Coordonate baricentrice

Lect.dr. Mihai Chiş
Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea de Vest din Timişoara

1 Consideraţii teoretice şi exemple

1. Fie d o dreaptă, iar $O, U \in d$ două puncte fixate astfel încât $|OU| = 1$. Pentru orice punct $M \in d$ există atunci un unic număr $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{OM} = x \cdot \overline{OU}.$$

Numărul x se numeşte *abscisa*(sau *coordonata carteziană* a) punctului M în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R}_c = (O, \overline{OU})$, pentru care O se numeşte *originea reperului*, iar vectorul $\overline{OU}$ - *versorul* sau *vectorul-unitate*. Scriind $M(x)$, vom indica faptul că punctul M are abscisa x.
P. Pentru două puncte $M(x_M), N(x_N) \in d$ au loc relaţiile:

$$\overline{MN} = (x_N - x_M) \cdot \overline{OU} \quad \text{şi} \quad |MN| = |x_M - x_N|.$$

Dem. Avem(conform relaţiei lui Chasles) că:

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = x_N \cdot \overline{OU} - x_M \cdot \overline{OU} = (x_N - x_M) \cdot \overline{OU},$$

respectiv

$$|MN| = |Vert\overline{MN}\| = \|(x_N - x_M) \cdot \overline{OU}\| = |x_N - x_M| \cdot \|\overline{OU}\| = |x_M - x_N| \cdot |OU| = |x_M - x_N|.$$

2. Fie $A, B \in d$ două puncte distincte ale unei drepte d. Pentru orice punct $M \in d$ există atunci un număr unic $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{AM} = \beta\overline{AB}$.
P. Dacă $A, B, M \in d$ şi $\beta \in \mathbb{R}$ verifică egalitatea $\overline{AM} = \beta\overline{AB}$, atunci pentru orice punct $P \in d$ are loc egalitatea:

$$\overline{PM} = (1 - \beta) \cdot \overline{PA} + \beta \cdot \overline{PB},$$

sau, notând $\alpha = 1 - \beta$,

$$\overline{PM} = \alpha \cdot \overline{PA} + \beta \cdot \overline{PB}.$$

Dem.

$$\overline{PM} = \overline{PA} + \overline{AM} = \overline{PA} + \beta \cdot \overline{AB} = \overline{PA} + \beta \cdot (\overline{PB} - \overline{PA}) = (1 - \beta) \cdot \overline{PA} + \beta \cdot \overline{PB} = \alpha \cdot \overline{PA} + \beta \cdot \overline{PB}.$$

Obs. Proprietatea de mai sus are loc şi dacă $P \notin d$.
Obs. Cu notaţiile de mai sus, avem că $\overline{BM} = \alpha \cdot \overline{BA}$. Rezultă astfel că(dacă $M \neq B$, adică $\alpha \neq 0$):

$$\overline{AM} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \overline{MB}.$$

În particular,

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{|AM|}{|BM|} \quad , \text{ iar } sgn\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & , M \in (AB) \\ -1 & , M \notin [AB] \end{cases}$$

Not. Vom nota cu $(A, B|M)$ numărul real unic determinat cu proprietatea că $\overline{AM} = (A, B|M) \cdot \overline{MB}$, număr pe care îl numim *raportul simplu în care punctul M împarte segmentul orientat* $[AB]$.
Obs. Pentru doi vectori coliniari $\overline{u}, \overline{v}$, cu $\overline{v} \neq \overline{0}$, putem nota cu $\frac{\overline{u}}{\overline{v}}$ numărul α unic determinat cu proprietatea că $\overline{u} = \alpha \cdot \overline{v}$. Astfel, vom scrie uneori $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$ în loc de $(A, B|M)$.
Obs. Dacă $A, B, M \in d$ sunt distincte, atunci $(A, B|M) \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Convenind ca fiecare dreaptă d să aibă un *"punct la infinit"* ∞_d, vom avea:

$$\begin{array}{lcl} (A, B|M) \in (0, \infty) & \Longleftrightarrow & M \in (AB); \\ (A, B|M) \in (-1, 0) & \Longleftrightarrow & M \in d \setminus [AB; \\ (A, B|M) \in (-\infty, -1) & \Longleftrightarrow & M \in d \setminus [BA; \\ (A, B|M) = 0 & \Longleftrightarrow & M = A; \\ (A, B|M) = \infty & \Longleftrightarrow & M = B; \\ (A, B|M) = -1 & \Longleftrightarrow & M = \infty_d. \end{array}$$

Obs. Vom conveni ca pentru două drepte d_1 şi d_2 să avem

$$d_1 \parallel d_2 \Longleftrightarrow \infty_{d_1} = \infty_{d_2} \Longleftrightarrow d_1 \cap d_2 = \infty_{d_1}.$$

Def. Fie $A, B, M, N \in d$ puncte coliniare. Punctele M şi N se numesc
- *izotomice în raport cu* $[AB] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A, B|N) = \frac{1}{(A,B|M)}$;
- *conjugate armonic în raport cu* $A, B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A, B|N) = -(A, B|M)$.

Ex. 1) Două puncte M şi N sunt izotomice în raport cu $[AB]$ dacă şi numai dacă sunt simetrice în raport cu mijlocul segmentului $[AB]$.
2) Mijlocul segmentului $[AB]$ şi punctul la infinit al dreptei AB sunt conjugate armonic în raport cu A, B.
3) Dacă $\Delta\, ABC$ este un triunghi oarecare, punctele de intersecţie cu dreapta AB ale bisectoarelor interioară şi exterioară ale unghiului $\widehat{C}$ sunt conjugate armonic faţă de A, B.

P. Dacă $A, B, M, P_0 \in d$ sunt puncte ale unei drepte cu proprietatea că

$$\overline{P_0M} = \alpha \cdot \overline{P_0A} + \beta \cdot \overline{P_0B},$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha + \beta = 1$, atunci pentru orice $P \in d$ are loc

$$\overline{PM} = \alpha \cdot \overline{PA} + \beta \cdot \overline{PB}.$$

Dem.

$$\overline{PM} = \overline{PP_0} + \overline{P_0M} = (\alpha+\beta)\cdot\overline{PP_0} + \alpha\cdot\overline{P_0A} + \beta\cdot\overline{P_0B} = \alpha\cdot(\overline{PP_0} + \overline{P_0A}) + \beta\cdot(\overline{PP_0} + \overline{P_0B}) = \alpha\cdot\overline{PA} + \beta\cdot\overline{PB}.$$

Def. $A, B \in d$ fiind două puncte fixate ale unei drepte d, pentru un punct $M \in d$ numerele unic determinate $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\alpha+\beta = 1$ şi $\overline{PM} = \alpha\cdot\overline{PA}+\beta\cdot\overline{PB}$, pentru orice punct $P \in d$, se numesc *coordonatele baricentrice absolute*(sau *ponderile*) punctului M în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a = (A, B)$.
Ex. 1) Coordonatele baricentrice ale punctelor A şi B sunt $(1, 0)$, respectiv $(0, 1)$.
2) Coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$ sunt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3) Dacă $(A, B|M) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, coordonatele punctului M sunt $\left(\frac{1}{1+\alpha}, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$.
4) Dacă M are coordonatele (α, β), izotomicul punctului M are coordonatele (β, α).
Def. Dacă un punct M are ponderile (α, β), orice numere reale x, y cu proprietatea că $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$ se numesc *coordonate baricentrice omogene ale punctului M în raport cu* (A, B).
Ex. 1) Coordonatele omogene ale mijlocului segmentului $[AB]$ sunt $(1, 1)$.
2) Dacă M are coordonatele omogene (x, y), atunci izotomicul său are coordonatele omogene (y, x).
3) Dacă M are coordonatele omogene (x, y), atunci conjugatul său armonic are coordonatele $(x, -y)$.
4) Punctul de la infinit al dreptei AB are coordonatele omogene $(1, -1)$.
5) Dacă $(A, B|M) = \alpha$, coordonatele omogene ale punctului M sunt $(1, \alpha)$.
6) Dacă $M \in (AB)$, M are coordonatele omogene $(|BM|, |AM|)$.
7) În general, coordonatele omogene ale unui punct M sunt invers proporţionale cu segmentele orientate $\overline{AM}$, $\overline{MB}$.
Obs. $M(x_M)$ are ponderile (α, β) în raport cu $\mathcal{R}_a = (A, B)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha + \beta = 1$, dacă şi numai dacă $x_M = \alpha \cdot x_A + \beta \cdot x_B$.
Dem. $\overline{OM} = \alpha\cdot\overline{OA} + \beta\cdot\overline{OB} \Longleftrightarrow x_M\cdot\overline{OU} = \alpha\cdot x_A\cdot\overline{OU} + \beta\cdot x_B\cdot\overline{OU} \Longleftrightarrow x_M = \alpha\cdot x_A + \beta\cdot x_B$.

3. Fie $M(\alpha, \beta) \in d$ un punct având ponderile (α, β) în raport cu (A, B). Atunci $\overline{AM} = \beta\cdot\overline{AB}$, astfel că $AM^2 = \beta^2\cdot AB^2$, sau echivalent $|AM| = |\beta|\cdot|AB|$. Analog, $BM^2 = \alpha^2\cdot AB^2$, sau $|BM| = |\alpha|\cdot|AB|$.
Dacă $M(\alpha_1, \beta_1), N(\alpha_2, \beta_2) \in d$, atunci $\overline{MN} = \alpha_2\cdot\overline{MA} + \beta_2\cdot\overline{MB}$, astfel că

$$MN^2 = \alpha_2^2\cdot MA^2 + \beta_2^2\cdot MB^2 + 2\alpha_2\beta_2\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \alpha_2^2\cdot MA^2 + \beta_2^2\cdot MB^2 + \alpha_2\beta_2\cdot(MA^2 + MB^2 - AB^2) =$$

$$= \alpha_2\cdot MA^2 + \beta_2\cdot MB^2 - \alpha_2\beta_2\cdot AB^2 = \alpha_2\beta_1^2\cdot AB^2 + \beta_2\alpha_1^2\cdot AB^2 - \alpha_2\beta_2\cdot AB^2 =$$

$$= (\alpha_2\beta_1^2 + \beta_2\alpha_1^2 - \alpha_2\beta_2)\cdot AB^2 = (\alpha_2\beta_1(1-\alpha_1) + \beta_2\alpha_1(1-\beta_1) - \alpha_2\beta_2)\cdot AB^2 =$$

$$= (\alpha_2\beta_1 + \beta_2\alpha_1 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) \cdot AB^2 = -(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \cdot AB^2.$$

Obs. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$, $|MA| = |MB| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$, astfel că

$$MN^2 = \alpha_2 \cdot MA^2 + \beta_2 \cdot MB^2 - \alpha_2\beta_2 \cdot AB^2 = \left(\frac{1}{4} - \alpha_2\beta_2\right) \cdot AB^2.$$

Obs. Dacă $M(\alpha, \beta) \in d$, iar P este un punct oarecare(nu neapărat pe dreapta d), egalitatea

$$PM^2 = \alpha \cdot PA^2 + \beta \cdot PB^2 - \alpha\beta \cdot AB^2$$

reprezintă *relaţia lui Stewart.*

4. Fie A, B, C trei puncte necoliniare în planul $\mathcal{P}$, iar $M \in \mathcal{P}$ oarecare. Atunci există numere reale unice β, γ cu proprietatea că

$$\overline{AM} = \beta \cdot \overline{AB} + \gamma \cdot \overline{AC}\,.$$

Notând atunci $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, pentru orice punct $P \in \mathcal{P}$ are loc atunci egalitatea

$$\overline{PM} = \alpha \cdot \overline{PA} + \beta \cdot \overline{PB} + \gamma \cdot \overline{PC}. \quad (*)$$

Numerele α, β, γ reprezintă atunci *coordonatele baricentrice ale punctului M în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a = (A, B, C)$(sau triunghiul de referinţă $\Delta\, ABC$).*

Dacă triunghiul de referinţă $\Delta\, ABC$ este fixat, notăm prin $M(\alpha, \beta, \gamma)$ faptul că punctul M are coordonatele baricentrice (α, β, γ) în raport cu $\Delta\, ABC$. Ţinând cont de $(*)$, vom scrie în acest caz

$$M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C.$$

Obs. Similar cazului coordonatelor baricentrice pe o dreaptă, dacă un punct M are coordonatele baricentrice (α, β, γ) în raport cu un triunghi de referinţă, orice numere reale x, y, z cu proprietatea că $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ se numesc *coordonate baricentrice omogene.* Cunoscând pentru un punct coordonate omogene (x, y, z), coordonatele baricentrice absolute se obţin prin împărţire la suma $x + y + z$.

Obs. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}$ şi $M_a \in AM \cap BC$. Atunci

$$\overline{AM_a} = \beta' \cdot \overline{AB} + \gamma' \cdot \overline{AC}\,,$$

unde $\beta', \gamma' \in \mathbb{R}$ verifică relaţiile

$$\begin{array}{ll} \beta' + \gamma' = 1 & \text{(deoarece } M_a \in BC\text{);} \\ \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} & \text{(deoarece } M_a \in AM\text{).} \end{array}$$

Rezultă că (β', γ') reprezintă exact coordonatele baricentrice ale punctului $M_a \in BC$ în raport cu reperul (B, C), iar componentele β şi *gamma* ale coordonatelor baricentrice ale lui $M \in \mathcal{P}$ sunt direct proporţionale cu acestea. Obţinem atunci că

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\overline{M_aC}}{\overline{BM_a}}\,,$$

sau, echivalent

$$(B, C|M_a) = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Cor.(teorema lui Ceva) Dacă $M_a \in AM \cap BC$, $M_b \in BM \cap CA$ şi $M_c \in CM \cap AB$, atunci

$$(B, C|M_a) \cdot (C, A|M_b) \cdot (A, B|M_c) = 1.$$

5.

Def. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi de referinţă în plan, iar $M, N, P \in \mathcal{P}$ trei puncte distincte în plan. *Aria orientată(în raport cu orientarea dată de triunghiul de referinţă) a triunghiului $\Delta\, MNP$* este definită prin

$$\overline{\mathcal{A}[MNP]} = \begin{cases} \mathcal{A}[MNP] & \text{dacă } \Delta\, MNP \text{ are aceeaşi orientare ca } \Delta\, ABC \\ -\mathcal{A}[MNP] & \text{dacă } \Delta\, MNP \text{ are orientare contrară faţă de cea a } \Delta\, ABC, \end{cases}$$

aceeaşi orientare însemnând că vârfurile celor două triunghiuri sunt parcurse în acelaşi sens(trigonometric, sau respectiv al acelor de ceasornic).
Obs. Folosind produsul vectorial putem scrie

$$\overline{\mathcal{A}[MNP]} = \frac{\overline{MN} \times \overline{MP}}{\overline{AB} \times \overline{AC}} \cdot \mathcal{A}[ABC].$$

Obs. Pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$ are loc relaţia

$$\overline{\mathcal{A}[MBC]} + \overline{\mathcal{A}[MCA]} + \overline{\mathcal{A}[MAB]} = \overline{\mathcal{A}[ABC]}.$$

Obs. Pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$ avem că

$$\begin{array}{lll} \overline{\mathcal{A}[MBC]} > 0 & \Longleftrightarrow & M \in (BC, A (=\text{semiplanul deschis determinat de dreapta } BC \text{ şi punctul } A) \\ \overline{\mathcal{A}[MBC]} = 0 & \Longleftrightarrow & M \in BC \\ \overline{\mathcal{A}[MBC]} < 0 & \Longleftrightarrow & M \notin [BC, A \end{array}$$

Obs. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}$ şi $M_a \in AM \cap BC$. Atunci au loc egalităţile

$$\begin{array}{c} \overline{\mathcal{A}[MAB]} + \overline{\mathcal{A}[MBM_a]} = \overline{\mathcal{A}[ABM_a]}, \\ \overline{\mathcal{A}[MCA]} + \overline{\mathcal{A}[MM_aC]} = \overline{\mathcal{A}[AM_aC]}, \\ \frac{\overline{\mathcal{A}[MBM_a]}}{\overline{\mathcal{A}[MM_aC]}} = \frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\overline{\mathcal{A}[ABM_a]}}{\overline{\mathcal{A}[AM_aC]}}. \end{array}$$

Rezultă atunci că

$$\frac{\overline{\mathcal{A}[MAB]}}{\overline{\mathcal{A}[MCA]}} = \frac{\overline{\mathcal{A}[ABM_a]} - \overline{\mathcal{A}[MBM_a]}}{\overline{\mathcal{A}[AM_aC]} - \overline{\mathcal{A}[MM_aC]}} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Deducem atunci(prin analogie) că

$$\frac{\alpha}{\overline{\mathcal{A}[MBC]}} = \frac{\beta}{\overline{\mathcal{A}[MCA]}} = \frac{\gamma}{\overline{\mathcal{A}[MAB]}} = \frac{1}{\overline{\mathcal{A}[ABC]}},$$

astfel că pentru coordonatele baricentrice absolute ale unui punct M avem atunci formulele de calcul

$$\alpha = \frac{\overline{\mathcal{A}[MBC]}}{\overline{\mathcal{A}[ABC]}}, \quad \beta = \frac{\overline{\mathcal{A}[MCA]}}{\overline{\mathcal{A}[ABC]}}, \quad \gamma = \frac{\overline{\mathcal{A}[MAB]}}{\overline{\mathcal{A}[ABC]}}.$$

Obs. Dacă $M_a \in AM \cap BC$, $M_b \in BM \cap CA$ şi $M_c \in CM \cap AB$, atunci

$$\alpha = \frac{\overline{MM_a}}{\overline{AM_a}}, \quad \beta = \frac{\overline{MM_b}}{\overline{BM_b}}, \quad \gamma = \frac{\overline{MM_c}}{\overline{CM_c}}.$$

Obs. Notând pentru un punct $M(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}$, cu $\overline{d_a}$ distanţa orientată de la punctul M la dreapta BC, i.e.

$$\overline{d_a} = \begin{cases} d(M, BC) & \text{dacă } M \in (BC, A \\ 0 & \text{dacă } M \in BC \\ -d(M, BC) & \text{dacă } M \notin [BC, A \end{cases}$$

avem că $\alpha = \frac{\overline{d_a}}{h_a}$, şi analog $\beta = \frac{\overline{d_b}}{h_b}$, $\gamma = \frac{\overline{d_c}}{h_c}$.
Ex. 1) Centrul de greutate G al triunghiului $\Delta\, ABC$ are coordonatele omogene $(1, 1, 1)$. Mijlocul laturii $[BC]$ are coordonatele omogene $(0, 1, 1)$.
2) Centrul I al cercului înscris triunghiului $\Delta\, ABC$ are coordonatele omogene (a, b, c). Punctul D de intersecţie al bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{BAC}$ cu latura BC are coordonatele omogene $(0, b, c)$.
3) Centrul I_a al cercului exînscris corespunzător laturii BC a triunghiului $\Delta\, ABC$ are coordonatele omogene $(-a, b, c)$. Punctul D' de intersecţie al bisectoarei exterioare a unghiului $\widehat{BAC}$ cu latura BC are coordonatele omogene $(0, -b, c)$.
4) Ortocentrul H al triunghiului $\Delta\, ABC$ are coordonatele omogene $(tg(A), tg(B), tg(C))$. Piciorul A_1 al înălţimii

din A are coordonatele omogene $(0, tg(B), tg(C))$.
5) Centrul O al cercului circumscris triunghiului $\Delta\, ABC$ are coordonatele omogene $(sin(2A), sin(2B), sin(2C))$.
6) Punctul Γ al lui Gergonne asociat triunghiului $\Delta\, ABC$ are coordonatele omogene $(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c})$.(Punctul lui Gergonne este punctul de intersecţie al dreptelor care unesc vârfurile triunghiului cu punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile opuse.)

6.
Obs. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}$, $A' \in AM \cap BC$, $B' \in BM \cap CA$, $C' \in CM \cap AB$, $A'' \in B'C' \cap BC$, $B'' \in C'A' \cap CA$ şi $C'' \in A'B' \cap AB$. Aplicând teorema lui Menelaos deducem atunci că are loc

$$(B, C|A'') = -\frac{\gamma}{\beta} = -(B, C|A'),$$

şi analoagele $(C, A|B'') = -\frac{\alpha}{\gamma} = -(C, A|B')$, $(A, B|C'') = -\frac{\beta}{\alpha} = -(A, B|C')$, astfel că A', A'' sunt conjugate armonic în raport cu B, C; B', B'' în raport cu C, A, iar C', C'' în raport cu A, B. De asemenea, avem că

$$(B, C|A'') \cdot (C, A|B'') \cdot (A, B|C'') = -1,$$

astfel că puntele A'', B'', C'' sunt coliniare(dreapta $A''B''C''$ se numeşte *polara triliniară a punctului M în raport cu triunghiul $\Delta\, ABC$*).
De asemenea, cum

$$(B, C|A') \cdot (C, A|B'') \cdot (A, B|C'') = 1,$$

dreptele AA', BB'' şi CC'' sunt concurente într-un punct M_a. Analog se obţin şi puncte M_b şi M_c. Coordonatele baricentrice omogene ale acestor puncte, numite *asociatele armonice ale punctului M* sunt $M_a(-\alpha, \beta, \gamma)$, $M_b(\alpha, -\beta, \gamma)$, $M_c(\alpha, \beta, -\gamma)$.
Obs. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}$, $A' \in AM \cap BC$, $B' \in BM \cap CA$, $C' \in CM \cap AB$, iar $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ simetricele punctelor A', B', C' faţă de mijloacele laturilor BC, CA, AB. Atunci au loc $(B, C|A_1) = \frac{1}{(B,C|A')}$ şi relaţiile analoage, astfel că

$$(B, C|A_1) \cdot (C, A|B_1) \cdot (A, B|C_1) = 1,$$

şi dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente într-un punct M_1, numit *reciprocul* sau *izotomicul punctului M*. Coordonatele omogene ale izotomicului M_1 al lui M sunt $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$.
Fie $A_2 \in BC$, $B_2 \in CA$, $C_2 \in AB$ punctele în care simetricele dreptelor AM, BM, CM în raport cu bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului interesctează laturile opuse. Atunci, conform teoremei lui Steiner au loc egalităţile

$$(B, C|A_2) = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{1}{(B, C|A')},$$

şi analoagele, astfel că

$$(B, C|A_2) \cdot (C, A|B_2) \cdot (A, B|C_2) = 1,$$

şi dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente într-un punct M_2, numit *inversul* sau *izogonalul punctului M*. Coordonatele omogene ale izogonalului M_2 al punctului M sunt $(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma})$.
Ex. 1) Punctul lui Nagel N este izotomicul punctului Γ al lui Gergonne, astfel că are coordonatele omogene $(p-a, p-b, p-c)$.
2) Punctul lui Lemoine L este izogonalul centrului de greutate G, astfel că are coordonatele omogene (a^2, b^2, c^2).

7.
Obs. Fie $M(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $N(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $P(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ trei puncte în plan, date prin coordonatele baricentrice absolute. Atunci M, N, P sunt coliniare dacă şi numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$P = (1-t)M + tN\,,$$

egalitate echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_3 = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2 \\ \beta_3 = (1-t)\beta_1 + t\beta_2 \\ \gamma_3 = (1-t)\gamma_1 + t\gamma_2 \end{cases}$$

(în care oricare două dintre egalităţi o implică şi pe a treia). Eliminând t se pot obţine diverse condiţii echivalente cu coliniaritatea punctelor M, N, P, ca de exemplu

$$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_1 = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2,$$

şi analoagele, sau

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 = \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_2\gamma_1.$$

Aceste condiţii se scriu cel mai uşor cu ajutorul determinanţilor:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

sau

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

şi analoagele. Determinantul din (1) este foarte important, deoarece permite şi exprimarea ariei orientate a triunghiului $\Delta\, MNP$:

$$\overline{\mathcal{A}[MNP]} = \overline{\mathcal{A}[ABC]} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

De asemenea, (1) se mai poate pune sub forma

$$\alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \gamma_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Merită remarcat că atât în (1), cât şi în (3), coordonatele baricentrice absolute ale punctelor pot fi înlocuite cu coordonate omogene.
Obs. Forma generală a ecuaţiei unei drepte este

$$ux + vy + wz = 0.$$

Ex. 1) Ecuaţiile laturilor triunghiului $\Delta\, ABC$ sunt $BC:\ x = 0$, $CA:\ y = 0$, $AB:\ z = 0$.
2) Ecuaţia medianei corespunzătoare laturii BC este $y = z$.
3) Ecuaţia bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{BAC}$ este $cy - bz = 0$. Ecuaţia bisectoarei exterioare este $cy + bz = 0$.
4) Ecuaţia înălţimii din vârful A este $ytg(C) - ztg(B) = 0$.
5) Ecuaţia diametrului prin A al cercului circumscris este $ysin(2C) - zsin(2B) = 0$.
6) Ecuaţia dreptei lui Euler HGO a triunghiului $\Delta\, ABC$ este

$$x(tg(B) - tg(C)) + y(tg(C) - tg(A)) + z(tg(A) - tg(B)) = 0.$$

7) Dacă $M(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{P}$ este un punct oarecare, ecuaţia polarei triliniare a punctului M este

$$x\beta\gamma + y\alpha\gamma + z\alpha\beta = 0,$$

sau, echivalent

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0.$$

Obs. Dacă d_1 şi d_2 sunt două drepte, cu ecuaţiile

$$d_1:\ u_1x + v_1y + w_1z = 0 \qquad d_2:\ u_2x + v_2y + w_2z = 0\,,$$

punctul de intersecţie al celor două drepte are coordonatele omogene

$$\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Analog, dacă $M(x_1, y_1, z_1)$ şi $N(x_2, y_2, z_2)$ sunt două puncte date prin coordonate omogene, dreapta MN are ecuaţia

$$ux + vy + wz = 0,$$

unde

$$u = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Obs. Fie d o dreaptă în plan, de ecuaţie

$$ux + vy + wz = 0,$$

iar $M \in d \cap BC$. Atunci $x_M = 0$, iar $vy_M + wz_M = 0$, astfel că

$$(B, C|M) = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{z_M}{y_M} = -\frac{v}{w}.$$

Cor.(teorema lui Menelaos) Dacă o dreaptă d de ecuaţie $ux + vy + wz = 0$ intersectează laturile BC, CA, AB ale triunghiului $\Delta\, ABC$ în punctele M, N, respectiv P, atunci

$$(B, C|M) \cdot (C, A|N) \cdot (A, B|P) = \left(-\frac{v}{w}\right) \cdot \left(-\frac{w}{u}\right) \cdot \left(-\frac{u}{v}\right) = -1.$$

8.

Obs. Fie $M(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $N(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ două puncte din plan date prin coordonatele lor baricentrice. Din egalitatea

$$\overline{MN} = \alpha_2\overline{MA} + \beta_2\overline{MB} + \gamma_2\overline{MC}$$

rezultă atunci că

$$\begin{aligned} MN^2 &= \alpha_2^2 MA^2 + \beta_2^2 MB^2 + \gamma_2^2 MC^2 + \\ &\quad + 2\alpha_2\beta_2\overline{MA}\cdot\overline{MB} + 2\alpha_2\gamma_2\overline{MA}\cdot\overline{MC} + 2\beta_2\gamma_2\overline{MB}\cdot\overline{MC} = \\ &= \alpha_2^2 MA^2 + \beta_2^2 MB^2 + \gamma_2^2 MC^2 + \\ &\quad + \alpha_2\beta_2(MA^2 + MB^2 - AB^2) + \alpha_2\gamma_2(MA^2 + MC^2 - AC^2) + \beta_2\gamma_2(MB^2 + MC^2 - BC^2) = \\ &= \alpha_2 MA^2 + \beta_2 MB^2 + \gamma_2 MC^2 - (a^2\beta_2\gamma_2 + b^2\alpha_2\gamma_2 + c^2\alpha_2\beta_2). \end{aligned}$$

Dacă în egalitatea de mai sus considerăm $M = O$, centrul cercului circumscris triunghiului $\Delta\, ABC$, atunci

$$ON^2 = R^2 - (a^2\beta_2\gamma_2 + b^2\alpha_2\gamma_2 + c^2\alpha_2\beta_2),$$

astfel că

$$-(a^2\beta_2\gamma_2 + b^2\alpha_2\gamma_2 + c^2\alpha_2\beta_2) = ON^2 - R^2 = p_{\mathcal{C}(O,R)}(N),$$

reprezintă puterea punctului N faţă de cercul circumscris $\mathcal{C}(O, R)$. Pentru simplitate, vom nota în continuare cu $p(N)$ această valoare. În particular, obţinem astfel ecuaţia cercului circumscris $\mathcal{C}(O, R)$:

$$P(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{C}(O, R) \Longleftrightarrow a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$

condiţie care rămâne valabilă şi în coordonate omogene.
Revenind la cazul general, avem atunci că

$$MN^2 = \alpha_2 MA^2 + \beta_2 MB^2 + \gamma_2 MC^2 + p(N).$$

De asemenea, obţinem că

$$\begin{aligned} MA^2 &= \beta_1 AB^2 + \gamma_1 AC^2 + p(M) \\ MB^2 &= \alpha_1 AB^2 + \gamma_1 BC^2 + p(M) \\ MC^2 &= \alpha_1 AC^2 + \beta_1 BC^2 + p(M) \end{aligned}$$

şi avem că

$$MN^2 = a^2(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + b^2(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2) + c^2(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + p(M) + p(N),$$

sau

$$MN^2 = -a^2(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2) - b^2(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2) - c^2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2).$$

Ex. 1) Distanţa dintre centrul de greutate G şi centrul cercului circumscris O al triunghiului $\Delta\, ABC$ este dată de

$$OG^2 = R^2 - (a^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + b^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + c^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}) = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

2) Distanţa dintre centrele O al cercului circumscris şi I al cercului înscris triunghiului $\Delta\, ABC$ este dată de

$$OI^2 = R^2 - \left(a^2\cdot\tfrac{b}{a+b+c}\cdot\tfrac{c}{a+b+c} + b^2\cdot\tfrac{a}{a+b+c}\cdot\tfrac{c}{a+b+c} + c^2\cdot\tfrac{a}{a+b+c}\cdot\tfrac{b}{a+b+c}\right) =$$

$$= R^2 - \tfrac{abc}{a+b+c} = R^2 - \tfrac{4RS}{2p} = R^2 - 2Rr.$$

3) Distanţa de la vârful A la centrul I al cercului înscris este dată de

$$AI^2 = b^2\cdot\frac{c}{a+b+c} + c^2\cdot\frac{b}{a+b+c} - \frac{abc}{a+b+c} = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} = \frac{bc(p-a)}{p}.$$

Obs. Fie $O_1(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ un punct în plan, iar $R_1 > 0$ un număr pozitiv oarecare. Dacă $M(\alpha,\beta,\gamma)$ este un punctîn plan, puterea punctului M faţă de cercul $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1,R_1)$ este

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{C}_1}(M) &= O_1M^2 - R_1^2 = \\ &= \alpha O_1A^2 + \beta O_1B^2 + \gamma O_1C^2 + p(M) - R_1^2 = \\ &= \alpha(O_1A^2 - R_1^2) + \beta(O_1B^2 - R_1^2) + \gamma(O_1C^2 - R_1^2) + p(M) = \\ &= \alpha p_{\mathcal{C}_1}(A) + \beta p_{\mathcal{C}_1}(B) + \gamma p_{\mathcal{C}_1}(C) + p(M). \end{aligned}$$

Ecuaţia cercului $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1,R_1)$ este atunci

$$M(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{C}_1 \iff \alpha p_{\mathcal{C}_1}(A) + \beta p_{\mathcal{C}_1}(B) + \gamma p_{\mathcal{C}_1}(C) + p(M) = 0.$$

Cum

$$p_{\mathcal{C}_1}(A) = AO_1^2 - R_1^2 = b^2\gamma_0 + c^2\beta_0 + p(O_1) - R_1^2,$$

mai putem scrie

$$M(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{C}_1 \iff a^2(\beta_0\gamma+\gamma_0\beta) + b^2(\alpha_0\gamma+\gamma_0\alpha) + c^2(\alpha_0\beta+\beta_0\alpha) + p(O_1) + p(M) - R_1^2 = 0.$$

Ex. Ecuaţia cercului înscris triunghiului $\Delta\, ABC$ este

$$\begin{aligned} M(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{C}(I,r) &\iff \alpha\cdot\tfrac{bc(p-a)}{p} + \beta\cdot\tfrac{ac(p-b)}{p} + \gamma\cdot\tfrac{ab(p-c)}{p} + p(M) - r^2 = 0 \iff \\ &\iff \alpha bc + \beta ac + \gamma ab + p(M) - \tfrac{abc}{p} - r^2 = 0 \iff \\ &\iff \alpha bc + \beta ac + \gamma ab + p(M) - r(4R+r) = 0. \end{aligned}$$

Obs. Dacă $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1,R_1)$ şi $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(O_2,R_2)$ sunt două cercuri, $M(\alpha,\beta,\gamma)$ un punct în plan, iar $d_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$ axa radicală a celor două cercuri, atunci

$$\begin{aligned} M(\alpha,\beta,\gamma)\in d_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} &\iff p_{\mathcal{C}_1}(M) = p_{\mathcal{C}_2}(M) \iff \\ &\iff \alpha(p_{\mathcal{C}_1}(A) - p_{\mathcal{C}_2}(A)) + \beta(p_{\mathcal{C}_1}(B) - p_{\mathcal{C}_2}(B)) + \gamma(p_{\mathcal{C}_1}(C) - p_{\mathcal{C}_2}(C)) = 0. \end{aligned}$$

2 Probleme rezolvate

1.(GM 3/2009, autor Vasile Berghea) Fie ABC un triunghi dreptunghic şi d o dreaptă ce trece prin centrul cercului înscris, intersectând catetele AB şi AC în P, respectiv Q. Aflaţi minimul sumei:

$$\left(\frac{PB}{PA}\right)^2 + \left(\frac{QC}{QA}\right)^2.$$

R. Dacă ecuaţia dreptei d este
$$ux + vy + wz = 0,$$
condiţia ca $I \in d$ este $ua + vb + wc = 0$, astfel că
$$\frac{w}{u} = \frac{1}{c} \cdot \left(-a - b \cdot \frac{v}{u}\right).$$
Pentru $P \in d \cap AB$ şi $Q \in d \cap AC$ avem că
$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = -\frac{v}{u}, \quad \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = -\frac{w}{u},$$
astfel că
$$\left(\frac{PB}{PA}\right)^2 + \left(\frac{QC}{QA}\right)^2 = \frac{v^2 + w^2}{u^2}.$$
Avem că
$$\begin{aligned} \tfrac{v^2+w^2}{u^2} &= \left(\tfrac{v}{u}\right)^2 + \tfrac{1}{c^2}\left(a^2 + 2ab\left(\tfrac{v}{u}\right) + b^2\left(\tfrac{v}{u}\right)^2\right) = \tfrac{a^2}{c^2}\left(\tfrac{v}{u}\right)^2 + 2\tfrac{ab}{c^2}\left(\tfrac{v}{u}\right) + \tfrac{a^2}{c^2} = \\ &= \tfrac{a^2}{c^2}\left(\left(\tfrac{v}{u}\right)^2 + 2\tfrac{b}{a}\left(\tfrac{v}{u}\right) + 1\right) = 1 + \tfrac{a^2}{c^2}\left(\tfrac{v}{u} + \tfrac{b}{a}\right)^2. \end{aligned}$$
Prin urmare,
$$\left(\frac{PB}{PA}\right)^2 + \left(\frac{QC}{QA}\right)^2 \geq 1.$$
cu egalitate dacă şi numai dacă
$$(B, A|P) = -\frac{v}{u} = \frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad (C, A|Q) = \frac{c}{a},$$
când punctele P şi Q sunt izotomicele pe laturile AB, respectiv AC, ale punctelor de intersecţie cu aceste laturi ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\widehat{C}$, respectiv $\widehat{B}$.
Obs. Putem reţine proprietatea
$$I \in d \Longleftrightarrow b \cdot (B, A|P) + c \cdot (Q, A|P) = a,$$
valabilă în orice triunghi.

2.(GM 7-8-9/2009, autor Dan Nedeianu) Triunghiul neisoscel ABC are bisectoarele AD, BE, CF, unde $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$. Mediatoarele segmentelor $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ intersectează respectiv dreptele BC, CA şi AB în punctele A', B' şi C'. Să se demonstreze că A', B' şi C' sunt coliniare.
R. Fie AD', BE', CF' bisectoarele exterioare ale unghiurilor triunghiului, cu $D' \in BC$, $E' \in CA$, $F' \in AB$. Punctele A', B', C' sunt atunci mijloacele ipotenuzelor $[DD']$, $[EE']$, respectiv $[FF']$ ale triunghiurilor dreptunghice ADD', BEE', CFF'. Coordonatele baricentrice ale punctelor D şi D' fiind respectiv
$$D\left(0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\right), \quad D'\left(0, \frac{b}{b-c}, \frac{c}{-b+c}\right),$$
rezultă că A' are coordonatele
$$A'\left(0, \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b-c}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c-b}\right)\right) = \left(0, \frac{b^2}{b^2-c^2}, \frac{c^2}{c^2-b^2}\right)$$
şi obţinem că $(B, C|A') = -\frac{c^2}{b^2}$. Analog, $(C, A|B') = -\frac{a^2}{c^2}$, $(A, B|C') = -\frac{b^2}{a^2}$, astfel că
$$(B, C|A') \cdot (C, A|B') \cdot (A, B|C') = -1$$

şi punctele A', B' şi C' sunt coliniare.
Obs. Punctele A', B' şi C' având coordonatele omogene $A'(0, b^2, -c^2)$, $B'(-a^2, 0, c^2)$, $C'(a^2, -b^2, 0)$ sunt coliniare deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2 & -c^2 \\ -a^2 & 0 & c^2 \\ a^2 & -b^2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

3.(GM 10/2009) Fie ABC un triunghi şi punctele M, N pe laturile AB, respectiv BC, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{\alpha}{\beta}$ şi $\frac{BN}{NC} = \frac{\beta}{\gamma}$. Notăm cu P intersecţia dreptelor CM şi AN. Să se arate că

$$\frac{1}{\alpha}\overline{AP} + \frac{1}{\beta}\overline{BP} + \frac{1}{\gamma}\overline{CP} = \overline{0}.$$

R. Din egalităţile din enunţ rezultă că punctele M şi N au coordonatele omogene $M\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, 0\right)$, $N\left(0, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$, astfel că ecuaţiile dreptelor CM şi AN sunt

$$CM : \alpha x = \beta y\,, \quad AN : \beta y = \gamma z\,.$$

Punctul de intersecţie P verifică atunci egalităţile $\alpha x = \beta y = \gamma z$, astfel că are coordonatele omogene $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$. Rezultă că

$$\frac{1}{\alpha}\overline{AP} + \frac{1}{\beta}\overline{BP} + \frac{1}{\gamma}\overline{CP} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \overline{PP} = \overline{0}\,.$$

4.(GM 10/2009, autori Dan Ştefan Marinescu, Viorel Cornea) Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC şi $\{D\} = AM \cap BC$, $\{E\} = BM \cap AC$, $\{F\} = CM \cap AB$.
a) Să se arate că dreptele determinate de mijloacele perechilor de segmente $([AD], [BC])$, $([BE], [CA])$, $([CF], [AB])$ sunt concurente într-un punct notat N.
b) Să se arate că $M = N \Longleftrightarrow M$ este centrul de greutate al triunghiului ABC.
R. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$, cu $\alpha, \beta, \gamma > 0$(deoarece $M \in Int[ABC]$) coordonatele baricentrice absolute ale punctului M. Punctele D, E, F au atunci coordonatele

$$D\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)\,, \quad E\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right)\,, \quad F\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0\right)\,.$$

Notând cu A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$, acestea au coordonatele

$$A_1\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\,, \quad B_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\,, \quad C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\,,$$

$$D_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}, \frac{\gamma}{2(\beta+\gamma)}\right)\,, \quad E_1\left(\frac{\alpha}{2(\alpha+\gamma)}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2(\alpha+\gamma)}\right)\,, \quad F_1\left(\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)}, \frac{\beta}{2(\alpha+\beta)}, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Ecuaţiile dreptelor A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 sunt

$$A_1D_1 : (\beta-\gamma)x - (\beta+\gamma)y + (\beta+\gamma)y = 0 \Longleftrightarrow \beta(x-y+z) = \gamma(x+y-z)\,,$$

$$B_1E_1 : \alpha(-x+y+z) = \gamma(x+y-z)\,, \quad C_1F_1 : \alpha(-x+y+z) = \beta(x-y+z)\,.$$

Intersecţia N a dreptelor A_1D_1 şi B_1E_1 verifică atunci egalităţile

$$\alpha(-x+y+z) = \gamma(x+y-z) = \beta(x-y+z)\,,$$

astfel că N satfisface şi ecuaţia dreptei C_1F_1, şi rezultă că dreptele A_1D_1, B_1E_1 şi C_1F_1 sunt concurente. Coordonatele omogene ale punctului N sunt

$$N\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\,.$$

Avem atunci echivalenţele

$$M=N \Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \Longleftrightarrow \alpha\beta=\alpha\gamma=\beta\gamma \Longleftrightarrow \alpha=\beta=\gamma\,.$$

Ultimele egalităţi reprezintă condiţia ca M să fie centrul de greutate al triunghiului.

5.(GM 10/2009, autor Dinu Şerbănescu) Fie ABC un triunghi şi I centrul cercului înscris. Dreapta AI taie BC în punctul D şi intersectează cercul circumscris în E. Să se demonstreze că $AI=IE$ dacă şi numai dacă $ID=DE$.
R. Coordonatele baricentrice absolute ale punctelor I şi D sunt

$$I\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right),D\left(0,\frac{b}{b+c},\frac{c}{b+c}\right)\,.$$

Coordonatele punctului E sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x+y+z &= 1\\ cy-bz &= 0\\ a^2yx+b^2xz+c^2xy &= 0\end{cases}$$

şi sunt

$$E\left(\frac{-a^2}{(b+c)^2-a^2},\frac{b(b+c)}{(b+c)^2-a^2},\frac{c(b+c)}{(b+c)^2-a^2}\right)\,.$$

Avem atunci echivalenţele:

$$AI=IE \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a+b+c} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{-a^2}{(b+c)^2-a^2}\right)\\ \frac{b}{a+b+c} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{b(b+c)}{(b+c)^2-a^2}\\ \frac{c}{a+b+c} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{c(b+c)}{(b+c)^2-a^2}\end{cases} \Longleftrightarrow 2a=b+c\,,$$

respectiv

$$ID=DE \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{-a^2}{(b+c)^2-a^2}\right)\\ \frac{b}{b+c} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b+c}+\frac{b(b+c)}{(b+c)^2-a^2}\right)\\ \frac{c}{b+c} &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+b+c}+\frac{c(b+c)}{(b+c)^2-a^2}\right)\end{cases} \Longleftrightarrow 2a=b+c\,.$$

Prin urmare, $AI=IE \Longleftrightarrow ID=DE$.

6.(GM 11/2009, autor Vasile Şerdean) Pe latura ABC se consideră punctul D astfel încât $5AD=2DB$. Pe segmentul DC considerăm punctul M cu proprietatea că $3CM=7DM$. Dreapta BM intersectează AC în E, iar AM intersectează BC în F. Să se calculeze raportul dintre $aria[DEF]$ şi $aria[ABC]$.
R. Din condiţiile din enunţ rezultă că

$$D\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7},0\right)\,,$$

$$M=\frac{3}{10}C+\frac{7}{10}D \Longrightarrow M\left(\frac{5}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10}\right)\,.$$

Pentru punctele $E\in BM\cap AC$ şi $F\in AM\cap BC$ obţinem atunci coordonatele

$$E\left(\frac{5}{8},0,\frac{3}{8}\right)\,,\quad F\left(0,\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)\,.$$

Raportul ariilor orientate ale triunghiurilor DEF şi ABC este atunci

$$\frac{\overline{\mathcal{A}[DEF]}}{\overline{\mathcal{A}[ABC]}}=\begin{vmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8}\\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{vmatrix}=-\frac{3}{14}\,,$$

astfel că
$$\frac{aria[DEF]}{aria[ABC]} = \frac{3}{14}\,.$$

7.(GM 1/2010, autor Vlad Petru) Fie M un punct în interiorul unui triunghi ABC. Notăm cu A', B', C' intersecţiile dreptelor AM, BM, CM cu BC, CA, AB respectiv. Să se demonstreze că
$$\frac{MA'}{\sqrt{AM\cdot AA'}} + \frac{MB'}{\sqrt{BM\cdot BB'}} + \frac{MC'}{\sqrt{CM\cdot CC'}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

R. Fie $M(\alpha,\beta,\gamma)$, cu $\alpha,\beta,\gamma > 0$(deoarece $M \in Int[ABC]$) coordonatele baricentrice absolute ale punctului M. Atunci au loc egalităţile
$$\frac{MA'}{AA'} = \alpha \quad \text{şi} \quad \frac{MA'}{AM} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$
şi analoagele, astfel că
$$\frac{MA'}{\sqrt{AM\cdot AA'}} + \frac{MB'}{\sqrt{BM\cdot BB'}} + \frac{MC'}{\sqrt{CM\cdot CC'}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}}\,.$$
Funcţia $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ fiind convexă, rezultă că
$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}}\right) = \frac{1}{3}\left(f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\right) \geq f\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$
Afirmaţia din enunţ rezultă acum imediat.

8.(GM 1/2010, autor Cătălin Cristea) Medianele din A, B, C intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A', B', C' respectiv. Să se demonstreze că
$$3(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \geq 4(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

R. Coordonatele baricentrice absolute ale punctului A' sunt soluţiile sistemului de ecuaţii
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = & 1 \\ \beta & = & \gamma \\ a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta & = & 0 \end{cases}$$
şi sunt
$$A'\left(\frac{-a^2}{2(b^2+c^2)-a^2}, \frac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2}, \frac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2}\right).$$
Obţinem că
$$\begin{aligned} AA'^2 = \;& -a^2\cdot\left(\tfrac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2} - 0\right)^2 - b^2\cdot\left(\tfrac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2} - 0\right)\cdot\left(\tfrac{-a^2}{2(b^2+c^2)-a^2} - 1\right) - \\ & -c^2\cdot\left(\tfrac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2} - 0\right)\cdot\left(\tfrac{-a^2}{2(b^2+c^2)-a^2} - 1\right) = \\ & = \tfrac{(b^2+c^2)^2}{2(b^2+c^2)-a^2}\,. \end{aligned}$$
Analog,
$$BB'^2 = \frac{(a^2+c^2)^2}{2(a^2+c^2)-b^2}\,, \quad CC'^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{2(a^2+b^2)-c^2}\,.$$
Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz rezultă atunci că
$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \sum \frac{(b^2+c^2)^2}{2(b^2+c^2)-a^2} \geq \frac{(2(a^2+b^2+c^2))^2}{3(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)\,,$$
ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

9.(GM 3/2010, autor Silviu Boga) Considerăm un triunghi ABC şi punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ astfel încât cevienele AA', BB', CC' sunt concurente. Fie σ, σ_A, σ_B, σ_C, σ_O ariile triunghiurilor ABC, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, respectiv $A'B'C'$. Să se arate că $\sigma_O^2 \cdot \sigma = 4 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \sigma_C$.
R. Fie $M \in AA' \cap BB' \cap CC'$ cu coordonatele baricentrice absolute $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Atunci $\alpha, \beta, \gamma > 0$, iar punctele A', B', C' au coordonatele

$$A'\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right), \quad B'\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right), \quad C'\left(\frac{\alpha}{alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0\right),$$

astfel că au loc egalităţile

$$\frac{\sigma_O}{\sigma} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta}{\beta+\gamma} & \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} & 0 & \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)},$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} & 0 & \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$$

şi analoagele. Rezultă atunci că

$$\left(\frac{\sigma_O}{\sigma}\right)^2 = 4 \cdot \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2(\beta+\gamma)^2} = 4 \cdot \frac{\sigma_A}{\sigma} \cdot \frac{\sigma_B}{\sigma} \cdot \frac{\sigma_C}{\sigma},$$

de unde obţinem că $\sigma_O^2 \cdot \sigma = 4 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \sigma_C$.

10. Fie ABC un triunghi, D intersecţia bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{BAC}$ cu latura BC, E punctul în care simediana din vârful A intersectează a doua oară cercul circumscris, iar F mijlocul arcului BAC pe cercul circumscris. Arătaţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.

R. Coordonatele omogene ale punctului D sunt $(0, b, c)$. Punctul E satisface ecuaţia simedianei

$$\frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2}$$

şi ecuaţia cercului circumscris

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0,$$

astfel că E are coordonatele omogene $\left(\frac{-a^2}{2}, b^2, c^2\right)$. Punctul F se află pe bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{BAC}$, care are ecuaţia

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

şi pe cercul circumscris. Obţinem pentru F coodonatele omogene $(a^2, bc - b^2, bc - c^2)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ \frac{-a^2}{2} & b^2 & c^2 \\ a^2 & bc - b^2 & bc - c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că punctele D, E şi F sunt coliniare.

11. Fie ABC un triunghi, $k \in \mathbb{R}^*$ un număr real nenul oarecare fixat, iar $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ puncte variabile astfel încât

$$\frac{MB}{MA} - \frac{NC}{NA} = k.$$

Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix.

R. Vom arăta că afirmaţia din enunţ rămâne valabilă în cazul mai general ca $M \in AB$ şi $N \in AC$ cu

$$(B, A|M) - (C, A|N) = k\,.$$

Fie $ux + vy + wz = 0$ ecuaţia dreptei MN. Deoarece $ux_M + vy_M = 0 = ux_N + wz_N$, oţinem că

$$\frac{v}{u} = -\frac{x_M}{y_M} = -(B, A|M) \quad \text{şi} \quad \frac{w}{u} = -\frac{x_N}{z_N} = -(C, A|N)\,.$$

Din ipoteză rezultă atunci că

$$-\frac{v}{u} + \frac{w}{u} = k\,,$$

sau, echivalent, $uk + v - w = 0$. Prin urmare, punctul P de coordonate omogene $(k, 1, -1)$ se află pe dreapta MN pentru orice poziţie a punctelor variabile M şi N.

Obs. 1) Coordonatele baricentrice absolute ale punctului fix P sunt $\left(1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$ Faptul că $\alpha_P = 1$ arată că punctul P se află pe paralela prin A la BC.

2) Problema rămâne (în mod banal) adevărată şi pentru cazul $k = 0$, toate dreptele MN fiind atunci paralele cu BC, trecând deci prin punctul de la infinit al dreptei BC.

12.(GM 7-8-9/2010) În triunghiul ABC, cevienele AA', BB', CC' sunt concurente în M. Să se arate că dacă $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{0}$, atunci M este centrul de greutate al triunghiului.

R. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ coordonatele baricentrice absolute ale punctului M. Vom presupune că M nu se găseşte pe niciuna dintre laturile triunghiului, astfel că $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Atunci A', B', C' au coordonatele baricentrice absolute

$$A'\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)\,, \quad B'\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right)\,, \quad C'\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0\right)\,.$$

Rezultă că

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \cdot \overline{AB} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \overline{AC} + \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \cdot \overline{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \cdot \overline{BC} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overline{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overline{CB} =$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdot \overline{AB} + \left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdot \overline{AC}\,.$$

Egalitatea din enunţ şi necoliniaritatea punctelor A, B, C implică atunci că

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1\,, \quad \frac{\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1\,.$$

Obţinem că $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ şi $\gamma^2 = \alpha \cdot \beta$, de unde rezultă că $\alpha = \beta = \gamma$. Punctul M este deci centrul de greutate al triunghiului.