi proprietăţi. Vom demonstra acum că B este chiar $C^\infty(M)$-liniară şi în cel de-al doilea argument. Fie, astfel $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Atunci avem:

$$\begin{aligned} B(X, fY) =& \pi_N\left(\widetilde{\nabla}_X fY\right) = \pi_N\left((Xf)Y + f\widetilde{\nabla}_X Y\right) = \\ =& f\pi_N\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right) = fB(X, Y), \end{aligned}$$

unde, pentru a scrie penultima egalitate, am utilizat faptul că Y este un câmp vectorial tangent, deci nu are componentă normală.

A mai rămas de demonstrat simetria celei de-a doua forme fundamentale. Fie, prin urmare, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Avem

$$\begin{aligned} B(X, Y) - B(Y, X) &= \pi_N\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right) - \pi_N\left(\widetilde{\nabla}_Y X\right) = \\ &= \pi_N\left(\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X\right) = \pi_N\left([X, Y]\right) = 0, \end{aligned}$$

unde, fireşte, am utilizat faptul că paranteza Lie a două câmpuri tangente la M este tot un câmp tangent la M care,prin urmare, nu are componentă în direcţia normală. ■

Observaţie. Combinând rezultatele precedente, obţinem următoarea legătură dintre conexiunea indusă, conexiunea Levi-Cività a metricii induse şi cea de-a doua formă fundamentală:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{13.3}$$

Această relaţie se numeşte uneori *formula lui Gauss*.

Ce-a de-a doua formă fundamentală ne permite, de asemenea, stabilirea unei legături dintre tensorul de curbură al varietăţii $\overline{M}$ şi cel al varietăţii riemanniene M. Această relaţie (care constituie subiectul propoziţiei următoare) este o generalizare a ecuaţiilor lui Gauss, din cazul unei suprafeţe.

Propoziţia 13.3.4 (Ecuaţia lui Gauss)**.** *Fie M o subvarietate riemanniană a varietăţii riemanniene $\overline{M}$. Notăm cu R, respectiv $\overline{R}$, tensorii de curbură ai celor două varietăţi şi B a doua formă fundamentală a scufundării $M \hookrightarrow \overline{M}$. Atunci, pentru orice $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, are loc relaţia*

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{R}(X, Y)Z, W\right) = g(R(X, Y)Z, W) + \overline{g}(B(X, Z), B(Y, W)) - \\ - \overline{g}(B(X, W), B(Y, Z)). \end{aligned} \tag{13.4}$$

Demonstraţie. Remarcăm, înainte de toate, că aici $\overline{R}(X, Y, Z)$ se calculează alegând extensii locale oarecare ale câmpurilor X, Y, Z pe mulţimi deschise din $\overline{M}$, apoi restrângând reyultatul la M. Se poate verifica cu uşurinţă că $\overline{R}(X, Y, Z)$ calculat pe această cale nu depinde de alegerea extensiilor. În fapt, se obţine fără dificultate relaţia

$$\overline{R}(X, Y, Z) = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z. \tag{13.5}$$

Mai departe, este clar că, toate mărimile care intră în formule fiind multiliniare, este suficient să verificăm ecuaţia lui Gauss pe câmpuri de vectori dintr-o bază de coordonate. Se ştie că, dacă, de exemplu, X şi Y sunt astfel de câmpuri de vectori, atunci paranteza lor Lie se anulează. Vom face, în continuare, doar această ipoteză, anume că $[X, Y] = 0$. După cum am remarcat, ipoteza simplifică doar calculele, fără a afecta rezultatul. Avem, prin urmare:

$$\begin{aligned}
&\overline{g}\big(\overline{R}(X, Y)Z, W\big) = \overline{g}\big(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z, W\big) = \\
&= \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z, W\right) - \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z, W\right) = \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z, W\right) + \\
&+ \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_X B(Y, Z), W\right) - \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W\right) - \overline{g}\left(\widetilde{\nabla}_Y B(X, Z), W\right) = \\
&= \overline{g}\left(\nabla_X \nabla_Y Z, W\right) + \underbrace{\overline{g}\left(B\left(X, \nabla_Y Z\right), W\right)}_{=0} + X\underbrace{\overline{g}\left(B(Y, Z), W\right)}_{=0} - \\
&- \overline{g}\left(B(Y, Z), \widetilde{\nabla}_X W\right) - \overline{g}\left(\nabla_Y \nabla_X Z, W\right) - \underbrace{\overline{g}\left(B\left(Y, \nabla_X Z\right), W\right)}_{=0} - \\
&- Y\underbrace{\overline{g}\left(B(X, Z), W\right)}_{=0} + \overline{g}\left(B(X, Z), \widetilde{\nabla}_Y W\right) = \overline{g}\left(R(X, Y, Z), W\right) - \\
&- \underbrace{\overline{g}\left(B(Y, Z), \nabla_X W\right)}_{=0} - \overline{g}\left(B(Y, Z), B(X, W)\right) + \\
&+ \underbrace{\overline{g}\left(B(X, Z), \nabla_Y W\right)}_{=0} + \overline{g}\left(B(X, Z), B(Y, W)\right) = \\
&= g\left(R(X, Y, Z), W\right) - \overline{g}\left(B(Y, Z), B(X, W)\right) + \\
&+ \overline{g}\left(B(X, Z), B(Y, W)\right).
\end{aligned}$$

În demonstraţie am folosit (în repetate rânduri):

- faptul că B duce câmpuri tangente în câmpuri normale, ceea ce înseamnă că produsul scalar al unui astfel de câmp cu un câmp tangent este zero;
- formula lui Gauss (13.3);
- metricitatea conexiunii.

■

Formula lui Gauss este o formulă de natură tensorială, de aceea ea este valabilă şi dacă înlocuim câmpurile vectoriale cu vectori într-un punct (şi, fireşte, metrica – cu metrica spaţiului tangent corespunzător). În particular, ea ne permite să stabilimo legătură dintre curbura secţională într-un punct a lui M şi cea a lui $\overline{M}$ În acelaşi punct. Fie, prin urmare, $x \in M$ şi u, v – doi vectori liniar independenţi în $T_x M$. Notăm cu K, respectiv $\overline{K}$ curbura secţională a lui M, respectiv cea a lui $\overline{M}$. Avem, atunci următoarea formulă, care se numeşte tot ecuaţia lui Gauss.

Corolarul 13.1. *Curbura secţională a lui M şi cea a lui $\overline{M}$ în punctul $x \in M$ în direcţia planului generat de vectorii u şi v în $T_x M$ sunt legate prin relaţia:*

$$K(u, v) = \overline{K}(u, v) + \frac{\overline{g}(B(u, u), B(v, v)) - \overline{g}(B(u, v), B(u, v))}{g(u, u)g(v, v) - (g(u, v))^2}. \tag{13.6}$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned}
\overline{K}(u,v) &= -\frac{\overline{g}\left(\overline{R}(u,v,u),v\right)}{\overline{g}(u,u)\overline{g}(v,v)-(\overline{g}(u,v))^2} = \\
&= -\frac{g\left(\overline{R}(u,v,u),v\right)}{g(u,u)g(v,v)-(g(u,v))^2} = -\frac{g\left(R(u,v,u),v\right)}{g(u,u)g(v,v)-(g(u,v))^2} - \\
&- \frac{\overline{g}\left(B(u,u),B(v,v)\right)-\overline{g}\left(B(u,v),B(u,v)\right)}{g(u,u)g(v,v)-(g(u,v))^2} = \\
&= K(u,v) - \frac{\overline{g}\left(B(u,u),B(v,v)\right)-\overline{g}\left(B(u,v),B(u,v)\right)}{g(u,u)g(v,v)-(g(u,v))^2},
\end{aligned}$$

de unde rezultă formula din enunţul corolarului. ■

Exemplul 13.3.1. Ca o aplicaţie elementară a corolarului precedent, vom calcula curbura secţională a sferei n-dimensionale de rază r ($n \geq 2$), privită ca subvarietate riemanniană a spaţiului Euclidian $n+1$-dimensional, $\mathbb{R}^{n+1}$.

Notăm cu D conexiunea canonică pe $\mathbb{R}^{n+1}$ (care este, de fapt, conexiunea Levi-Cività asociată metricii euclidiene). În cazul sferei, în fiecare punct există o singură direcţie normală şi, după cum se ştie din geometria euclidiană, ea este direcţia dacă de $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Dacă X este un câmp vectorial neted oarecare pe $\mathbb{R}^{n+1}$, atunci derivata câmpului normal P în direcţia acestui câmp vectorial este

$$D_X P = \sum_{i=1}^{n+1} X(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n+1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv X.$$

Afirmăm că cea de-a doua formă fundamentală a sferei este dată de

$$B(X,Y) = -\frac{1}{r}\langle X,Y\rangle \mathbf{U}, \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(S^n(r)),$$

unde $\mathbf{U} = \frac{1}{r}P$ este versorul normalei exterioare la sferă,iar prin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ am notat metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^{n+1}$.

Într-adevăr, după cum am văzut. $B(X,Y) = \pi_N(D_X Y)$. Dar

$$\begin{aligned}
\pi_N(D_X Y) &= \langle D_X Y, \mathbf{U}\rangle \mathbf{U} = \frac{1}{r}\langle D_X Y, P\rangle \mathbf{U} = \\
&= \left(X \underbrace{\langle Y, P\rangle}_{=0} - \frac{1}{r}\langle Y, D_X P\rangle = \right) \mathbf{U} = -\frac{1}{r}\langle X,Y\rangle \mathbf{U}.
\end{aligned}$$

Avem acum tot ce ne trebuie pentru a calcula curbura secţională a sferei într-un punct oarecare şi într-o direcţie bidimensională oarecare. Fie, deci $x \in S^n(r)$ şi $u,v \in T_x S^n(r)$ doi vectori necoliniari. După cum am văzut atunci când am vorbit despre curbura secţională, se poate presupune că ei sunt de lungime 1 şi sunt perpendiculari. Curbura secţională $\overline{K}(u,v)$ a spaţiului euclidian este, după cum se ştie, egală cu zero, de aceea formula (13.6) devine

$$\begin{aligned}
K(u,v) &= \langle B(u,u), B(v,v)\rangle - \langle B(u,v), B(v,v)\rangle = \\
&= \left\langle -\frac{1}{r}\langle u,u\rangle \mathbf{U}, -\frac{1}{r}\langle v,v\rangle \mathbf{U}\right\rangle = \frac{1}{r^2},
\end{aligned}$$

adică am regăsit, pe o cale foarte simplă, rezultatul deja cunoscut că sfera n-dimensională de rază r este o varietate de curbură constantă, egală cu $1/r^2$.

13.4 Geodezice pe subvarietăţi

O problemă naturală pe care trebuie să ne-o punem este care este legătura dintre geodezicele unei varietăţi riemanniene şi geodezicele unei subvarietăţi riemanniene a sa. În mod evident, dacă o curbă este geodezică pe varietate,a tunci ea este geodezică şi pe subvarietate. Invers, însă, de regulă, nu este adevărat. Este suficient să ne gândim la un exemplu foarte simplu, cel al sferei din $\mathbb{R}^3$. Geodezicele sferei, după cum se ştie, sunt arcele de cerc mare de pe sferă şi, în mod clar, ele nu sunt geodezice şi în spaţiul euclidian ambient. Mai mult, nici o curbă de pe sferă nu este geodezică în spaţiul ambient (ale cărui geodezice sunt, fireşte, dreptele şi numai ele).

Vom prezenta, în această secţiune, condiţiile în care o curbă pe o subvarietate riemanniană este o geodezică pe acea subvarietate.

Înainte de toate, formula lui Gauss se poate aplica fără dificultăţi la derivata covariantă de-a lungul unei curbe. Avem, prin urmare, următoarea propoziţie:

Propoziţia 13.4.1. *Fie $\gamma : I \longrightarrow M$ o curbă netedă pe subvarietatea riemanniană $M \hookrightarrow \overline{M}$ şi Y un câmp vectorial tangent la M, de-a lungul curbei γ. Atunci*

$$\frac{\widetilde{D}Y}{dt} = \frac{DY}{dt} + B\left(\frac{d\gamma}{dt}, Y\right), \tag{13.7}$$

unde $\widetilde{D}/dt$ este derivata covariantă indusă, iar D/dt este derivata covariantă determinată de metrica pe g, ambele de-a lungul curbei γ.

Aplicând această propoziţie pentru cazul paticular în care $Y = \frac{d\gamma}{dt}$, obţinem:

Corolarul 13.2.

CAPITOLUL 14

Teorema Gauss-Bonnet

Teorema lui Gauss şi Bonnet leagă două dintre mărimile fundamentale ale unei suprafeţe: **curbura totală**, care este o construcţie *metrică* şi **caracteristica Euler**, care este o construcţie *topologică*. Teorema Gauss-Bonnet afirmă, în esenţă, că, pentru o suprafaţă compactă, integrala pe suprafaţă din curbura totală este egală cu 2π înmulţit cu caracteristica Euler a suprafeţei. Consecinţa, oarecum surprinzătoare a teoremei este, deci că topologia suprafeţei impune restricţii asupra curburii metricilor ce se pot defini pe acea suprafaţă.

14.1 Integrarea unei funcţii pe o varietate riemanniană

Teoria integrării se poate construi pe varietăţi mult mai generale decât varietăţile riemanniene, tot ceea ce se cere acestor varietăţi este să fie orientabile. Pe de altă parte, se pot integra şi alte obiecte, în afară de funcţii definite pe varietate. Nu vom, dezvolta, totuşi, în această secţiune decât exact partea din teoria integrării de care avem nevoie în formularea şi demonstrarea teoremei Gauss-Bonnet.

Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $f \in C^\infty(M)$ o funcţie cu suport compact.

Presupunem, mai întâi, că $\operatorname{supp} f \subset U$, unde (U, φ) este o hartă pe M, $\varphi : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$. Fie $\{g_{ij}\}$ matricea componentelor metricii relativ la această hartă, iar $\mathcal{G} = \det\{g_{ij}\}$.

Definiţie. Spunem că funcţia f este *integrabilă* (în sens Riemann sau Lebesgue) dacă funcţia

$$\left(f \circ \varphi^{-1}\right) \sqrt{\mathcal{G} \circ \varphi^{-1}} : U' \longrightarrow \mathbb{R} \tag{14.1}$$

este integrabilă (Riemann sau Lebesgue) pe U' şi punem

$$\int_M f = \int_{U'} \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \sqrt{\mathcal{G} \circ \varphi^{-1}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x^1, \dots, x^n) \sqrt{\mathcal{G}(x^1, \dots x^n)} dx^1 \dots dx^n. \tag{14.2}$$

Propoziţia 14.1.1. *Definţia 14.1 este corectă, în sensul că nici definiţia integrabilităţii nici cea a integralei nu depind de alegerea hărţii* (U, φ).

Demonstraţie. Fie (V, ψ) o altă hartă pe M, cu coordonatele y, astfel încât $\operatorname{supp} f \subset V$. Notăm cu $\{\widetilde{g}_{ij}\}$ componentele lui g în harta V şi $\widetilde{\mathcal{G}} = \det\{\widetilde{g}_{ij}\}$. Atunci

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \det\left\{g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right\} = \det\left\{g\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right\} = \det\left\{\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right\} =$$
$$= \det\left\{\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right\}^2 \det\left\{g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right\} = \det\left\{\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right\}^2 \mathcal{G} = \det\left(D(\varphi\circ\psi^{-1})\right)^2 \mathcal{G}.$$

Dacă exprimăm acum integrala, după formula (14.2), dar în harta (V, ψ), obţinem

$$\begin{aligned}\int_{V'}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\sqrt{\widetilde{\mathcal{G}}\circ\psi^{-1}} &= \int_{V'}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\left|\det\left(D\left(\varphi\circ\psi^{-1}\right)\right)\right|\sqrt{\mathcal{G}\circ\psi^{-1}} = \\ &= \int_{U'}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\sqrt{\mathcal{G}\circ\varphi^{-1}}.\end{aligned} \tag{14.3}$$

Se observă, deci, că un integrand este integrabil dacă şi numai dacă celălalt este integrabil, iar valorile celor două integrale sunt aceleaşi, în ambele hărţi. ■

În cazul general, suportul funcţiei f nu va fi inclus în domeniul unei hărţi. Supportul fiind compact, el poate fi acoperit cu o familie finită de domenii de hărţi, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, unde $|I| < \aleph_0$. Alegem acum o partiţie diferenţiabilă a unităţii $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$, subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Definiţie. Funcţia f este integrabilă dacă şi numai dacă funcţiile $f\cdot\phi_\alpha$ sunt integrabile pentru orice $\alpha\in I$, iar integrala ei se defineşte prin

$$\int_M f = \sum_{\alpha\in I}\int_M f\cdot\phi_\alpha = \sum_{\alpha\in I}\int_{U'_\alpha}\left((f\cdot\phi_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)\sqrt{\mathcal{G}\circ\varphi_\alpha^{-1}}, \tag{14.4}$$

unde integralele din membrul drept sunt bine definite, deoarece suportul funcţiei $f\cdot\phi_\alpha$ este conţinut în U_α[1].

Propoziţia 14.1.2. *Definiţia 14.1 nu depinde nici de alegerea acoperirii lui* supp f*, nici de partiţia unităţii subordonată acestei acoperiri.*

Demonstraţie. Fie $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ o altă acoperire finită a lui supp f şi $\{\psi_\beta\}_{\beta\in J}$ o altă partiţie a unităţii subordonată acestei acoperiri. Conform definiţiei 14.1, pentru fiecare $\alpha\in I$, funcţia $f\cdot\phi_\alpha$ este integrabilă dacă şi numai dacă $f\cdot\phi_\alpha\cdot\psi_\beta$ pentru orice $\beta\in J$, iar

$$\int_M f\cdot\phi_\alpha = \sum_{\beta\in J}\int_M f\phi_\alpha\psi_\beta.$$

Prin urmare, $f\cdot\phi_\alpha$ este integrabilă pentru orice $\alpha\in I$ dacă şi numai dacă $f\cdot\phi_\alpha\psi_\beta$ este integrabilă pentru orice $\alpha\in I, \beta\in J$ şi, prin simetrie, dacă şi numai dacă $f\cdot\psi_\beta$ este integrabilă pentru orice $\beta\in J$. În acest caz,

$$\sum_{\alpha\in I}\int_M f\phi_\alpha = \sum_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}\int_M f\phi_\alpha\psi_\beta = \sum_{\beta\in J} f\psi_\beta,$$

deci, într-adevăr, formula (14.4) este bine definită. ■

[1]În relaţia (14.4) $U'_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$.

14.2 Domenii poligonale pe o suprafaţă

Definiţie. Fie M o varietate bidimensională (suprafaţă). Se numeşte **domeniu poligonal** $P \subset M$ o submulţime compactă şi conexă a cărei frontieră este alcătuită dintr-un număr finit de segmente de geodezică ce nu se autointersectează (nu au puncte duble).

Ca şi în cazul domeniilor poligonale plane, un domeniu poligonal pe o suprafaţă se poate descompune în domenii mai simple, numite **triunghiuri geodezice mici**, definite după cum urmează. Fie $W \subset M$ şi $\epsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x, x' \in W$ să existe o singură geodezică minimală de lungime mai mică decât ϵ şi, în plus, pentru orice $x \in W$, există o vecinătate normală a lui x de rază ϵ.

Definiţie. Fie W ca mai sus şi $\Sigma \subset W$ o submulţime.

1. Σ este **geodezic convexă** dacă oricare ar fi $x, x' \in \Sigma$, arcul de geodezică minimală care uneşte x cu x' este conţinut în Σ.
2. O submulţime $\Sigma \subset W$ se numeşte **triunghi geodezic mic** cu vârfurile în x_1, x_2, x_3 dacă
   (a) Σ este geodezic convexă şi conţine x_1, x_2, x_3.
   (b) Dacă $\Sigma' \subset W$ este geodezic convexă şi conţine x_1, x_2, x_3, atunci $\Sigma \subset \Sigma'$.
   (c) x_1, x_2, x_3 nu se află pe o aceeaşi geodezică.

Vrem să arătăm acum că pe o suprafaţă există triunghiuri geodezice mici. În acest scop, alegem $x_1 \in W$ să fie un punct arbitrar al suprafeţei, iar $x_2, x_3 \in W$ le alegem astfel încât să fie satisfăcute următoarele două condiţii:

(I) geodezica minimală γ_1 ce uneşte x_2 cu x_3 este conţinutăîn întregime în $W \setminus x_1$ şi nu face parte dintr-o geodezică radială (cu alte cuvinte, geodezica minimală ce uneşte x_1 cu x_2 nu conţine punctul x_3, iar cea care uneşte x_1 cu x_3 nu conţine x_2.

(II) orice geodezică ce uneşte x_1 cu un punct de pe γ_1 este inclusă în întregime în W.

Observaţie. Dacă x_2 şi x_3 se aleg suficient de apropiate de punctul x_1, atunci cele două coniţii de mai sus sunt verificate dacă x_1, x_2, x_3 nu se află pe aceeaşi geodezică. Într-adevăr, fie U_{x_1} o vecinătate normală a lui x_1 de rază $\delta < \epsilon$. Alegem punctele x_2 şi x_3 la istanţe mai mici de $\frac{\delta}{4}$ faţă de x_1. Atunci $d(x_2, x_3) < \frac{\delta}{2}$ şi orice punct de pe geodezica minimală γ_1 este situat la o distanţă mai mică de $\frac{3}{4}\delta$ faţă de x_1, deci se află în U_{x_1}.

Propoziţia 14.2.1. *Fie W şi $\epsilon > 0$ ca mai sus şi $x_1, x_2, x_3 \in W$ trei puncte care satisfac cerinţele (I) şi (II) de mai sus. Fie Σ mulţimea tururor geodezicelor minimale ce unesc x_1 cu segmentul de geodezică minimală γ_1 ce uneşte x_2 cu x_3. Atunci Σ este un triunghi geodezic mic cu vârfurile în x_1, x_2, x_3. Invers, fiecare triunghi geodezic mic conţinut în W este o reuniune de geodezice minimale ce unesc un vârf cu latura opusă. Mai mult, Σ este un domeniu poligonal mărginit de cele trei geodezice minimale ce unesc vârfurile între ele.*

Demonstraţie. Fie $\Sigma \subset W$ construit ca mai sus, punctele (I) şi (II). Vom arăta că Σ este un triunghi geodezic mic cu vârfurile în x_1, x_2, x_3.

Remarcăm, înainte de toate, că Σ este un domeniu poligonal delimitat de geoddezicele minimale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ce unesc x_2 şi x_3, x_1 şi x_3, respectiv x_1 şi x_2. Într-adevăr, fiecare geodezică ce pleacă din x_1 intersectează γ_1 exact o dată astfel că imaginea inversă a a lui Σ prin aplicaţia exponenţială $\exp_{x_1}$ este o submulţime compactă în $T_{x_1}M$, mărginită de două segmente de dreaptă şi de o curbă.

Arătăm acum că Σ este geodezic convexă. În acest scop, fie y şi y' două puncte din Σ şi ω geodezica minimală ce le uneşte. Presupunem că ω nu este inclusă în Σ. Atunci un segment al lui ω va uni două puncte de pe frontieră, iar, în rest, va fi situat în întregime în afara lui Σ. Putem presupune deci că y şi y' se află pe γ_1, γ_2 sau γ_3, iar ω este în întregime în afara lui Σ, cu excepţia capetelor.

Cazul 1. $y, y' \in \gamma_1$. Atunci, în mod clar, ω face parte din γ_1, ceea ce este o contradicţie.

Cazul 2. $y \in \gamma_1, y' \in \gamma_2$. Înlocuim x_2 cu y şi atunci ne situăm în cazul 3 de mai jos.

Cazul 3. $y \in \gamma_3, y' \in \gamma_2$. Este suficient să arătăm că ω rămâne în aceeaşi componentă unghiulară ca şi γ_1. Într-adevăr, ω nu poate intersecta γ_1, pentru că în acest caz ω ar fi o parte a lui γ_2 sau γ_3 sau am obţine noi puncte de intersecţie cu γ_1, ca în cazul 1.

ω poate sta doar în două componente unghiulare şi, dacă y' este apropiat de x_3, iar x este apropiat de x_2, atunci această componentă unghiulară trebuie să fie cea a lui γ_1. Prin urmare, prin continuitate, acestă componentă trebuie să fie chiar cea care conţine γ_1 pentru orice y şi y'. Prin urmare, Σ este convexă. De asemenea, se poate observa uşor că Σ verifică şi condiţia b) din definiţia 14.2, 2.

Invers, dacă se dă un triunghi geodezic mic $\Sigma \subset W$ cu vârfurile x_1, x_2, x_3, atunci, din cauza convexităţii, laturile $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sunt şi ele incluse în Σ. ÎN plus, mulţimea Σ' care conţine toate geodezicele minimale ce unesc x_1 cu punctele de pe Γ_1 este, de asemenea, inclusă în $\Sigma \subset W$ şi verifică, în mod clar, (I) şi (II). Pe de altă parte, tocmai am arătat că mulţimea Σ' este geodezic convexă. Prin urmare, din definiţia 14.2 2. b) rezultă că $\Sigma' \supset \Sigma$ deci, în cele din urmă, $\Sigma' = \Sigma$, ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei. ■

Propoziţia 14.2.2. *Orice domeniu poligonal $P \subset M$ poate fi triangulat în triunghiuri geodezice mici, adică există un număr finit de triunghiuri geodezice mici $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, astfel încât*

1. $P = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$.
2. *Orice două triunghiuri se intersectează cel mult după o latură comună sau într-un vârf comun.*

Demonstraţie. Conform propoziţiei 14.2.1, orice punct interior $y \in P$ are o vecinătate conţinută în interiorul unui triunghi geodezic. Într-adevăr, alegem $W \subset W$ o vecinătate a lui y ca în definiţia 14.2. Fie $x_1 \in W$, $x_1 \neq y$ un punct oarecare şi x' un punct opus lui x_1 în rapot cu y (în sensul că toate trei se găsesc pe o aceeaşi geodezică, iar y este între x_1 şi x'). Atunci pentru orice geodezică γ prin x', diferită de geodezica x_1x' şi pentru orice alegere a punctelor x_2, x_3, suficient de apropiate de p' şi pe laturi opuse, punctele x_1, x_2, x_3 vor determina un triunghi geodezic ce conţine punctul y în interior.

Mai departe, pentru orice punct y de pe frontieră avem o vecinătate de una din formele din figură:

Rezultă din compactitate că putem acoperi P cu un număr finit de triunghiuri geodezice astfel încât

1. interioarele lor acoperă interiorul lui P;
2. frontierele acoperă frontiera lui P.

Dacă două triunghiuri Σ_1 şi Σ_2 se intersectează, putem submpărţi reuniunea lor $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ în triunghiuri mai mici, utilizând toate vârfurile noi necesare, pntru a obţine o triangulare. Adăugând câte un triunghi, în cele din urmă vom obţine triangularea dorită. ■

Suntem gata acum să formulăm o primă formă a teoremei Gauss-Bonnet, obţinută de către Gauss pentru triunghiuri geodezice mici.

Teorema 14.1 (Gauss)**.** *Fie Σ un triunghi geodezic mic cu vârfurile A, B, C şi laturile opuse α, β, γ, respectiv. Fie $\angle A, \angle B, \angle C$ unghiurile dintre geodezicele (γ, β), (γ, α) şi (α, β) respectiv. Fie K funcţia de curbură. Atunci*

$$\int_{\Sigma} K = \angle A + \angle B + \angle C - \pi. \tag{14.5}$$

Aici $\int\limits_{\Sigma} K = \int\limits_{M} 1_{\Sigma} \cdot K$, unde 1_{Σ} este funcţia caracteristică a lui Σ,

$$1_{\Sigma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \notin \Sigma \\ 1 & \text{dacă } x \in \Sigma \end{cases}.$$

Unghiul dintre două geodezice este tocmai unghiul dintre tangentele lor din spaţiul tangent în punctul de intersecţie.

14.3 Coordonate geodezice polare

Pentru demonstrarea teoremei lui Gauss vom utiliza un sistem de coordonate particular, introdus tot de către Gauss, în care expresia curburii totale a suprafeţei ia o formă foarte simplă. Aceste coordonate, numite *coordonate geodezice polare*, sunt o generalizare naturală a coordonatelor polare ce se utilizează în plan.

Fie $x \in M$ şi alegem în T_xM o bază ortonormată $\{e_1, e_2\}$. Într-o vecinătate normală $U \subset M$, centrată în x, de rază ρ, coordonatele geodezice polare (r, θ), cu $0 < r < \rho$, iar θ într-un interval de lungime mai mică de 2π, se definesc prin relaţia

$$y = \exp_x(r(y)(\cos\theta(y)e_1 + \sin\theta(y)e_2)), \quad y \in U \setminus \{x\}. \tag{14.6}$$

Din lema lui Gauss rezultă că cele două câmpuri de vectori de coordonate, $\frac{\partial}{\partial r}$ şi $\frac{\partial}{\partial\theta}$ sunt ortogonale şi, deoarece pentru fiecare θ, aplicaţia

$$r \longrightarrow \exp_x(r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) \tag{14.7}$$

descrie o geodezică normalizată (adică parametrizată natural), rezultă că $\frac{\partial}{\partial r}$ are lungimea 1, prin urmare metrica g a suprafeţei (prima formă fundamentală) este dată în coordonatele (r, θ) de către matricea $\{g_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$:

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = G, \tag{14.8}$$

unde $G = g\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) > 0$, iar matricea inversă $\{g^{ij}\}$ are componentele

$$g^{11} = 1,\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = 1/G. \tag{14.9}$$

Coeficienţii lui Christoffel de speţa a doua se obţin imediat:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0 \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\theta}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Atunci

Propoziţia 14.3.1 (Gauss)**.** *Fie M o suprafaţă pe care s-a ales un sistem de coordonate geodezice polare (r, θ), iar metrica este dată de (14.8). Atunci curbura secţională a suprafeţei M este funcţia K dată de*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\left(\sqrt{G}\right)}{\partial r^2}. \tag{14.11}$$

Demonstraţie. Deoarece în fiecare punct $\frac{\partial}{\partial r}$ şi $\frac{\partial}{\partial\theta}$ generează spaţiul tangent, curbura secţională este dată de

$$K = \frac{-g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial r}\right), \frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{vmatrix}} = \frac{g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{G} = \frac{R_{1212}}{G},$$

unde

$$R_{1212} = g_{1i} R^i_{212} = g_{11} R^1_{212} = R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial \theta} + \Gamma^i_{22}\Gamma^1_{1i} - \Gamma^i_{12}\Gamma^1_{2i} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}\right) = -\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \frac{1}{4G}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^2\right) = -\sqrt{G}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\sqrt{G}\right),$$

ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei. ■

Componenta G a metricii nu este definită, iniţial, pentru $r = 0$. Următoarea lemă arată, totuşi, că ea se poate extinde, prin continuitate, şi în acest punct.

Lema 14.1. *1.* $\lim_{r \longrightarrow 0_+} \sqrt{G(r,\theta)} = 0$*, uniform în* θ.

2. $\lim_{r \longrightarrow 0_+} \frac{\partial \sqrt{G(r,\theta)}}{\partial r} = 0$*, uniform în* θ.

3. $\lim_{r \longrightarrow 0_+} \frac{\partial^2 \sqrt{G(r,\theta)}}{\partial r^2} = 0$*, uniform în* θ.

Demonstraţie. Fie $v = r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2 \in T_x M$. Atunci, în punctul de coordonate (r,θ), $\sqrt{G}(r,\theta)$ este lungimea vectorului

$$(\exp_x)_{*v}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \in T_{\exp_x(v)}(M),$$

unde, acum, (r,θ) sunt coordonate polare în $T_x M$. Deoarece $(\exp_x)_{*v}$ depinde continuu de $v \in T_x M$ şi deoarece $(\exp_x)_{*0} = \mathrm{id} : T_x M \longrightarrow T_x M$, obţinem, pentru un $\epsilon > 0$ dat că

$$\left|\left\|(\exp_x)_{*v}(u)\right\| - \|u\|\right| \leq \epsilon\|u\|, \quad \forall u \in T_x M, v \text{ apropiat de } 0. \tag{14.12}$$

Pentru

$$v = r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2,$$

obţinem

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -r\sin\theta e_1 + r\cos\theta e_2,$$

de unde, baza $\{e_1, e_2\}$ fiind ortonormată, rezultă că $\left\|\frac{\partial}{\partial\theta}\right\| = r$. Deci, din (14.12) pentru $u = \frac{\partial}{\partial\theta}$ rezultă că

$$\left|\sqrt{G}(r,\theta) - r\right| \leq \epsilon \cdot r, \tag{14.13}$$

pentru r apropiat de zero. Afirmaţia 1) din lemă rezultă, în mod evident, din relaţia (14.13). Pe de altă parte, din 14.11) rezultă că

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2} = -K\sqrt{G} \tag{14.14}$$

şi,deoarece K este continuă în zero (converge la K_x), rezultă şi afirmaţia 3) a lemei.

Mai departe, pentru $\delta_1 > \delta_2$ obţinem, din (14.14),

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(\delta_1,\theta) - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(\delta_2,\theta) = -\int_{\delta_2}^{\delta_1} K\sqrt{G}dr. \tag{14.15}$$

Dacă acum facem ca $\delta_2 \longrightarrow 0$, pentru un θ fixat, rezultă că limita

$$\lim_{r\longrightarrow 0} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r,\theta)$$

există, iar din (14.13) rezultă că această limită trebuie să fie egală cu 1. Aşadar, din (14.15) obţinem că pentru δ_1 mic şi θ arbitrar,

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(\delta_1,\theta) = 1 - \int_0^{\delta_1} K\sqrt{G}dr, \tag{14.16}$$

care converge uniform la 1, când $\delta_1 \longrightarrow 0$, ceea ce încheie demonstraţia lemei. ■

Vom vedea acum ce se întâmplă cu $\sqrt{G}$ de-a lungul unei geodezice α. În acest scop, parametrizăm α cu lungimea s a arcului şi notăm cu $\sigma(s)$ unghiul dintre α şi geodezica radială, adică unghiul dintre vectorii tangenţi $\frac{d\alpha}{ds}$ şi $\frac{\partial}{\partial r}$ în punctul $\alpha(s)$.

Deoarece o geodezică radială intersectează geodezica α numai o dată, rezultă că unghiul polar θ este o funcţie crescătoare de s, de-a lungul geodezicei α, astfel încât unghiul σ se poate exprima şi ca o funcţie de unghiul θ, de-a lungul lui α. Atunci avem

Lema 14.2. *De-a lungul geodezicei α avem:*

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial s}(\alpha(s)) = -\frac{d\sigma}{ds}\Big/\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d\sigma}{d\theta}$$

Demonstraţie. Dacă scriem ecuaţia geodezicei α în coordonate polare (r,θ), obţinem

$$\alpha(s) = \exp_x(r(s)\cos\theta(s)e_1 + r(s)\sin\theta(s)e_2).$$

Punem $\alpha^1(s) = r(s)$ şi $\alpha^2(s) = \theta(s)$. Aceste funcţii trebuie să verifice, după cum se ştie, sistemul de ecuaţii:

$$\frac{d^2\alpha^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{d\alpha^i}{ds}\frac{d\alpha^j}{ds} = 0. \tag{14.17}$$

Prima dintre aceste ecuaţii devine, ţinând cont de expresiile (14.10) ale coeficienţilor lui Christoffel:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2. \tag{14.18}$$

Unghiul $\sigma(s)$ este determinat de

$$\cos\sigma(s) = g\left(\frac{d\alpha}{ds}, \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{\alpha(s)}\right) = \frac{dr}{ds}, \tag{14.19}$$

deoarece ambii vectori sunt de lungime unitate. Derivând şi utilizând (14.18), obţinem

$$-\sin\sigma(s)\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2} == \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2. \tag{14.20}$$

Pe de altă parte, deoarece α este parametrizată natural, avem

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 G = 1,$$

astfel că, pe baza lui (14.19), obţinem

$$\sin^2\sigma(s) = 1 - \cos^2\sigma(s) = 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 G. \tag{14.21}$$

Deci, din (14.20), obţinem că

$$-\frac{d\theta}{ds}\cdot\sqrt{G}\cdot\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$

de unde

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial G}{\partial r}}{\sqrt{G}}\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\frac{d\theta}{ds}, \tag{14.22}$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei. ■

Demonstraţia teoremei 14.1. Presupunem, ca mai sus, că Σ este parametrizată cu coordonate polare (r,θ) în jurul punctului $x = A$ şi alegem o bază $\{e_1, e_2\}$ a lui T_AM astfel încât e_1 să fie vectorul tangent la γ. Atunci, pentru punctele din Σ, θ poate să varieze între 0 şi $\angle A$, iar, pentru un θ dat, r poate să varieze între 0 şi $r_\alpha(\theta)$, unde $(r_\alpha(\theta), \theta)$ sunt coordonatele polare ale singurului punct de pe geodezica α ce corespunde unghiului θ fixat. Din (14.1) şi propoziţia 14.3.1 obţinem că

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma K &= \int_0^{\angle A} d\theta \int_0^{r_\alpha(\theta)} K\sqrt{G}dr = -\int_0^{\angle A} d\theta \int_0^{r_\alpha(\theta)} K\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}dr \\
&= -\int_0^{\angle A}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r_\alpha(\theta),\theta) - 1\right)d\theta \qquad \text{(lema 14.1)} \\
&= \int_0^{\angle A}\left(\frac{d\sigma}{d\theta} + 1\right)d\theta \qquad \text{(lema 14.2)} \\
&= \angle A + \sigma(\angle A) - \sigma(0) = \angle A + \angle C - (\pi - \angle B) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.
\end{aligned}$$

■

Vrem să extindem acum teorema lui Gauss la domenii poligonale mai generale. Fie, deci, $P \subset M$ un domeniu poligonal oarecare. Frontiera ∂P constă dintr-un număr finit de curbe, care sunt geodezice frânte. Fiecare punct din mulţimea finită de puncte în care frontiera nu este netedă, $p_1, \ldots, p_l$ se numeşte *vârf* şi fiecăruia i se poate ataşa un *unghi interior* bine definit, $\beta_1, \ldots, \beta_l$, unde $0 < \beta_i < 2\pi$, $i = 1, \ldots, l$. Mărimile

$$\alpha_i = \pi - \beta_i, \qquad -\pi < \alpha_i < \pi, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{14.23}$$

se numesc *unghiuri exterioare*. În formularea teoremei Gauss-Bonnet mai avem nevoie de noţiunea de *caracteristică Euler* a lui P.

Definiţie. Fie $P \subset M$ un domeniu poligonal triangulat într-un număr finit de triunghiuri ca în propoziţia 14.2.2. Fie V numărul de vârfuri, E – numărul de laturi, T – numărul de triunghiuri din această triangulare. Atunci caracteristica Euler $\chi(P)$ este

$$\chi(P) = V - E + T.$$

Observaţie. Se ştie din topolocie că $\chi(P)$ este un invariant topologic, ce nu depinde de triangularea aleasă. În particular, dacă $P = M$ este o varietate bidimensională compactă şi orientabilă, atunci

$$\chi(M) = 2(1-g),$$

unde g este *genul* suprafeţei M[2].

Teorema 14.2. *Fie M o varietate riemanniană bidimensională, cu funcţia de curbură K. Fie $P \subset M$ un domeniu poligonal şi fie $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ unghiurile exterioare în vârfurile lui P. Atunci*

$$\int_P K = 2\pi\chi(P) - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i.$$

Vom demonstra mai întâi o lemă simplă:

Lema 14.3. *Fie $P \subset M$ un domeniu poligonal triangulat în triunghiurile geodezice mici $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$. Atunci pentru orice funcţie f integrabilă pe P,*

$$\int_P f = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Sigma_i} f.$$

Demonstraţie. Din formula (14.4) rezultăcă integrala $\int_M$ este o funcţională liniară pe spaţiul vectorial al funcţiilor integrabile. Funcţia

$$1_P \cdot f - \sum_{i=1}^{k} 1_{\Sigma_i} f \tag{14.24}$$

este zero dincolo de frontierele triunghiurilor Σ_i. Într-o vecinătate de coordonate frontierele triunghiurilor sunt mulţimi de măsură zero, astfel încât integrala funcţiei (14.24) este egală cu zero. Prin urmare,

$$\int_P = \int_M 1_P \cdot f = \sum_{i=1}^{k} \int_M 1_{\Sigma_i} f = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Sigma_i} f.$$

■

Demonstraţia teoremei 14.2. Alegem o triangulare a lui P ca în propoziţia 14.2.2. Fie $\Sigma_1, \dots, \Sigma_T$ triunghiurile geodezice mici din această triangulare şi $x_1, \dots, x_V$ toate vârfurile triangulării. Fie $x_1, \dots, x_m, m \leq V$ vârfurile de pe frontiera ∂P. Printre acestea se numără şi vârfurile $p_1, \dots, p_l$ ale lui ∂P (punctele în care frontiera nu este netedă), dar s-ar putea să mai fie şi altele. Pentru fiecare Σ_j, $j = 1, \dots, T$ notăm vârfurile sale cu A_j, B_j, C_j. Atunci, pe baza lemei 14.3 şi a teoremei 14.1 avem

$$\int_P K = \sum_{j=1}^{T} \int_{\Sigma_j} K = \sum_{j=1}^{T} (\angle A_j + \angle B_j + \angle C_j) - \pi T. \tag{14.25}$$

În această sumă, fiecare dintre vârfurile x_i, $i = 1, \dots, V$ poate să apară de mai multe ori, ca vârf în triunghiuri diferite.

[2]Se poate demonstra că orice suprafaţă compactă orientabilă (fără bord) se poate obţine "lipind" la o sferă un număr de "mânere". Genul suprafeţei este numărul acestor mânere. Astfel, pentru sferă genul este egal cu zero, în timp ce pentru tor, genul este egal cu unu.

Pentru fiecare vârf interior unghiurile ce apar în acest vârf trebuie să dea, în total, 2π, în timp ce pentru un vârf $x_i \in \partial P$, suma unghiurilor cu vârful în x_i trebuie să fie egală cu unghiul interior β_i din vârful x_i. Prin urmare,

$$\sum_{j=1}^{n}(\angle A_j + \angle B_j + \angle C_j) = \sum_{i=1}^{m}\beta_i + (V-m)2\pi = 2\pi V - \sum_{i=1}^{m}(\pi - \beta_i) - m\pi. \tag{14.26}$$

Deoarece frontiera este o curbă închisă netedă pe porţiun, numărul m este egal cu numărul laturilor triangulării care se află pe frontiera lui P. Atunci

$$3T = 2E - m, \tag{14.27}$$

după cum se poate evrifica cu multă uşurinţă. Dacă inserăm (14.27) în (14.26), obţinem

$$\sum_{j=1}^{t}(\angle A_j + \angle B_j + \angle C_j) = 2\pi V + 3T\pi - 2E\pi = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i, \tag{14.28}$$

unde $\alpha_i = \pi - \beta_i$ pentru fiecare x_i, $i = 1, \dots, m$.

Prin urmare, (14.25) se rduce la

$$\int_P K = 2\pi V + 2\pi T - 2\pi E - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 2\pi\chi(P) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i. \tag{14.29}$$

De remarcat că dacă x_i este un punct de pe frontieră în care frontiera este netedă, atunci $\alpha_i = 0$, deci (14.29) este chiar formula din enunţul teoremei 14.2. ■

Observaţie. Din formula Gauss-Bonnet rezultă că $\chi(P)$ nu depinde de triangulare (chiar dacă nu rezultă că este un invariant topologic, deci nu se schimbă la o deformare bicontinuă a suprafeţei).

Corolarul 14.1. *Dacă M este o varietate riemanniană bidimensională compactă şi fără bord, cu funcţia de curbură K, atunci*

$$\int_M K = 2\pi\chi(M).$$

Dacă M este, în plus, şi orientabilă, atunci

$$\int_M K = 4\pi(1-g),$$

unde g este genul lui M.

Definiţie. Dacă M este o varietate bidimensională, se numeşte *poligon* în M un domeniu poligonal omeomorf cu un disc.

Corolarul 14.2. *Presupunem că M are curbura constantă K şi fie $P \subset M$ un poligon cu vârfurile interioare $\beta_1, \dots, \beta_l$ în vârfurile $x_1, \dots, x_l \in \partial P$. Fie $A(P) = \int_P 1$ aria poligonului P. Atunci*

$$\sum_{j=1}^{l}\beta_j = (l-2)\pi + A(P)\cdot K.$$

Dacă, în particular, P este un triunghi cu vârfurile A, B, C, atunci

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + A(P)\cdot K.$$

Demonstraţie. Pentru un poligon, $\chi(P) = V - E + T = 1$, deci, ţinând cont de faptul că M are curbură constantă, formula Gauss-Bonnet devine, în mod evident,

$$A(P) \cdot K = 2\pi - \sum_{i=1}^{l}(\pi - \beta_i) = (2-l)\pi + \sum_{i=1}^{l}\beta_i,$$

de unde rezultă formula din enunţul corolarului. ■

Corolarul 14.3. *Să presupunem că M are funcţia de curbură K astfel încât $K \leq 0$. Atunci pe M nu poate exista un poligon cu două vârfuri.*

Demonstraţie. Dacă P este un poligon cu două vârfuri şi α_1, α_2 sunt unghiurile sale exterioare, atunci, din formula Gauss-Bonnet, cu $\chi(P) = 1$, obţinem

$$\int_P K = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2 > 0$$

ceea ce contrazice ipoteza $K \leq 0$. ■

CAPITOLUL 15

Subvarietăţi ale lui $\mathbb{R}^n$

Definiţie. Fie $T \subset \mathbb{R}^n$ o submulţime deschisă. O aplicaţie netedă $f : T \to \mathbb{R}^k$ se numeşte *imersie* dacă rangul matricei sale Jacobi,

$$J(f) := \frac{\partial\left(f^1, \dots, f^n\right)}{\partial\left(x^1, \dots, x^k\right)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \frac{\partial f^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^k} \end{pmatrix},$$

este egal cu k în fiecare punct al domeniului T.

Propoziţia 15.0.2. *Fie $\subset \mathbb{R}^k$ o submulţime deschisă şi $f : T \to \mathbb{R}^n$ – o imersie. Atunci fiecare punct $x \in T$ are o vecinătate deschisă $V \subset T$ astfel încât restricţia*

$$f|_V : V \to f(V)$$

să fie un omeomorfism, unde $f(V)$ este înzestrată cu structura de subspaţiu topologic a lui $\mathbb{R}^n$. Cu alte cuvinte $f|_V$ este o scufundare *a lui V în $\mathbb{R}^n$.*

Bibliografie

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., Raţiu, T.: *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1988

[2] Adams, J.F.: *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. **75** (1962), 603–632

[3] Alexander, J.W.: *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci. **10** (1924), 8–10

[4] Amann, H., Escher, J.: *Analysis*, I–III, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1998, 1999, 2001

[5] Auslander, L., MacKenzie, R.E.: *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, New York, 1963

[6] Barner, M., Flohr, F.: *Analysis II* (ediţia a III-a), Walter de Gruyter, Berlin, 1996

[7] Berger, M., Gostiaux, B.: *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1988

[8] Betti, E.: *Sopra gli spazi di un numero qualunque dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl., **2(4)** (1871), 140–158

[9] Bishop, R.L., Crittenden, R.J.: *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964

[10] Blaga, P.A.: *Lectures on Classical Differential Geometry*, Risoprint, Cluj Napoca, 2005

[11] Boothby, W.: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (ediţia a II-a), Academic Press, New York, 1985

[12] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya., Fomenko, T.: *Introduction to Topology*, Mir Publishers, Moskow, 1985

[13] Bourbaki, N.: *Variétés différentielles et analytiques, Fascicule des résultats*, Paris, 1967

[14] Boy, W.: *Über die Curvatura integra und die Topologie Geschlossener Flächen*, Math. Ann. **57** (1903), 151–184

[15] Brickell, F., Clark, R.S.: *Differentiable Manifolds: An Introduction*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970

[16] Brieskorn, E.: *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Inv. Math. **2** (1966), 1–14

[17] Bröcker, Th.: *Anaysis II*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992

[18] Bröcker, Th., Jänich: *Einfürung in die Differentialtopologie*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1973

[19] Brouwer, L.E.J.: *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl*, Math. Ann., **70** (1911), 161–165

[20] Burghelea, D., Hangan, Th., Moscovici, H.: *Introducere în topologia diferenţială*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1973

[21] Cantor, G.: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, J. Reine u. Angew. Math. **84** (1878), 242–252

[22] Chevalley, C.: *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946

[23] Conlon, L.: *Differentiable Manifolds* (ediţia a II-a), Birkhäuser, Basel-Boston, 2001

[24] Darling, R.W.R.: *Differential Forms and Connections*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[25] tom Dieck, T.: *Topologie*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1991

[26] Donaldson, S.: *An application of gauge theory to 4-dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 279–315

[27] Donaldson, S., Kronheimer, P.B.: *The Geometry of Four-Manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 1990

[28] Ehresmann, C.: *Sur les espaces fibré associés à une varieté différentiable*, C.R. Acad. Sci., **216** (1943), 628–630

[29] Enghiş, P., Ţarină, M.: *Curs de geometrie diferenţială*, Lito, Universitatea din Cluj-Napoca, 1985

[30] Engelking, R.: *General Topology*, Pańtstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1977

[31] Freedman, M.H.: The topology of 4-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. **17**(1982), 357–453

[32] Gheorghiev, Gh., Oproiu, V.: *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, vol. I, II, Editura Academiei, Bucureşti, 1976

[33] Gheorghiev, Gh., Oproiu, V.: *Geometrie diferenţială*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1977

[34] Guillemin, V., Pollack, A.: *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974

[35] Haefliger, A.: *Variétés (non séparés) à une dimension et structures feuilletées du plan*, Enseign. Math., **3** (1957), 107–125

[36] Haefliger, A.: *Plongements différentiables des variétés*, Comment. Math. Helv., **37** (1962), 155–176

[37] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces* (ediţia a II-a), Academic Press, New York, 1978

[38] Hicks, N.J.: *Notes on Differential Geometry*, D. Van Nostrand, New York, 1965

[39] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.: *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932

[40] Hirsch, M.: *Differential Topology*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976

[41] Hirzebruch, F.: *Singularities and exotic spheres*, Sém. Bourbaki **314** (1967)

[42] Ianuş, S.: *Geometrie diferenţială cu aplicaţii în teoria relativităţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1982

[43] Kelley, J.L.: *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955

[44] Kervaire, M.A.: *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comm. Math. Helv., **34** (1960), 257–270

[45] Klingenberg, W.: *A Course in Differential Geometry*, Springer, New York, 1978

[46] Kobayashi, N., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, Wiley Interscience, New York, 1963

[47] Krantz, S.G., Parks, H.R.: *The Implicit Function Theorem*, Birkhäuser, Boston, 2002

[48] Lang, S.: *Differential Manifolds*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972

[49] Lelong-Ferrand, J.: *Géométrie différentielle*, Masson, Paris, 1963

[50] Loomis, L., Sternberg, S.: *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968

[51] Malliavin, P.: *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann, Paris, 1972

[52] Matsushima, Y.: *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York, 1972

[53] Mikusiński, P., Taylor, M.D.: *An Introduction to Multivariate Analysis, from Vector to Manifold*, Birkhäuser, Boston, 2002

[54] Milnor, J.: *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math., **64**(1956), 399–405

[55] Milnor, J.: *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963

[56] Milnor, J.: *Topology from a Differentiable Viewpoint*, University of Virginia Press, 1965

[57] Mishchenko, A., Fomenko, A.: *A course of Differential Geometry and Topology*, Mir Publishers, Moskow, 1988

[58] Morse, A.P.: *The behavior of a function on its critical set*, Ann. of Math., **40** (1939), 62–70

[59] Munkres, J.R.: *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1966

[60] Munkres, J.R.: *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1991

[61] Narasimhan, R.: *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968

[62] Papuc, D.: *Geometrie diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[63] Pham, F.: *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés* (ediţia a II-a), Dunod, Paris, 1999

[64] Pham, Mau Quam: *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969

[65] Pontryagin, L.: *Topological Groups*, 2nd edition, Gordon and Breach, New York, 1966

[66] Postnikov, M.: *Lectures in Geometry*, Semester III, *Smooth Manifolds*, Mir Publishers, Moscow, 1989

[67] de Rham, G.: *Variétés différentiable, formes courantes, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1955

[68] Sandovici, P., Ţarină, M.: *Geometrie diferenţială*, Vol. I–II, Lito Universitatea "Babeş–Bolyai" Cluj, 1974

[69] Sard, A.: *The measure of the critical points of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **48** (1942), 883–890

[70] Schubert, H.: *Topologie* (ediţia a II-a), B.G. Teubner, Stuttgart, 1969

[71] Serre, J.-P.: *Lie Algebras and Lie Groups*, Benjamin, New York, 1966

[72] Singer, I.M., Thorpe, J.A.: *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman and Co., 1967

[73] Smale, S.: *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 387–399

[74] Spivak, M.: *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965

[75] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vols. I–V, Publish or Perish, Berkeley, 1979

[76] Sternberg, S.: *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964

[77] Stiefel, E.: *Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv., **8** (1936), 3–51

[78] Stoica, L.: *Elemente de varietăţi diferenţiabile*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1998

[79] Teleman, K.: *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964

[80] Urysohn, P.: *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann., **94** (1925), 262–295

[81] Veblen, O., Whitehead, J.H.C.: *The Foundations of Differential Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1932

[82] Wallace, A.: *Differentiable Topology*, Benjamin, New York, 1968

[83] Walter, R.: *Differentialgeometrie* (ediţia a II-a), Wissenschaftsverlag, Mannheim–Wien–Zürich, 1989

[84] Weyl, H.: *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig–Berlin, 1913

[85] Warner, F.W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1983

[86] Whitehead, J.H.C., Veblen, O.: *A set of axioms for differential geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. **17** (1931), 551–561

[87] Whitney, H.: *Differentiable Manifolds*, Ann. Math., **37** (1936), 645–680

aℝ