I. DUDA STELIAN GRĂDINARU

CALCUL INTEGRAL CU APLICAȚII
VOLUMUL 1

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
DUDA, I.
Calcul integral cu aplicații. / I. Duda, Stelian Grădinaru
– București: Editura Fundației *România de Mâine*, 2007
Bibliogr.
2 vol.
ISBN 978-973-725-823-6 – general
Vol. 1. – 2007 – ISBN 978-973-725-824-3

I. Grădinaru, G

517.3(075.8)

Redactor: Mihaela ŞTEFAN
Tehnoredactor: Stelian GRĂDINARU
Coperta: Cornelia PRODAN

Bun de tipar: 25.04.2007; Coli tipar: 36,5
Format: 16/70×100

Editura şi Tipografia Fundației *România de Mâine*
Splaiul Independenței nr.313, Bucureşti, Sector 6, O.P. 16
Tel./Fax: 444.20.91; www.spiruharet.ro
e-mail: contact@edituraromaniademaine.ro

UNIVERSITATEA *SPIRU HARET*
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

I. DUDA STELIAN GRĂDINARU

CALCUL INTEGRAL CU APLICAȚII
VOLUMUL 1

EDITURA FUNDAȚIEI *ROMÂNIA DE MÂINE*
BUCUREŞTI, 2007

CUPRINS

Prefață

Culegerea de probleme se adresează cu precădere studenților din anul I şi II de la Facultatea de Matematică - Informatică, putând fi folosită însă şi de studenții facultăților cu profil economic sau tehnic şi, de ce nu, de elevii din ultimul an de liceu, care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat sau pentru admiterea în învățământul superior.

Autorii şi-au propus să descrie pe scurt cele mai importante metode de calcul integral, dezvoltând şi generalizând integrale ce apar în cursurile de matematici superioare din anii II şi III.

Culegerea are un scop didactic, acela de a oferi cititorului un număr cât mai mare de exerciții rezolvate, oferind mai multe soluții de rezolvare a acestora.

Fiecare capitol este însoțit de o scurtă prezentare teoretică şi completată cu exerciții rezolvate şi propuse. Calculele sunt făcute amănunțit iar problemele propuse sunt însoțite de indicații corespunzătoare.

Autorii

1. INTEGRALA NEDEFINITĂ

1. 1. Generalități.

1. Fie $J \subseteq R$ un interval şi $f : J \to R$. Se spune că f admite *primitivă* pe J dacă există o funcţie $F : J \to R,$ astfel încât:
(i) F derivabilă pe J
(ii) $F' \equiv f$ pe J

2. Funcţia F se numeşte *primitiva* lui f, iar mulţimea tuturor primitivelor lui f, notată $\int f(x)dx$, se numeşte *integrala nedefinită* a funcţiei f, vom nota:

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx + C}$$

unde C este o constantă reală aditivă.

3. Dacă F şi G sunt primitivele a două funcţii f şi g definite ca mai sus, iar λ şi μ două numere reale, atunci:

$$\int \left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right]dx = \lambda F(x) + \mu G(x)$$

sau pe scurt:

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G$$

4. Operaţia de determinare a unei primitive se numeşte *integrare.* Integrarea funcţiilor se face cu ajutorul tabloului primitivelor funcţiilor elementare.

5. *Metoda schimbării variabilei şi metoda integrării prin părţi* permit reducerea integralelor nedefinite la cele din tablou. În continuare, vom presupune că funcţiile care apar sub integrale admit primitive pe domeniile indicate, dacă intervalul de integrare nu este dat, se va considera domeniul maxim de definiţie; prezenţa constantei C se va omite; n va desemna un număr natural, iar $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \gamma \geq 0$ sunt constante, presupuse date.

A. Tabloul primitivelor funcţiilor elementare

1. $\int x^{\alpha}\ dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{x+1},\ x \in R, \quad \alpha \neq -1$

a. $\alpha = -1 \quad \int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x|, \quad x \in \mathbb{R}^*$

b. $\alpha = -\dfrac{1}{2} \quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}, \quad x > 0$

c. $\alpha = -2 \quad \int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$

d. $\alpha = -n \quad \int \dfrac{1}{x^n} dx = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}, \quad x \neq 0,\ n \geq 2$

2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}, \quad x \in \mathbb{R} \quad a > 0,\ a \neq 1$

a. $a = e, \quad \int e^x dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

3. $\int \sin x\ dx = -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$

4. $\int \cos x\ dx = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

5. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

7. a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a}, \quad |x| < a$

b. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \dfrac{x}{a}, \quad |x| < a$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|, \quad |x|>a$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right), \quad x\in\mathbb{R}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \quad |x|\neq a$

11. a . $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}, \quad x\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

1.2. Schimbarea de variabilă la integrala nedefinită

Fie $I, J\subseteq\mathbb{R}$ intervale, iar f şi φ funcţii definite prin compunerea $I\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, astfel încât:

(i) φ derivabilă pe I

(ii) f admite primitivă pe I

Atunci funcţia $(f\circ\varphi)\varphi'$ admite primitive şi vom avea:

$$\boxed{\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = F\left(\varphi(x)\right)+C, \quad C\in\mathbb{R}}$$

sau pe scurt :

$$\int (f\circ\varphi)\varphi' = F\circ\varphi + C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Observaţie

În aplicaţii este util să ţinem seama de:

B. Tabloul general al primitivelor funcțiilor compuse

1. $\int \varphi^{\alpha}(x)\varphi'(x)dx = \dfrac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$

a. $\alpha = -1 \quad \int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)|, \qquad \varphi(x) \neq 0$

b. $\alpha = -\dfrac{1}{2} \quad \int \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx = 2\sqrt{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) > 0$

c. $\alpha = -2 \quad \int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}dx = -\dfrac{1}{\varphi(x)}, \qquad \varphi(x) \neq 0$

d. $\alpha = -n \quad \int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^n(x)}dx = -\dfrac{1}{(n-1)\varphi^{n-1}(x)}, \quad \varphi(x) \neq 0$

2. $\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)dx = \dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1$

2′. $a = e, \quad \int e^{\varphi(x)}\varphi'(x)dx = e^{\varphi(x)}$

3. $\int \sin\varphi(x)\varphi'(x)dx = -\cos\varphi(x)$

4. $\int \cos\varphi(x)\varphi'(x)dx = \sin\varphi(x)$

5. $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}dx = -\operatorname{ctg}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

6. $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}dx = \operatorname{tg}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

7. a. $\int \dfrac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} = \arcsin\dfrac{\varphi(x)}{a}, \quad |\varphi(x)| < a \arcsin\theta$

b. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{a^2-\varphi^2(x)}} = -\arccos\frac{\varphi(x)}{a}, \quad |\varphi(x)| < a$

8. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}} = \ln\left|\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}\right|, \quad |\varphi(x)| > a$

9. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}} = \ln\left(\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}\right), \quad a \neq 0$

10. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi^2(x)-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right|$

11. a. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi^2(x)+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{a}, \quad a \neq 0$

11. b. $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi^2(x)+a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{\varphi(x)}{a}, \quad a \neq 0$

Dacă ținem seama că $\varphi'(x)dx = d\varphi,$ atunci legătura între tablourile A şi B este dată de:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi)}$$

Uneori pentru simplitatea scrierii notăm:

$$u = \varphi(x) \ \therefore\ \varphi'(x)dx = du,$$

iar

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u)$$

Observație

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}}$$

Aplicații directe

1. a. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

b. $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$

c. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-1)a}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$

2. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

3. $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{b}{a}}\text{arc tg}\,\frac{x}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{ab}\text{arc tg}\,\frac{ax}{b}$

4. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2-\frac{b}{a}}\ln\left|\frac{x-\frac{b}{a}}{x+\frac{b}{a}}\right| = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|$

$(a\neq 0,\ b\neq 0)$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(x+\frac{b}{a}+\sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}}\right)$

sau dacă notăm $ax = u \therefore dx = \frac{1}{a}du$, atunci:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(u+\sqrt{u^2+b^2}\right) = \frac{1}{a}\ln\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}\right)$$

Modulo o constantă aditivă, cele două primitive coincid. Într-adevăr,

$$\frac{1}{a}\ln\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}\right) = \frac{1}{a}\ln\ a\left(x+\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) = \frac{1}{a}\ln\ a + \frac{1}{a}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\right|$

7. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x \pm a}{b}, \quad \beta \neq 0$

8. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2-\beta^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-\alpha-\beta}{x-\alpha+\beta}\right|, \quad \beta \neq 0$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2+\beta^2}} = \ln\left(x-\alpha+\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2}} = \ln\left|x-\alpha+\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2}\right|$

Pentru *exercițiile 11* şi *12* vom nota $\delta = p^2 - 4q$, discriminantul ecuației de gradul doi:

$$x^2 + px + q = 0$$

Astfel pentru:

a. $\delta < 0, \quad x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\delta}}{2}\right)^2$

b. $\delta > 0, \quad x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\delta}}{2}\right)^2$

11. a. $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{-\delta}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{-\delta}}, \quad \delta < 0$

b. $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{\delta}}{2x+p+\sqrt{\delta}}\right|, \quad \delta > 0$

12. a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \ln\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right), \quad \delta < 0$

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|, \quad \delta > 0$

Observație

Dacă în egalitatea $\int f(x)dx = F(x)$ luăm $F \equiv f$, atunci are loc relația:

$$\boxed{\int f' = f}$$

Aplicații directe

1. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \left(\ln\left(x^2+a^2\right)\right)' dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)$

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \int \left(\sqrt{x^2+a^2}\right)' dx = \sqrt{x^2+a^2}$

3. $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)' dx = -\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)}$

Exerciții rezolvate

Să se calculeze primitivele următoare:

1. $\int \frac{\ln x}{x}dx, \quad x>0$

Soluție 1. Alegem $\varphi(x)=\ln x,$ iar $\varphi'(x)=\frac{1}{x}.$

Astfel:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \varphi(x)\varphi'(x)dx = \frac{\varphi^2(x)}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

Soluție 2. Întrucât $\frac{1}{x}=(\ln x)'$ se obține:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)' dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

Soluție 3. Notând $\ln x = t$ şi diferențiind în ambii membrii, avem $\frac{1}{x}dx = dt$

Apoi:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}, \quad |x|<\frac{3}{4}$

Soluție 1. Alegem $4x=t,$ iar $dx=\frac{1}{4}dt, \; a=3.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{a} = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{3}x\right)$$

Soluție 2. Observăm că integrala dată se mai poate scrie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}}$$

Notând $\alpha = \frac{3}{4}$ obținem:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{x}{\alpha} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{4}x$$

3. $\int \frac{dx}{(1-2x)^{100}}$

Soluție. Notăm $1-2x = \varphi(x)$, iar $\varphi'(x) = -2$; atunci:

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^{100}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\varphi'}{\varphi^{100}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi^{-100+1}}{-100+1} = \frac{1}{2\cdot 99}\cdot\frac{1}{\varphi^{99}} = \frac{1}{198(1-2x)^{99}}$$

4. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$

Soluție. Notăm $x^2 = \varphi$, $a = 3$, iar $\varphi' = 2x$, apoi:

$$\int \frac{x\,dx}{9+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{3^2 + \left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'}{a^2+\varphi^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{3}\right)$$

5. $\int \frac{\cos x\,dx}{a+b\sin x}$, $\quad a+b\sin x \neq 0$

Soluție. Notând $\sin x = t$, integrala dată se rescrie:

$$\int \frac{dt}{a+bt} = \frac{1}{b}\ln\left|a+b\sin x\right|$$

6. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+b^2\sin^2 x}$, $\quad a,b \neq 0$

Soluție. Cu schimbarea $\sin x = t$, integrala devine:

$$\int \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\frac{a}{b}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}$$

Prin urmare, revenind la notația inițială:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\sin x\right)$$

7. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}}$

Soluție. Notând $e^x = t,\ a = \sqrt{5},$ obținem:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+a^2}\right) = \ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+5}\right)$$

8. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}, \quad e^{2x} < 4$

Soluție. Notăm $\sqrt{4-e^{2x}} = t,$ de unde rezultă $e^{2x} = 4-t^2,$ iar prin diferențiere $2e^{2x}dx = -2t\ dt,$ astfel:

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} = -\int \frac{t\ dt}{t} = -\int 1dt = -t = -\sqrt{4-e^{2x}}$$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

Soluție. Întrucât $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1,$ integrala se poate scrie succesiv:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$$

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$

Soluție. Alegem $\cos^2 x = t,$ iar $-2\sin x \cos x dx = dt.$ Cum $\sin 2x = 2\sin x \cos x,$ vom obține:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx = -\int \frac{(2\sin x \cos x)dx}{\sqrt{1+\left(\cos^2 x\right)^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

sau în varibila inițială

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx = -\ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right)$$

11. a. $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx$

b. $\int \left(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x\right)dx$

Soluție. Să observăm că $1+\operatorname{tg}^2 x = (\operatorname{tg} x)'.$ Într-adevăr:

$$1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)'$$

Astfel:

a. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int\left[\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)-1\right]dx = \int\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx - \int dx =$

$$= \int (\operatorname{tg} x)' dx - x = \operatorname{tg} x - x$$

b. $\int\left(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x\right)dx = \int \operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx = \int \operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x\right)' dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$

12. $\int \frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{4-x^2}}dx, \quad |x|<2$

Soluție. Observând că integrantul este de forma $\frac{f+g}{fg} = \frac{1}{g}+\frac{1}{f}$, putem scrie:

$$\int \frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = 2\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)$$

S-a ținut seama că:

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}} = 2\int\left(\sqrt{a+x}\right)' dx = 2\sqrt{a+x},$

iar

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = -2\int\left(\sqrt{a-x}\right)' dx = -2\sqrt{a-x}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}, \quad |x|>a>0$

Soluție. Integrantul se mai poate rescrie:

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{(x+a)-(x-a)} = \frac{1}{2a}\left[\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right]$$

iar, dacă ținem seama că:

a. $\int \sqrt{x+a}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+a)^3}$

b. $\int \sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-a)^3},$

atunci:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{1}{2a}\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+a}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-a}\right)^3\right] = \frac{1}{3a}\left[\left(\sqrt{x+a}\right)^3+\left(\sqrt{x-a}\right)^3\right]$$

14. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Soluție. Notând $\cos x = t, \quad -\sin x\,dx = dt$, integrala se rescrie:

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}, \quad x > 0$

Soluție. Notăm:

$$1+\sqrt{x} = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

apoi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = 2\ln\left|\varphi(x)\right| = 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$$

16. $\int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}, \quad x > 0$

Soluție. Dezvoltând la numărător, integrala devine:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{1-2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx - 2\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - 2\ln\ x =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} - 2\ln\ x + 2\sqrt{x}$$

17. $\int \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Soluție. Alegem $\sqrt[3]{x} = u$, iar $\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} = du$. Apoi scriem:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int \sin t\ dt = -3\cos t = -3\cos\sqrt[3]{x}$$

18. $\int x^2\sqrt{x^3+5}\ dx$

Soluție. Efectuăm schimbarea de variabilă:

$$\sqrt{x^3+5}=u \Leftrightarrow x^3+5=u^2 \therefore 3x^2dx=2u\ du.$$

Rescriem apoi integrala sub forma:

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\ dx=\frac{1}{3}\int u\cdot 2u\ du=\frac{2}{3}\int u^2du=\frac{2}{9}u^3=\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+5\right)^3}$$

19. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)},\quad x\neq a,\ x\neq b$

Soluție. Integrantul se poate rescrie şi sub forma:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)$$

Prin urmare:

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|$$

20. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}},\quad x\in(0,a)$

Soluție. Deoarece:

$$ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x^2+2x\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=b^2-(x-b)^2$$

cu $b=\dfrac{a}{2}$ integrala dată se rescrie:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-(x-b)^2}}=\arcsin\frac{x-b}{b}=\arcsin\frac{2x-a}{a}$$

21. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$

Soluție. Notăm $\arcsin x=t,$ unde $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$

De aici rezultă că:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\arcsin x}$$

22. $\displaystyle\int\frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad x\in(-1,\ 1)$

Soluție. Integrala se mai poate rescrie sub forma:

$$I=\int\frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

unde:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x$$

Pentru a doua integrală, se notează $t=\arccos x$, iar $dt=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, astfel că:

$$\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int t\ dt=-\frac{t^2}{2}=-\frac{1}{2}\arccos^2 x$$

$$I=-\arccos x-\frac{1}{2}\arccos^2 x$$

23. $\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\ln\left(1+x^2\right)+1}{1+x^2}dx,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Soluție. Notăm I, integrala dată, care se va scrie:

$$I=\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx+\int\ln\left(1+x^2\right)\frac{x\ dx}{1+x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}$$

Pentru prima integrală, alegem:

$$x\to t\ \therefore\ t=\operatorname{arctg} x,\quad dt=\frac{dx}{1+x^2}$$

astfel:

$$\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx=\int e^t dt=e^t$$

sau în variabila inițială:

$$I=e^{\operatorname{arctg} x}$$

Pentru a doua integrală, notăm:

$$\ln\left(1+x^2\right)=t\ \therefore\ \frac{2x\ dx}{1+x^2}=dt$$

aşa încât:

$$\int\ln\left(1+x^2\right)\frac{x\ dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int t\ dt=\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right)$$

Ultima integrală este:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x$$

în final:

$$I=e^{\operatorname{arctg} x}+\frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right)+\operatorname{arctg} x$$

24. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx, \quad x\in\mathbb{R}$

Soluție. Notăm $x^2+1=t^2$, iar $x\,dx=t\,dt$. Mai departe:

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx=\int x^2\sqrt{x^2+1}dx=\int\left(t^2-1\right)t^2dt=\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}$$

sau în variabila inițială:

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{5}\sqrt{\left(t^2+1\right)^5}-\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}$$

25. $\int\left(x+1\right)^3\sqrt{x^2+2x+5}dx$

Soluție. Notăm I integrala dată. Observăm că $x^2+2x+5=\left(x+1\right)^2+4.$ Schimbând $x+1=u,$ iar $dx=du,$ integrala devine:

$$I=\int u^3\sqrt{u^2+4}\cdot du$$

apoi alegem $t^2=u^2+4,$ cu $tdt=udu,$ astfel că:

$$I=\int u^2\sqrt{u^2+4}\;udu=\int\left(t^2-4\right)t^2dt=\int t^4dt-4\int t^2dt=\frac{t^5}{5}-\frac{4}{3}t^3\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{5}\sqrt{\left(u^2+4\right)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{\left(u^2+4\right)^3}$$

În variabila x se obține, în final:

$$I=\frac{1}{5}\sqrt{\left(x^2+2x+5\right)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{\left(x^2+2x+5\right)^3}$$

Exerciții propuse

1. $\int\frac{1}{x\ln x}dx, \qquad x>e$

$R:\ \ln\left(\ln x\right)$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}, \quad |x|>\frac{1}{2}$

$R:\ \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-1}\right|$

3. $\int\sqrt[5]{\left(2x+3\right)^3}dx$

$R:\ \frac{5}{16}\sqrt[5]{\left(2x+3\right)^8}$

4. $\int \frac{xdx}{1-9x^4}, \quad x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$R:\ -\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|$

5. $\int \frac{\sin xdx}{3-2\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}$

$R:\ \frac{1}{2}\ln|3-2\cos x|$

6. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$R:\ \ln|\sin x-\cos x|$

7. $\int \sin x\cos^3 xdx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$R:\ -\frac{1}{4}\cos^4 x$

8. $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x}, \quad x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$R:\ \ln(1+\operatorname{tg} x)$

9. $\int \frac{e^{2x}}{9+e^{4x}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$R:\ \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{3}$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}, \quad x \in \left(\frac{1}{e},e\right)$

$R:\ \arcsin(\ln x)$

11. $\int \frac{2^{x+1}+5^{x+1}}{10^x}dx, \quad x \in \mathbb{R}$

$R:\ -\frac{2}{5^x\ln 5}-\frac{5}{2^x\ln 2}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}, \quad x > \frac{1}{2}$

$R:\ \frac{1}{6}\left(\sqrt{(2x+1)^3}-\sqrt{(2x-1)^3}\right)$

13. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx, \quad x \in \mathbb{R}$

$R:\ -\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2 x}$

14. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$R:\ -\frac{1}{\sin x}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, \quad x > 0$

$R:\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

16. $\int \frac{dx}{x(x+a)}, \quad x \neq 0,\ x \neq -a$

$R:\ \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{x+a}\right|$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad x \in (0,2)$

$R:\ \arcsin(x-1)$

18. $\int \frac{dx}{5-4x-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 5\}$

$R:\ -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|$

19. $\int \left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x\right)dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$R:\ \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$

20. $\int \frac{x+\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}$

$R:\ \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}^2 x$

21. $\int \frac{x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x\in\mathbb{R}$

$R:\ \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

22. $\int x^5\sqrt{x^2+1}\ dx, \quad x\in\mathbb{R}$

$R:\ \frac{1}{7}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^7-\frac{2}{5}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$

23. $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x-3}\ dx, \quad x\in\mathbb{R}$

$R:\ \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-2x-3\right)^3}$

24. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+2x^2-x^4}}, \quad x\in(0,1)$

R: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}$

25. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}, \quad x\in\mathbb{R}$

R: $\operatorname{arctg}\left(e^x\right)$

1.3. Integrarea prin părți

Fie $u,v: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (I interval) două funcții derivabile cu derivatele continue pe I. Atunci are loc relația:

$$\boxed{\int udv = uv-\int v\ du}$$

numită şi formula integrării prin părți.

Exerciții rezlovate

1. $\int x\, e^x dx, \quad x \in \mathbb{R}$

Soluție. Alegem $dv = e^x dx,\ u = x,$ de unde $v = e^x$ şi $du = dx.$
Astfel:

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x = (x-1)e^x$$

2. $\int x \ln x\, dx, \quad x > 0$

Soluție. Alegem $dv = x\, dx$ şi $u = \ln x.$ De aici, $v = \dfrac{x^2}{2}$ şi $du = \dfrac{dx}{x}.$

Apoi:

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$$

3. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

Soluție. Notăm $u = \operatorname{arctg} x$ şi $dv = x\, dx.$ De aici rezultă:

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \text{ şi } v = \frac{x^2}{2}$$

Integrala devine:

$$I := \int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x^2}{1+x^2} dx}_{J}$$

unde:

$$J = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x$$

Înlocuind mai sus pe J, se obține:

$$I = \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$$

4. $\int x^2 e^x dx$

Soluție. Notăm I integrala dată. Alegem:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Apoi:

$$I=\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

unde integrala din membrul drept este (*vezi exercițiul 1*)

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x$$

În final, rezultă:

$$I = x^2e^x - 2(x-1)e^x = \left(x^2-2x+2\right)e^x$$

5. $\int x^2 \ln x \, dx$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv = x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

Urmează că:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x}dx == \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

6. $\int x^2 \ln^2 x \, dx$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv = x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

Apoi:

$$\int x^2 \ln^2 x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^3 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x \, dx$$

unde, din exercițiul anterior:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{9}(\ln x - 1)$$

iar în final, rezultă:

$$\int x^2 \ln^2 x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{27}x^3(\ln x - 1) = \frac{x^3}{27}\left(9\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)$$

7. $\int \ln x \, dx, \quad x>0$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

Apoi:

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

8. $\int \operatorname{arctg} x \, dx, \quad x \in \mathbb{R}$

Soluție. Se notează:

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ v = x \end{cases}$$

Deducem de aici că:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \ \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Pentru integrala din membrul drept alegem $\varphi(x) = 1 + x^2$ şi $\varphi'(x) = 2x,$ astfel că:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \frac{1}{2} \ln|\varphi(x)| = \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)$$

În final:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \ \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)$$

9. $\int \arccos x \, dx, \quad x \in (-1, 1)$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u = \arccos x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$$

Apoi:

$$\int \arccos x \, dx = x \ \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Se observă că integrala din membrul drept devine cu substituția $\varphi(x) = 1 - x^2$ şi $\varphi'(x) = -2x$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{\varphi'(x)dx}{2\sqrt{\varphi(x)}} = -\sqrt{\varphi(x)} = -\sqrt{1-x^2}$$

iar în final:

$$\int \arccos x \, dx = x \ \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

10. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx, \quad x>1$

Soluție. Notăm cu I integrala dată şi alegem:

$$\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ v=x \end{cases}$$

apoi integrăm prin părți:

$$I=\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Dar integrala din membrul secund se poate rescrie:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2-1}}=\int\left(\sqrt{x^2-1}\right)'dx=\sqrt{x^2-1}$$

Astfel:

$$I=x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}$$

11. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u=\ln\left(x^2+1\right) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2x}{1+x^2} \\ v=x \end{cases}$$

iar apoi:

$$\int \ln\left(x^2+1\right)dx = x\ln\left(x^2+1\right)-2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Însă:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int \frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arctg} x$$

astfel:

$$\int \ln\left(x^2+1\right)dx = x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arc\,tg} x$$

12. $\int \cos x\, \ln\left(1+\cos x\right)dx, \quad x\in\left(-\pi,\pi\right)$

Soluție. Notăm I integrala din enunț şi alegem:

$$\begin{cases} u=\ln\left(1+\cos x\right) \\ dv=\cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{-\sin x dx}{1+\cos x} \\ v=\sin x \end{cases}$$

Apoi:

$$I=\sin x\ \ln\left(1+\cos x\right)+\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$$

Ultima integrală se poate rescrie succesiv:

$$\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx=\int\left(1-\cos x\right)dx=x-\sin x$$

În final:

$$I=\sin x\ \ln\left(1+\cos x\right)+x-\sin x$$

13. $\int\sin 2x\ \ln\left(1+\cos^2 x\right)dx$

Soluție. Notăm I integrala dată. Vom efectua, mai întâi, schimbarea de variabilă:

$$x\to t\ \therefore\ 1+\cos^2 x=t\ \text{ şi }\ -2\sin x\ \cos x\ dx=dt$$

dar $\sin 2x=2\sin x\cos x,$ aşa că $dx=-dt,$ iar integrala dată se reduce la:

$$I=-\int\ln t\ dt$$

Din *exercițiul 7*:

$$\int\ln t\ dt=t\ \left(\ln t-1\right)$$

În final:

$$I=-\left(1+\cos^2 x\right)\left[\ln\left(1+\cos^2 x\right)-1\right]$$

14. $\int x\ e^{-\sqrt{x}}dx,\quad x>0$

Soluție. Notăm I integrala dată. Observăm că:

$$I=2\int x\sqrt{x}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$$

iar dacă schimbăm $\sqrt{x}=t$ şi $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt,$ atunci:

$$I=2\int t^3e^{-t}dt$$

Mai departe, integrăm prin părți alegând:

$$\begin{cases}u=t^3\\ dv=e^{-t}dt\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}du=3t^2dt\\ v=-e^{-t}\end{cases}$$

Aşadar,

$$I=2\left(-t^3e^{-t}+3\int t^2e^{-t}dt\right)=-2t^3e^{-t}-6\int t^2e^{-t}dt$$

Pentru ultima integrală se procedează la o nouă integrare prin părți:

$$\begin{cases}u=t^2\\ dv=e^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2t\ dt\\ v=-e^{-t}\end{cases}$$

astfel că:

$$\int t^2 e^{-t}dt = -t^2e^{-t} + 2\int t\ e^{-t}dt,$$

unde

$$\int te^{-t}dt = -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t}$$

Se înlocuieşte mai sus acest rezultat:

$$I = -2t^3e^{-t} - 6\left(-t^2e^{-t} - 2t\ e^{-t} - 2e^{-t}\right) = -2\left(t^3 + 3t^2 + 6t + 6\right)e^{-t}$$

iar dacă se revine la notația inițială cu $t = \sqrt{x}$, se obține:

$$I = -2\left(x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + 6\right)e^{-\sqrt{x}}$$

15. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Soluție. Vom integra prin părți alegând:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Astfel:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\ \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\ dx = x\ \operatorname{tg} x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx =$$

$$= x\ \operatorname{tg} x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = x\ \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$$

Observație

Prezentăm pe scurt aşa–zisa *metodă a coeficienților nedeterminați* drept o cale teoretică de deducere a unor primitive mai generale calculate cu metoda integrării prin părți.

Metoda constă în determinarea unor coeficienți – constante reale care apar în expresiile unor primitive a căror formă generală se presupune cunoscută. Nu există o teorie generală în acest sens. Pentru o clasă destul de restrânsă s-a putut aplica această cale.

Exerciții rezolvate

1. $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$

Am văzut la paragraful anterior că:

$$\int e^{x}\cos x dx = e^{x}(\cos x+\sin x)$$

Vom presupune că:

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$$

cu A şi B apriori nedeterminați. Derivăm în ultima egalitate termen cu termen, în ambii membrii şi apoi grupăm convenabil, astfel că:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{\alpha x}(\alpha A\cos\beta x + \alpha B\sin\beta x$$
$$+\beta B\cos\beta x - \alpha A\sin\beta x)$$
$$e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{\alpha x}(\alpha A+\beta B)\cos\beta x + (\alpha B-\alpha A)\sin\beta x$$

Identificăm, apoi, coeficienții nederminați ai lui $e^{\alpha x}\cos\beta x$, respectiv, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ în ambii membrii; rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \alpha A+\beta B=1 \\ -\beta A+\alpha B=0 \end{cases}$$

a cărui soluție este: $A=\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $B=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. Înlocuind valorile lui A şi B, obținem valoarea integralei:

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int e^{-x}\cos 2x dx$$

Soluție. Căutăm soluție de forma:

$$\int e^{-x}\cos 2x dx = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Derivăm în ambii membrii în ultima egalitate şi identificând coeficienții nedeterminați, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} -A+2B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases}$$

a cărui soluție este: $A=\dfrac{2}{5}$, $B=-\dfrac{1}{5}$. Înlocuim mai sus şi rezultă, în final:

$$\int e^{-x}\cos 2x dx = \frac{e^{-x}}{5}(2\sin 2x - \cos 2x)$$

2. $\boxed{\int P_n(x)\ln^k x dx = Q_n(x)T_k(\ln(x))}$

unde $n,k \in \mathbb{N}$, $P_n(x)$ şi $Q_{n+1}(x)$ sunt polinoame cu $gradP_n = n$, $\mathrm{grad}\,Q_{n+1} = n+1$, iar $T_k(\ln x)$ polinom cu $\mathrm{grad}\,T_k = k+1$ în nedeterminata $\ln x$.

Aplicații. Să se calculeze:

$$\int x\ln^2 x dx$$

Soluție. Suntem în cazul $n=1$, $k=3$. Punem:

$$\int x\ln^2 x dx = (Ax^2 + Bx + C)(\ln^2 x + D\ln x + E)$$

Derivăm în ambii membrii termen cu termen şi apoi grupăm convenabil:

$$x\ln^2 x = (2Ax + B)(\ln^2 x + D\ln x + E) + (Ax^2 + Bx + C)(\frac{2}{x}\ln x + \frac{D}{x}) \Leftrightarrow$$

$$x\ln^2 x = 2Ax\ln^2 x + B\ln^2 x + (2AD + 2A)x\ln x + (BD + 2B)\ln x +$$
$$+(BE + BD) + 2C\frac{1}{x}\ln x + CD\frac{1}{x}$$

Identificăm coeficienții nedeterminați:

$$\begin{array}{l|l}
x\ln x & 2A = 1 \\
\ln x & B = 0 \\
x^2 & 2A(D+1) = 0 \\
x & B(D+2) = 0 \\
x^0 & B(E+D) = 0 \\
\frac{1}{x} & 2C = 0 \\
 & CD = 0
\end{array}$$

1.4. Integrale recurente

Exerciții rezolvate

1. $I_n = \int x^n e^x dx, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Se integrează prin părți, alegând:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Astfel:

$$I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$$

Prin urmare:

$$\boxed{I_n = \int x^n e^x dxdx = x^n e^x - nI_{n-1}, \ \forall n \geq 1}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_3 = \int x^3 e^x dx$$

Pentru $n = 0$, I_0 se calculează plecând de la definiție:

$$I_0 = \int e^x dx = e^x$$

Pentru fiecare $n \geq 1$, calculul lui I_n se face aplicând relația de recurență:

$$I_1 = \int xe^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$I_3 = \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 - 3(x^2 - 2x + 2)e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$$

2. $I_n = \int \ln^n x \, dx, \qquad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Efectuăm o integrare prin părți. Alegem:

$$\begin{cases} u = \ln^n x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n \ln^{n-1} x \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

Astfel:

$$I_n = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx = x \ln^n x - n I_{n-1}$$

de unde:

$$\boxed{I_n = \int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - n I_{n-1}, \quad \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_3 = \int \ln^3 x \, dx, \qquad x > 0$$

Pentru $n = 0$, $I_0 = x$, apoi ținând cont de relația de recurență vom calcula:

$$I_1 = \int \ln x = x \ln x - x = x\left(\ln x - 1\right)$$

$$I_2 = \int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - 2I_1 = x \ln^2 x - 2x\left(\ln x - 1\right) =$$
$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x = x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$$

$$I_3 = \int \ln^3 x \, dx = x \ln^3 x - 3I_2 = x \ln^3 x -$$
$$- 3\left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x\right) = x\left(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6\right)$$

3. $I_n = \int x^\alpha \ln^n x \, dx, \qquad \alpha \neq -1, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x > 0$

Soluție. Integrăm prin părți alegând:

$$\begin{cases} u = \ln^n x \\ dv = x^\alpha dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n \ln x \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} dx \end{cases}$$

Apoi:

$$I_n = \alpha x^{\alpha-1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha-1}\int x^{\alpha+1}\frac{\ln^{n-1}x}{x}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}, \quad \forall n \ge 1$$

Prin urmare:

$$\boxed{I_n = \int x^{\alpha}\left(\ln x\right)^n dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x\right)^n - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}, \quad \alpha \ne -1, \quad n \ge 1}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_3 = \int \sqrt[3]{x}\ln^2 x\, dx$$

Se calculează $I_0 = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ plecând de la definiție, iar pentru $n \ge 1$ se utilizează relația de recurență:

$$I_1 = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\ln x - \frac{1}{\frac{4}{3}}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4}\left(\frac{4}{3}\ln x - 1\right)$$

$$I_2 = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\ln^2 x - \frac{2}{\frac{4}{3}}\frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}\ln x - 1\right) = \frac{27}{64}\sqrt[3]{x^4}\left(\ln^2 x - \frac{8}{3}\ln x + 2\right)$$

4. $I_n = \int e^{\alpha x}\sin^n x\, dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Vom integra prin părți:

$$\begin{cases} u = \sin^n x \\ dv = e^{\alpha x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n\sin^{n-1}x\cos x\, dx \\ v = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}$$

Avem:

$$I_n = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin^n x - \frac{n}{\alpha}\overbrace{\int e^{\alpha x}\sin^{n-1}x\cos x\, dx}^{J}$$

Efectuăm o nouă integrare prin părţi în ultima integrală, notată J, pentru:

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \cos x \\ dv = e^{\alpha x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left[(n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x \right] dx \\ v = \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \left[(n-1)\sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^n x \right] dx \Leftrightarrow$$

$$J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} + \frac{n-1}{\alpha} I_n + \frac{1}{\alpha} I_n \Leftrightarrow$$

$$J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin^{n-1} \cos x - \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} + \frac{n}{\alpha} I_n$$

Înlocuind expresia lui J mai sus vom putea scrie:

$$I_n = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin^n x - \frac{n}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} I_{n-2} - \frac{n^2}{\alpha^2} I_n \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2}\right) I_n = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} \sin^{n-1} x \left(\alpha \sin x - n \cos x\right) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} I_{n-2}$$

În final se obţine:

$$\boxed{I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{n^2 + \alpha^2} \sin^{n-1} x \left(\alpha \sin x - n \cos x\right) + \frac{n(n-1)}{n^2 + \alpha^2} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicaţie. Să se calculeze:

$$\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$$

Pentru $\alpha = -1, \quad n = 2$ calculăm:

$$I_2 = \frac{e^{-x}}{5} \sin x \left(-\sin x - 2\cos x\right) + \frac{2}{5} I_0$$

sau

$$I_2 = -\frac{e^{-x}}{5}\sin x\left(\sin x + 2\cos x\right) - \frac{2}{5}e^{-x}$$

5. $I_n = \int x^n \sqrt{x^2 + a^2}\, dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Integrăm prin părți, alegând:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + a^2} \\ dv = x^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{x\ dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{1}{n+1}\underbrace{\int x^{n+1}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}}_{J}$$

$$J = \int \frac{x^n\left[\left(x^2 + a^2\right) - a^2\right]}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = \int x^n\sqrt{x^2 + a^2}\,dx - a^2\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= I_n - a^2\int x^{n-1}\frac{2x\ dx}{2\sqrt{x^2 + a^2}} = I_n - a^2\int\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)' dx =$$

$$= I_n - a^2 x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\left(n-1\right)\underbrace{\int x^{n-2}\sqrt{x^2 + a^2}\,dx}_{I_{n-2}}$$

Prin urmare:

$$J = I_n + a^2\left(n-1\right)I_{n-2} - a^2 x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2}$$

Apoi înlocuind expresia lui J mai sus obținem:

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{1}{n+1}I_n - \frac{a^2\left(n-1\right)}{n+1}I_{n-2} + \frac{a^2}{n+1}x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)I_n = \frac{x^{n-1}}{n+1}\left(x^2 + a^2\right)\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2\left(n-1\right)}{n+1}I_{n-2}$$

De aici rezultă, în final:

$$\boxed{I_n=\int x^n\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x^{n-1}}{n+2}\left(x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2(n-1)}{n+2}I_{n-2},\quad \forall n\geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze folosind relația de recurență de mai sus:

$$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

Soluție. Notăm $I_2=\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

Fixăm $n=2$ şi ținem seama că:

$$I_0=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-$$

$$-\int\frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-I_n+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

sau

$$I_0=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

Prin urmare:

$$I_2=\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{4}\left(x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{4}I_0=$$

$$=\frac{x}{4}\left(x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

sau mai simplu:

$$I_2=\frac{x}{8}\left(2x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

6. $I_n=\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad |x|<a$

Soluție. Ca şi la exercițiul anterior vom face o integrare prin părți alegând:

$$\begin{cases} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ dv = x^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-x\ dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{n+1} I_n + \frac{a^2}{n+1} J_n$$

unde am notat:

$$J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Pentru a evalua integrala J_n vom proceda ca la *exercițiul 5*. Astfel:

$$J_n = \int x^{n-1} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int x^{n-1}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' dx = -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + \\ +(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

De aici se obține:

$$J_n = -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (n-1) I_{n-2}$$

Înlocuim J_n mai sus şi rezolvăm ecuația în necunoscuta I_n:

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{n+1} I_n + \frac{a^2(n-1)}{n+1} I_{n-2} - \frac{a^2 x^{n-1}}{n+1}\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{x^{n-1}}{n+1}\left(x^2 - a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2(n-1)}{n+1} I_{n-2}$$

În final, se obține:

$$\boxed{I_n = \int x^n \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{x^{n-1}}{n+2}\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}, \quad n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Notăm $I_3=\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Folosind relația de recurență obținută mai sus vom avea:

$$I_3=-\frac{x^2}{5}\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+a^2\frac{2}{5}I_1$$

Dar:

$$I_1=\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx$$

unde $\varphi(x)=a^2-x^2$, astfel că:

$$I_1=-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3$$

Apoi:

$$I_3=-\frac{x^2}{5}\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2a^2}{15}\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}\Leftrightarrow$$

$$I_3=-\frac{1}{15}\left(3x^2+2a^2\right)\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}$$

7. $I_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad x\in\mathbb{R}$

Soluție. Aducem integrala sub o formă convenabilă şi apoi integrăm prin părți:

$$I_n=\int x^{n-1}\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)'dx=$$

$$=x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}-(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}-(n-1)J_n$$

unde:

$$J_n = \int x^{n-2}\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{x^{n-2}\left(x^2+a^2\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + a^2\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

sau:

$$J_n = I_n + a^2 I_{n-2}$$

Înlocuim mai sus valoarea lui J_n, astfel că:

$$I_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)I_n - a^2(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$nI_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - a^2(n-1)I_{n-2}$$

iar în final:

$$\boxed{I_n = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{x^2+a^2} - a^2\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$A = \int \frac{x^3+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Soluție. Observăm că:

$$A = I_3 + 3I_1 = \frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}I_1 + 3I_1 = \frac{x^3}{3}\sqrt{x^2+1} + \frac{7}{3}I_1$$

I_1 se va calcula plecând de la definiție:

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2}$$

iar I_3 din relația de recurență obținută mai sus:

$$I_3 = \frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} + \frac{7}{3}I_1 = \frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} + \frac{7}{3}\sqrt{x^2+1} = \frac{x^2+7}{3}\sqrt{x^2+1}$$

8. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad |x| < a$

Soluție. Raționăm ca la *exercițiul 7*

$$I_n = -\int x^{n-1}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int x^{n-1}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)' dx = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} +$$

$$+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + a^2(n-1)\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx - (n-1)\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

Astfel obținem ecuația în I_n :

$$I_n = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + a^2(n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

De aici obținem, în final:

$$\boxed{I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{a^2-x^2} + a^2\frac{n-1}{n}I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$A = \int \frac{x^3+x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Soluție. Cu ajutorul relației de recurență (pentru $a=1$) putem scrie că:

$$A = I_3 + I_1 - I_0 = -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}I_1 + I_1 - I_0 = -\frac{x^3}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{5}I_1 - I_0$$

Dar:

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Înlocuind pe I_0 şi I_1 în expresia lui A obținem:

$$A = -\frac{x^3}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{5}{3}\sqrt{1-x^2} - \arcsin x$$

iar în final:

$$A = -\frac{1}{3}\left(x^2+5\right)\sqrt{1-x^2} - \arcsin x$$

9. $I_n = \int \frac{x^n dx}{x^2+a^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Printr-o simplă transformare se observă că:

$$I_n = \int \frac{x^{n-1}x^2}{x^2+a^2}dx = \int \frac{x^{n-2}\left[\left(x^2+a^2\right)-a^2\right]}{x^2+a^2} = \int x^{n-2}dx - a^2 I_{n-2}$$

Astfel:

$$\boxed{I_n =: \int \frac{x^n dx}{x^2+a^2} = \frac{x^{n-1}}{n-1} - a^2 I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{x^3 dx}{x^2+a^2}$$

Soluție. Notând I_3 integrala dată, se obține, cu ajutorul relației de recurență:

$$I_3 = \int \frac{x^3}{x^2+a^2}dx = \frac{x^2}{2} - a^2 I_1$$

unde I_1 se calculează direct:

$$I_1 = \int \frac{x\ dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + a^2\right)$$

astfel că:

$$I_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(x^2 + a^2\right)$$

10. $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$

Soluție. Observăm că integrala se mai scrie:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{\left(x^2 + a^2\right) - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{-x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$$

sau

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{a^2} J_n$$

unde:

$$J_n = \int - \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{2} \int x \frac{-2x\, dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$$

Pentru a evalua J_n, se va face o integrare prin părți cu:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{-2x\ dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \displaystyle\int \frac{-2x\ dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = -\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}} \end{cases}$$

Astfel se obține:

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}$$

sau

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$$

Înlocuim expresia lui J_n mai sus şi efectuăm calculele:

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{2n-1}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}, \quad n \geq 1}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

Soluție. Din relația de recurență, pentru $n = 2$ deducem că:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 - \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}$$

Cum:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

rezultă că:

$$I_2 = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{x^2+a^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$$

11. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax - x^2}}, \qquad x \in (0, 2a)$

Soluție 1. Efectuăm schimbarea de variabilă

$$x = 2at^2 \therefore dx = 4at\ dt$$

Astfel:

$$I_n = \int \frac{\left(2at^2\right)^n 4at\ dt}{\sqrt{4a^2t^2 - 4a^2t^4}} = 2\left(2a\right)^n \int \frac{t^{2n}dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Mai departe, observăm că integrala din membrul drept notată cu J_{2n} se poate calcula din *exercițiul 8* pentru $a = 1$ şi $n \to 2n$:

$$J_{2n} = \int \frac{t^{2n}dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t^{2n-1}}{2n}\sqrt{1-t^2} + \frac{2n-1}{2n}J_{2n-2}$$

Am găsit astfel următoarele relații de recurență:

$$\begin{cases} I_n = 2\left(2a\right)^n J_{2n} \\ J_{2n} = -\dfrac{t^{2n-1}}{2n}\sqrt{1-t^2} + \dfrac{2n-1}{2n}J_{2n-2} \\ t = \sqrt{\dfrac{x}{2a}} \end{cases}$$

Soluție 2. Aducem integrala dată la o formă convenabilă şi apoi aplicăm o integrare prin părți. Astfel:

$$I_n = -\int x^{n-1} \frac{\left[\left(2a-2x\right)-2a\right]}{2\sqrt{2ax-x^2}}dx = a\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}} - \int x^{n-1}\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)' dx$$

$$= aI_{n-1} - x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2} + \left(n-1\right)\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx \Leftrightarrow$$

$$I_n = aI_{n-1} - x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2} + \left(n-1\right)\int \frac{x^{n-1}\left(2ax-x^2\right)}{\sqrt{2ax-x^2}}dx \Leftrightarrow$$

$$I_n = aI_{n-1} - x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2} + 2a\left(n-1\right)I_n - \left(n-1\right)I_{n+1}$$

Se rezolvă ecuația obținută, în raport cu I_n :

$$\left[1-2a(n-1)\right]I_n = aI_{n-1} - (n-1)I_{n+1} - x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}$$

sau

$$\boxed{I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}{2a(n-1)-1} + \frac{n-1}{2a(n-1)-1}I_{n+1} - \frac{a}{2a(n-1)-1}I_n, \quad n \geq 1}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_2 = \int \frac{x^2 dx}{2ax-x^2}$$

Soluție. Din relația de recurență deducem că:

$$\begin{cases} I_2 = 2(2a)^2 J_4 \\ J_4 = -\dfrac{t^3}{4}\sqrt{1-t^2} + \dfrac{3}{4}J_2 \\ t = \sqrt{\dfrac{x}{2a}} \end{cases}$$

Pentru $n=1,\quad J_2 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}},$ care se obține din *exercițiul 8* alegând $a=1$ şi $x \to t$:

$$J_2 = -\frac{t}{4}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{a}$$

Înlocuim apoi J_2 în expresia lui J_4, astfel că:

$$J_4 = -\frac{t^3}{4}\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}t\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin\frac{t}{a}$$

În continuare se înlocuieşte J_4 în relația care ne dă pe I_2 şi apoi se revine la schimbarea: $t = \sqrt{\frac{x}{2a}}$. Lăsăm pe seama cititorului efectuarea calculelor!

În final, se obține:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{x^3 + ax^2 - 6a^2 x}{2\sqrt{2ax - x^2}} + 3\arcsin\frac{x-a}{a}$$

12. $I_n = \int \sin^n x \, dx$

Soluție. Scriem integrala sub forma:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

şi luăm apoi:

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x \, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Rezultă:

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \sin x^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

Rezolvând în raport cu I_n se obține, în final:

$$\boxed{I_n = \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_4 = \int \sin^4 x \, dx$$

Soluție. Conform relației de recurență:

$$I_4 = -\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{4} I_2$$

Dar:

$$I_2 = \int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \sin x\; dx = -\int \sin x \left(\cos x\right)'\, dx =$$
$$= -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx = = x \sin x \cos x - I_2$$

de unde deducem că:

$$I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x$$

iar în final, se găseşte:

$$I_4 = \int \sin^4 x\; dx = \frac{3x}{8} - \frac{3}{8}\cos x \sin x - \frac{1}{4}\sin x \cos x$$

Putem simplifica scrierea dacă se observă că:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{şi} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{2}$$

Astfel:

$$I_4 = \frac{3x}{8} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)$$

sau

$$I_4 = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

13. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

Soluție. Se observă că:

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x \cos^2 x}$$

iar dacă alegem:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\cos^{n-2} x} \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(n-2\right)\dfrac{\sin x\,dx}{\cos^{n-1} x} \\ v = \operatorname{tg}\, x \end{cases}$$

se obține:

$$I_n = \frac{\text{tg } x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin x \cdot \text{tg } x}{\cos^{n-1} x} dx = \frac{\text{tg } x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^n x} =$$

$$= \frac{\text{tg } x}{\cos^{n\text{-}2} x} - (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

sau mai departe:

$$I_n = \frac{\text{tg } x}{\cos^{n-1} x} - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$

iar în final:

$$\boxed{I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \qquad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_4 = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

Soluție. Din relația de recurență, pentru $n = 4$ obținem:

$$I_4 = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3} I_2$$

unde:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x$$

iar după înlocuire:

$$I_4 = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3} \text{tg } x$$

sau în final:

$$I_4 = \frac{1}{3} \text{tg}\, x \left(2 + \cos^2 x\right)$$

14. $I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Soluție. Se observă că:

$$I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x \left[\left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right) - 1\right] dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2} x \left(\mathrm{tg}\, x\right)' dx - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$$

Astfel:

$$\boxed{I_n = \int \mathrm{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1} x - I_{n-2}, \qquad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_5 = \int \mathrm{tg}^5 x\, dx$$

Soluție. Din relația de recurență:

$$I_5 = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - I_3$$

Apoi:

$$I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln\left(\cos x\right)$$

Astfel:

$$I_5 = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \ln\left|\cos x\right|$$

15. $I_n = \int \mathrm{ctg}^n x, \quad x \in \left(0, \pi\right)$

Soluție. Rescriem succsesiv integrala după cum urmează:

$$I_n=\int \operatorname{ctg}^n x\,dx=-\int \operatorname{ctg}^{n-2}x\left[1-\left(\operatorname{ctg}^2 x+1\right)\right]dx=-I_{n-2}+$$

$$+\int \operatorname{ctg}^{n-2}x\left(\operatorname{ctg}x\right)'dx=-I_{n-2}+\frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x,\ \forall n\geq 2$$

Astfel:

$$\boxed{I_n=\int \operatorname{ctg}^n x\,dx=\frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x-I_{n-2}\quad \forall n\geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_4=\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$$

Soluție. Raționând ca mai sus, scriem:

$$I_4=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-I_3$$

$$I_3=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-I_0$$

$$I_0=x$$

Înlocuind de jos în sus relațiile găsite deducem că:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+x$$

16. $I_n=\int x^n \sin x\,dx,\qquad x\in\mathbb{R}$

Soluție. Notăm:

$$\begin{cases}u=x^n\\ dv=\sin x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=nx^{n-1}dx\\ v=-\cos x\end{cases}$$

şi efectuăm o integrare prin părți:

$$I_n = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x \; dx$$

În ultima integrală alegem:

$$\begin{cases} u = x^{n-1} \\ dv = \cos x \; dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)x^{n-2} dx \\ v = \sin x \; dx \end{cases}$$

şi, efectuănd o nouă integrare prin părți, găsim:

$$\int x^{n-1} \cos x \; dx = x^{n-1} \sin x - (n-1)\underbrace{\int x^{n-2} \sin x \; dx}_{I}$$

Înlocuind acest rezultat în expresia lui I_n, obținem:

$$\boxed{I_n = \int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2}, \ \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$$

S*oluție.* Vom scrie succesiv relațiile:

$$I_3 = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6I_1$$

$$I_1 = \int x \sin x \; dx = -\int x(\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x \; dx = \sin x - x\cos x$$

Înlocuind I_1 în expresia lui I_3, obținem:

$$I_3 = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6\sin x = \left(-x^3 + 6x\right)\cos x + \left(3x^2 - 6x\right)\sin x$$

17. $I_n = \int (\arcsin x)^n \; dx$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u = (\arcsin x)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{n\left(\arcsin x\right)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$$

şi efectuăm o primă integrare prin părţi:

$$I_n = x\left(\arcsin x\right)^n - n\underbrace{\int x\frac{\left(\arcsin x\right)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{J}$$

Notăm:

$$J = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arcsin x\right)^{n-1} dx$$

Pentru a calcula ultima integrală, vom nota:

$$\begin{cases} u = \left(\arcsin x\right)^{n-1} \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\left(n-1\right)\left(\arcsin x\right)^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Astfel:

$$J = -\sqrt{1-x^2}\left(\arcsin x\right)^{n-1} + \left(n-1\right)\int \frac{\left(\arcsin x\right)^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\left(\arcsin x\right)^{n-1} + \left(n-1\right)I_{n-2}$$

Înlocuim expresia lui J mai sus, astfel că:

$$I_n = x\left(\arcsin x\right)^n + n\sqrt{1-x^2}\left(\arcsin x\right)^{n-1} - n\left(n-1\right)I_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Aplicaţie. Să se calculeze:

$$I_2 = \int \arcsin^2 x \, dx$$

Soluţie.

$$I_2 = -2x + x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$$

unde am ținut seama că: $I_0 = x$

18. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}dx$

Soluție. Considerăm:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{a+bx}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = \dfrac{2}{b}\sqrt{a+bx} \end{cases}$$

apoi integrăm prin părți:

$$I_n = \frac{2x^n}{b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{b}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\ dx = \frac{2x^n}{b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{b}J$$

unde integrala:

$$J = \int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\ dx$$

se va descompune astfel:

$$J = \int \frac{x^{n-1}(a+bx)}{\sqrt{a+bx}}dx = a\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx}}dx + b\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}dx \Leftrightarrow$$

$$J = aI_{n-1} + bI_n$$

Înlocuind mai sus deducem că:

$$I_n = \frac{2}{b}x^n\sqrt{a+bx} - \frac{2na}{b}I_{n-1}2nI_n$$

sau în final:

$$\boxed{I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}dx = \frac{2x^n}{(2n+1)b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{a}{b}I_{n-1}, \quad \forall n \geq 1}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+3x}}$$

Soluție. Suntem în cazul $n=2,\ a=2,\ b=3$. Notăm I_2 integrala dată. Putem scrie conform relației de recurență:

$$I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+3x}} = \frac{2x^2}{15}\sqrt{2+3x} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x\ dx}{\sqrt{2+3x}} = \frac{2x}{9}\sqrt{2+3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} I_0$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3}\sqrt{2+3x}$$

Efectuând înlocuirile de jos în sus, obținem:

$$I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+3x}} = \frac{2}{15}x^2\sqrt{2+3x} - \frac{8}{15}\left(\frac{2x}{9}\sqrt{2+3x} - \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2+3x}\right)$$

sau în final:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+3x}} = \frac{2}{15}\sqrt{2+3}\left(x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{135}\right)$$

19. $a)\ I_n = \int \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$, $\quad b)\ J_n = \int \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

Soluție. Se consideră mai întâi:

$$J_{n-1} = \int \frac{x^{n-1} \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

care se integrează prin părți alegând:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{(n-1)x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \dfrac{x^n}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx \\ v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{cases}$$

Astfel:

$$J_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}\left(1+x^2\right)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)}dx + \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)}dx \Leftrightarrow$$

$$J_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} - (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n + J_n$$

Rezultă de aici relația de recurență pentru J_n

$$(n-2)J_n = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} - J_{n-1} - (n-1)J_{n-2}, \quad n > 2$$

Apoi, pentru integralele I_n, se observă că:

$$I_n = \int \frac{x^n\left(1+x^2\right)e^{\operatorname{arctgx}}}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctgx}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx + \int \frac{x^{n+2}e^{\operatorname{arctgx}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx$$

de unde deducem că:

$$\boxed{I_n = J_n + J_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Aplicație. Să se calculeze integralele:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctgx}}dx, \quad \int \frac{x^3 e^{\operatorname{arctgx}}}{\left(\sqrt{1+x}\right)^3}dx$$

unde conform notațiilor de mai sus avem de calculat integralele I_2 si respectiv J_3. Fie pentru început:

$$J_3 = \int \frac{x^3 e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx$$

Alegem $n=3$, respectiv $n=2$ în relația de recurență corespunzătoare integralei J_n, astfel:

$$J_3 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} - J_2 - 2J_{1,}$$

$$J_2 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} - J_1 - 2J_0$$

$$J_0 = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx = \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$$

Înlocuind mai sus urmează că:

$$J_1 = \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} = -\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Pe de altă parte, pentru $n=2$ nu se poate aplica relația de recurență, astfel că pentru a evalua pe J_2 vom scrie:

$$J_2 = \int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx = \int \frac{\left(1+x^2\right)x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} e^{\operatorname{arctg} x} dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx$$

sau

$$J_2 = J_0 - J_2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{x+1}{4\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$$

Înlocuind valorile lui J_0, J_1, J_2 în relația ce ne dă pe J_3, obținem:

$$J_3 = \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x+1}{4\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{2e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

În final, găsim:

$$J_3 = \int \frac{x^3 e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx$$

Evaluăm acum integrala I_3. Conform relației de recurență:

$$I_2 = J_2 + J_3$$

unde:

$$J_2 = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{4\sqrt{1+x^2}}(x+1)$$

$$J_3 = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{4\sqrt{1+x^2}}(4x^2 - x - 3)$$

$$J_2 + J_3 = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{4\sqrt{1+x^2}}(4x^2 - 2) = \frac{2x^2 - 1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$$

astfel:

$$I_2 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} = \frac{2x^2 - 1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$$

Exerciții propuse

I. Să se stabilească relații de recurență pentru următoarele integrale nedefinite:

1. $I_n = \int x^n e^{-x} dx$

R: $I_n = -x^n e^x + nI_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$

2. $I_{m,n} = \int x^m \ln^n x\,dx, \quad m,n \in \mathbb{N}$

$R:\ I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$

3. $I_n = \int e^{\alpha x} \cos^n x\ dx$

$R:\ I_n = \frac{e^{\alpha} x}{n^2 + a^2}(\alpha \cos x + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} I_{n-2}, \quad \forall n \ge 2$

4. $I_n = \int x^n \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

$R:\ I_n = \frac{x^{n-1}}{n+2}\left(x^2 - a^2\right)\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\,\frac{n-1}{n+2} I_{n-2}, \ \forall n \ge 2$

5. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$R:\ I_n = \frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\,\frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \ge 2$

6. $I_n = \int \frac{x^n}{x^2 - a^2} dx$

$R:\ I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} + a^2 I_{n-2}, \quad \forall n \ge 2$

7. $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^n}$

$R:\ I_n = -\frac{2n-1}{2a^2(n-1)} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}}, \ n \ge 2$

8. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax + x^2}}, \quad x \in (-\infty, -2a) \cup (0, \infty)$

$$R: \begin{cases} I_n = 2(2a)^n J_{2n} \\ J_{2n} = \dfrac{t^{2n-1}}{2n}\sqrt{t^2-1} - a^2\dfrac{n-1}{n}J_{2n-2} \\ \text{cu } x = 2at^2 \end{cases}$$

9. $I_n = \int \cos^n dx$

$R: I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

10. $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx, \ x \neq 0$

$R: I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \ \forall n \geq 2$

11. $I_n = \int x^n \cos x \ dx, \quad x \in \mathbb{R}$

$R: \ I_n = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) I_{n-2}, \ \forall n \geq 2$

12. $I_n = \int (\arccos x)^n \ dx$

$R: I_n = x(\arccos x)^n - n\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2}, \ n \geq 2$

13. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{2x-5}}, \quad x > \frac{5}{2}$

$R: \ I_n = \frac{2}{5} x^n \sqrt{2x-5} + 2nI_{n-1}, \ \forall n \geq 1$

14. $I_n = \int x^n \sqrt{ax+b} \ dx, \qquad a, \ b \neq 0$

$R: I_n = \frac{2x^n}{b(2n+3)}(ax+b)\sqrt{ax+b} - \frac{2bn}{a(2n+3)} I_{n-1}, \ \forall n \geq 1$

15. $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \ dx$

$$R:\ I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$$

II. Plecând de la relațiile de recurență stabilite în acest paragraf sau propuse spre determinare, să se demonstreze identitățile:

1. $\int x^n e^x dx=\left(x^n-nx^{n-1}+n\left(n-1\right)x^{n-2}-...+\left(-1\right)^n n!\right)e^x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$

2. $\int \ln^x dx=x\left[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n\left(n-1\right)\ln^{n-2}x-...+\left(-1\right)^n n\right],\ \forall x>0,\forall n\in\mathbb{N}$

3. $\int x^m\ln^n x\ dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln^n x-\frac{A_n^1}{m+1}\ln^{n-1}x+\frac{A_n^2}{\left(m+1\right)^2}\ln^{n-2}x-\ ...+\left(-1\right)^n\frac{A_n^n}{\left(m+1\right)^n}\right)$

$\forall n,\ m\in\mathbb{N},\ \ x>0$

a) dacă n este par:

$$\int \mathrm{tg}^n x=\frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{n-3}x+\frac{1}{n-5}\mathrm{tg}^{n-5}x-...+\left(-1\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\mathrm{tg}\,x-x\right)$$

b) dacă n este impar:

$$\int \mathrm{tg}^n x\ dx=\frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x-\frac{1}{n-3}\mathrm{tg}^{n-3}x+\frac{1}{n-5}\mathrm{tg}^{n-5}x-...+\left(-1\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|\right)$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

III. Folosind relațiile de recurență stabilite în acest paragraf, să se calculeze primitivele:

1. $\int x^5 e^{-x}dx$

$R:\ \ -e^{-x}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)$

2. $\int \left(x^3 - x + 1\right) e^x dx$

$R:\ e^x \left(x^3 - 3x^2 + 5x - 4\right)$

3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \ln^2 x\ dx$

$R:\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}\left(2\ln^2 x - 6\ln x + 9\right)$

4. $\int x^3 \ln^2 x\ dx$

$R:\ \frac{1}{32}x^4\left(8\ln^2 x - 4\ln x + 1\right)$

5. $\int e^{-x} \cos^2 n\ dx$

$R:\ -\frac{1}{10}e^{-x}\left(\cos 2x - 2\sin 2x + 5\right)$

6. $\int e^{-x} \sin^2 x\ dx$

$R:\ \frac{1}{10}e^{-x}\left(\cos 2x - 2\sin x - 5\right)$

7. $\int x^4 \sin x\ dx$

$R:\ -\left(x^4 - 12x^2 + 24\right)\cos x + \left(4x^3 - 24x\right)\sin x$

8. $\int x^3 \cos x\ dx$

$R:\ \left(3x^2 - 6x\right)\cos x + \left(x^3 - 6x\right)\sin x$

9. $\int \ln^4 x\ dx$

$R:\ x\left(\ln^4 x - 4\ln^3 x + 12\ln^2 x - 24\ln x + 24\right)$

10. $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$

$R:\ \frac{1}{8}x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

11. $\int x^2\sqrt{x^2-1}dx$

$R:\ \frac{1}{8}x\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(2x^2-1\right)-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

12. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

$R:\ \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}\left(2x^2-1\right)+\frac{1}{8}\arcsin x$

13. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$R:\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

14. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$R:\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

15. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$R:\ -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$

16. $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$

$R:\ -x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{arctg}\ x$

17. $\int \frac{x^4}{x^2-1}$

$R:\ x+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

18. $\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

$R:\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$

19. $\int \frac{x^2dx}{\left(x^2-1\right)}$

$R:\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

20. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

$R:\ \frac{1}{8}\frac{x\left(3x^2+5\right)}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}\ x$

21. $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^3}$

$R:\ \frac{1}{8}\frac{x\left(3x^2-5\right)}{\left(x^2-1\right)^2}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

22. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$R:\ \frac{x^3+x^2-6x}{2\sqrt{2x-x^2}}+3\arcsin\left(x-1\right)$

23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x}}$

$R:\ \frac{x^3-x^2-6x}{2\sqrt{2x+x^2}}+3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|$

24. $\int \sin^4 x\,dx$

$R:\ \frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

25. $\int \cos^4 x\ dx$

$R:\ \frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

26. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}dx$

$R:\ \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\ x\left(2+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

27. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}dx$

$R:\ \frac{1}{3}\operatorname{tg}\ x\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$

28. $\int \operatorname{tg}^4 x\ dx$

$R:\ x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}\ x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-4\right)$

29. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$

$R:\ x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\ x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-4\right)$

30. $\int\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$R:\ -2x+2\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}+x\arcsin^2\frac{x}{2}$

31. $\int \arccos^2 x\, dx$

$R:\ -2x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x+x\arccos^2 x$

32. $\int\frac{x^3}{\sqrt{2x-1}}dx$

$R:\ \frac{1}{35}\sqrt{2x-1}\left(5x^3+3x^2+2x+2\right)$

1.5. Integrarea funcțiilor raționale

Fie $P(x)$ și $Q(x)$ polinoame. O funcție rațională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se zice *proprie* dacă $\operatorname{grad}P(x)<\operatorname{grad}Q(x)$. Dacă funcția rațională este improprie, se împarte $P(x)$ la $Q(x)$, astfel încât:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

unde $\operatorname{grad}R(x)<\operatorname{grad}Q(x)$, $C(x)$ și $R(x)$ sunt, respectiv, câtul și restul împărțirii lui P la Q, iar $\frac{R(x)}{Q(x)}$ funcție rațională proprie. În cele ce urmează vom considera doar funcții raționale proprii.

1.5.1. *Integrarea funcțiilor raționale elementare*

Funcțiile $f(x)$ de forma:

$(i)\qquad \dfrac{A}{x-a}$

$(ii)\qquad \dfrac{A}{(x-a)^m},\qquad m\in\mathbb{N}$

$(iii)\qquad \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\qquad$ unde $p^2-4q<0$

$(iv)\qquad \dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n},\qquad$ unde $p^2-4q<0$ şi $n\in\mathbb{N}$

se mai numesc şi *funcții raționale elementare*. În toate cazurile A, B, p, q sunt numere reale. Toate cele patru tipuri de funcții menționate pot fi integrate fără dificultate. Într-adevăr:

$(i)\qquad \displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ \ln|x-a|+C$;

$(ii)\qquad \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = -\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$

Pentru a calcula integrala de forma:

$(iii)\qquad \displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

vom considera, mai întâi, cazul particular:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

Se ştie că:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{-\Delta}{4},\ \text{unde } \Delta=\mathrm{p}^2-4\mathrm{q}<0$$

Notând $x+\dfrac{p}{2}=\varphi$ şi $\dfrac{-\Delta}{4}=a^2$ putem scrie:

$$x^2+px+q=\varphi^2+a^2,\quad d\varphi = dx$$

iar integrala devine:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2}=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{\varphi}{a}=\frac{1}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4}}}\text{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-\Delta}{4}}}+C$$

În cazul general (iii), se aduce numărătorul $Ax+B$ la forma:

$$Ax+B=(2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B$$

Atunci:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

unde integrala din membrul drept a fost analizat mai sus. Pentru integralele de forma:

$$(iv)\quad \int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx\ ;\quad \Delta=p^2-4q<0$$

se va aplica metoda de mai sus, adică

$$Ax+B=\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B$$

şi atunci:

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\left(-\frac{Ap}{2}+B\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=$$

$$=-\frac{A}{2}\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{-\Delta}{4}\right]^n}$$

Cu notaţiile $x+\frac{p}{2}=:t,\ -\frac{\Delta}{4}=:a^2$ a doua integrală din membrul drept devine:

$$I_n=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{-\Delta}{4}\right]^n}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

pentru care s-a stabilit la paragraful precedent o relaţie de recurenţă.

Exerciții rezolvate

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Soluție.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

2. $\int \frac{dx}{3x^2+4x+2}$

Soluție.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{\sqrt{2}} + C$$

3. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$

Soluție. Se face substituția:

$$x \to t \therefore x^2-4x+8=t, \quad (2x-2)dx = dt$$

după care scriem:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{6x-2}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3(2x-2)+4}{x^2-4x+8}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx + \frac{4}{2}\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{4}\frac{dt}{t} + 2\frac{dx}{(x-2)^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t| + 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right) + \operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C$$

4. $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$

Soluție. Notăm I integrala din membrul drept. Se observă că:

$$I=\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{x\left(2x^2+3\right)}{x^4+x^2+1}dx.$$

Schimbarea de variabilă:

$$x\to t\ \therefore\ x^2=t,\ \ xdx=\frac{1}{2}dt$$

aduce integrala la forma:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+3)dt}{t^2+t+1}$$

O nouă schimbare de variabilă:

$$t^2+t+1=\varphi(t)\therefore 2tdt=\varphi'(t)dt$$

conduce la:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t+1+2}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}+\frac{2}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\ln|u|++\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^4+x^2+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$$

5. $\displaystyle\int\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$

Soluție. Se face schimbarea de variabilă:

$$x\to t\ \therefore\ x^2+2x+10=t,\ \ dt=(2x+2)dx$$

şi mai departe, se rescrie integrala succesiv:

$$\int\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{6x+4}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{3(2x+2)-2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{2}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+10\right)^2}=-\frac{3}{2t}-\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}=-\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-I_2$$

unde:

$$I_2=\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}$$

Dacă schimbăm:

$$x\to t\therefore x\ +\ 1\ =\ y,\ \ dy\ =\ dx$$

atunci:

$$I_2=\int\frac{dy}{\left(y^2+9\right)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{9}{\left(y^2+9\right)^2}dy=\frac{1}{9}\int\frac{9+y^2-y^2}{\left(y^2+9\right)^2}dy=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{y^2+9}{\left(y^2+9\right)^2}dy-\frac{1}{9}\int\frac{y^2}{\left(y^2+9\right)^2}dy=\frac{1}{9}\int\frac{dy}{y^2+9}-\frac{1}{9}\int y\frac{y}{\left(y^2+9\right)^2}dy$$

Ultima integrală se rezolvă prin părți, alegând:

$$\begin{cases} u=y \\ dv=\dfrac{y}{\left(y^2+9\right)^2}dy \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dy \\ v=-\dfrac{1}{2\left(y^2+9\right)} \end{cases}$$

$$I_2=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}-\frac{1}{9}\left(-\frac{y}{2\left(y^2+9\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2+9}\right)=\frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}+\frac{y}{18\left(y^2+9\right)}+$$

$$+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}=\frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{18\left(x^2+2x+10\right)}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}=$$

$$=\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{18\left(x^2+2x+10\right)}+C$$

În aceste condiții, integrala inițială devine:

$$\int\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=-\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-I_2=-\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-$$

$$-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}-\frac{3}{18\left(x^2+2x+10\right)}+C=-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}-\frac{x+28}{18\left(x^2+2x+10\right)}$$

Exerciții propuse

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^4}$

$R:\ -\frac{1}{3\left(x-1\right)^3}+C$

2. $\int\frac{dx}{\left(2x+3\right)^3}$

$R:\ -\frac{1}{4\left(2x+3\right)^2}+C$

3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$

$R:\quad \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C$

4. $\int \frac{x^2dx}{x^6-2x^3+3}$

$R:\quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^3+1}{\sqrt{2}}+C$

5. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$

$R:\quad \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+7\right)+C$

6. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$

$R:\quad \frac{5}{2}\ln\left(x^2+10x+29\right)-11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2}+C$

7. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$

$R:\quad \frac{1}{10}\ln\left(5x^2+2x+1\right)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{2}+C$

8. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)^3}$

$R:\quad \frac{x}{8\left(x^2+2\right)^2}+\frac{3x}{32\left(x^2+2\right)}+\frac{3\sqrt{2}}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$

9. $\int \frac{2x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx$

$R:\quad \frac{x-7}{8\left(x^2+2x+5\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$

1.5.2. Integrarea funcțiilor raționale prin descompunerea în fracții simple

Fie o funcție rațională *proprie* $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Presupunem că numitorul se descompune în factori ireductibili după:

$$Q(x) = \left(x-a_1\right)^{n_1}\left(x-a_2\right)^{n_2}...\left(x-a_k\right)^{n_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}...$$

$$...\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{m_l} \qquad p_j^2-4q_j<0,\ \left(j=1,2,...,l\right)$$

Atunci:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^2}+...+\frac{A_n}{\left(x-a\right)^n}+...+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+...$$

$$...+\frac{B_mx+C_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}$$

Pentru a determina constantele $A_i\ \left(1\le i\le n\right),\ B_j,\ C_j\ \left(1\le j\le m\right)$ se aduce la acelaşi numitor şi apoi se identifică *P(x)* cu numărătorul obținut în membrul drept, după care se integrează conform celor arătate la *1.5.1.*

Exerciții rezolvate

1. $\int\frac{x^2+3x+7}{\left(x^2-9\right)\left(x+1\right)}dx$

Soluție. Notăm, $Q(x)$ numitorul integrantului. Atunci:

$$Q(x) = (x^2-9)(x+1) = (x-3)(x+3)(x+1)$$

Se urmăreşte o descompunere de forma:

$$\frac{x^2+3x+7}{\left(x^2-9\right)\left(x+1\right)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A\left(x+3\right)\left(x+1\right)+B\left(x-3\right)\left(x+1\right)+C\left(x-3\right)\left(x+1\right)}{\left(x^2-9\right)\left(x+1\right)}$$

Constantele A,B,C se determină din identitatea:

$$x^2+3x+7 \equiv A(x^2+4x+3)+B(x^2-2x-3) + C(x^2-9)$$

sau

$$x^2+3x+7 \equiv (A+B+C)x^2+(4A-2B)x+\left(3A-3B-9C\right)$$

Identificând coeficienții se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 4A - 2B = 3 \\ 3A - 3B - 9C = 7 \end{cases}$$

de unde:

$$A=\frac{25}{24}, \quad B=\frac{7}{12}, \quad C=-\frac{29}{24}.$$

Atunci:

$$\frac{x^2+3x+7}{\left(x^2-9\right)\left(x+1\right)}=\frac{25}{24}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{29}{24}\cdot\frac{1}{x+1}$$

Integrala devine:

$$\int\frac{x^2+3x+7}{\left(x^2-9\right)\left(x+1\right)}dx=\frac{25}{24}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{29}{24}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{25}{24}\ln|x-3|+\frac{7}{12}\ln|x+3|-\frac{29}{24}\ln|x+1|+C$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{\left(x-1\right)^3\left(x+3\right)}dx$

Soluție. Se caută o reprezentare de forma:

$$\frac{x^2+1}{\left(x-1\right)^3\left(x+3\right)}=\frac{A}{\left(x-1\right)^3}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}$$

Aducând la numitor comun în membrul drept şi grupând convenabil după gradul lui x se obține:

$$x^2+1 \equiv A\left(x+3\right)+B\left(x-1\right)\left(x+3\right)+C\left(x-1\right)^2\left(x+3\right)+D\left(x-1\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$x^2+1 \equiv (C+D)x^3+(B+C-3D)x^2+(A+2B-5C+3D)x+$$
$$+\left(C-D+3A-3B+3\right)$$

Identificând coeficienții se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ B+C-3D=1 \\ A+2B-5C+3D=0 \\ 3A-3B+3C-D=1 \end{cases}$$

cu soluțiile: $A=\frac{1}{2}$, $\mathrm{B}=\frac{3}{8}$, $\mathrm{C}=\frac{5}{32}$, $\mathrm{D}=-\frac{5}{32}$

Astfel, descompunerea căutată este:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{x+3}$$

şi mai departe, integrala se rescrie succesiv:

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}-$$

$$-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{5}{32}\ln|x-1|-\frac{5}{32}\ln|x+3|$$

3. $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$

Soluţie. Se caută o descompunere de forma:

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x^3-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+4}{x^2+x-1}$$

şi apoi se aduce la acelaşi numitor:

$$1\equiv A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+$$
$$+(Dx+E)x^2(x-1)$$

şi grupăm convenabil:

$$1\equiv(B+C+D)x^4+(A+C+D)x^3+(C+E)x^2-Bx-A$$

Identificând coeficienţii se obţine:

$$\begin{cases} B+C+D=0\\ A+C-D+E=0\\ C-E=0\\ -B=0\\ -A=1\end{cases}$$

de unde, $A=-1,\ B=0,\ C=\frac{1}{3},\ D=-\frac{1}{3}$

Atunci:

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

iar dacă se integrează în ambii membrii:

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

4. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$

Soluție: Integrantul este o funcție rațională improprie, aşadar, se efectuează împărțirea cu rest:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{3-3} & -x^3 \qquad\quad -2x & x+3 \\ \cline{2-2} & \quad 3x^2+3x+7 & \\ & \; -3x^2 \qquad -6 & \\ \cline{2-2} & \qquad 3x+1 & \end{array}$$

Atunci integrantul se scrie sub forma:

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = (x+3) + \frac{3x+1}{x^2+2}$$

iar dacă se integrează în ambii membrii:

$$\int\left(x+3\right)dx + \int\frac{3x+1}{x^2+2}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 3\int\frac{x}{x^2+2}dx + \int\frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

5. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

Soluție. Se observă că:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)\,(x^2+x+1)$$

astfel, se va căuta o descompunere de forma:

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

de unde rezultă:

$$1 \equiv \left(Ax+B\right)\left(x^2+x+1\right) + \left(Cx+D\right)\left(x^2-x+1\right)$$

Identificând coeficienții nedeterminați, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} A \quad + C \quad = 0 \\ A + B - C + D = 0 \\ A + B + C - D = 0 \\ \quad B \quad + D = 1 \end{cases}$$

cu soluțiile: $B = \dfrac{1}{2}$, $D = \dfrac{1}{2}$, $A = -\dfrac{1}{2}$, $C = \dfrac{1}{2}$

Substituind mai sus valorile găsite, se obține descompunerea:

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + x + 1},$$

iar integrala dată se va calcula astfel:

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2 - x + 1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+1+1}{x^2 + x + 1}dx -$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{2x-1-1}{x^2 - x + 1}dx = \frac{1}{4}\ln\left(x^2 + x + 1\right) - \frac{1}{4}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} +$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} +$$

$$+\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4}dx$

Soluție. Se scrie ca produs de doi factori expresia de la numitor:

$$x^4 + 4 \; = \; (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \; = \; (x^2 - 2x + 2)\;(x^2 + 2x + 2)$$

apoi, se urmăreşte o descompunere de forma:

$$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

de unde rezultă:

$$x^2 + 2 \equiv \left(Ax + B\right)\left(x^2 + 2x + 2\right) + \left(Cx + D\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

Desfacem parantezele şi apoi grupăm convenabil, după care identificăm coeficienții nederminați. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} A \quad\quad + C \quad\quad = 0 \\ 2A + \quad B - 2C + \quad D = 1 \\ 2A + 2B + 2C - 2D = 0 \\ \quad\quad 2B \quad\quad + 2D = 2 \end{cases}$$

cu soluțiile: $A = 0,\ B = \dfrac{1}{2},\ C = 0,\ D = \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{x^2+2}{x^4+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{+1}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2}$$

Integrala devine:

$$\int \frac{x^2+2}{x^4+4}dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)\right]$$

7. $I = \displaystyle\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Soluție. Notăm $f(x)$ funcția de sub integrală. Întrucât gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, prin împărțire obținem:

$$f(x) = (x+1) - \frac{x+2}{x\left(x^2-x-2\right)}$$

Apoi:

$$I = \int f(x)dx = \int(x+1)dx - \int\frac{(x+2)dx}{x(x-2)(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{2} - J$$

Pentru calculul lui J vom descompune integrantul în două moduri:

I. Se caută o dezvoltare de forma:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1},$$

de unde rezultă că:

$$x+2 \equiv A(x-2)(x+1) + B\,x(x+1) + C\,x(x-2).$$

Am văzut că nedeterminatele $A, B, C,$ se obțin identificând în ambii membrii după puterile lui $x.$ Vom proceda la aşa-zisa *metodă a valorilor particulare*. Pentru $x = 2$ identitatea:

$$x+2 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

devine: $3B=2 \Rightarrow B=\frac{2}{3}$. Apoi, pentru $x=-1$ şi, respectiv $x=0$ găsim sistemul:

$$\begin{cases} 3C=1 \\ -2A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{3} \\ A=-1 \end{cases}$$

Astfel:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

II. Se descompune integrantul lui J prelucrând succesiv numărătorul:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}+\frac{2}{x(x-2)(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)}+\frac{x-(x-2)}{x(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{(x-2)(x+1)}-\frac{1}{x(x+1)}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

Cele două metode conduc, după cum se observă, la acelaşi rezultat. Integrala J devine în final:

$$J=-\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|$$

iar după ce se înlocuieşte în expresia lui I se găseşte, în final:

$$I=\frac{(x+1)^2}{2}+\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x-2|$$

8. $I=\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$

Soluție. Aici integrantul este o funcție rațională proprie, al cărui numitor are rădăcini reale, dintre care una fiind dublă:

$$x^3-2x+x=x(x-1)^2$$

Se caută o descompunere de forma:

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

de unde:

$$2x^2-3x+3\equiv A(x-1)^2+B\,x(x-1)+C\,x$$

iar dacă grupăm convenabil:

$$2x^2-3x+3\equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$$

Identificând coeficienții după puterile lui x, obținem sistemul:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+C=-3 \\ A=3 \end{cases}$$

cu soluția: $A=3,\quad B=-1,\quad C=2.$ Mai departe:

$$I=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=3\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}.$$

9. $\int\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}dx$

Soluție. Pentru a descompune integrantul în fracții simple, se caută o reprezentare de forma:

$$\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}.$$

Rezultă identitatea:

$$x^3-1\equiv A(x+1)^3+B\,x(x+1)^2+C\,x(x+1)+D\,x \tag{1}$$

Coeficienții A,B,C,D se obțin dând valori particulare lui x. De exemplu, pentru $x=0$ şi, respectiv $x=-1$ se găseşte sistemul:

$$\begin{cases} A=-1 \\ -D=-2 \end{cases}$$

Mai departe derivăm termen cu termen în (1) găsind identitatea:

$$3x^2=3A(x+1)^2+2B\,x(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)+C\,x+D$$

unde dacă se aleg din nou valorile $x=0$ şi $x=-1$, se obține:

$$\begin{cases} 3A+B+C+D=0 \\ -C+D=3 \end{cases}$$

Sistemul obținut conduce la soluția: $A=-1,\quad B=2,\quad C=-1,\quad D=2,$ astfel că:

$$\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$$

iar prin integrare, se găseşte în final:

$$\int\frac{x^3-1}{x(x+1)^3}dx=-\ln|x|+2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

10. $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}$

Soluție. Se caută constantele *A, B* şi *C* astfel încât să putem scrie:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

De aici se obține identitatea:

$$x\equiv A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)\Leftrightarrow x\equiv(-A+B+C)x+(A+C)$$

Identificând coeficienții după puterile lui x vom găsi:

$$\begin{cases} A+B \quad\quad =0\\ -A+B+C=1\\ A \quad\quad +C=0\end{cases}$$

de unde: $A=-\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{3},\quad C=\frac{1}{3}$

Înlocuind mai sus:

$$\frac{x}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

iar prin integrare în ambii membrii:

$$\int\frac{x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx$$

Pentru a evalua ultima integrală să observăm că:

$$\left(x^2-x+1\right)'=2x-1 \text{ şi } x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

iar mai departe:

$$\frac{x+1}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)+3}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

aşa că:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

În final, se obține:

$$\int \frac{x}{x^3+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

11. $I = \int \frac{dx}{x^4+a^4}$

Soluție. Întrucât:

$$x^4+a^4 = \left(x^2+a^2\right)^2 - 2a^2x^2 = \left(x^2-\sqrt{2}ax+a^2\right)\left(x^2+\sqrt{2}ax+a^2\right),$$

se caută o descompunere de forma:

$$\frac{1}{x^4+a^4} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}ax+a^2},$$

cu A, B, C, D apriori nedeterminați. Mai departe se scrie:

$$\begin{aligned}
1 \equiv\ & Ax^3 - \sqrt{2}a\,A\,x^2 + a^2\,A\,x \\
+\ & \quad B\,x^2 - \sqrt{2}a\,B\,x + a^2B \\
+\ & Cx^3 + \sqrt{2}a\,C\,x^2 + a^2C\,x \\
+\ & \quad D\,x^2 + \sqrt{2}a\,D\,x + a^2D \\
\hline
1 \equiv\ & \left(A+C\right)x^3 + \left(-\sqrt{2}a\,A + B + \sqrt{2}a\,C + D\right)x^2 + \\
& \left(a^2A - \sqrt{2}a\,B + a^2C + \sqrt{2}a\,D\right)x + \left(a^2B + a^2D\right)
\end{aligned}$$

După identificare se obține sistemul:

$$\begin{cases}
A + C = 0 \\
-\sqrt{2}a\,A + B + a\sqrt{2}\,C + D = 0 \\
a^2A - a\sqrt{2}\,B + a^2C + a\sqrt{2}\,D = 0 \\
B + D = \frac{1}{a^2}
\end{cases}$$

Scăzând ecuațiile a doua şi a patra între ele şi cuplând cu prima ecuație obținem sistemul:

$$\begin{cases}
a\sqrt{2}A - a\sqrt{2}C = \frac{1}{a^2} \\
\underline{A + C = 0} \quad \Big|\cdot a\sqrt{2}
\end{cases}$$

$$2a\sqrt{2}A \quad / = \frac{1}{\mathrm{a}^2} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}, \quad C = -\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}$$

Înlocuind pe A şi C în ecuația a treia şi cuplând cu ultima rezultă:

$$\left\{\begin{array}{l}-B+D=0\\ B+D=\dfrac{1}{a^2}\end{array}\right.$$

$$/\quad D=\frac{1}{2a^2},\quad B=\frac{1}{2a^2}$$

Înlocuind valorile găsite pentru A, B, C, D în expresia de mai sus:

$$\frac{1}{x^4+a^4}=\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\cdot\frac{x+a\sqrt{2}}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\cdot\frac{x-a\sqrt{2}}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2},$$

şi integrând în ambii membrii se ajunge la:

$$I=\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\int\frac{\left(x+a\sqrt{2}\right)dx}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\int\frac{\left(x-a\sqrt{2}\right)dx}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}$$

Evaluarea integralei I_1

Observând că

$$\left(x^2-a\sqrt{2}\,x+a^2\right)'=2x-a\sqrt{2}$$

iar

$$x^2-a\sqrt{2}x+a^2=\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

vom putea scrie:

$$\frac{x+a\sqrt{2}}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x-a\sqrt{2}\right)+3a\sqrt{2}}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-a\sqrt{2}}{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}$$
$$+\frac{3a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

Astfel că:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-a\sqrt{2}x+a^2\right)+\frac{3a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}},$$

sau:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-a\sqrt{2}x+a^2\right)+3\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{a}-1\right)$$

Evaluarea integralei I_2

Raționând ca mai sus se obține, analog:

$$\frac{x-a\sqrt{2}}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x+a\sqrt{2}\right)-3a\sqrt{2}}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+a\sqrt{2}}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot 3a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

de unde prin integrare se găseşte:

$$I_2=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+a\sqrt{2}x+a^2\right)-3arc\ \text{tg}\left(\frac{\sqrt{2}'x}{a}+1\right)$$

În final, se obține:

$$I=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-a\sqrt{2}x+a^2}{x^2+a\sqrt{2}x+a^2}\right)+\frac{3}{2a^3\sqrt{2}}\left[\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{a}-1\right)+\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{a}-1\right)\right]$$

12. $I=\int\frac{dx}{x^4-a^4}$

Soluție. Deoarece numitorul se poate scrie $x^4-a^4=\left(x^2-a^2\right)\left(x^2+a^2\right)$, vom căuta o descompunere de forma:

$$\frac{1}{x^4-a^4}=\frac{Ax+B}{x^2-a^2}+\frac{Cx+D}{x^2+a^2}.$$

Amplificând corespunzător şi efectuând calculele, se obține:

$$1\equiv\left(Ax+B\right)\left(x^2+a^2\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2-a^2\right).$$

Vom determina constantele *A, B, C, D* dând valori arbitrare lui *x*. Astfel pentru $x=0$ şi $x=a$ găsim:

$$\begin{cases} a^2B-a^2D=1 \\ 2a^3A+2a^2B=1 \end{cases}$$

iar pentru $x=\mathrm{i}a$, $\left(\mathrm{i}=\sqrt{-1}\right)$ se obține $-2\mathrm{i}a^3C-2a^2D=1$. În ultima ecuație se separă partea reală şi partea imaginară, obținând încă două relații. Astfel sistemul

$$\begin{cases} B-D=\frac{1}{a^2} \\ aA+B=\frac{1}{2a^2} \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2a^3} \end{cases}$$

furnizează soluția: $A=0,\quad B=\dfrac{1}{2a^2},\quad C=0,\quad D=-\dfrac{1}{2a^2}$

Înlocuind mai sus, se obține reprezentarea:

$$\frac{1}{x^4-a^4}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{x^2-a^2}-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}$$

iar prin integrare

$$I=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$$

sau, în final:

$$I=\frac{1}{4a^3}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$$

13. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$

Soluție. Întrucât numitorul are două perechi de rădăcini complex conjugate, căutăm o descompunere de forma:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Lăsăm pe seama cititorului determinarea constantelor *A, B, C, D*. Să observăm că se poate scrie, mai simplu:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(x^2+4\right)-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)$$

Astfel, prin integrare obținem:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

14. $\displaystyle I=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)}dx$

Soluție. După forma numitorului se caută o descompunere de forma:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2\left(x+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\frac{E}{x+1}$$

Amplificăm corespunzător fracțiile şi apoi identificăm coeficienții nedeterminați:

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=(Ax+B)(x^2+2x+3)(x+1)+(Cx+D)(x+1)+$$
$$+E(x^2+2x+3)^2$$

Dezvoltăm şi apoi grupăm după puterile lui x:

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=Ax^4+(3A+B)x^3+(5A+3B+C+E)x^2+$$
$$+(3A+5B+C+D+2E)+(3B+D+3E)$$

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A+B = 4 \\ 5A+3B+C+E=11 \\ 3A+5B+C+D+2E=12 \\ 3B+D+3E=8 \end{cases}$$

a cărui soluție este: $A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=0,\ E=1$

Înlocuind valorile găsite mai sus putem scrie că:

$$I=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+I_1$$

unde:

$$I_1=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

Să observăm că $\dfrac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}=\dfrac{(x+1)-2}{(x+1)^2+2}$. Notăm $x+1=t$ şi $2=a^2$ astfel încât:

$$I_1=\int\frac{(t-2)dt}{(t^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^2}-2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$$

unde,

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^2}=-\frac{1}{t^2+a^2}$$

iar

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left(\frac{a\,t}{t^2+a^2}+\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right)$$

astfel că înlocuind în expresia lui I_1 se găseşte:

$$I_1=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{2t+a^2}{t^2+a^2}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$$

sau revenind la notația inițială:

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

Cu I_1 în expresia lui I vom găsi în final:

$$I = \ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

15. $I = \int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^6 - 2x^3 + 1} dx$

Soluție. Observăm că integrantul se poate scrie:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{(x^3+1)^2} = \frac{(x^3+1) - x}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{(x^3+1)^2} - \frac{x^2}{(x^3+1)^2}.$$

Astfel:

$$I = \int \frac{dx}{(x^3+1)} - \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{(x^3+1)^2} = I_1 + \frac{1}{3(x^3+1)}.$$

Evaluarea integralei $I_1 = \int \frac{dx}{x^3+1}$ se poate face, fie direct, luând $a = 1$ în exercitiul 1, fie scriind integrantul sub forma

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

sau

$$1 \equiv A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1) \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$$

de unde prin identificare găsim sistemul:

$$\begin{cases} A+B \quad\quad = 0 \\ -A+B+C = 1 \\ A + \quad\; C = 1 \end{cases}$$

cu soluția $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. Astfel, înlociund valorile lui *A, B, C* mai sus se obține descompunerea:

$$\frac{1}{x^3+1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2-x+1}$$

Dacă se integrează în ultima egalitate găsim:

$$I_1 = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-x+1}$$

Întrucât:

$$\frac{x+2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)+5}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Exerciții propuse

Să se calculeze următoarele integrale de funcții raționale:

1. $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx$

$R:\ -\frac{2}{3}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-3| + C$

2. $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)\left(x^2+x+1\right)}dx$

$R:\ -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + 3\ln|x+2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

3. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x+2)}dx$

$R:\ \frac{1}{2(x-1)^2} + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

4. $\int \frac{dx}{x^3-8}$

$R:\ \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(x+1)\sqrt{3} + C$

5. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$

$R:\ \frac{31}{108}\ln|x-3|x + \frac{29}{108}\ln|x+3| + \frac{2}{9}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$

6. $\int \frac{dx}{\left(x^2-2x\right)^2}$

$R:\ \frac{1}{2}\frac{x-1}{x(2-x)}-\frac{1}{4}\ln\frac{x}{2-x}+C$

7. $\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$

$R:\ x+\frac{9}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$

8. $\int \frac{x^3-x^2}{x^2-6x+5}dx$

$R:\ \frac{x^2}{2}+7x+\frac{75}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$

9. $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx$

$R:\ x+\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)(x+2)\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$

10. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

$R:\ 5x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+C$

11. a) $\int \frac{dx}{x^3+a^3}$

$R:\ \frac{1}{\sqrt{3}a^2}\operatorname{arctg}\frac{x-2a}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2}+C$

b) $\int \frac{dx}{x^3-a^3}$

$R:\ -\frac{1}{\sqrt{3}a^2}\operatorname{arctg}\frac{x-2a}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6a^2}\ln\frac{x^2+ax+a^2}{(x-a)^2}+C$

12. a) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$R: \ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

$R: \ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

13. a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$

$R: \ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2+1}$

$R: \ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$

14. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+3x^2+4}$

$R: \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}x+C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2+1}$

$R: \ -2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C$

15. $\displaystyle\int \frac{15x^2-4x-81}{x^3-13x+12}dx$

$R: \ 3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C$

Indicație: Se descompune numitorul în factori primi:

$$x^3-13x+12=(x-3)(x-1)(x+4)$$

16. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x+2)(x^2-1)}$

$R:\quad \frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$

17. $\int\frac{2x^2+x+2}{x^3-2x^2+x}dx$

$R:\quad \frac{3}{x+1}+2\ln|x|+C$

18. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

$R:\quad -\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|-\ln|x|+C$

19. $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$

$R:\quad -\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

20. $\int\frac{x^2+1}{x^4-16}dx$

$R:\quad -\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{2}{x}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

21. $\int\frac{x^2-1}{x^4+16}dx$

$R:\quad \frac{3}{16\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right)\right]+\frac{5}{32\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-2\sqrt{2}x+4}{x^2+2\sqrt{2}x+4}\right|+C$

22. $\int\frac{dx}{x^3+x^5}$

$R:\quad -\frac{1}{2x^2}+\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+C$

23. $\int\frac{(x+1)\,dx}{\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+4x+5\right)}$

$R: \quad \frac{2}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x+2) + C$

24. $\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} dx$

R: $5x + \ln\left[x^2 (x+2)^4 |x-2|^3 \right] + C$

25. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$

R: $\frac{9x^2 + 50x + 68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + C$

26. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$

$R: \quad -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C$

27. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$

$R: \quad -\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

28. $\int \frac{x^3 + 3}{(x+1)(x^2+1)} dx$

$R: \quad \frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C$

29. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$

$R: \quad \ln|x| - \frac{1}{7} \ln|x^7 + 1| + C$

Indicație: Sub integrală rescriem: $1 \equiv (x^7 + 1) - x^7$

30. $\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)^2}$

$R:\quad \ln|x|-\frac{1}{5}\ln\left|x^5+1\right|+\frac{1}{5\left(x^5+1\right)}+C$

Indicație: Se va scrie: $1\equiv\left(x^5+1\right)-x^5$

31. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$

$R:\quad -\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}+C$

32. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$

$R:\quad -\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$

33. $\int \frac{x^3+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$

$R:\quad \frac{3x-17}{2\left(x^2-4x+5\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C$

34. $\int \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)\left(x^3+8\right)}dx$

$R:\quad \frac{1}{21}\left(8\ln\left|x^3+8\right|-\ln\left|x^3+1\right|\right)+C$

35. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$

$R:\quad \frac{1}{2}\ln\left|x^4-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|x^8+x^4-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-2\sqrt{5}}{2x^4+1+2\sqrt{5}}\right|+C$

1.6. Integrarea funcțiilor exponențiale

Reamintim că:

$$\boxed{\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{a} e^{\alpha x}, \; x \in \mathbb{R}}$$

Substituția generală:

$$\boxed{e^{\alpha x} = t \therefore e^{\alpha x} dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{\alpha t}}$$

transformă integralele de forma:

$$\boxed{\int R(e^{\alpha x}) dx}$$

în integrale de funcții raționale sau iraționale în raport cu noua variabilă t, după cum R este o funcție rațională, respectiv, irațională în e^x.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze integralele:

1. a) $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$

Soluție. Substituția $e^x = t$ aduce integrala dată la forma:

$$I = \int \frac{dx}{(1+t)t} = \int \frac{(1+t)-t}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \ln t - \ln|1+t|$$

sau în varibila x:

$$I = x - \ln\left|1+e^x\right|$$

b) $I=\int \frac{1}{a+be^{x}}dx, \qquad a,\ b=\text{const.}\quad a+be^{x}\neq 0$

Soluție. Substituția $e^{x}=t$ ne conduce la:

$$I=\int \frac{dx}{(a+bt)t}=\frac{1}{a}\int \frac{(a+bt)-bt}{t(a+bt)}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t}-\frac{b}{a}\int \frac{dt}{a+bt}=$$

$$=\frac{1}{a}\ln t-\frac{1}{a}\ln\left|a+bt\right|=\frac{x}{a}-\frac{1}{a}\ln\left|a+be^{ax}\right|$$

2. $I=\int \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

Soluție. Se efecuează substituția $e^{-x}=t \therefore e^{-x}dx=dt \Leftrightarrow -dx=\frac{dt}{t}$

$$I=-\int \frac{1-t}{t\left(1+t\right)}dt=\int \frac{t-1}{t\left(1+t\right)}dt=\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{dt}{t\left(1+t\right)}=\int \frac{dt}{t+1}-$$

$$-\int \frac{(t+1)-t}{t\left(1+t\right)}dt=2\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{dt}{t}=2\ln\left(1+t\right)-\ln t$$

Dacă se revine la notația inițială, cu $t=e^{-x}$, se obține în final:

$$I=-x+2\ln(1+e^{x})+C$$

3. $I=\int \frac{a_1+b_1e^{x}}{a+be^{x}}dx$

Soluție. Schimbarea: $e^{x}=t \therefore dx=\frac{dt}{t}$ conduce la:

$$I=\int \frac{a_1+b_1t}{t(a+bt)}dt=a_1\underbrace{\int \frac{dt}{t(a+bt)}}_{I_1}+b_1\underbrace{\int \frac{dt}{a+bt}}_{I_2}$$

unde:

$$I_2 = \frac{b_1}{b}\ln|a+bt|$$

şi

$$I_1 = \frac{a}{a_1}\int\frac{(a+bt)-bt}{t(a+bt)}dt = \frac{a}{a_1}\left(\int\frac{dt}{t} - \int\frac{b\cdot dt}{a+bt}\right) = \frac{a}{a_1}\left(\ln t - \ln|a+bt|\right)$$

sau în notația inițială:

$$I = \frac{a_1}{a}x + \left(\frac{b_1}{b} - \frac{a_1}{a}\right)\ln\left|a+be^x\right|$$

4. a) $I = \int\frac{dx}{3e^x + 2e^{-x}}$

Soluție. Se efectuează schimbarea $x \to t \;\therefore\; e^x = t,\; dx = \frac{dt}{t}$, aşa încât:

$$I = \int\frac{1}{\left(3t + \frac{2}{t}\right)}\cdot\frac{dt}{t} = \int\frac{dt}{3t^2+2} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot e^x\right)$$

b) $I = \int\frac{dx}{3e^x - 2e^{-x}}$

Soluție. Analog

$$I = \int\frac{1}{\left(3t - \frac{2}{t}\right)}\frac{dt}{t} = \int\frac{dt}{3t^2-2} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}e^x - \sqrt{2}}{\sqrt{3}e^x + \sqrt{2}}\right|$$

c) $I = \int\frac{dx}{ae^x + be^{-x}}, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}, \quad ae^x + be^{-x} \neq 0$

Soluție. Se procedează ca mai sus, aducând integrala la forma:

$$I=\int \frac{1}{\left(at+\frac{b}{t}\right)}\frac{dt}{t}=\int \frac{dt}{at^2+b}$$

Distingem următoarele situații:

i) dacă $ab>0$, atunci:

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

sau în varibila x:

$$I=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)$$

ii) dacă $ab<0$, atunci:

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)^2}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{-\frac{b}{a}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{-\frac{b}{a}}}{t+\sqrt{-\frac{b}{a}}}\right|$$

sau

$$I=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{e^x-\sqrt{-\frac{b}{a}}}{e^x+\sqrt{-\frac{b}{a}}}\right|$$

5. $I=\int \frac{dx}{ae^{mx}-be^{-mx}}$

Soluție. Schimbăm: $e^{mx}=t \therefore dx=\frac{1}{m}\frac{dt}{t}$, iar după înlocuiri se obține:

$$I=\frac{1}{ma}\int\frac{dt}{t^2-\frac{b}{a}}$$

i) dacă $ab>0$ atunci:

$$I=\frac{1}{2m\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{ae^{mx}-\sqrt{ab}}{ae^{mx}+\sqrt{ab}}\right|$$

ii) dacă $ab<0$ atunci:

$$I=\frac{1}{2m\sqrt{-ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}e^{mx}\right)$$

6. a) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

Soluție 1. Considerând schimbarea $x\to t\ \therefore\ e^x=t$ şi $dx=\frac{dt}{t}$ se ajunge la integrala:

$$I=\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

care se rezolvă utilizînd o a doua schimbare de variabilă:

$$t\to u\ \therefore\ \sqrt{1+t}=u,\ \ t=u^2-1 \text{ şi } dt=2udu$$

adică:

$$I=\int\frac{2\cancel{u}du}{\left(u^2-1\right)\cancel{u}}=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right|$$

sau în variabila inițială:

$$I=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|$$

Soluție 2. Dacă se utilizează schimbarea de variabilă:

$$x \to z \ \therefore\ 1+e^x = z^2 \Leftrightarrow x = \ln(z^2-1) \text{ şi } dx = \frac{2z}{z^2-1}dz$$

integrala se va scrie:

$$I = \int \frac{2\cancel{z}du}{\left(z^2-1\right)\cancel{z}} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|$$

b) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{-x}}}$

Soluție. Se notează $\sqrt{1+e^{-x}} = t,$ de unde rezultă că $dx = \frac{2tdt}{1-t^2}$ iar în acest caz:

$$J = \int \frac{2\cancel{t}du}{\left(1-t^2\right)\cancel{t}} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{-x}}+1}{\sqrt{1+e^{-x}}-1}\right|$$

7. a) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a-be^{mx}}}$

Soluție. Notăm $\sqrt{a-be^{mx}} = t,$ iar $be^{mx} = a^2 - t^2$ şi $dx = \frac{2tdt}{bm(t^2-a^2)}.$ Cu acestea:

$$I = \frac{2}{bm}\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{bm}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| = \frac{1}{bm}\ln\left|\frac{\sqrt{a-be^{mx}}-a}{\sqrt{a-be^{mx}}+a}\right|$$

b) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a-be^{-mx}}}$

Soluție. Notăm $\sqrt{a-be^{-mx}} = t,$ iar $be^{-mx} = a^2 - t^2$ şi $dx = \frac{-2tdt}{bm(t^2-a^2)}$

Apoi se procedează ca mai sus şi se obține:

$$I = \frac{1}{bm}\ln\left|\frac{\sqrt{a-be^{-mx}}+a}{\sqrt{a-be^{-mx}}-a}\right|$$

8. $I = \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$

Soluție. Schimbarea $e^x = t \therefore dx = \frac{dt}{t}$ aduce integrala la forma:

$$I = \int \frac{(t+1)dt}{t(t^2+1)} = \underbrace{\int \frac{dt}{t^2+1}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dt}{t(t^2+1)}}_{I_2} = I_1 - I_2$$

unde $I_1 = \operatorname{arctg} t,$ iar I_2 se poate rescrie după cum urmează:

$$I_2 = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{t(t^2+1)}dt = \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+1} = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

Înlocuind expresiile lui I_1 şi I_2 mai sus, se obține, în final:

$$I = \operatorname{arctg}(e^x) + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - x$$

9. a) $I = \int \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}dx$

Soluție. Cu substituția $e^x = t \therefore dx = \frac{dt}{t},$ se ajunge la o integrală obținută în *1.3.*

$$\boxed{I = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{(1+t^2)^2} + \operatorname{arctg} t\right)}$$

Prin urmare, în notațiile noastre:

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}+\operatorname{arctg}\left(e^x\right)\right]$$

b) $I=\int\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+e^{2x}}dx$

Soluție. Cu substituția $e^{\frac{x}{2}}=t \therefore dx=\frac{2dt}{t}$, integrala se rescrie succesiv:

$$I=\int\frac{\cancel{t}dt}{t^2+t^4}\frac{2dt}{\cancel{t}}=2\int\frac{dt}{t^2(t^2+1)}=2\int\frac{(t^2+1)-t^2}{t^2(t^2+1)}dt=$$

$$=2\left(\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=2\left(-\frac{1}{t}-\operatorname{arctg}t\right)=-2[e^{-\frac{x}{2}}+\operatorname{arctg}(e^{\frac{x}{2}})]$$

c) $I=\int\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{3}}(e^{\frac{x}{3}}+1)}dx$

Soluție. Notăm $e^{\frac{x}{6}}=t \therefore dx=\frac{6dt}{t}$, apoi rescriem integrala sub forma:

$$I=\int\frac{6\cancel{t^3}}{\cancel{t^2}(t^2+1)}\cdot\frac{dt}{\cancel{t}}=\int\frac{6dt}{t^2+1}=6\operatorname{arctg}t=6\operatorname{arctg}(e^{\frac{x}{6}})$$

10. $I=\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

Soluție. Substituind $x=\ln t \therefore dx=\frac{dt}{t}$ şi ținând seama că $e^{\ln t}=t$ rezultă că:

$$I=\int\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\frac{dt}{t}=\int\frac{(t-1)dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\underbrace{\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}}_{I_2}=I_1+I_2$$

unde:

$$I_1 = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right|$$

Pentru a evalua integrala I_2, să observăm că:

$$I_2 = -\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{t}$$

Aşadar:

$$I = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right| + \arcsin\frac{1}{t}$$

sau în notația inițială, obținem:

$$I = \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right| + \arcsin(e^{-x})$$

Exerciții propuse

1. a) $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

R: $\ln(1+e^x)$

b) $\int \frac{1}{a+be^{-x}}dx$

R: $-\frac{1}{a}\ln\left|b+ae^{-x}\right|$

2. a) $\int \frac{1}{2+3e^{5x}}dx$

R: $\frac{1}{15}\ln\left(2+3e^{5x}\right)$

b) $\int \frac{1}{a+be^{mx}}dx$

$R:\quad \frac{1}{mb}\ln\left(a+be^{mx}\right)$

3. a) $\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$

$R:\quad x-2\ln(1+e^x)$

b) $\int \frac{a_1+b_1e^{-x}}{a+be^x}dx$

$R:\quad \frac{b_1}{b}x+\frac{ba_1-ab_1}{ab}\ln\left|b+ae^x\right|$

4. a) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

$R:\quad \operatorname{arctg}(e^x)$

b) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

$R:\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$

5. a) $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$

$R:\quad i)\ \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot e^x)$, dacă $ab>0$

$ii)\ \frac{1}{2m\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{b+e^{mx}\sqrt{-ab}}{b-e^{mx}\sqrt{-ab}}\right|$, dacă $ab<0$

b) $\int \frac{dx}{2e^{2x}-3e^{-2x}}$

$R:\ \dfrac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{6}e^{2x}-3}{\sqrt{6}e^{-2x}+3}\right|$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{2e^{2x}+3e^{-2x}}$

$R:\ \dfrac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{2x}\right)$

6. a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$

$R:\ \ln\dfrac{\sqrt{1+e^{-2x}}+1}{\sqrt{1+e^{-2x}}-1}$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

$R:\ \ln\dfrac{\sqrt{1+e^{-2x}}-1}{\sqrt{1+e^{-2x}}+1}$

7. a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}}$

$R:\ i)\quad \dfrac{1}{m\sqrt{a}}\ln\dfrac{\sqrt{a+be^{mx}}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{mx}}+\sqrt{a}},\quad a>0$

$ii)\quad \dfrac{1}{m\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a+be^{mx}}}{\sqrt{-a}},\quad a<0$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-3e^{2x}}}$

$R:\ \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4-3e^{2x}}-2}{\sqrt{4-3e^{2x}}+2}\right|$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-5}}$

$R:\quad \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{e^{3x}-5}}{\sqrt{5}}\right)$

8. a) $\int \frac{1}{\sqrt{a+be^{-mx}}}dx$

$R:\quad i)\ \frac{1}{m\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+be^{-mx}}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{mx}}-\sqrt{a}},\qquad a>0$

$ii)\ -\frac{1}{m\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+be^{-mx}}}{\sqrt{-a}},\quad a<0$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{2+3e^{-2x}}}dx$

$R:\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+3e^{-2x}}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+3e^{-2x}}-\sqrt{2}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{5e^{-2x}-2}}$

$R:\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5e^{-2x}-2}}{\sqrt{2}}$

9. a) $\int \frac{a_1e^x+b_1}{ae^{2x}+b}dx$

$R:\quad i)\ \frac{b_1}{b}x+\frac{a_1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)-\frac{b_1}{2b}\ln\left(b+ae^{2x}\right),\quad ab>0$

$$ii)\ \frac{b_1}{b}x+\frac{a_1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left(\frac{e^{2x}-\sqrt{-\frac{b}{a}}}{e^{2x}+\sqrt{-\frac{b}{a}}}\right)-\frac{b_1}{2b}\ln\left(b+ae^{2x}\right),\ \ ab<0$$

b) $\int\frac{1}{ae^{2x}+b}dx$

$R:\ \ -\frac{b_1}{2b}\ln\left(b+ae^{2x}\right)$

c) $\int\frac{e^x}{ae^{2x}+b}dx$

$R:\ \ i)\ \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right),\qquad ab>0$

$$ii)\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left(\frac{e^{2x}-\sqrt{-\frac{b}{a}}}{e^{2x}+\sqrt{-\frac{b}{a}}}\right),\ \ ab<0$$

10. a) $\int\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}dx$

$R:\ \ \ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|+\arccos\left(e^{-x}\right)$

Indicație. Se va nota $x=\ln t$.

b) $\int\sqrt{e^{2x}-1}dx$

$R:\ \sqrt{e^{2x}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}$

Indicație. Se va nota $e^{2x}-1=t^2$

c) $\int\sqrt{e^{2x}+1}dx$

$R:\ \sqrt{e^{2x}+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$

11. a) $I=\int\frac{e^x}{(1-e^{2x})^2}dx$

$R:\ \frac{1}{e^x-1}$

b) $I=\int\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{2x}-e^x}dx$

$R:\ 2e^{-\frac{x}{2}}+\ln\left|\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right|$

c) $\int\frac{e^{2x}dx}{\left(e^x+1\right)^{\frac{1}{4}}}$

$R:\ \frac{4}{7}\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}$

1.7. Integrarea funcțiilor hiperbolice

I.7.1. Relații fundamentale. Integrale generale de funcții hiperbolice

Reamintim *funcțiile hiperbolice* studiate în liceu, de asemenea, relațiile funcționale şi integro-diferențiale care se stabilesc între acestea :

cosinusul hiperbolic: $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

sinusul hiperbolic: $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

tangenta hiperbolică: $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

cotangenta hiperbolică: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Relații fundamentale:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\ \operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \mp \operatorname{th} x \operatorname{th} y},\ \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \mp \operatorname{th} x \operatorname{th} y}{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \begin{cases} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \\ 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{1 - \operatorname{th}^2 x}{2 \operatorname{th} x}$$

Formule de linearizare pentru funcțiile hiperbolice:

$$2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{ch} x - 1,\ 2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{ch} x + 1$$

$$\operatorname{th}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1},\ \operatorname{cth}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}$$

Relații diferențiale:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Relații integrale:

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x, \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln(\operatorname{ch} x), \quad \int \operatorname{cth} x dx = \ln \operatorname{sh} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

Relații de transformare a sumei în produs:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x - y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}$$

$$\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y = \frac{\operatorname{ch}(x \pm y)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}$$

Relații de transformare a produsului în sumă:

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x-y) - \operatorname{ch}(x+y)]$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)]$$

Alte relații:

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$

$$\left(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x\right)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$$

Exerciții rezolvate

1. $\int \operatorname{sh}^2 x dx$

Soluția 1. Linearizând, $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$, deducem că:

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x - 1)dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x)$$

Soluția 2. Integrând prin părți putem scrie:

$$I = \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x dx = \int \operatorname{sh} x \left(\operatorname{ch} x\right)' dx = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch}^2 x dx \Leftrightarrow$$

$$I = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \int (1 + \operatorname{sh}^2 x)dx \Leftrightarrow 2I = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x\right)$$

astfel:

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} - x\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{sh} 2x - 2x\right)$$

2. $\int x \operatorname{sh} x dx$

Soluție. Notăm I integrala din enunț şi considerăm:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sh} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{ch} x \end{cases}$$

Atunci integrând prin părți:

$$I = x\operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

Astfel:

$$\int x\operatorname{sh} x dx = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

3. $\int x^2 \operatorname{ch} x dx$

Soluție. Notăm I – integrala din enunț şi vom integra de două ori prin părți. Fie:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \operatorname{ch} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \operatorname{sh} x \end{cases}$$

Astfel:

$$I = x^2 \operatorname{sh} x - 2\underbrace{\int x\operatorname{sh} x\, dx}_{I_1} = x^2 \operatorname{sh} x - 2I_1$$

Însă I_1 s-a obținut mai sus:

$$I_1 = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

În final:

$$\int x^2 \operatorname{ch} x dx = \left(x^2 + 2\right)\operatorname{sh} x - 2x\operatorname{ch} x$$

4. $\int x\operatorname{sh}^2 x dx$

Soluția 1. Se integrează prin părți după ce se liniarizează sinusul hiperbolic. Avem:

$$I = \int x\operatorname{sh}^2 x dx = \int x\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int x\operatorname{ch} 2x dx}_{I_1} - \frac{x^2}{4}$$

Pentru I_1 se notează $2x = t \therefore dx = \dfrac{dt}{2}$ apoi, se alege:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{ch} 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2x dx \end{cases}$$

astfel că:

$$I_1 = \frac{1}{2}x\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sh} 2x dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{4}\operatorname{ch} 2x = \frac{1}{4}\left(2x\operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 2x\right)$$

Înlocuind mai sus expresia lui I_1 obținem:

$$I = \frac{1}{8}\left(-2x^2 + 2x\operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 2x\right)$$

Soluția 2. Se integrează prin părți luând:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \mathrm{sh}^2 x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{4}(\mathrm{sh}\, 2x - 2x) \end{cases}$$

Astfel:

$$I = \frac{x}{4}(\mathrm{sh}\, 2x - 2x) - \frac{1}{4}\int(\mathrm{sh}\, 2x - 2x)dx = \frac{x}{4}\mathrm{sh}\, 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\mathrm{ch}\, 2x + \frac{x^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(-x^2 + 2x\,\mathrm{sh}\, 2x - \mathrm{ch}\, 2x\right)$$

Aşadar:

$$\int x\,\mathrm{sh}^2\, dx = -\frac{1}{8}\left(-x^2 + 2x\,\mathrm{sh}\, 2x - \mathrm{ch}\, 2x\right)$$

5. $I = \int x^2\, \mathrm{sh}^2\, axdx$

Soluție. Se integrează prin părți cu:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \mathrm{sh}^2\, ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \int \mathrm{sh}^2\, axdx = \dfrac{\mathrm{sh}\, 2ax - 2ax}{4a} \end{cases}$$

avem:

$$I = \frac{x^2}{4a}(\mathrm{sh}\, 2ax - 2ax) - \frac{1}{2a}\int x(\mathrm{sh}\, 2ax - 2ax)dx =$$

$$= \frac{x^2}{4a}(\mathrm{sh}\, 2ax - 2ax) - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2a}\underbrace{\int x\,\mathrm{sh}\, 2ax\, dx}_{I_1}$$

unde dacă se notează $2ax = t \therefore dx = \dfrac{dt}{2a}$, se găseşte:

$$I_1 = \frac{1}{4a^2}\int t\,\mathrm{sh}\, tdt = \frac{1}{4a^2}(t\,\mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t) = \frac{2ax\,\mathrm{ch}\, 2ax - \mathrm{sh}\, 2ax}{4a^2}$$

Înlocuim mai sus expresia lui I_1 şi restrângem, astfel că în final:

$$I = \int x^2\, \mathrm{sh}^2\, axdx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4a^2}\mathrm{ch}\, 2ax + \frac{1 + 2a^2x^2}{8a^3}\mathrm{sh}\, 2ax$$

Din rezultatele prezentate mai sus, rezultă următoarele reprezentări integrale:

$$\boxed{\int P_n(x)\mathrm{sh}\, axdx = A_n(x)\mathrm{ch}\, ax + B_n(x)\mathrm{sh}\, ax} \qquad (1)$$

unde A_n şi B_n sunt polinoame de acelaşi grad cu P_n, iar $\mathrm{grad}\, P_n = n$. Coeficienții polinoamelor A_n şi B_n se determină cu metoda coeficienților nedeterminați:

$$\boxed{\int P_n(x)\operatorname{ch} ax dx = A_n(x)\operatorname{ch} ax + B_n(x)\operatorname{sh} ax} \quad (2)$$

$$\boxed{\int P_n(x)\operatorname{sh}^2 ax dx = A_{n+1}(x)\operatorname{ch} ax + B_n(x)\operatorname{ch} ax + C_n(x)\operatorname{sh} ax} \quad (3)$$

cu A_{n+1}, B_n şi C_n polinoame nedeterminate apriori.

Aplicație. Să se calculeze integrala:

6. $\int (x^2 - 3x)\operatorname{ch} 2x dx$

Soluție. Folosind reprezentarea (2) vom scrie:

$$\int (x^2 - 3x)\operatorname{ch} 2x dx = (Ax^2 + Bx + C)\operatorname{ch} 2x + (Dx^2 + Ex + F)\operatorname{sh} 2x$$

coeficienții nedeterminați se obțin cu algoritmul prezentat *în paragraful 1.3*. Astfel, dacă se derivează egalitatea de mai sus obținem:

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x)\operatorname{ch} 2x = (2Ax + B)\operatorname{ch} 2x + (2Ax^2 + 2Bx + 2C)\operatorname{sh} 2x + \\ + (2Dx^2 + 2Ex + 2F)\operatorname{ch} 2x + (2Dx + E)\operatorname{sh} 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x)\operatorname{ch} 2x = \left[2Dx^2 + 2(A + E)x + (B + 2F)\right]\operatorname{ch} 2x + \\ + \left[2Ax^2 + 2(B + D)x + (E + 2C)\right]\operatorname{sh} 2x\end{aligned}$$

Se identifică coeficienții în modul următor:

$$\begin{cases} 2Dx^2 + 2(A + E)x + (B + 2F) \equiv x^2 - 3x \\ 2ax^2 + 2(B + D)x + (2C + E) \equiv 0 \end{cases}$$

Găsim următoarele valori:

$$A = 0;\ B = -\frac{1}{2};\ C = \frac{3}{4};\ D = \frac{1}{2};\ E = -\frac{3}{2};\ F = \frac{1}{4}$$

după o grupare convenabilă, integrala se mai poate scrie:

$$\int (x^2 - 3x)\operatorname{ch} 2x dx = \frac{3 - 2x}{4}\operatorname{ch} 2x + \frac{2x^2 - 6x + 1}{4}\operatorname{sh} 2x$$

7. $\int \operatorname{th}^2 x dx$

Soluție. Se observă uşor că:

$$\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = x - \operatorname{th} x$$

8. a) $\int \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{b} dx$

Soluție. Se transformă produsul în sumă şi apoi se integrează termen cu termen:

$$\int \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{b}dx = \frac{1}{2}\int\left(\operatorname{sh}\frac{a+b}{ab}x + \operatorname{sh}\frac{b-a}{ab}x\right)dx =$$

$$= \frac{ab}{2(a+b)}\operatorname{ch}\frac{a+b}{ab}x + \frac{ab}{2(b-a)}\operatorname{ch}\frac{b-a}{ab}x =$$

$$= \frac{ab}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{b} - b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{b}\right)$$

b) $\int \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{b}dx$

Soluție. Raționăm ca mai sus. Astfel:

$$\int \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{b}dx = \frac{1}{2}\int\left(\operatorname{ch}\frac{b-a}{ab}x + \operatorname{sh}\frac{a+b}{ab}x\right)dx =$$

$$= \frac{ab}{2(b-a)}\operatorname{sh}\left(\frac{b-a}{ab}x\right) + \frac{ab}{2(a+b)}\operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{ab}x\right) = \frac{ab}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{b} - b\operatorname{ch}\frac{x}{b}\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)$$

c) $\int \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{b}dx$

Soluție. Se transformă în sumă şi apoi se integrează:

$$\int \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{b}dx = \frac{1}{2}\int\left[\operatorname{ch}\left(\frac{b-a}{ab}x\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{ab}x\right)\right]dx =$$

$$= \frac{ab}{2(b-a)}\operatorname{sh}\left(\frac{b-a}{ab}x\right) - \frac{ab}{a+b}\operatorname{ch}\frac{a+b}{ab}x = \frac{ab}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{ch}\frac{x}{b}\operatorname{sh}\frac{x}{a} - b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{b}\right)$$

1.7.2. Integrale recurente care conțin funcții hiperbolice

Exerciții rezolvate

1. $I_n = \int \operatorname{sh}^n x dx$

Soluție. Vom face o integrare prin părți aducând integrantul la forma:

$$\operatorname{sh}^n x = \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{sh} x$$

şi alegând:

$$\begin{cases} u = \operatorname{sh}^{n-1} x \\ dv = \operatorname{sh} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)\operatorname{sh}^{n-2} x \operatorname{ch} x dx \\ v = \operatorname{ch} x \end{cases}$$

astfel:

$$I_n = \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - (n-1)\int \operatorname{sh}^{n-2} x \operatorname{ch}^2 x dx = \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x -$$

$$-(n-1)\int \operatorname{sh}^{n-2}\left(1+\operatorname{sh}^2 x\right)dx \Rightarrow$$

$$I_n = \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

iar în raport cu I_n se va scrie:

$$\boxed{I_n = \int \operatorname{sh}^n x dx = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze I_3.

$$I_3 = \int \operatorname{sh}^3 x dx = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x - \frac{2}{3} I_1 = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x - \frac{2}{3}\operatorname{ch} x$$

astfel:

$$\int \operatorname{sh}^3 x dx = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sh}^2 x - 1\right)\operatorname{ch} x = \frac{1}{3}\left(\operatorname{ch}^2 x - 2\right)\operatorname{ch} x$$

sau dacă se ține seama de relația:

$$\operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x$$

obținem, în final, că:

$$\int \operatorname{sh}^3 x dx = \frac{1}{12}\operatorname{ch}(3x) - \frac{3}{4}\operatorname{ch} x$$

2. $J_n = \int \operatorname{ch}^n x dx$

Soluție. Se integrează prin părți:

$$J_n = \int \operatorname{ch}^{n-1} x (\operatorname{sh} x)' dx = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x - (n-1)\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^{n-2} x dx =$$

$$= \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x - (n-1)\int \left(\operatorname{ch}^2 x - 1\right)\operatorname{ch}^{n-2} x dx$$

$$J_n = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x - (n-1)I_n + (n-1)J_{n-2}$$

deducem că:

$$\boxed{J_n = \int \operatorname{ch}^n x dx = \frac{1}{n}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2,} \ \forall n \geq 2}$$

3. $I_n = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x}$

Soluție. Aducem integrala la forma echivalentă:

$$I_n=\int\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^n x}dx=\underbrace{\int\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^n x}}_{J}-I_{n-2}$$

Integrăm prin părți

$$J=\int\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^n x}\operatorname{ch} x dx$$

alegând:

$$\begin{cases}u=\operatorname{ch} x\\ dv=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^n x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\operatorname{sh} x dx\\ v=\dfrac{1}{(n-1)\operatorname{sh}^{n-1} x}\end{cases}$$

avem:

$$J=-\frac{\operatorname{ch} x}{(n-1)\operatorname{sh}^{n-1} x}+\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x}=-\frac{1}{n-1}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{n-1} x}+\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

Înlocuind pe J mai sus găsim, în final:

$$\boxed{I_n=\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^n x}=-\frac{1}{n-1}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{n-1} x}-\frac{n-2}{n-1}I_{n-2},\quad\forall n\geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

a) $I_1=\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x}$; b) $I_3=\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$;

Soluție. Folosind relația de recurență obişnuită, vom scrie:

$$I_3=\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}=-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}-\frac{1}{2}I_1$$

Evaluăm integrala:

$$I_1=\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x}$$

Întrucât $\operatorname{sh} x=2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ se poate scrie:

$$I_1=\int\frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}dx=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$$

Deducem că:

$$I_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}-\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|\right)$$

4. $J_n = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x}$

Soluție. Se rescrie integrala sub forma:

$$J_n = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^n x} dx = J_{n-2} - \underbrace{\int \frac{\operatorname{sh}^2 x dx}{\operatorname{ch}^n x}}_{I}$$

apoi se evaluează integrala din partea dreaptă, notată cu I:

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x} \operatorname{sh} x dx$$

alegem:

$$\begin{cases} u = \operatorname{sh} x \\ dv = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \operatorname{ch} x dx \\ v = -\dfrac{1}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} x} \end{cases}$$

apoi scriem:

$$J = -\frac{\operatorname{sh} x}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} \underbrace{\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x}}_{J_{n-2}} = -\frac{1}{(n-1)} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} J_{n-2}$$

astfel că:

$$\boxed{J_n = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

a) $J_1 = \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; b) $J_3 = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}$

Soluție. Evaluăm mai întâi integrala J_1. Vom scrie:

$$J_1 = \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = 2\int \frac{dx}{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}\left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\right)} = 2\int \frac{\left(\operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\right)' dx}{1 + \left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)^2}$$

sau în final

$$J_1 = \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)$$

Apoi, din relația de recurență pentru $n = 3$

$$J_3 = \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)$$

5. $I_n = \int \operatorname{th}^n x dx$

Soluție. Relația de recurență se poate obține direct, fără a integra prin părți:

$$I_n = \int \mathrm{th}^n\, x dx = \int \mathrm{th}^{n-2} x \frac{\mathrm{sh}^2\, x}{\mathrm{ch}^2\, x} dx = \int \mathrm{th}^{n-2} \frac{\left(\mathrm{ch}^2\, x - 1\right)}{\mathrm{ch}^2\, x} dx =$$

$$= \int \mathrm{th}^{n-2} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}\right) dx = \int \mathrm{th}^{n-2} x dx - \int \mathrm{th}^{n-2} x \left(\mathrm{th}\, x\right)' dx = I_{n-2} - \frac{\mathrm{th}^{n-1}\, x}{(n-1)}$$

Aşadar,

$$\boxed{I_n = \int \mathrm{th}^n\, x dx = -\frac{1}{n-1} \mathrm{th}^{n-1}\, x + I_{n-2},\ \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int \mathrm{th}^4\, x dx$$

Soluție. Potrivit relației de recurență stabilită mai sus:

$$I_4 = \int \mathrm{th}^4\, x dx = -\frac{1}{3} \mathrm{th}^3\, x + I_2$$

$$I_2 = \int \mathrm{th}^2\, x dx = -\frac{1}{1} \mathrm{th}\, x + I_0$$

$$I_0 = \int dx = x$$

Astfel:

$$I_4 = -\frac{1}{3} \mathrm{th}^3\, x - \mathrm{th}\, x + x$$

6. $J_n = \int \mathrm{cth}^n\, x dx$

Soluție. Raționând ca la *exercițiul 13* putem scrie:

$$J_n = \int \mathrm{cth}^{n-2}\, x \frac{\mathrm{ch}^2\, x}{\mathrm{sh}^2\, x} dx = \int \mathrm{cth}^{n-2} \frac{1 + \mathrm{sh}^2\, x}{\mathrm{sh}^2\, x} dx = \int \mathrm{cth}^{n-2} x \frac{dx}{\mathrm{sh}^2\, x} + \int \mathrm{cth}^{n-2} dx$$

sau

$$\boxed{J_n = \int \mathrm{cth}^{n-2}\, x dx = -\frac{1}{n-1} \mathrm{cth}^{n-1}\, x + J_{n-2},\quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{th}^4\, x}$$

Soluție. Deoarece $\frac{1}{\mathrm{th}^4\, x} = \mathrm{cth}^4\, x$, rezultă că:

$$J_4 = \frac{dx}{\mathrm{th}^4\, x} = \int \mathrm{cth}^4 x dx = -\frac{1}{3} \mathrm{cth}^3\, x + J_2$$

$$J_2 = -\operatorname{cth} x + J_0$$
$$J_0 = x$$

Prin urmare:

$$J_4 = -\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 x - \operatorname{cth} x + x$$

7. $I_n = \int x^n \operatorname{sh} x \, dx$

Soluție. Se integrează prin părți alegând:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = \operatorname{sh} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = \operatorname{ch} x \end{cases}$$

$$I_n = x^n \operatorname{ch} x - n \underbrace{\int x^{n-1} \operatorname{ch} x \, dx}_{J}$$

Ultima integrală se evaluează la fel, dar cu:

$$\begin{cases} u = x^{n-1} \\ dv = \operatorname{ch} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-2} dx \\ v = \operatorname{sh} x dx \end{cases}$$

$$J = \int x^{n-1} \operatorname{ch} x dx = x^{n-1} - (n-1) \underbrace{\int x^{n-2} \operatorname{sh} x \, dx}_{I_{n-2}} \Leftrightarrow$$

$$J = x^{n-1} \operatorname{sh} x - (n-1) I_{n-2}$$

Înlocuim expresia lui J mai sus, iar în final, se ajunge la relația de recurență:

$$\boxed{I_n \equiv \int x^n \operatorname{sh} x \, dx = x^n \operatorname{ch} x - nx^{n-1} \operatorname{sh} x + n(n-1) I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$A = \int x^3 \operatorname{sh} 2x \, dx$$

Soluție. Notăm $2x = t$, iar $x = \frac{t}{2} \therefore dx = \frac{1}{2} dt$, apoi integrala dată se mai poate scrie:

$$A = \frac{1}{16}\int t^3 \operatorname{sh} t dt = \frac{1}{16}\left[t^3 \operatorname{ch} t - 3t^2 \operatorname{sh} t + 6(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)\right] =$$
$$= \frac{1}{16}\left(8x^3 \operatorname{ch} 2x - 12x^2 \operatorname{sh} 2x + 12x \operatorname{ch} 2x - 6 \operatorname{sh} 2x\right) =$$
$$= \left(\frac{x^3}{2} + \frac{3x}{4}\right)\operatorname{ch} 2x - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}\right)\operatorname{sh} 2x$$

8. $J_n = \int x^n \operatorname{ch} x\, dx$

Soluție. La fel ca la *exercițiul 15* putem scrie:

$$J_n = \int x^n (\operatorname{sh} x)' \, dx = x^n \operatorname{sh} x - n\int x^{n-1} \operatorname{ch} x dx = x^n \operatorname{sh} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sh} x dx$$

$$J_n = x^n \operatorname{sh} x - nx^{n-1} \operatorname{ch} x + n(n-1)\underbrace{\int x^{n-2} \operatorname{ch} x dx}_{J_{n-2}}$$

Prin urmare:

$$\boxed{J_n \equiv \int x^n \operatorname{ch} x dx = x^n \operatorname{sh} x - nx^{n-1} \operatorname{ch} x + n(n-1)J_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$A = \int (2x^3 - 5x^2 + x + 2) chxdx$$

Soluție. Cu ajutorul relației de recurență putem scrie:

$$A = 2J_3 - 5J_2 + J_1 + J_0$$

unde:

$$\begin{array}{ll} J_0 = x, & |\cdot 2 \\ J_1 = \int x \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x & |\cdot 1 \\ J_2 = x^2 \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x + 2x & |\cdot -5 \\ J_3 = x^3 \operatorname{sh} x - 3x^2 \operatorname{ch} x + 6x \operatorname{sh} x - 6 \operatorname{ch} x & |\cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

$$A = (2x^3 - 5x^2 + 13x)\operatorname{sh} x - (6x^2 - 10x + 13)\operatorname{ch} x - 8x$$

1.7.3. Integrarea funcțiilor raționale în $\operatorname{ch} x, \ \operatorname{sh} x, \ \operatorname{th} x$

Integralele de forma:

$$\boxed{\int R(\operatorname{ch} x, \ \operatorname{sh} x, \ \operatorname{th} x)dx}$$

se rezolvă cu substituția generală:

$$\boxed{\operatorname{th} \frac{x}{2} = t}$$

De aici găsim:

$$x = 2\operatorname{arcth} t \therefore \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2} \quad \text{sau} \quad \frac{dx}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = dt$$

apoi:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

Exerciții rezolvate

1. $I = \int \frac{dx}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}$

Soluție. Notăm:

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

Integrala devine

$$I = \int \frac{2dt}{\left(t^2+6t+9\right)} = 2\int \frac{dt}{\left(t+3\right)^2} = -\frac{2}{t+3} = -\frac{2}{\operatorname{th}\frac{x}{2}+3}$$

2. $I = \int \frac{dx}{a + b\operatorname{ch} x + c\operatorname{sh} x}, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$

Soluție. Utilizând aceleaşi schimbări ca şi la exercițiul precedent, putem scrie:

$$I = \int \frac{2dt}{a\left(1-t^2\right) + b\left(1+t^2\right) + 2ct} = 2\int \frac{dt}{\left(b-a\right)t^2 + 2ct + \left(b+a\right)}$$

Discriminantul trinomului de la numitor este:

$$\delta = a^2 + c^2 - b^2$$

Distingem două situații:

(i) $\delta > 0$ i.e. $a^2 + c^2 - b^2 > 0$. În acest caz integrala se scrie sub forma:

$$I = 2\int \frac{dt}{\left(a+b\right) - \left(a-b\right)t^2 + 2ct} =$$

$$= 2\left(a-b\right)\int \frac{dt}{\left(a^2-b^2\right) - \left[\left(a-b\right)^2 t^2 - 2c\left(a-b\right)t\right]} =$$

$$= 2\left(a-b\right)\int \frac{dt}{\delta^2 - \left[\left(a-b\right)t - c\right]^2} = 2\int \frac{du}{\delta^2 - u^2}$$

unde: $u = \left(a-b\right)t - c$

Pe de altă parte:

$$\int \frac{du}{\delta^2 - u^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \operatorname{arcth} \frac{u}{\sqrt{\delta}}$$

urmează că:

$$I = \frac{2}{\sqrt{\delta}} \operatorname{arcth} \frac{(a-b)t - c}{\sqrt{\delta}}$$

sau

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}} \operatorname{arcth} \frac{(a-b)\operatorname{th}\frac{x}{2} - c}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}, \text{ pentru } a^2 + c^2 > b^2$$

(ii) $\delta < 0$ i.e. $b^2 - a^2 - c^2 > 0$. În acest caz integrala devine:

$$I = 2(b-a) \int \frac{dt}{(b-a)t^2 + 2c(b-a) + (b^2 - a^2)} = 2 \int \frac{(b-a)dt}{\left[(b-a)t + c\right]^2 + \delta^2}$$

sau

$$I = 2 \int \frac{dv}{v^2 + \left(\sqrt{\delta}\right)^2} = \frac{2}{-\delta} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{-\delta}}$$

unde: $v = (b-a)t + c.$

Astfel:

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-a)\operatorname{th}\frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}, \text{ pentru } a^2 + c^2 > b^2$$

3. $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$

Soluție. La numărător putem scrie $1 \equiv \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x,$ iar integrala se va rescrie sub forma:

$$I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{th} x - \operatorname{cth} x$$

Ținând seama de faptul că $\operatorname{cth} 2x = \frac{1 - \operatorname{th}^2 x}{2 \operatorname{th} x},$ integrala se poate scrie şi sub forma:

$$I = -2 \operatorname{cth} 2x$$

4. $I = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \, dx$

Soluție. Ținând seama că $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$ integrala se va scrie:

$$I=\frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x dx=\frac{1}{8}\int \mathrm{sh}^2 t dt$$

unde $t=2x$. Am văzut că:

$$\int \mathrm{sh}^2 t\ dt=-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2t$$

deducem că:

$$I=-\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\mathrm{sh}\,4x$$

1.7.4. Integrarea funcțiilor raționale în e^x, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{sh}\,x$

Integralele de tipul:

$$\boxed{\int R\left(e^x,\mathrm{ch}\,x\right)dx} \qquad \boxed{\int R\left(e^x,\mathrm{sh}\,x\right)dx} \qquad \boxed{\int R\left(e^x,\mathrm{th}\,x\right)dx}$$

se rezolvă cu substituția:

$$\boxed{e^x=t}$$

Exerciții rezolvate

1. a) $I=\int e^x\,\mathrm{ch}\,x dx$

Soluție. Întrucât $\mathrm{ch}\,x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, schimbarea $e^x=t \therefore e^x dx=dt$ aduce integrala la forma:

$$I=\int \frac{t+\frac{1}{t}}{2}dt=\frac{1}{2}\int t dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}\ln t=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}$$

b) $I=\int e^x\,\mathrm{sh}\,x dx$

Soluție. Se procedează ca mai sus ținând seama că $\mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

2. $I_{\alpha,\beta}=\int e^{\alpha x}\,\mathrm{ch}\,\beta x dx$

Soluție. Vom integra prin părți, luăm:

$$\begin{cases} u = e^{\alpha x} \\ dv = \operatorname{ch} \beta x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ v = \dfrac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta x \end{cases}$$

Astfel:

$$I_{\alpha,\,\beta} = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \operatorname{sh} \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \operatorname{ch} \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \operatorname{sh} \beta x dx \right)$$

Apoi, pentru ultima integrală se poate lua:

$$\begin{cases} u = e^{\alpha x} \\ dv = \operatorname{sh} \beta x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \alpha e^{\alpha x} \\ v = \dfrac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta x \end{cases}$$

iar

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \operatorname{sh} \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \operatorname{sh} \beta x dx$$

sau

$$I_{\alpha,\,\beta} = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} \left(\beta \operatorname{sh} \beta x - \alpha \operatorname{ch} \beta x \right) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} I_{\alpha,\,\beta}$$

de unde rezultă, în final:

$$\boxed{I_{\alpha,\,\beta} = \int e^{\alpha x} \operatorname{ch} \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2 - \alpha^2} \left(\beta \operatorname{sh} \beta x - \alpha \operatorname{ch} \beta x \right), \quad \beta \neq \pm \alpha}$$

Aplicație.

$$I_{1,\,2} = \int e^{-x} \operatorname{ch} 2x dx = \frac{e^{-x}}{3} \left(2 \operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 2x \right)$$

Exerciții propuse

Să se calculeze primitivele:

1. a) $\int \operatorname{sh} ax \, dx$

R: $\dfrac{1}{a} \operatorname{ch} ax$

b) $\int \operatorname{ch} ax \, dx$

R: $\dfrac{1}{a} \operatorname{sh} ax$

c) $\int \operatorname{th} ax \, dx$

$R:\ \frac{1}{a}\ln(\operatorname{ch} ax)$

d) $\int \operatorname{ch} ax\, dx$

$R:\ \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sh} ax|$

2. a) $\int \operatorname{sh}^2 ax\, dx$

$R:\ -\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sh} 2ax}{4a}$

b) $\int \operatorname{ch}^2 ax\, dx$

$R:\ \frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sh} 2ax}{4a}$

c) $\int \operatorname{th}^2 ax\, dx$

$R:\ x-\frac{\operatorname{th} 2ax}{a}$

d) $\int \operatorname{cth}^2 ax\, dx$

$R:\ x-\frac{\operatorname{cth} 2ax}{a}$

3. a) $\int x \operatorname{sh} ax\, dx$

$R:\ \frac{x}{a}\operatorname{ch} ax-\frac{1}{a}\operatorname{sh} ax$

b) $\int x \operatorname{ch} ax\, dx$

$R:\ -\frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax+\frac{x}{a}\operatorname{sh} ax$

4. a) $\int x^2 \operatorname{sh} ax\, dx$

$R:\ \frac{a^2x^2+2}{a^3}\operatorname{ch} ax-\frac{2x}{a^2}\operatorname{sh} ax$

b) $\int x^2 \operatorname{ch} ax\, dx$

$R:\ -\frac{2x}{a^2}\operatorname{ch} ax+\frac{a^2x^2+2}{a^3}\operatorname{sh} ax$

5. a) $\int \operatorname{sh}^2 ax\, dx$

$R:\ -\frac{1}{8a^2}\operatorname{ch}2ax-\frac{x}{4a}\operatorname{sh}2ax+\frac{x^2}{4}$

b) $\int x\operatorname{ch}^2 ax\,dx$

$R:\ -\frac{1}{8a^2}\operatorname{ch}2ax-\frac{x}{4a}\operatorname{sh}2ax+\frac{x^2}{4}$

6. a) $\int x^2\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\,dx$

$R:\quad -\frac{x^3}{6}-\frac{a^2x}{4}\operatorname{ch}\left(\frac{2x}{a}\right)+\frac{a\left(2x^2+a^2\right)}{8}\operatorname{sh}\left(\frac{2x}{a}\right)$

b) $\int x^2\operatorname{ch}^2 ax\,dx$

$R:\quad \frac{x^3}{6}-\frac{x}{4a^2}\operatorname{ch}(2ax)+\frac{2a^2x^2+1}{8a^3}\operatorname{sh}2ax$

7. a) $I_n=\int\operatorname{sh}^n ax\,dx$

$R:\quad I_n=\frac{1}{na}\operatorname{sh}^{n-1}ax\operatorname{ch}ax-\frac{n-1}{na}I_{n-2},\quad \forall n\geq 2$

b) $\int\operatorname{sh}^3\frac{x}{2}dx$

$R:\ -\frac{3}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{ch}\frac{3x}{2}$

8. a) $J_n=\int\operatorname{ch}^n ax\,dx$

$R:\ J_n=\frac{1}{na}\operatorname{sh}ax\operatorname{ch}^{n-1}ax+\frac{n-1}{na}J_{n-2},\quad \forall n\geq 2$

b) $\int\operatorname{ch}^3\frac{x}{2}dx$

$R:\quad \frac{3}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{sh}\frac{3x}{2}$

9. a) $I_n=\int\frac{1}{\operatorname{sh}^n ax}dx$

$R:\quad I_n=\frac{1}{(n-1)a}\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{sh}^{n-1}ax}-\frac{n-2}{(n-1)a}I_{n-2},\quad \forall n\geq 2$

b) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}ax}$

$R:\quad \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{th}\frac{ax}{2}\right|$

c) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 \frac{x}{2}}$

$R:\quad -\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} - 2\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{4}\right|$

10. a) $J_n = \int \frac{1}{\operatorname{ch}^n ax}dx$

$R:\quad J_n = \frac{1}{(n-1)a}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^{n-1} ax} - \frac{n-2}{(n-1)a}J_{n-2},\quad \forall n \geq 2$

b) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}$

$R:\ -\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} - 2\operatorname{arctg}\left|\operatorname{th}\frac{x}{4}\right|$

c) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 \frac{x}{2}}$

R: Se ține seama de punctul a)

11. a) $I_n = \int \operatorname{th}^n ax dx$

$R:\ I_n = -\frac{1}{(n-1)a}\operatorname{th}^{n-1} ax + I_{n-2},\quad \forall n \geq 2$

b) $\int \operatorname{th}^3\frac{x}{2}dx$

$R:\ -\operatorname{th}^2\frac{x}{2} + 2\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$

12. a) $J_n = \int \frac{1}{\operatorname{th}^n ax}dx$

$R:\ J_n = -\frac{1}{(n-1)a}\cdot \operatorname{cth}^{n-1} ax - J_{n-2},\quad \forall n \geq 2$

b) $\int \frac{1}{\operatorname{th}^3 ax} dx$

$R:\ -\operatorname{cth}^2 \frac{x}{2} - +2\ln\left|\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right|$

13. a) $I_n = \int x^n \operatorname{sh} ax\, dx$

$R:\ I_n = \frac{x^n}{a}\operatorname{ch} ax - \frac{nx^{n-1}}{a^2}\operatorname{sh} ax + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$

b) $\int x^3 \operatorname{sh}\frac{x}{2} dx$

$R:$ Se consideră $n=3$ şi $a=\frac{1}{2}$ în rezultatul de la punctul a)

14. a) $J_n = \int x^n \operatorname{ch} ax\, dx$

$R:\ J_n = \frac{x^n}{a}\operatorname{sh} ax - \frac{nx^{n-1}}{a^2}\operatorname{ch} ax + \frac{n(n-1)}{a^2} J_{n-2},\ \forall\, n \geq 2$

b) $\int x^3 \operatorname{ch}\frac{x}{2} dx$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x - 2}$

$R:\ -\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right) - 3\operatorname{sh}\frac{x}{2}$

16. $\int \frac{dx}{9\operatorname{ch} x + 10\operatorname{sh} x + 3}$

$R:\ -\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arcth}\left(\frac{5+3\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right)$

17. a) $\int \frac{dx}{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}$

$R:$ (i) pentru $\delta = b^2 - a^2 < 0,\quad I_{a,\,b} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{b + a\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$

(ii) pentru $\delta = b^2 - a^2 > 0,\ I_{a,\,b} = -\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcth}\left(\frac{b + a\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$

b) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x}$

R: $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth}\left(\frac{2+\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$

c) $\int \frac{dx}{2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$

R: $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth}\left(\frac{1+2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}$

R: $-2a\operatorname{cth}\frac{x}{a}$

19. $\int \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx$

R: $-\frac{x}{8}+\frac{a}{32}\operatorname{sh}\frac{4x}{a}$

20. a) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\ dx$

R: $\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{sh} bx\operatorname{ch} ax - b\operatorname{ch} bx\operatorname{sh} ax\right)$

b) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\ dx$

R: $\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{ch} ax\operatorname{ch} bx - b\operatorname{sh} bx\operatorname{sh} ax\right)$

c) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\ dx$

R: $\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} bx - b\operatorname{sh} bxc\operatorname{h} ax\right)$

21. a) $\int e^{\alpha x}\operatorname{sh}\beta x dx$

R: $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\operatorname{sh}\beta x - \beta\operatorname{ch}\beta x\right)$

b) $\int e^{\alpha x}\operatorname{ch}\beta x dx$

R: $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\operatorname{ch}\beta x - \beta\operatorname{sh}\beta x\right)$

1.8. Integrarea funcțiilor iraționale

1.8.1. Integrarea funcțiilor iraționale pe cazuri particulare

Distingem următoarele cazuri:

I. Integrantul este o funcție rațională R de forma:

$$\boxed{\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_k}{q_k}})dx}$$

atunci se face schimbarea de variabilă:

$$\boxed{x = t^s, s = \text{c.m.m.m.c.}(q_1, q_2, \ldots, q_k)} \qquad (1)$$

II. Integrantul este o funcție rațională R de forma:

$$\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_r}\right)dx}$$

atunci se face substituția:

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s, \text{ unde } s = \text{c.m.m.m.c.}(q_1, q_2, \ldots, q_k)}$$

Se rezolvă în raport cu x şi se obține:

$$x = \frac{t^s d - b}{a - t^s c} \qquad (2)$$

şi apoi se determină dx. În urma schimbării, se obține o integrală de funcții raționale.

Exerciții rezolvate

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$

Soluție. Integrala se mai scrie:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

cu $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{3}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2}$, de unde $s = 6$

Se face substituția:

$$2x + 1 = t^6 \therefore dx = 3t^5 dt$$

Integrala devine:

$$I=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2}{t-1}dt=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$
$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)$$

sau revenind la variabila inițială cu $t=(2x+1)^{\frac{1}{6}}$

$$I=3\left(\frac{(2x+1)^{\frac{1}{3}}}{2}+(2x+1)^{\frac{1}{6}}+\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right|\right)+C$$

2. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

Soluție. Integrala se mai poate scrie:

$$I=\int \frac{x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}dx \quad \text{unde} \quad \frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{6}, \quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{3}$$

şi atunci $s = 6$. Se face substituția:

$$x=t^6 \therefore dx=6t^5dt$$
$$I=\int \frac{t}{1+t^2}\cdot 6t^5dt=6\int \frac{t^6}{t^2+1}dt$$

Observăm, însă, că:

$$\frac{t^6}{t^2+1}=\left(t^4-t^2+1\right)-\frac{1}{t^2+1},$$

astfel că:

$$I=\int\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\operatorname{arctg}t+C$$

iar în final, schimbând $t=x^{\frac{1}{6}}$, se obține:

$$I=\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}-\frac{x^{\frac{3}{6}}}{3}+x^{\frac{1}{6}}-\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}+C$$

3. $I=\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

Soluție. Se observă că $s=\text{c.m.m.m.c.}(3,\ 6)=6,$ iar substituția:

$$x=t^6 \therefore dx=6t^5dt$$

conduce la:

$$I=6\int\frac{\left(t^6+t^4+t\right)t^5}{t^6\left(1+t^2\right)}dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=6\int\frac{t^3\left(1+t^2\right)+1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{3}{2}t^4+6\operatorname{arctg}t$$

Revenind la notația inițială:

$$I=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$$

4. $I=\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$

Soluție. Aici $s=\text{c.m.m.m.c.}(2,\ 3,\ 4,\ 6)=12.$ Se face schimbarea:

$$x=t^{12}\ \therefore\ dx=12t^{11}dt$$

iar integrala se scrie succesiv:

$$I=12\int\frac{t^6+t^4}{t^{15}-t^{14}}\cdot t^{11}dt=12\int\frac{t\left(t^2+1\right)}{t-1}dt=12\int\frac{\left(t^3-1\right)+\left(t-1\right)+2}{t-1}dt=$$

$$=12\int\left(t^2+t+1\right)dt+12\int dt+24\int\frac{dt}{t-1}=4t^3+6t^2+24t+24\ln\left|t-1\right|$$

În final, renotând $t=\sqrt[12]{x}$ se obține:

$$I=4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|$$

5. $I=\int\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$

Soluție. Integrantul devine o funcție rațională dacă se face schimbarea:

$$2x-3=t^6\ \therefore\ dx=3t^5dt$$

Astfel:

$$I=\int\frac{3t^8dt}{t^2+1}=3\int\left(t^6-t^4+t^2-1\right)dt+3\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{7}t^7-\frac{3}{5}t^5+t^3-3t+3\operatorname{arctg}t$$

Întorcându-ne la schimbarea inițială găsim:

$$I=\frac{3}{7}\sqrt[6]{\left(2x-3\right)^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{\left(2x-3\right)^5}+\sqrt{\left(2x-3\right)}-3\sqrt[6]{\left(2x-3\right)}+3\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{\left(2x-3\right)}\right)$$

III. Integrale de forma:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$$

În funcție de modul de aducere la forma canonică a expresiei de sub radical și în notațiile convenționale, integrala se aduce, fie la forma $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 \pm \alpha^2}}$, fie la una $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}$, după cum discriminantul ecuației este $\Delta = b^2-4ac<0$ sau, respectiv, $\Delta = b^2-4ac>0$

Exerciții rezolvate

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Soluție. Se restrânge sub radical, a.î.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}$$

apoi, se face schimbarea: $x^2=\varphi \;\therefore dx=d\varphi$

$$I=\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)=\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+C$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}},\; x\in\left(\frac{1}{3},\,1\right)$

Soluție. Avem:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3\left[\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}$$

Notăm: $x-\frac{2}{3}=\varphi \therefore d\varphi=dx$

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{9}-\varphi^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\varphi}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin 3\varphi$$

sau în final:

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C$$

IV. Integrale de forma:

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$$

Se va izola la numărător derivata termenului de sub radical şi apoi se va efectua descompunerea în sumă de două integrale, aşa cum am văzut la rezolvarea integralei: $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$. Astfel:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx +$$
$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Folosind substituţia: $\varphi = ax^2 + bx + c,\ d\varphi = (2ax + b)dx$, prima integrală devine: $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = 2\sqrt{\varphi}$, iar a doua, se va calcula ca în cazul *III*.

Exerciții rezolvate

1. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$

Soluție. Se notează: $2x^2+8x+1=\varphi(x)\ \therefore\ (4x+8)dx = d\varphi(x)$, astfel că:

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{20x-12}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{5(4x+8)-52}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} -$$
$$-13\int \frac{dx}{\sqrt{2\left[(x+2)^2-\frac{7}{2}\right]}}dx = \frac{5}{2}\sqrt{\varphi}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}\right| =$$
$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C$$

2. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx,\quad x\in(2,\ 4)$

Soluție. Notăm:

$$-x^2+6x-8=\varphi \therefore (-2x+6)dx = d\varphi$$

Apoi, aducem, succesiv, integrala la o formă mai accesibilă:

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{-6x-8}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{3(-2x+6)-26}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}+13\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=-3\sqrt{\varphi}+13\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C$$

V. Integrale de forma:

$$\boxed{\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}}$$

Se face substituția: $x-\alpha=\frac{1}{t}\therefore dx=-\frac{dt}{t^2}$

şi integrala devine:

$$\int\frac{-dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b\alpha)t+a}},$$

care a fost analizată la *1.4.3*.

Exerciții rezolvate

1. $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}\quad x\neq 0$

Soluție. Notăm $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$. Integrala devine:

$$\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{5-2t+t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=-\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+4}}=-\ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)^2+4}\right|=$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|=-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C$$

2. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}},\quad x\in(-1,\ 3)\setminus\{1\}$

Soluție. Notăm $x-1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{1}{t}+1,\ \ dx=-\frac{dt}{t^2}$

Integrala devine:

$$I=\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}+1\right)+3}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C$$

3. $\displaystyle\int\frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx,\quad x\neq-1$

Soluție.

$$I=\int\frac{3x+3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx=\int\frac{3(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=$$

$$=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

În ultima integrală se poate face substituția:

$$x+1=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2},$$

astfel că:

$$I=3\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|+$$

$$+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=3\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C$$

VI. Integrale de forma:

$$\boxed{\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$$

unde $P_n(x)$ este un polinom de gradul n. Se poate proceda la descompunerea integralei într-o sumă:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{1}$$

unde $Q_{n-1}(x)$ este un polinom de gradul $n-1$ şi λ constantă reală, apriori nedeterminaţi.
Relaţia (1) se derivează şi rezultă:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{Q_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Aducând la acelaşi numărător se obţine:

$$2P_n(x)\equiv 2Q_{n\text{-}1}{}'(x)(ax^2+bx+c)+Q_{n\text{-}1}(x)(2ax+b)+2\lambda$$

şi se identifică cele două expresii, obţinându-se coeficienţii polinomului $Q_{n-1}(x)$ şi λ.

Exerciţii rezolvate

1. $\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Soluţie. În acest caz $n=3$ şi $Q_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Potrivit celor de mai sus:

$$\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \tag{2}$$

Derivând şi aducând la acelaşi numitor, se obţine:

$$x^3+2x^2+3x+4\equiv(2\alpha x+\beta)(x^2+2x+2)+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(x+1)+\lambda$$

sau

$$x^3+2x^2+3x+4\equiv 3x^3+(5\alpha+2\beta)x^2+(4\alpha+3\beta+\gamma)x+(2\beta+\gamma+\lambda)$$

Identificând coeficienţii se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 3\alpha & = 1 \\ 5\alpha + 2\beta & = 2 \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma & = 3 \\ \quad 2\beta + \gamma + \lambda & = 4 \end{cases}$$

cu soluția: $\alpha = \dfrac{1}{3},\ \beta = \dfrac{1}{6},\ \gamma = \dfrac{7}{6},\ \lambda = \dfrac{5}{2}.$

Înlocuind valorile astfel găsite în descompunerea (2) se poate scrie:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x^2 + x + 7\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x^2 + x + 7\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln\left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| + C$$

Exerciții propuse

1. $\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{x(2 + \sqrt[3]{x}} dx$

   $R:\ \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x} + 2\right) + 3\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{2}}\right)$

2. $\displaystyle\int \frac{2 + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[12]{x}} dx, \qquad x > 0$

   $R: -12\sqrt[12]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} - \dfrac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \dfrac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}} +$

   $+8\ln\left(\sqrt[12]{x} + 1\right) - 4\ln\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 1\right)$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}\right)}, \qquad x > 0$

   $R:\ \ln x - 10\ln\left(1 + \sqrt[10]{x}\right) + \dfrac{10}{\sqrt[10]{x}} - \dfrac{5}{\sqrt[5]{x}} + \dfrac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}, \qquad x>0$

$R:\ 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln\left(1+\sqrt[12]{x}\right)+\dfrac{33}{2}\ln\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2\right)-$

$-\dfrac{171}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx, \qquad x>1$

$R:\ x+\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}, \qquad x>1$

$R:\ 3\sqrt[3]{x}+3\ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}, \qquad x>0$

$R:\ \ln x-10\ln\left(1-\sqrt[10]{x}\right)+\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}, \qquad x\in(-1,\ 1)$

Indicație. Se scrie:

$$(1-x)\sqrt{1-x^2}=(1-x)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

şi se notează: $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$

$R:\ \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

Indicație. Scriem $\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}=(x+1)(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. Apoi notăm:

$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}=t$

$R:\ \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$

10. $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

$R:\ \left(1-\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x$

11. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

$R:\ 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|$

12. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx, \quad x\in(0,1)$

Indicație. Se fac două schimbări succesive $\sqrt{x}=t$ şi apoi $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=u.$

$R:\ \sqrt{1-x}\left(\sqrt{x}-2\right)-\arcsin\sqrt{x}$

13. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx, \quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$R:\ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)$

14. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

$R:\ -\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C$

b) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

$R:\ \frac{6}{5}\sqrt[4]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$

15. a) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$R:\ \ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

$R:\ \arcsin\frac{x+1}{3}+C$

16. a) $\int\frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$

$R:\ -5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arccos\frac{x-2}{3}+C$

b) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$

$R:\ 3\sqrt{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$

17. a) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$

$R:\ \sqrt{\frac{x}{x+2}}+C$

b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$

$R:\ -\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{3}}+C$

18. a) $\int\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$

$R:\ \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$

b) $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$

$R:\quad -\left(\frac{x}{2}+5x\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsin\frac{x+2}{2}+C$

1.8.2. Integrarea funcțiilor quasiraționale

Integralele de forma:

$$\boxed{\int(\alpha x+\beta)\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx}\ ,\ \boxed{\int\frac{\alpha x+\beta}{\alpha_1 x+\beta}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx}$$

sau

$$\boxed{\int\frac{P(x)}{Q(x)}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx}$$

se rezolvă utilizând schimbarea de variabilă:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t}$$

Exerciții rezolvate

1. $I=\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx,\ \ x>2$

Soluție. Notăm $x-2=t^2 \therefore dx=2t\ dt$. Apoi cu $x=t^2+2$, integrala dată se va scrie succesiv:

$$I=2\int\frac{\left(t^2+3\right)t\,dt}{\left(t^2+2\right)t}=2\int\frac{\left(t^2+2\right)+1}{t^2+2}=2\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

În variabila *x*, integrala are valoarea:

$$I=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}$$

2. $I=\int\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx,\ \ x\in(-1,1]\setminus\{0\}$

Soluție. Se efectuează schimbarea de variabilă:

$$\frac{1-x}{1+x}=t^3 \Leftrightarrow x=\frac{1-t^3}{1+t^3} \therefore dx=-\frac{6t^2}{\left(1+t^3\right)^2}$$

apoi, rescriem integrala sub forma:

$$I=6\int\frac{t^3dt}{t^6-1}=3\int\frac{\left(t^3+1\right)+\left(t^3-1\right)}{\left(t^3+1\right)\left(t^3-1\right)}dt=3\int\frac{dt}{t^3-1}+3\int\frac{dt}{t^3-1}=3J_1+3J_2$$

Am văzut în *paragraful 1.5.* că:

$$\int\frac{dt}{t^3-a^3}=-\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+a}{a\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6a^2}\ln\left(\frac{t^2+at+a^2}{\left(t-a\right)^2}\right)$$

$$\int\frac{dt}{t^3+a^3}=\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-a}{a\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{6a^2}\ln\left(\frac{t^2-at+a^2}{\left(t+a\right)^2}\right)$$

În cazul $a=1$ integralele de mai sus ne dau:

$$J_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{\left(t-1\right)^2}$$

$$J_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln\frac{t^2-t+1}{\left(t+1\right)^2}$$

Înlocuind mai sus, găsim:

$$I=\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{t^2-t+1}{\left(t+1\right)^2}\right)-\ln\left(\frac{t^2+t+1}{\left(t-1\right)^2}\right)\right)$$

sau în final:

$$I=\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}t}{2t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^4+t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2}\quad \text{cu}\quad t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$$

3. $I=\int\frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{9}\right\}$

Soluție. Dacă substituim:

$$\frac{x-1}{x}=t \quad \text{cu} \quad x=\frac{1}{1-t} \quad \text{și} \quad dx=\frac{dt}{\left(t-1\right)^2}$$

integrantul devine o funcție rațională în variabila *t*, iar:

$$I=\int-\frac{\left(t-1\right)}{t+2}\cdot\frac{dt}{\left(t-1\right)^2}=-\int\frac{dt}{\left(t+2\right)\left(t-1\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(t-1\right)-\left(t+2\right)}{\left(t+2\right)\left(t-1\right)}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+2}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+2}{t-1}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+2}{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}-1}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}\right|$$

4. $I=\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

Soluție. Notăm:

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3 \text{ cu } x=\frac{2\left(1-t^3\right)}{1+t^3} \text{ şi } dx=-\frac{6t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt$$

Astfel, integrala devine:

$$I=\int\frac{2}{\frac{6t^6}{\left(1+t^3\right)^2}}\cdot t\frac{\left(-6t^2\right)}{\left(1+t^3\right)^2}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}$$

5. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

Soluție. Să observăm că:

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$$

Apoi cu substituția:

$$x\to t\ \therefore\ \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t$$

obținem $x=\frac{t^4+2}{t^4-1}$; $x-1=\frac{3}{t^4-1}$; $x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}$, iar

$$dx=-\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt$$

Integrala se va rescrie astfel:

$$I=-\int\frac{\left(t^4-1\right)}{3}\cdot\frac{t^4-1}{3t^4}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{-12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}$$

sau în notația inițială, cu $t=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$

$$I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

6. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3(4-x)}},\quad x\in(1,4)$

Soluție. Scriem numitorul sub forma:

$$\sqrt[4]{(1-x)^3(4-x)}=(1-x)\sqrt[4]{\frac{4-x}{1-x}}$$

şi facem schimbare:

$$\sqrt[4]{\frac{4-x}{1-x}}=t,\ \text{de unde}\ x=\frac{4t^4-1}{t^4-1}\ \text{ şi }\ dx=-\frac{12t^3dt}{\left(t^4-1\right)^2}$$

Integrala se va scrie succesiv după cum urmează:

$$I=\int\frac{dt}{t^2\left(t^4-1\right)}=\int\frac{t^2-\left(t^2-1\right)}{t^2\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt=\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}-\int\frac{dt}{t^2\left(t^2+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt-\int\frac{\left(t^2+1\right)-t^2}{t^2\left(t^2+1\right)}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)-$$

$$-\left(\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{1}{t}$$

Revenind la notația inițială, cu $t=\sqrt[4]{\frac{4-x}{1-x}}$

$$I=\sqrt[4]{\frac{1-x}{4-x}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{\frac{4-x}{1-x}}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{4-x}-\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[4]{1-x}}\right|$$

7. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-6)x^2}}$

Soluție. Aducem integrala sub forma:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\frac{x-6}{x}}}$$

Apoi facem schimbarea:

$$\frac{x-6}{x}=t^3\ \text{ cu }\ x=\frac{6}{1-t^3}\ \text{ şi }\ dx=\frac{18t^2}{\left(t^3-1\right)^2dt}$$

Integrala devine:

$$I=-3\int\frac{t\,dt}{\mathrm{t}^3-1}$$

Ştim, din *paragraful 1.5*. că:

$$\int \frac{t\ dt}{t^3-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right)$$

astfel, în final, deducem:

$$I = -\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right) \text{ cu } t = \sqrt[3]{\frac{x-6}{x}}$$

Exerciţii propuse

1. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx, \qquad x \in (0,1)$

   $R: \quad \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

2. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx, \qquad x > 1$

   $R: \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\left(x^2-x-2\right) + \sqrt{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

3. $\int \frac{1}{1+x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad x > 1$

   $R: \quad -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1-t)^2}{t^2+t+1}\right) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}; \quad t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

4. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx, \qquad x > 1$

   $R: \quad \frac{1}{2}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)$

5. $\int \frac{x\ dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$

$$R: \quad \ln\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{\sqrt{1+x-x^2}+2x}\right)-2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right)$$

Indicație. Se scrie:

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}+\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$$

unde ultima integrală se calculează cu schimbarea $x-1=\dfrac{1}{t}$

1.8.3. Substituțiile lui Euler

Integralele de forma:

$$\boxed{\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$$

se calculează efectuând una dintre substituțiile:

i) $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}}$, dacă $a>0$

ii) $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}}$, dacă $c>0$

iii) $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t}$, dacă $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

i.e. α este una dintre rădăcinile reale ale polinomului ax^2+bx+c

Exerciții rezolvate

1. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

Soluție. Aici $a=1>0$ astfel, alegând:

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$$

şi rezolvând ecuația în raport cu x obținem:

$$2x+2tx=t^2-2 \Leftrightarrow \quad x=\frac{t^2-2}{2(1+t)}; \quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt$$

Apoi:

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-x=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}$$

Cu acestea, integrala se transformă în:

$$I=\int\frac{2(1+t)}{t^2+4t+4}\cdot\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt=\int\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}dt$$

Integrantul se poate descompune în fracții simple căutând A, B şi C, astfel încât:

$$\frac{t^2+t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2}$$

de unde rezultă identitatea:

$$t^2+t+2\equiv A(t+2)^2+B(t+1)(t+2)+C(t+1)$$

Identificând coeficienții nedeterminați, obținem sistemul:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+3B+C=1 \\ 4A+2B+C=2 \end{cases}$$

cu soluția $A=1,\ B=0,\ C=-2$

De aici deducem că:

$$\frac{t^2+t+2}{(t+1)(t+2)}=\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+2)^2}$$

care prin integrare, ne dă în final:

$$I=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}$$

sau în variabila x, cu $t=\sqrt{x^2+2x+2}+x$

$$I=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

2. $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

Soluție. Aici $c=1>0$, astfel că putem substitui:

$$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$$

de unde:

$$(2t-1)x=\left(t^2-1\right)x^2 \Leftrightarrow \ x=\frac{2t-1}{t^2-1};\ dx=-2\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

pe de altă parte:

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}$$

astfel, în noua varibilă t, integrala se va scrie I, obținem:

$$I=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt$$

descompunem integrantul în fracții simple, căutând constantele A,B,C şi D pentru care:

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{t+1}$$

obținem identitatea:

$$-2t^2+2t-2=A(t-1)(t+1)^2+Bt(t+1)^2+Ct(t-1)+Dt(t-1)^2$$

Dând valorile particulare $t=0,\ t=1$ şi $t=-1$ se obțin, respectiv relațiile:

$$\begin{cases}-A & =-2\\ \quad 4B & =-2\\ \qquad -2C-4D & =-6\end{cases}$$

valoarea particulară $t=2$ conduce la o a patra relație:

$$9A+18B+2C+2D=-6$$

Se găsesc: $A=2;\ B=-\frac{1}{2};\ \mathrm{C}=-3;\ D=-\frac{3}{2}$. Înlocuind mai sus, integrantul devine:

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}=\frac{2}{t}-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{3}{(t+1)^2}-\frac{3}{2(t+1)}$$

de unde, prin integrare:

$$I=2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|$$

Cu $t=\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x}$ se obține primitiva în variabila independentă x, astfel, în final, se găseşte:

$$I=2\ln\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{|x|}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right|+\frac{3x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}-$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right|$$

3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}$, $x \in (0,2)$

Soluție. Întrucât $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$, suntem în cazul *iii*) iar, dacă se alege $\alpha=-1$, atunci, se va face substituția:

$$\sqrt{2+x-x^2}=(x+1)t$$

de unde rezultă, $2-x=(1+x)t$, apoi:

$$x=\frac{2-t}{t+1};\ x-1=\frac{1-2t}{1+t};\ dx=-\frac{3}{(1+t)^2}dt$$

În plus:

$$\sqrt{2+x-x^2}=\frac{3t}{1+t}$$

astfel, în variabila *t*, integrala se va scrie:

$$I=\int\frac{1+t}{1-2t}\cdot\frac{1+t}{3t}\cdot-\frac{3}{(1+t)^2}dt=\int\frac{dt}{t(2t-1)}=\frac{1}{2}\int\frac{2t-(2t-1)}{t(2t-1)}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{2t-1}-\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2t-1}{2t}\right|$$

Revenind la variabila inițială, cu $t=\frac{1}{x+1}\sqrt{2+x-x^2}$ rezultă, în final:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1-\sqrt{2+x-x^2}}{\sqrt{2+x-x^2}}\right)$$

4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$, $x\in(2,\ 5)$

Soluție. După cum se observă pentru trinomul $-10+7x-x^2$ coeficienții *a* şi *c* sunt negativi, însă rădăcinile sunt reale:

$$\alpha=2,\quad \beta=5,\quad -10+7x-x^2=(5-x)(x-2)$$

astfel că, în virtutea cazului *iii*) al substituțiilor lui Euler, schimbăm:

$$\sqrt{7x-10-x^2}\equiv\sqrt{(5-x)(x-2)}=(x-2)t$$

de unde rezultă:

$$5-x=(x-2)t^2 \ \Leftrightarrow\ x=\frac{5+2t^2}{1+t^2},\quad dx=-\frac{6t\ dt}{(1+t^2)^2}$$

apoi:

$$\left(x-2\right)t=\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)t=\frac{3t}{1+t^2}$$

Înlocuind aceste relații în integrala dată obținem:

$$I=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)$$

iar pentru $t=\sqrt{\dfrac{x-2}{5-x}}$ se găseşte, primitiva în variabila x:

$$I=\frac{10}{9}\sqrt{\frac{x-2}{5-x}}-\frac{4}{9}\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}$$

1.8.4. Alte metode de integrare a funcțiilor iraționale

Integrala de forma:

$$\boxed{\int\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad m\in\mathbb{Z}}$$

se rezolvă cu substituția: $\boxed{x-\alpha=\dfrac{1}{t}}$

Exerciții rezolvate

1. $\displaystyle\int\frac{\left(x+3\right)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}},\qquad x>\frac{1}{2}$

Soluție 1. Observăm că integrantul se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}=\frac{1}{2}\frac{\left(2x+1\right)+5}{\sqrt{\left(2x+1\right)^2-4}}$$

Se face substituția:

$$x\to t\therefore 2x+1=t,\ x=\frac{t-1}{2},\ dx=\frac{1}{2}dt.$$

Integrala se va scrie:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{t+5}{\sqrt{t^2-4}}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}dt+\frac{5}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+\frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|$$

Revenind la variabila x, cu $t=2x+1$, se obține:

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|$$

Soluția 2. (*Metoda coeficienților nedeterminați)*. Se caută A şi λ reale, a.î.

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx=A\sqrt{4x^2+4x-3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$$

Derivând în ambii membri se găseşte identitatea:

$$\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\equiv\frac{4Ax+2A}{\sqrt{4x^2+4x-3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$$

sau prin identificare, se obține sistemul:

$$\begin{cases} 4A=1 \\ \lambda+2A=3 \end{cases}$$

de unde $A=\frac{1}{4},\ \ \lambda=\frac{5}{4}.$

Înlocuind mai sus, se găseşte:

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|$$

2. $I=\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Soluție. Aici:

$$P_n(x)=x^3-x-1,\quad n=3$$

Se caută $Q_{n-1}(x)=Ax^2+Bx+C$ şi $\lambda\in\mathbb{R},$ astfel încât să aibă loc reprezentarea:

$$\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Derivând în ambii membri, se obține identitatea:

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\equiv(2AX+B)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{(x+1)\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

sau

$$x^3-x-1=(2Ax+B)\left(x^2+2x+2\right)+(x+1)\left(Ax^2+Bx+C\right)+\lambda$$

grupăm convenabil termenii şi apoi identificăm după puterile lui x:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - x - 1 = 2Ax^3 + 4Ax^2 & + 4Ax \\
+ \ Bx^2 & + 2Bx \ + 2B \\
Ax^3 \ + \ Bx^2 & + \ Cx \\
+ Ax^2 & + \ Bx \ + C \\
& + \lambda \\
\hline
3AX^3 + \left(5A + 2B\right)x^2 + & \left(4A + 3B + C\right)x + \left(2B + C + \lambda\right)
\end{array}
$$

Obținem sistemul:

$$
\begin{cases}
3A & = 1 \\
5A + 2B & = 0 \\
4A + 3B + C & = -1 \\
\quad 2B + C + \lambda & = -1
\end{cases}
$$

cu soluția:

$$
A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{5}{6}, \quad C = \frac{1}{6}, \quad \lambda = \frac{1}{2}.
$$

Prin urmare:

$$
I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}
$$

Ultima integrală se poate scrie:

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+1\right)^2 + 1}} = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)
$$

aşa că, în final:

$$
I = \frac{1}{6}\left(2x^2 - 5x + 1\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)
$$

3. $\quad I = \int \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\ dx$

Soluția 1. Observăm că $4x^2 - 4x + 3 = \left(2x-1\right)^2 + 2.$ Notăm:

$$
2x - 1 = t, \quad a^2 = 2 \ \text{ iar } \ dx = \frac{1}{2}dt.
$$

Integrala se reduce la una de forma generală:

$$
I = \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2 + a^2}\ dt
$$

Dar am văzut în *paragraful 1.3.* că:

$$
\int \sqrt{\mathrm{t}^2 + a^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2 + a^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right)
$$

astfel integrala dată are expresia finală:

$$I = \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{1}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right)$$

Soluția 2. Se transformă integrala în:

$$I = \int \frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx$$

apoi, se aplică *metoda coeficienților nedeterminați*, căutând constantele A, B şi λ reale, astfel încât:

$$\int \frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx = (Ax+B)\sqrt{4x^2-4x+3} + +\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

Raționând ca la exercițiul precedent, vom scrie:

$$\frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}} = A\sqrt{4x^2-4x+3} + (Ax+B)\frac{4x-2}{\sqrt{4x^2-4x+3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

sau

$$4x^2-4x+3 \equiv A\left(4x^2-4x+3\right) + (Ax+B)(4X-2) + \lambda \Leftrightarrow$$

$$4x^2-4x+3 \equiv 8Ax^2 + (-6A+4B)x + (3A-2B+\lambda)$$

Identificând coeficienții nedeterminați se obține sistemul:

$$\begin{cases} 8A = 4 \\ -6A+4B = -4 \\ 3A-2B+\lambda = 3 \end{cases}$$

a cărei soluție este:

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{4},\ \lambda = 1.$$

Înlocuind mai sus se găseşte:

$$I = \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{4x^2-4x+3} + \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

Însă:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4X^2-4X+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}} = \ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$$

Astfel, integrala devine, în final:

$$I = \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3} + \ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$$

4. $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}, \quad x\neq 0,\ a\neq 0$

Soluție. Notăm $x=\frac{1}{t} \therefore dx=-\frac{dt}{t^2}$. Prin urmare:

$$I=\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2t^2+1}}\cdot\frac{-dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+a^2t^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}}$$

cu $\alpha=\frac{1}{a}$. Integrala obținută este una cunoscută:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2+\alpha^2}\right)$$

Astfel, în variabila inițială, cu $t=\frac{1}{x}$, se obține:

$$I=-\frac{1}{a}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\alpha^2}\right)=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{a^2}}\right)=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|ax|}\right)$$

5. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}, \quad x>a>0$

Soluție. Scriem integrala sub forma:

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{-\frac{a}{x^2}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}$$

unde

$$\frac{a}{x}=\varphi(x) \quad \therefore \quad -\frac{a}{x^2}dx=\varphi'(x)dx$$

iar în final, se găseşte:

$$I=-\frac{1}{a}\arcsin\varphi(x)=-\frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{a}{x}\right)$$

6. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}, \quad x\in(0,a), \quad a>0$

Soluție. Vom proceda ca la *exercițiul 5*:

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{-\frac{a}{x^2}dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi^2(x)-1}}$$

unde $\varphi(x)=\frac{a}{x}\ \therefore\ \varphi'(x)dx=-\frac{a}{x^2}dx$ astfel:

$$I=-\frac{1}{a}\ln\left|\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-1}\right|=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

7. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}},\quad x\in(0,\ 2a),\quad a>0$

Soluție 1. Întrucât $2ax-x^2=a^2-(x-a)^2$, integrala se scrie:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$$

Apoi, dacă se notează:

$$x-a=t\therefore dx=dt,\quad \text{iar}\quad x=t+a$$

urmează că:

$$I=\int\frac{dt}{(t+a)\sqrt{a^2-t^2}}$$

Schimbăm, mai departe:

$$t\to u\ \therefore\ t+a=\frac{1}{u}\ \text{ cu }\ dt=-\frac{du}{u^2}$$

şi întrucât:

$$\sqrt{a^2-t^2}=\frac{\sqrt{2au-1}}{u},\quad u>0$$

Se obține, prin înlocuire:

$$I=\int\frac{-du}{\sqrt{2au-1}}=-\frac{1}{a}\sqrt{2au-1}=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a-t}{t+a}}$$

Cum $t=x-a$, rezultă în final:

$$I=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$$

Soluție 2. Folosim schimbarea:

$$x\to t\ \therefore\ x=\frac{1}{t}\quad dx=-\frac{dt}{t^2}\qquad\left(0<t<\frac{1}{2a}\right)$$

Mai departe:

$$\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{\frac{2at-1}{t^2}}$$

astfel încât, integrala devine:

$$I=-\int\frac{t^2}{\sqrt{2at-1}}\frac{dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2at-1}}=-\frac{1}{a}\sqrt{2at-1}$$

Schimbând $t = \frac{1}{x}$, se obține:

$$I = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{x} - 1} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a - x}{x}} = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax}$$

8. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2ax + x^2}}, \quad x \in (0, \infty)$

Soluție. Alegând:

$$x = \frac{1}{t} \;\therefore\; dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad t > 0$$

Atunci:

$$\sqrt{2ax + x^2} = \sqrt{\frac{2at + 1}{t^2}}$$

Astfel:

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{2at + 1}} = -\frac{1}{a}\sqrt{2at + 1} = -\frac{\sqrt{2ax + x^2}}{ax}$$

9. $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Soluție. Se aduce integrala sub forma:

$$I = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{-\frac{2a^2}{x^3}dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

şi apoi se notează:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 = t \;\therefore\; -\frac{2a^2}{x^3}dx = dt$$

Astfel:

$$I = -\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{2\sqrt{t + 1}} = -\frac{1}{a^2}\sqrt{t + 1}$$

iar dacă se revine la notația inițială cu $t = \frac{a^2}{x^2}$ se găseşte în final:

$$I = -\frac{1}{a^2 x}\sqrt{x^2 + a^2}$$

10. $I=-\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}, \quad |x|>a$

Soluție. Procedăm ca la *exercițiul 9*, astfel:

$$I=\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\frac{1}{2a^2}\int \frac{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)dx}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\frac{1}{a}\int \frac{\varphi'(x)dx}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$

unde $\varphi(x)=1-\frac{a^2}{x^2}$. Se obține:

$$I=\frac{1}{a^2}\sqrt{\varphi(x)}=\frac{1}{a^2x}\sqrt{x^2-a^2}$$

11. $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

Soluție. Integrala se scrie:

$$I=\int \frac{\frac{1}{x^3}dx}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}}=-\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{a^2}\sqrt{t}$$

cu $\frac{a^2}{x^2}-1=t \therefore -\frac{2a^2dx}{x^3}=dt.$

În final, se găseşte:

$$I=-\frac{1}{a^2x}\sqrt{a^2-x^2}$$

12. $I=\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{2-x-x^2}}, \quad x\in(-2,\ 0)$

Soluție. Efectuăm substituția: $x-1=\frac{1}{t} \ \therefore\ dx=-\frac{dt}{t^2}$, apoi:

$$\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{(2+x)(1-x)}=\sqrt{\left(3+\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t}\right)}=\sqrt{\frac{-3t-1}{t^2}}, \quad (t<-3)$$

Integrala devine:

$$I=-\int \frac{t\ dt}{\sqrt{-3t-1}}$$

Notăm: $\sqrt{-3t-1}=u$, unde $t=\frac{u^2-1}{3}$ şi $dt=\frac{2}{3}u\ du$

Astfel că:

$$I=-\int\frac{u^2-1}{3}\cdot\frac{2}{3}\frac{u\,du}{u}=-\frac{2}{9}\int\left(u^2-1\right)du=-\frac{2}{27}u^3+\frac{2}{9}u$$

Revenind la notația în *t*, integrala are expresia:

$$I=-\frac{2}{27}\left(\sqrt{-3t-1}\right)^3+\frac{2}{9}\sqrt{-3t-1}$$

iar dacă se ține cont că $x=\frac{t+1}{t}$ obținem, în final:

$$I=\frac{2}{27}\cdot\frac{(x+2)(2x-5)}{(x-1)\sqrt{2-x-x^2}}$$

13. $I=\int\frac{(x+4)\,dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}$

Soluție. Scriem integrala sub forma:

$$I=\int\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Descompunem fracția $\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}$ într-o sumă de fracții simple, cu metoda coeficienților nedeterminați:

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Astfel, rezultă identitatea:

$$x+4\equiv A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$$

Dând lui *x* valorile particulare: –2, 1 şi 0 se obțin respectiv, relațiile:

$$\begin{cases}-3C=2\\9A=5\\4A-2B-C=4\end{cases}$$

de unde deducem: $A=\frac{5}{9},\quad B=-\frac{5}{9},\quad C=-\frac{2}{3}.$

Înlocuind valorile găsite în descompunerea de mai sus se obține:

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}$$

Apoi, dacă se înmulțeşte în ambii membri cu $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ şi se integrează termen cu termen, se ajunge la:

$$I=\frac{5}{9}\underbrace{\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}}_{I_1}-\frac{5}{9}\underbrace{\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}}_{I_2}-\frac{2}{3}\underbrace{\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}}_{I_3}$$

Integralele obținute fiind de forma :

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se rezolvă cu ajutorul substituției:

$$x-\alpha=\frac{1}{t}$$

Prin urmare, schimbarea $x-1=\frac{1}{t}$ rezolvă integrala I_1, obținându-se:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln|x-1|-\ln\left|3x+3+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}\right|\right)$$

Pentru I_2 şi I_3 se va nota: $x+2=\frac{1}{t}$

Astfel:

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln|x+2|-\ln\left|-3x+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}\right|\right)$$

iar

$$I_3=\frac{1}{6(x+2)}\Big(-2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}(x+2)\ln|x+2|-$$
$$-\sqrt{3}(x+2)\ln\left|-3x+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}\right|\Big)$$

Propunem cititorului efectuarea calculelor!

La final, se obține:

$$I=\frac{5}{9}I_1-\frac{5}{9}I_2-\frac{2}{3}I_2=-\frac{5}{9}-\frac{1}{9(x+2)}\Big[-2\sqrt{x^2+x+1}-$$
$$-\sqrt{3}(x+2)\ln\left|\frac{-3x+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}}{x+2}\right|-\frac{5}{9\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x+3+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\right|$$

Exerciții propuse

1. $\int\frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

   $R:\ 5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)$

2. $\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx$

$R:\quad \frac{3x^2 + x - 1}{3}\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$

3. $\int \sqrt{x^2 + x + 1}\, dx$

$R:\quad \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8}\ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\right)$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}}$

$R:\quad \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln\left(3 + \sqrt{4x^2 + 9}\right)$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad |x| > 1$

$R:\quad -\arcsin\frac{1}{x}$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in (-1,\ 1) \setminus \{0\}$

$R:\quad -\ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right|$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - x^2}}$

$R:\quad -\frac{\sqrt{2x - x^2}}{x}$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + x^2}}$

$R:\quad -\frac{\sqrt{2x + x^2}}{x}$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$R:\quad -\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$

10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x|>1$

$R:\quad \frac{2}{x}\sqrt{x^2-a^2}$

11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1$

$R:\quad -\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$

12. $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2ax}}, \qquad x>0$

$R:\quad I=\frac{(x-a)(x+2a)^2}{3a^2\sqrt{(x^2+2ax)^3}}$

13. $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2ax}}, \qquad x\in(0,\ 2a)$

$R:\quad \frac{(x+a)(x-2a)^2}{3a^2\sqrt{(x^2-2ax)^3}}$

14. $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2ax-x^2}}, \qquad x>2a$

$R:\quad \frac{(x+a)(x-2a)}{3a^2x\sqrt{2ax-x^2}}$

15. $I=\int \frac{(x+2)^2\,dx}{(x-2)(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

$R:\quad \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{16\sqrt{5}}{15}\ln\left|\frac{2x+1+\sqrt{x^2+1}}{x-2}\right|-\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right|$

16. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

$R:\ \frac{1}{3}\left(x^2-14x+111\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|$

17. $\int \frac{3x^2+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx$

$R:\ \frac{1}{64}\left(32x^2-20x-373\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|$

18. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

$R:\ \frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}$

19. $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x^2-4x+3}}$

$R:\ -\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}$

20. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}$

$R:\ -\frac{2}{15}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+12x+7}{(x+1)^2}$

21. $\int \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x\sqrt{x^3+3x^2+1}}$

$R:\ \ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|$

Indicație. Se efectuează substituția: $x^2=t$.

22. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$

$R:\ 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x\right|-\frac{3}{2\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1\right)}-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x-1\right|$

23. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$

$R:\ \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

24. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}},\qquad x\in\left(0,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$R:\ -2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x+x^2}+1}{x}+1\right)$

25. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}$

$R:\ \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^3}}$

26. $\int\frac{x^3+1}{\left(1-x^4\right)\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad x\in(-1,\ 1)$

$R:\ \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{2x^2}}$

27. $\int\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$R:\ \frac{1}{15}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}$

28. $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx,\qquad x\in\mathbb{R}$

$R: x-\ln\left(1+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2x+\sqrt{1+x+x^2}}+\frac{3}{2}\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)$

1.9. Integrarea funcțiilor trigonometrice

1.9.1. Integralele de forma:

$$\boxed{\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx}$$

unde R este o funcție rațională în $\sin x$ şi $\cos x$, se reduc la integrale de funcții raționale cu aşa – zisa substituție *universală*:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t}$$

De aici rezultă:

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dt=\frac{2t}{1+t^2}}$$

Uneori această substituție conduce la calcule complicate.
În aceste situații, se încadrează integrantul $R(\sin x,\ \cos x)$ într-unul din cazurile de mai jos, după care se procedează la transformările alăturate:

(i) $\boxed{R(-\sin x,\ \cos x)\ =\ -R(\sin x,\ \cos x)}$ $\boxed{\cos x=t}$

(R este o funcție impară în raport cu $\sin x$)

(ii) $\boxed{R(\sin x,-\cos x)\ =\ -R(\sin x,\ \cos x)}$ $\boxed{\sin x\ =\ t}$

(R este o funcție impară în raport cu $\cos x$)

(iii) $\boxed{R(-\sin x,\ -\cos x)\ =\ R(\sin x,\ \cos x)}$ $\boxed{\operatorname{tg} x\ =\ t}$

(R funcție pară în raport cu $\sin x$ şi $\cos x$)

Exerciții rezolvate

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$

Soluție. Folosind substituția:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\ \Rightarrow\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\text{ cu }\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

şi înlocuind în integrala inițială, se obține:

$$\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}+5\right)}=$$

$$=2\int \frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int \frac{dt}{2\left(t^2+4t+4\right)}=$$

$$=\int \frac{dt}{\left(t+2\right)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2-\left(a^2-b^2\right)\cos x}$

Soluție. Notând $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$ rezultă:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2-\left(a^2-b^2\right)\cos x}=\int \frac{2dx}{\left(1+t^2\right)\left[a^2+b^2-\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right]}=$$

$$=2\int \frac{dt}{\left(a^2+b^2\right)\left(1+t^2\right)-\left(a^2-b^2\right)\left(1-t^2\right)}=\int \frac{dt}{a^2t^2+b^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{b}{a}}+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b}+C$$

În notația inițială, se găseşte rezultatul:

$$\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{b}+C$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$

Soluție. Integrantul este de forma:

$$R\left(\sin x,\ \cos x\right)=\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}$$

Se observă, însă, că:

$$R\left(-\sin x,\ \cos x\right)=\frac{-\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}=-R\left(\sin x,\cos x\right)$$

este cazul $\left(i\right)$ şi se face substituția: $\cos x\ =\ t\therefore -\sin x dx=dt$

Apoi, $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1$ şi integrala devine:

$$\int \frac{\sin x\left(1+\sin^2 x\right)}{\cos 2x}dx = \int \frac{\sin x\left(2-\cos^2 x\right)}{\cos 2x}dx = -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1}dt =$$

$$= \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1-3}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{1}{2}}}{t+\sqrt{\frac{1}{2}}}\right| = \frac{1}{2}t - \frac{3\sqrt{2}}{9}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|$$

Revenind la schimbarea inițială cu $\cos x = t,$ se ajunge la rezultatul final:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{3\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C$$

4. $\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx$

Soluție. Se notează:

$$R\left(\sin x,\ \cos x\right) = \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}$$

Cum, însă:

$$R\left(\sin x,-\cos x\right) = \frac{-\cos^3 x-\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x} = -R\left(\sin x,\ \cos x\right)$$

ne situăm în cazul (ii) şi se face substituția: $\sin x = t,$ aşa că:

$$\int \frac{\cos^2 x\left(\cos^2 x+1\right)\cos x}{\sin^2 x\left(1+\sin^2 x\right)}dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)dt}{t^2\left(1+t^2\right)}$$

care este o integrală de funcții raționale. Se descompe în fracții simple integrantul:

$$\frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)}{t^2\left(1+t^2\right)} = 1+\frac{2-4t^2}{t^2\left(t^2+1\right)} = 1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}$$

şi apoi, se integrează în termenii extremi:

$$\int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)dt}{t^2\left(1+t^2\right)} = \int dt + 2\int \frac{dt}{t^2} - 6\frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t$$

sau în variabila inițială:

$$\sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}\left(\sin x\right) + C$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$

Soluție 1. Se notează:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x},$$

Ținând cont de faptul că

$$R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$$

ne situăm în cazul (iii) aplicând schimbarea $\operatorname{tg} x = t$. Lăsăm pe seama cititorului continuarea acestor calcule!

Soluție 2. Să observăm că:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Astfel, integrala dată se mai poate scrie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

iar substituția $x \to t \therefore 2x - \frac{\pi}{4} = t$ cu $2dx = dt$, aduce integrala sub forma

$$\sqrt{2}\int \frac{dt}{\sin t}$$

Scriem integrantul sub forma:

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}}{\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}} = \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$$

Astfel, se obține un rezultat cunoscut din analiza de liceu:

$$\boxed{\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|}$$

În variabila inițială, integrala dată va avea rezultatul final:

$$\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right|$$

6. $I=\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Soluție. Notăm $\operatorname{tg} x = t \therefore dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Apoi scriem:

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\ t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x\right)$$

7. $I=\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

Soluție. Întrucât:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

se poate nota:

$$\operatorname{tg} x = t \ \therefore\ dx=\frac{dt}{2\left(1+t^2\right)}, \quad \sin^2 2x=\frac{t^2}{1+t^2}$$

Prin urmare, integrala se transformă în:

$$I=\int \frac{1}{1-\frac{t^2}{2\left(1+t^2\right)}} \cdot \frac{dt}{2\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

sau în varibila inițială:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x\right)$$

8. $I=\int \frac{\operatorname{tg}\ x\ dx}{\cos x\left(\sin x+\cos x\right)}$

Soluție. Se observă că integrala se poate pune sub forma:

$$I=\int \frac{\operatorname{tg}\ x\ dx}{\cos x\left(\sin x+\cos x\right)} = \int \frac{\operatorname{tg}\ x}{\operatorname{tg}\ x+1} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

iar dacă notăm $\operatorname{tg} x = t \therefore \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, atunci:

$$I=\int \frac{t\ dt}{1+t} = t-\ln\left|t+1\right| = \operatorname{tg} x-\ln\left|\operatorname{tg} x+1\right|$$

Se face substituția: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$, iar integrala devine:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin 2x-\cos 2x} =$$

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C$$

Dacă se revine la notația inițială, se obține în final:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C$$

1.9.2. Integrale de funcții trigonometrice particulare

i) $\boxed{\int \cos ax \cos bx \, dx}$

Se transformă produsul în sumă de cosinuşi:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right]$$

ii) $\boxed{\int \sin ax \cos bx \, dx}$

Se transformă cu ajutorul formulei:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]$$

iii) $\boxed{\int \sin ax \cos bx \, dx}$

Se transformă cu ajutorul relației:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

iv) $\boxed{\int \operatorname{tg} ax \ \operatorname{tg} bx \, dx}$

Se transformă cu ajutorul relației:

$$\operatorname{tg} ax \ \operatorname{tg} bx = \frac{\sin ax \sin bx}{\cos ax \cos bx} = \frac{\cos(a-x)x - \cos(a+x)x}{\cos(a+b)x + \cos(a-b)x}$$

Exerciții rezolvate

1. $I=\int \cos ax \cos bx \cos cx \; dx$

Soluție. Vom transforma după (i):

$$\cos ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right]\cos cx =$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cos(a+b+c)x+\cos(a+b-c)x\right]+\frac{1}{4}\left[\cos(a-b+c)x+\cos(a-b-c)x\right]$$

Înlocuim mai sus şi ținem seama că:

$$\int \cos \alpha x \; dx = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x$$

Astfel:

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c}+\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b-c}+\frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}+\frac{\sin(a-b-c)x}{a-b-c}\right)$$

2. $I=\int \operatorname{tg} x \; \operatorname{tg} 2x \; dx$

Soluție. Notăm $\operatorname{tg} x = t \therefore dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Cum $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ rezultă că:

$$I=\int \operatorname{tg} x \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}dx=\int \frac{2t^2 dt}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}=\int \frac{\left(1+t^2\right)-\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)}dt=$$

$$=-\int \frac{dt}{t^2-1}-\int \frac{dt}{t^2+1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\operatorname{arctg}\, t=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}\right|$$

Dacă ținem seama că:

$$\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}\, x-1}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

atunci, se mai poate scrie:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|-x$$

1.9.3. Integrale trigonometrice diverse

Exerciții rezolvate

1. $I(x,a)=\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$

Soluție 1. Integrala se poate scrie:

$$\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos a}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2})}{2\sin\underbrace{\frac{x-a}{2}}_{u}\cos\underbrace{\frac{x+a}{2}}_{v}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos(u-v)}{2\sin u\cos v}dx=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos u\cos v+\sin u\sin v}{2\sin u\cos v}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos u}{\sin u}dx+\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\sin v}{\cos v}dx=\frac{1}{\cos a}\left(\int\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}dx-\right.$$

$$\left.-\int\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x-a}{2}}dx\right)=\frac{1}{2\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$$

Soluție 2. Se notează $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ şi se introduce simbolic $\mathrm{tg}\frac{a}{2}=b.$ Astfel:

$$\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2b}{1+b^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=(1+b^2)\int\frac{dt}{(1+b^2)t-b(1+t^2)}=(1+b^2)\int\frac{dt}{bt^2-(1+b^2)t+b}$$

unde $\sin a=\frac{2b}{1+b^2}$

Discriminatul corespunzător polinomului $bt^2-(1+b^2)t+b^2$ este $\Delta=(1+b^2)^2\geq 0$ şi are rădăcinile $t_1=b$ şi $t_2=\frac{1}{a}$, astfel, se poate scrie:

$$bt^2-(1+b^2)t+b^2=(bt-1)(t-b)$$

Iar integrala se va scrie succesiv:

$$I=-(1+b^2)\int\frac{dt}{(bt-1)(t-b)}=\frac{(1+b^2)}{b^2-1}\int\frac{b(t-b)-(bt-1)}{(bt-1)(t-b)}dt\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1+b^2}{b^2-1}\left(\int\frac{bdt}{bt-1}-\int\frac{dt}{t-b}\right)=\frac{b^2+1}{b^2-1}\ln\left|\frac{bt-1}{t-b}\right|$$

Dar $b=\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, iar $\frac{b^2+1}{b^2-1}=-\frac{1}{\cos a}$, astfel că:

$$I=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$$

2. $J(x,a)=\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}$

Soluție 1. Rescriem integrala sub forma:

$$J(x,a)=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=-\int\frac{dt}{\sin t-\sin a}$$

unde s-a notat: $\frac{\pi}{2}-x=t$ şi $\frac{\pi}{2}-a=b.$ Deducem că:

$$J(x,a)=I(t,b)=-\frac{1}{\cos b}\ln\left|\frac{\sin\frac{t-b}{2}}{\cos\frac{t+b}{2}}\right|=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|$$

Soluție 2. Cu substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, pentru care: $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, avem $\cos=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ apoi, formal, punem $b=\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, astfel încât $\cos a=\frac{1-b^2}{1+b^2}$, iar integrala se scrie:

$$J(x,a)\to J(t,b)=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=-(b^2+1)\int\frac{dt}{t^2-b^2}=$$

$$=-\frac{b^2+1}{2b}\ln\left|\frac{t-b}{t+b}\right|=-\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\right|=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|$$

3. $K(x,a)=\int\frac{dt}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}$

Soluție. Notăm: $\operatorname{tg}x=t\therefore dx=\frac{dt}{1+t^2}$ şi $\operatorname{tg}a=b$. În acest caz, integrala devine:

$$K(t,b)=\int\frac{dt}{(t-b)(1+t^2)}$$

Integrantul se mai poate scrie ca:

$$\frac{1}{(t-b)(1+t^2)}=\frac{A}{t-b}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$$

cu A, B, C, apriori nedeterminate. Apoi, din identitatea:

$$1\equiv A(t^2+1)+(Bt+C)(t-b)$$

rezultă sistemul:

$$\begin{cases} A+B \qquad =0 \\ bB+\quad C \ =0 \\ A-\quad bC \ =1 \end{cases}$$

a cărui soluție este: $A=\dfrac{1}{1-b^2}$, $B=-\dfrac{1}{1-b^2}$, $C=\dfrac{b}{1-b^2}$

Cu acestea, integrala se trasformă în:

$$K(t,b)=\frac{1}{1-b^2}\left(\int\frac{dt}{t-b}-\int\frac{(t-b)dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-b^2}\left(\ln|t-b|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+b\operatorname{arctg}t\right)$$

Revenind la notațiile inițiale, integrala are expresia finală:

$$K(x,a)=\cos^2 a\left(\ln|\sin(x-a)|-x\operatorname{tg}a\right)$$

4. $L(x,a)=\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}$

Soluție 1. Punem $\operatorname{ctg}x=t$ şi $\operatorname{ctg}a=b$, iar $dx=-\dfrac{dt}{1+t^2}$, astfel că integrala se transformă în:

$$L(t,b)=-\int\frac{dt}{(t-b)(1+t^2)}=-K(t,b)=-\frac{1}{1-b^2}\left(\ln|t-b|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\right.$$

$$\left.-b\operatorname{arctg}t\right)=-\cos^2 a\left(\ln|\sin(x-a)|-x\operatorname{ctg}a\right)$$

Soluție 2. Dacă scriem $\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, iar $\operatorname{ctg}a=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$, atunci integrala dată se reduce la una cunoscută, astfel:

$$L(x,a)\to -K(t,b)=\int\frac{dt}{\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}b}\quad\text{unde } t=\frac{\pi}{2}-x \ \text{ şi } \ b=\frac{\pi}{2}-a$$

Folosind rezultatul de la exercițiul anterior, se procedează ca mai sus.

5. $I=\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{a+b\ \operatorname{tg} x}$

Soluție. Substituția: $\operatorname{tg} x=t \therefore dx=\frac{dt}{1+t^2}$ aduce integrala la forma:

$$I=\int \frac{t\ dt}{\left(1+t^2\right)\left(a+bt\right)}$$

Apoi, dacă descompunem integrantul în fracții simple:

$$\frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(a+bt\right)}=\frac{A}{a+bt}+\frac{Bt+C}{1+t^2}$$

cu A, B, C apriori nedeterminați, găsim identitatea:

$$t\equiv A\left(1+t^2\right)+\left(Bt+C\right)\left(a+bt\right)$$

Sistemul ce rezultă de aici:

$$\begin{cases} A+bB \qquad\quad =0 \\ \qquad aB+bC=1 \\ A \qquad\ \ +aC=0 \end{cases}$$

furnizează soluția: $A=-\frac{ab}{a^2+b^2}$; $B=\frac{a}{a^2+b^2}$; $C=\frac{b}{a^2+b^2}$. Astfel, prin înlocuire, integrala se va rescrie în forma:

$$I=-\frac{ab}{a^2+b^2}\int \frac{dt}{a+bt}+\frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{at+b}{1+t^2}dt \Leftrightarrow$$

$$I=-\frac{a}{a^2+b^2}\ln\left|a+bt\right|+\frac{a}{2\left(a^2+b^2\right)}\ln\left(1+t^2\right)-\frac{b}{a^2+b^2}\operatorname{arctg} t$$

sau mai simplu:

$$I=-\frac{a}{a^2+b^2}\ln\left(\frac{\left(a+bt\right)^2}{1+t^2}\right)-\frac{b}{a^2+b^2}\operatorname{arctg} t$$

iar dacă se revine la substituția făcută inițial, deducem că:

$$I=-\frac{a}{a^2+b^2}\ln\left(a\cos x+b\sin x\right)+\frac{bx}{a^2+b^2}$$

6. $I=\int \frac{dx}{a+b\cos x}$

Soluție. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \therefore dx=\frac{2\ dt}{1+t^2}$, apoi:

$$I=\int\frac{2dt}{a\left(1+t^2\right)+b\left(1-t^2\right)}=\int\frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}=\frac{2}{a-b}\int\frac{dt}{\frac{a+b}{a-b}+t^2}$$

Distingem următoarele cazuri:

i) $\frac{a+b}{a-b}<0$ i.e. $|b|<|a|$. În acest caz:

$$I=\frac{2}{a-b}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2+t^2}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)\Rightarrow$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

ii) $\frac{a+b}{a-b}>0$ i.e. $|b|>|a|$

$$I=\frac{2}{a-b}\int\frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b-a}\,t-\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}\;t+\sqrt{a+b}}\right|\Rightarrow$$

$$I=-\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b-a}\sin\frac{x}{2}-\sqrt{a+b}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{b-a}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{a+b}\cos\frac{x}{2}}\right|$$

7. a) $I_{a,\,b}=\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$ b) $I_{1,\,1}=\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}$

Soluție. Se notează $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\therefore dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Apoi:

$$I_{a,\,b}=\int\frac{2dt}{a\left(1-t^2\right)+2bt}=-\frac{2}{a}\int\frac{dt}{\left[t^2-2\frac{b}{a}t+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]-\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}\Leftrightarrow$$

$$I_{a,\,b}=-\frac{2}{a}\int\frac{dt}{(t-\alpha)^2-\left(\sqrt{1+\alpha^2}\right)^2}\ ,\quad \alpha=\frac{b}{a}$$

Rezultă că:

$$I_{a,\,b}=-\frac{1}{a\sqrt{1+\alpha^2}}\ln\left|\frac{t-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}}{t-\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}}\right|=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{a\sin x-\left(b+\sqrt{a^2+b^2}\right)\cos x}{a\sin x-\left(b-\sqrt{a^2+b^2}\right)\cos x}\right|$$

b) *Soluția 1.* Direct cu relația generală obținută la punctul a), pentru:

$$I_{1,1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin x+\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)}{\sin x-\left(1-\sqrt{2}\right)\sin x}\right|$$

Soluția 2.

$$J_{1,1}=\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dx}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

Notăm $\frac{\pi}{4}+x=t\therefore dx=dt$, astfel că:

$$J_{1,1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$$

Lăsăm pe seama cititorului să verifice că cele două rezultate coincid!

(se foloseşte faptul că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ verifică identitatea $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$).

8. $I_{a,\,b}=\displaystyle\int\frac{dx}{(a-\sin x)(b-\sin x)}$

Soluție. Observăm că:

$$\int\frac{dx}{(a-\sin x)(b-\sin x)}=\frac{1}{a-b}\int\frac{(a-\sin x)-(b-\sin x)}{(a-\sin x)(b-\sin x)}dx=$$

$$=\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{b-\sin x}-\frac{1}{a-\sin x}\right)dx$$

Am văzut în paragraful anterior că:

$$J_{a,\,b}=\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\begin{cases}\dfrac{x}{b}-\dfrac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right), & |a|>|b|\\[2ex] \dfrac{x}{b}-\dfrac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\dfrac{a\sin\frac{x}{2}+\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)\cos\frac{x}{2}}{a\sin\frac{x}{2}+\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)\sin\frac{x}{2}}\right|, & |a|<|b|\end{cases}$$

Astfel:

$$I_{a,\,b}=\frac{1}{a-b}\left(J_{b,\,-1}-J_{a,\,-1}\right)$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int\frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$$

Soluție. Se scrie integrala sub forma:

$$\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = I_{2,3} = \frac{1}{2-3}\left(J_{3,-1} - J_{2,-1}\right) = J_{2,-1} - J_{3,-1}$$

$J_{3,-1}$ şi $J_{2,-1}$ se calculează din cazul $|a|>|b|$, astfel că:

$$J_{3,-1} = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$J_{2,1} = -x - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$I_{2,3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{-1+3tg\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}$$

9. $I_{a,\,b} = \int \frac{dx}{(a-\cos x)(b-\cos x)}$

Soluție. Am văzut la *exercițiul 17* (din paragraful precedent) că:

$$J_{a,\,b} = \int \frac{dx}{a+b\cos x} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right), & |a|>|b| \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{b-a}\sin\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{b-a}\sin\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}\cos\frac{x}{2}}\right|, & |a|<|b| \end{cases}$$

Pe de altă parte:

$$I_{a,\,b} = \frac{a}{a-b}\int \frac{(a-\cos x)-(b-\cos x)}{(a-\cos x)(b-\cos x)}dx = \frac{1}{a-b}\left(J_{a,-1} - J_{b,-1}\right)$$

unde, pentru $|a|>1$ şi $|b|>1$:

$$J_{a,\,-1} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$J_{b,\,-1} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$I_{a,\,b} = \frac{2}{a-b}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right)$$

iar pentru $|a|<1$ şi $|b|<1$:

$$J_{a,\,-1}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{-1-a}\sin\frac{x}{2}-\sqrt{-1+a}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{-1-a}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{-1+a}\cos\frac{x}{2}}\right|$$

$$J_{b,\,1}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-b}\sin\frac{x}{2}-\sqrt{1+b}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{1-b}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{1+b}\cos\frac{x}{2}}\right|$$

$$I_{a,\,b}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-1-a}{-1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{\frac{-1-a}{-1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|\right)$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int\frac{dx}{(2-\cos x)(3-\cos x)}$$

Soluție. Suntem în cazul $|a|>1$:

$$\int\frac{dx}{(2-\cos x)(3-\cos x)}=I_{2,\,3}=\frac{1}{2-3}\left(J_{3,\,-1}-J_{2,\,-1}\right)=J_{2,\,-1}-J_{3,\,-1}$$

unde:

$$J_{3,\,-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$J_{2,\,-1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$I_{2,\,3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

10. $I_a=\int\frac{dx}{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}^2a}$

Soluție. Integrala se mai poate scrie:

$$I_a=\frac{1}{2a}\int\frac{(\operatorname{tg}x+a)-(\operatorname{tg}x-a)}{(\operatorname{tg}x-a)(\operatorname{tg}x+a)}dx=\frac{1}{2a}\left(\underbrace{\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x+a}}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x-a}}_{I_2}\right)$$

Astfel:

$$I_a = \frac{1}{2a}\left(I_1 - I_2\right)$$

Evaluarea integralelor I_1 şi I_2 se face ţinând seama de rezultatul obţinut în paragraful anterior:

$$J_{a,\,b} = \int \frac{dx}{a + \operatorname{tg} x} = \frac{ax}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} + \ln\left|a\cos x + b\sin x\right|$$

Prin urmare:

$$I_1 \equiv J_{a,\,1} = \frac{ax}{a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 1}\ln\left|a\cos x + \sin x\right|$$

$$I_2 \equiv J_{-a,\,1} = -\frac{ax}{a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 1}\ln\left|-a\cos x + \sin x\right|$$

$$I_a = \frac{x}{a^2 + 1} + \frac{1}{2a\left(a^2 + 1\right)}\ln\left|\frac{a\cos x + \sin x}{a\cos x - \sin x}\right|$$

sau mai simplu:

$$I_a = \frac{1}{a^2 + 1}\left(x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + \operatorname{tg} x}{a - \operatorname{tg} x}\right|\right)$$

11. $I_a = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 a}$

Soluţie. Putem considera $\operatorname{tg} x = t \therefore dx = \frac{dt}{1 + t^2}$ şi formal $\operatorname{tg} x = b$. De aici obţinem:

$$I_a = \int \frac{dt}{\left(t^2 + b^2\right)\left(t^2 + 1\right)} = \frac{1}{b^2}\int \frac{\left(t^2 + b^2\right) - \left(t^2 + 1\right)}{\left(t^2 + b^2\right)\left(t^2 + 1\right)}dt = \frac{1}{b^2}\left(\int \frac{dt}{t^2 + b^2} - \int \frac{dt}{t^2 + 1}\right)$$

sau

$$I_a = \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \operatorname{arctg}\ t\right)$$

iar în notaţiile iniţiale:

$$I_a = \operatorname{ctg}^2 a\left(\operatorname{ctg} a \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} x\right) - x\right)$$

12. a) $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{3}\cos x + \sin x}$

Soluţie. Observăm că:

$$1 + \sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

astfel cu substituția $x-\frac{\pi}{3}=t,$ integrala devine:

$$I=J_{a,\,b}=\int\frac{dt}{a+b\cos t},\quad \text{cu: } t=x-\frac{\pi}{3},\quad a=1,\quad b=2$$

Putem folosi rezultatul obținut la *exercițiul 15* de mai sus pentru $a<b,$ i.e.

$$J_{1,2}=\int\frac{dt}{1+2\cos t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}\right|$$

b) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3}+\cos x-\sin x}$

Soluție. Se poate scrie mai simplu:

$$\sqrt{3}+\cos x-\sin x=\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

iar schimbarea: $x+\frac{\pi}{4}=t$ aduce integrala la forma cunoscută:

$$J_{a,\,b}=\int\frac{dt}{a+b\cos t}\qquad \text{cu: } a=\sqrt{3},\quad b=\sqrt{2},\quad t=x+\frac{\pi}{4}$$

Pentru $|a|>|b|$ se poate utiliza acelaşi rezultat ca mai sus, i.e.

$$I=J_{\sqrt{3},\,\sqrt{2}}=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

13. a) $I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

Soluție. Numitorul se mai poate scrie şi sub forma:

$$a\sin x+b\cos x+c=A\sin\left(x+\varphi\right)+c=A\sin\left(x+\varphi\right)+c$$

Unde $A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\quad t=x+\varphi$

Astfel, integrala obținută:

$$I=\int\frac{dt}{c+A\cos t}$$

se reduce la integrala de la *exercițiul 17* de la paragraful precedent, într-unul din cele două cazuri, după cum $|A|>|C|$ sau $|A|>C.$

b) $J=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$

Soluție. Vom reprezenta integrantul sub forma:

$$\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}=A+B\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x+c}+\frac{c}{a\sin x+b\cos x+c}\qquad (*)$$

unde $A, B, C,$ nedeterminați apriori.

Relația de mai sus conduce la identitatea:

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A\left(a\sin x+b\cos x+c\right)+B\left(a\cos x-b\sin x\right)+$$
$$+C\left(a\sin x+b\cos x+c\right)$$

Se grupează după $\sin x$ şi $\cos x$:

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=\left(Aa-Bb\right)\sin x+\left(Ab+Ba\right)\cos x+cA+C$$

apoi, se identifică coeficienții nedeterminați, obținându-se sistemul:

$$\begin{cases} aA-bB \qquad = a_1 \\ bB+aB \qquad = b_1 \\ cA \qquad +C=c_1 \end{cases}$$

Discriminantul sistemului fiind $\delta=a^2+b^2$, soluția va fi:

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\ ;\ B=\frac{-ba_1+ab_1}{a^2+b^2}\ ;\ C=\frac{-\left(aa_1+bb_1\right)c+\left(a^2+b^2\right)c_1}{a^2+b^2}$$

Înlocuim aceste expresii în reprezentarea de mai sus şi apoi integrăm termen cu termen:

$$J=Ax+B\ln\left|a\sin x+b\cos x+c\right|+CI$$

unde I este calculat la punctul a).

14. $A=\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\,dx}{a\sin x+b\cos x},\qquad B=\int\frac{\cos^2 x\,dx}{a\sin x+b\cos x}$

Soluție. Se observă că:

$$\begin{cases} A+\quad B \ =\displaystyle\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x} \equiv J_{a,\,b} \\ a^2A-b^2B \ =\displaystyle\int\left(a\sin x-b\cos x\right)dx\equiv I \end{cases}$$

unde:

$$I=-a\cos x+b\sin x,\quad \text{iar cu } c=0 \text{ în } \textit{exercițiul 11},$$

$$J_{a,\,b}=\int\frac{dx}{\lambda\sin\left(x+\varphi\right)}\quad \text{unde } \lambda=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

deducem că:

$$J_{a,\,b}=\frac{1}{\lambda}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

Se înlocuiesc expresiile obținute pentru $J_{a,b}$ şi I în sistemul de mai sus, apoi se găseşte:

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|+b\sin x-a\cos x\right)$$

$$B=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|-b\sin x+a\cos x\right)$$

15. $A=\int\frac{\sin x\,dx}{a\sin x+b\cos x}$, $\quad B=\int\frac{\cos x\,dx}{a\sin x+b\cos x}$

Soluție. Procedăm ca la exercițiul anterior:

$$\begin{cases} aA+bB=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx\equiv x \\ -bA+aA=\int\frac{-b\sin x+a\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx\equiv\ln|a\sin x+b\cos x| \end{cases}$$

Sistemul obținut:

$$\begin{cases} aA\ +\ bB=x \\ -bA\ +\ aB=\ln|a\sin x+b\cos x| \end{cases}$$

ne dă soluția:

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}\left(ax-b\ln|a\sin x+b\cos x|\right)$$

$$B=\frac{1}{a^2+b^2}\left(bx+a\ln|a\sin x+b\cos x|\right)$$

16. $I=\int\frac{\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$

Soluție. Aducem integrala la o formă mai convenabilă, astfel încât:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{\cos x\left(a\sin x+b\cos x\right)-b\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{a}\int\cos x\,dx-\frac{b}{a}\underbrace{\int\frac{\cos^2 x\ dx}{a\sin x+b\cos x}}_{B}=\frac{1}{a}\left(\sin x-bB\right)$$

unde B este obținut la *exercițiul 12*, i.e.

$$B=\int\frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|-b\sin x+a\cos x\right)$$

cu $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

17. $A=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, $\quad B=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

Soluție. Întrucât $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$ avem:

$$A+B=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin 2x}$$

dar, am văzut că pentru $|a|>|b|$ are loc relația:

$$J_{a,\,b}=\int\frac{dt}{a+b\sin t}=\frac{t}{b}-\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$$

Se aleg: $a=1,\quad b=-\dfrac{1}{2},\quad t=2x\ \therefore\ dx=\dfrac{1}{2}dt,$ prin urmare:

$$A+B=\frac{1}{2}J_{1,-\frac{1}{2}}=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Pe de altă parte:

$$-A+B=\int\frac{(-\sin x+\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)(1-2\sin x\cos x)}$$

Pentru a găsi ultima integrală vom face schimbarea de variabilă:

$$\sin x+\cos x=u\ \therefore\ (-\sin x+\cos x)dx=du$$

de unde rezultă că $1+2\sin x\cos x=u^2$ sau $2\sin x\cos x=u^2-1$

Apoi:

$$-A+B=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u(1-u^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{u^2+(1-u^2)}{u(1-u^2)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{u\ du}{1-u^2}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|u^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln|u|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x}\right|$$

Prin urmare, se obține sistemul:

$$\begin{cases} A+B=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}\right)\\ -A+B=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin 2x}{\sin 2x}\right|\end{cases}$$

iar soluția acestuia este:

$$A=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\ x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{\sin 2x}\right|$$

$$B=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\ x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{\sin 2x}\right|$$

Exerciții propuse

1. $I_a = \int \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x}$

$R:\quad I_a = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{tg} x\right),\ |a| > 1$

$$I_a = \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1\right)-2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}{a^2\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)-2\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)},\quad |a|<1$$

2. $I_a = \int \frac{dx}{a^2 - \cos^2 x}$

$R:\quad I_a = \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right),\ |a|>1$

$$I_a = \frac{1}{2a\sqrt{1-a^2}}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a-1}{a-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{\frac{-a-1}{a-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|\right),\quad |a|<1$$

3. $\int \frac{dx}{\sin x + \sin a}$

$R:\quad \frac{1}{2\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x-a}{2}}\right|$

4. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$

$R:\quad \frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}$

$R: \quad \cos^3 a\left(\ln\left|\sin(x+a)\right| + x\,\mathrm{tg}\,a\right)$

6. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{ctg}\,a}$

$R: \quad \cos^3 a\left(\ln\left|\sin(x+a)\right| + x\ \mathrm{tg}\ a\right) - \cos^2 a\left(\ln\left|\sin(x+a)\right| + x\ \ \mathrm{ctg}\,a\right)$

7. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^2\,x - \mathrm{ctg}^2\,a}$

$R: \quad \frac{1}{a^2+1}\left(-x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\mathrm{ctg}\,x}{a-\mathrm{ctg}\,x}\right|\right)$

8. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^2\,x + \mathrm{ctg}^2\,a}$

$R: \quad \frac{1}{a^2+1}\left(-x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\mathrm{ctg}\,x}{a-\mathrm{ctg}\,x}\right|\right)\mathrm{ctg}^2\,a\left(\mathrm{ctg}\,a\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,a\,\mathrm{ctg}\,x\right) + x\right)$

9. a) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

$R: \quad \mathrm{arctg}\left(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)$

b) $\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$

$R: \quad \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{5} - 5}{\mathrm{tg}\frac{x}{5} - 3}\right|$

c) $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}$

$R: \quad \frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}}\right|$

Indicație. Cele trei integrale se calculează folosind *schimbarea universală* $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t.$

10. a) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$

$R:\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$

b) $\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$

$R:\ \ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

Indicație. a) Se poate scrie $\cos x - \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, iar substituția $x + \frac{\pi}{4} = t$ conduce la o integrală cunoscută.

b) La fel, $1 + \cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + \sqrt{2}\cos t$ cu $t = x + \frac{\pi}{4}$.

Se poate utiliza rezultatul de la *exercițiul 17* cu $a = 1$ şi $b = \sqrt{2}$.

11. a) $I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$

$R:\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$

b) $J = \int \frac{5\sin x - 3\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 5} dx$

$R:\ \frac{3x}{25} - \frac{29}{25}\ln|3\sin x + 4\cos x + 5| + \frac{17}{5}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$

12. $A = \int \frac{\sin^2 x\, dx}{\sin x + \cos x}$, $B = \int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x + \cos x}$

$R:\ A = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$,

$B = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$

13. $A = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}$, $B = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}$

$R:\ A = \frac{1}{2}\left(x - \ln|\sin x + \cos x|\right)$,

$$B=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)$$

14. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$R:\quad \frac{1}{2}\left(3\sin x-\cos x\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$

15. $A=\int\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx,\quad B=\int\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx$

$R:\quad A=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$

$$B=-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

16. a) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

$R:\quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$

b) $\int\frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

$R:\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right|$

Indicație. Se trece la arcul dublu şi apoi se notează $\operatorname{tg} x=t$ pentru prima integrală, iar la a doua integrală, $\sin 2x=t$.

17. $\int\frac{dx}{\cos^6 x+\sin^6 x}$

$R:\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\right)$

Indicație. Se descompune numitorul după sumă de cuburi şi apoi se trece la arc dublu.

18. $\int\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x+1}dx$

$R:\quad \ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\left(1+\operatorname{tg} x\right)^2}\right)$

19. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{a+b\operatorname{ctg} x}dx$

$R:\quad \frac{bx}{a^2+b^2}+\frac{a}{a^2+b^2}\ln\left|a\cos x+b\sin x\right|$

20. $\int \frac{\sin x}{a+b\sin x}dx$

$R:\quad \frac{x}{b}-\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),\quad |b|<|a|$

$\frac{x}{b}-\frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\sin\frac{x}{2}+\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)\cos\frac{x}{2}}{a\sin\frac{x}{2}+\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)\cos\frac{x}{2}}\right|,\quad |b|>|a|$

21. $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$

$R:\quad \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\sin\frac{x}{2}+\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)\cos\frac{x}{2}}{a\sin\frac{x}{2}+\left(b+\sqrt{b^2-a^2}\right)\cos\frac{x}{2}}\right|,\quad |a|<|b|$

$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),\quad |a|>|b|$

22. $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x}$

$R:\quad \frac{ax}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|a\cos x+b\sin x\right|$

23. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

$R:\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x\right)$

24. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\sin^2 x}$

$R:\quad x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

$R:\quad x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x\right)$

26. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

$R:\quad \ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

27. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sin x(\sin x+\cos x)}$

$R:\quad \ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\operatorname{ctg} x+\ln\left|\operatorname{ctg} x+1\right|$

28. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$

$R:\quad \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)$

29. $I=\int \sin ax\sin bx\sin cx$

$R:\quad \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(a-b-c)x}{a-b-c}-\frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c}-\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c}\right)$

30. $I=\int \sin ax\sin bx\cos cx\, dx$

$R:\quad \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a-b-c)x}{a-b-c}-\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}+\frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}-\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c}\right)$

31. $\int \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} 2x\, dx$

$R:\quad -x-\frac{\operatorname{ctg} x}{2}$

32. $\int \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} 3x\, dx$

$R:\quad \frac{\operatorname{tg} x}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\ \operatorname{tg} x-1}{\sqrt{3}\ \operatorname{tg} x+1}\right|-x$

1.9.4. Integrarea funcțiilor iraționale cu ajutorul substituțiilor de funcții trigonometrice

Integralele de forma:

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

unde R este o funcție rațională, pot fi reduse la integrale raționale de funcții trigonometrice prin următoarele substituții:

(i) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx}$ $\boxed{x = a\sin t}$ sau $\boxed{x = a\cos t}$

(ii) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx}$ $\boxed{x = a\,\mathrm{tg}\,t}$ sau $\boxed{x = a\,\mathrm{ctg}\,t}$

(iii) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx}$ $\boxed{x = \dfrac{a}{\cos t}}$ sau $\boxed{x = \dfrac{a}{\sin t}}$

Exerciții rezolvate

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$

Soluție. Se face substituția (i):

$$x \to t\ \therefore\ x = 3\ \sin t,\ dx = 3\cos t\ dt$$

iar integrala devine:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx = 3\int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{3\sin t}\cos t\ dt == 3\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\cos t\ dt =$$

$$= 3\int \frac{\sin^2 t}{\sin t}dt == 3\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\ dt = 3\int \frac{dt}{\sin t} - 3\int \sin t\ \mathrm{dt}$$

Pentru a calcula $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t}$ se folosește substituția:

$$\mathrm{tg}\frac{t}{2} = u \Rightarrow dt = \frac{2du}{1+u^2}$$

deci:

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{2du}{\left(1+u^2\right)\dfrac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|.$$

Atunci:

$$3\int\frac{dt}{\sin t}-3\int\sin t\ \mathrm{dt}=3\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\mathrm{t}}{2}\right|+3\cos t+C$$

unde, $t=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

Soluție. Se face substituția (ii):

$$x=2\,\mathrm{tg}\,t\ \Rightarrow\ dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}$$

şi integrala devine:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}=\int\frac{2dt}{\cos^2 t\cdot\mathrm{tg}\,t\sqrt{4+4\,\mathrm{tg}^2\,t}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\mathrm{tg}\,t\cdot\dfrac{1}{\cos t}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos t\ \ \mathrm{tg}\,t}=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|+C$$

unde $t=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}$

3. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-16}}$

Soluție. Se foloseşte substituția (iii):

$$x=\frac{4}{\cos t}\Rightarrow dx=\frac{4\sin t}{\cos^2 t}dt$$

iar integrala devine:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-16}}=\int\frac{\dfrac{16}{\cos^2 t}\cdot\dfrac{4\sin t}{\cos^2 t}}{\sqrt{\dfrac{16}{\cos^2 t}-16}}dt=16\int\frac{\sin t\cos t}{\cos^4 t\sqrt{1-\cos^2 t}}dt=$$

$$=16\int\frac{\cancel{\sin}\,t}{\cos^3 t\,\cancel{\sin}\,t}dt=16\int\frac{dt}{\cos^3 t}$$

Pentru a calcula $\displaystyle\int\frac{dt}{\cos^3 t}$ se observă că integrantul este de forma:

$$R(\sin t,-\cos t)=-R(\sin t,\cos t)$$

integrala se rezolvă folosind schimbarea (ii), pentru care se face substituția:

$$\sin t\ =\ u\ \therefore\ du\ =\ \cos t\ dt,$$

iar integrala devine:

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = \int \frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}$$

care este o integrală rațională.

$$\frac{1}{\left(1-u^2\right)^2} = \frac{A}{\left(1-u\right)^2} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{\left(1+u\right)^2} + \frac{D}{1+u}$$

de unde rezultă:

$$1 \equiv (-B+D)u^3 + (A-B+C-D)u^3 + (2A+B-2C-D)u + (A+B+C+D)$$

iar, prin identificare după puterile lui u, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} -B \quad\quad +D = 0 \\ A-B+\quad C-D \ = 0 \\ 2A+B-2C-D \ = 0 \\ A+B+\quad C+D \ = 1 \end{cases}$$

cu soluția: $A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4},\ D = \frac{1}{4}$.

Înlocuind mai sus valorile găsite şi integrând termenii extremi se obține:

$$\int \frac{du}{\left(1-u^2\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(1-u\right)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(1+u\right)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \ln|u-1| + \ln|u+1|\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{u^2-1} + \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{\sin^2 t - 1} + \ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1}\right|\right] = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} - \frac{2}{\cos^2 t}\right|\right]$$

În final, se poate scrie:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}dx = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1}\right| - \frac{2}{\cos^2 t}\right] + C$$

unde $t = \arccos\frac{4}{x}$

Exerciții propuse

1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

$R:\ \frac{1}{5}\ln\left|5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$

2. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

$R:\ -2\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$

3. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\sin x\cos x}dx$

$R:\ -\frac{1}{17}x+\frac{1}{4}\ln|\sin x|-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|+C$

4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}dx$

$R:\ \ln|\sin x|-\sin x+C$

5. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x-\sin^2 x-1}dx$

$R:\ -\frac{2}{5}\ln|1-\cos x|+\frac{1}{5}\ln\left(\cos^2 x+2\cos x+2\right)-\frac{6}{5}\mathrm{arctg}\left(1+\cos x\right)+C$

6. $\int \sin^3 x dx$

$R:\ \frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

7. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$

$R:\ \ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

8. $\int \frac{dx}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$

$R: \quad -\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}+C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$

$R: \quad \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$

$R: \quad \dfrac{1}{2}\left(x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)+C$

11. $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

$R: \quad \ln\left(2+\cos x\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C$

1.10. Integrale binome

Integralele binome sau de tip *Cebâşev* au forma generală:

$$\boxed{\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx, \quad m,n,p\in\mathbb{Q}}$$

unde $ax^n + b = t^s$. Distingem următoarele situații:

(i) Dacă $p\in\mathbb{Z}$, atunci:

a) pentru $p>0$, integrantul se dezvoltă după *binomul lui Newton*;

b) pentru $p<0$ se face substituția $x=t^s$, unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor m şi n.

(ii) Dacă $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, atunci se face substituția $ax^n + b = t^s$, unde s este numitorul lui p.

(iii) Dacă $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ se face substituția $ax^n + b = t^s x^n$, unde s este numitorul lui p.

Observație
În urma substituțiilor indicate pentru fiecare caz în parte, se obțin integrale de funcții raționale. În caz contrar „undeva s-a greșit”!

Exerciții rezolvate

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}, \quad x>0$

Soluție: Integrala se mai poate scrie:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10} dx$$

Se observă că $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4}, p=-10$. Se face substituția:

$$x = t^4 \therefore dx = 4t^3 dt.$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10} dx = 4\int t^{-2}(t+1)^{-10} t^3 dt = 4\int \frac{t}{(t+1)^{10}} dt = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}} dt =$$

$$= 4\int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = -\frac{1}{2(t+1)^8} + \frac{4}{9(t+1)^9} = -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}$$

$$= 4\int (t+1)^{-9} dt - 4\int (t+1)^{-10} dt = -\frac{4}{8}(t+1)^{-8} + \frac{4}{9}(t+1)^{-9}$$

2. $\int \frac{x^3 dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$

Soluție: Aducem integrala la forma:

$$I = \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx$$

unde $m=3,\ n=2,\ p=-\frac{3}{2}.$

Întrucât: $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z},$ ne situăm în cazul (ii). Se face substituția:

$$1-x^2 = t^2 \Leftrightarrow x = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \therefore dx = -t\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

Integrala devine:

$$I = \int \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} t^{-3} t \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt = \int \frac{t^2-1}{t^2} dt = \int \left(1-\frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$=t+\frac{1}{t}=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

3. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}},\quad x\neq 0$

Soluție. Se scrie integrala sub forma:

$$I=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\text{, de unde } m=-4,\ n=2,\ p=\frac{1}{2}$$

şi întrucât:

$$\frac{m+1}{n}+p=-2$$

suntem în cazul (iii). Substituția:

$$x^2+1=t^2\ \therefore\ x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}},\ dx=-t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt$$

aduce integrala sub forma:

$$I=-\int\left(t^2-1\right)^2\left[1+\left(t^2-1\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)dt=t-\frac{t^3}{3}=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)^3}}{3}+C$$

4. $I=\int\sqrt[3]{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2dx$

Soluție. Aici $m=\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{2},\ p=2$. Suntem în cazul (i) cu p întreg pozitiv. Cu binomul lui Newton rezultă că:

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx=\int\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{5}{6}}+4x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}+3x^{\frac{4}{3}}$$

5. $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Soluția 1. Se observă că $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, aşa că putem nota:

$$\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=t\ \Leftrightarrow\ \sqrt[3]{x}=t^2-1\text{ şi }\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=6t\ dt$$

Cu acestea, integrala se scrie sub forma:

$$I=\int 6t^2dt=2t^3=2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^3$$

Soluția 2. Cu $m=-\dfrac{2}{3},\ \ n=\dfrac{1}{3},\ \ p=\dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}}=1,$ i.e. $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z},$

deci ne situăm în cazul (ii). Cu schimbarea $1+x^{\frac{1}{3}}=t^2$, unde numitorul lui p este $s=2$.

De aici, $x=\left(t^2-1\right)^3$, iar $dx=6t\left(t^2-1\right)^2dt,$ apoi:

$$I=\int\frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}\cdot 6t\left(t^2-1\right)^2dt=2\int 3t^2dt=2t^3=2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^3$$

6. $I=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

Soluție. Aici $m=-11,\ \ n=4,\ \ p=-\dfrac{1}{2},\quad (s=2).$

Cum $\dfrac{m+1}{n}+p=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}=-3\in\mathbb{Z}$ suntem în cazul (iii) cu substituția:

$1+x^4=x^4t^2$ obținem $x^4\left(t^2-1\right)=1$ sau

$$x=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}}\quad\text{iar}\quad dx=-\frac{t\ dt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}$$

Înlocuim aceste expresii în integrala dată, astfel să putem scrie:

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{t\ dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt\Leftrightarrow$$

$$I=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}$$

Reluând notația în x, integrala ia forma finală:

$$I=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}$$

7. $I_k=\displaystyle\int\frac{dx}{x^k\sqrt{x^2+1}},\quad k\in\mathbb{N},\quad x>0$

Soluție. Aici $m=-k,\ \ n=2,\ \ p=-\dfrac{1}{2}.$ Distingem următoarele cazuri:

a) $k=2r+1,\ \ r\in\mathbb{N}$. Observăm că $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-2r-1+1}{2}=-r\in\mathbb{Z}$.

Suntem în cazul (ii), deci putem nota:

$$1+x^2=t^2,\quad (s=2)$$

De aici deducem: $x=\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$, iar $dx=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$

apoi:

$$I_k=\int\left(t^2-1\right)^{-\frac{2r+1}{2}}\frac{1}{t}\frac{t\ dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int\left(t^2-1\right)^{-(r+1)}dt=\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^{r+1}}=K_{r+1}$$

unde pentru ultima integrala se poate obține o relație de recurență.

$$K_n=\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^n}=\int\frac{t^2-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^{n+1}}dt=\frac{1}{2}\underbrace{\int t\frac{2t\ dt}{\left(\mathrm{t}^2-1\right)^{n+1}}}_{A}-K_{n+1}=\frac{1}{2}A-K_{n+1}$$

Integrala, notată cu:

$$A=\int t\frac{2t\ dt}{\left(t^2-1\right)^{n+1}}$$

se integrează prin părți, alegând:

$$\begin{cases}u=t\\ dv=\dfrac{2t\ dt}{\left(t^2-1\right)^{n+1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=-\dfrac{1}{n+2}\cdot\dfrac{1}{\left(t^2-1\right)^{n+2}}\end{cases}$$

Astfel:

$$A=-\frac{1}{n+2}\frac{t}{\left(t^2-1\right)^{n+2}}+\frac{1}{n+2}K_{n+2}$$

Înlocuind pe A în expresia lui K_n, se obține:

$$K_n=-\frac{1}{2(n+2)}\frac{t}{\left(t^2-1\right)^{n+2}}-K_{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}K_{n+2}$$

Pentru $n\to n-2$ obținem relația de recurență a integralei K_n:

$$K_n=\frac{t}{\left(t^2-1\right)^n}-2n\ K_{n-1}-2n\ K_{n-2}\ ,\ \ \forall n\geq 2$$

iar pentru $n\to r+1$ obținem în final:

$$I_k\equiv I_{2r+1}=K_{r+1}=\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{r-1}}-\left(2r+2\right)K_r-\left(2r+2\right)K_{r-1},\quad r\geq 1$$

b) $k=2r,\quad r\in\mathbb{N}.$ Observăm că $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{2r+1}{2}-\dfrac{1}{2}=r\in\mathbb{Z}.$

Suntem în cazul (iii). Cu substituția $1+x^2=t^2x^2$ obținem:

$$x=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\ \text{şi}\ dx=-\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

integrala se transformă în:

$$I_k=I_{2r}=-\int\frac{1}{\left(t^2-1\right)^r}\cdot\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{t}\cdot\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{dt}{t\left(t^2-1\right)^{r+2}}=-L_{r+2}$$

unde:

$$L_{r+2}=\int\frac{\left(t^2-1\right)-t^2}{t\left(t^2-1\right)^{r+2}}dt=\underbrace{\int\frac{dt}{t\left(t^2-1\right)^{r+1}}}_{L_{r+1}}-\underbrace{\int\frac{t\ dt}{t\left(t^2-1\right)^{r+2}}}_{B}=L_{r+1}-B$$

Evaluăm integrala B, notând $t^2-1=u$, iar $t\ dt=\dfrac{du}{2}$

$$B=\int\frac{du}{u^{r+2}}=-\frac{1}{r+3}\frac{1}{u^{r+3}}=-\frac{1}{r+3}\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{r+3}}$$

Cu expresia lui B obținem:

$$L_{r+2}=L_{r+1}+\frac{1}{(r+3)}\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{r+3}}$$

Pe de altă parte, din $I_{2r}=-L_{r+2}$, deducem că $I_{2r-1}=-L_{r+1}$, iar în final

$$I_k=I_{2r}=-\frac{1}{(r+3)\left(t^2-1\right)^{r+3}}+I_{2r-1},\quad r\in\mathbb{N}.$$

8. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Soluție. Scriem integrala sub forma:

$$\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\int x^0\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

cu $m=0,\quad n=2,\quad p=\dfrac{3}{2}.$ Întrucât, $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ ne situăm în cazul (iii).

Astfel, notăm:

$$1+x^2=t^2x^2,\ \text{cu}\ x=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\quad \text{iar}\quad dx=-\frac{t\ dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cu acestea:

$$I=-\int\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{t^3}\frac{t\ dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

9. $I=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3},\quad x\in\mathbb{R}$

Soluție. La fel ca şi la *exercițiul 5*, alegem:

$$a^2+x^2=t^2x^2\quad \text{iar}\quad x=\frac{a}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}},\ \text{cu}\ dx=-\frac{at\ dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

apoi,

$$I=-\int\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{t^3}\frac{at\ dt}{\left(t^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-a\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

10. $I=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^3},\qquad x>a$

Soluție. Idem ca mai sus. Se schimbă:

$$x^2-a^2=t^2x^2,\ x=\frac{a}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ dx=\frac{at\ dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

apoi:

$$I=\int\frac{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{t^3}\frac{t\ dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{t}=-\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

11. $I=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3},\qquad x\in(0,\ a)$

Soluție. Cu schimbarea:

$$a^2-x^2=t^2x^2,\ x=\frac{a}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}},\ dx=-\frac{at\ dt}{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Analog, se obține:

$$I = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

12. $I = \int \frac{x^3 dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad x \in (0,\ 1)$

Soluție. Aici $m=3$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$, iar $\frac{n+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, i.e. potrivit cazului (iii) notăm:

$$1-x^2 = t^2,\ \ x = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ iar, } dx = \frac{-t\ dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t>0$$

apoi:

$$I = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{t} \frac{t\ dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\int \left(1-t^2\right) dt = \frac{t^3}{3} - t$$

În variabila inițială x, integrala se scrie, în final:

$$I = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\left(x^2+2\right)}{3}\sqrt{1-x^2}$$

13. $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad x \in (0, a)$

Soluție. La fel ca mai sus:

$$a^2 - x^2 = t^2,\ \ x = \left(a^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \text{ iar } \ dx = -\frac{t\ dt}{\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Înlocuind, integrala devine:

$$I = -\int \frac{\left(a^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{t} \cdot \frac{t\ dt}{\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\int \left(a^2 - t^2\right) dt = \frac{t^3}{3} - a^2 t$$

În variabila inițială x, integrala are valoarea:

$$I = -\frac{1}{3}\left(x^2 + 2a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}$$

14. $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \qquad x > a$

Soluție. Se noteză $a^2 - x^2 = t^2 \Leftrightarrow \quad x = \left(a^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; dx = \dfrac{-t\,dt}{\left(a^2 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

apoi:

$$I = -\int \frac{\left(a^2 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{t} \cdot \frac{t\,dt}{\left(a^2 + t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\int \left(a^2 + t^2\right) dt = -\frac{t^3}{3} - a^2 t$$

În final, se obține:

$$I = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2a^2\right)\sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

15. $I = \displaystyle\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad x \in (0, a)$

Soluție. Scriem integrala sub forma:

$$I = \int x^5 \left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Aici $\quad m = 5, \; n = 2, \; p = -\dfrac{1}{2}, \; \dfrac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}$. Se face schimbarea:

$$a^2 - x^2 = t^2, \text{ cu } \; x = \left(a^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ iar } \; dx = -\frac{t\,dt}{\left(a^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

În aceste condiții, integrala devine:

$$I = -\int \frac{\left(a^2 - t^2\right)^{\frac{5}{2}}}{t} \frac{t\,dt}{\left(a^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\int \left(a^2 - t^2\right)^2 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2}{3}a^2t^2 - a^4 t$$

sau

$$I = -\frac{t}{15}\left(3t^4 - 10a^2 t + a^4\right)$$

Revenind la notația inițială, obținem:

$$I = -\frac{1}{15}\sqrt{\alpha^2 - x^2}\left(3x^4 + 4\alpha^2 x^2 + 8\alpha^4\right)$$

16. $I = \displaystyle\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Soluție. Se noteză:

$$x^2 - a^2 = t^2 \; \text{ cu } \; x = \left(t^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}} \; \text{ și } \; dx = \frac{t\,dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Atunci:

$$I=\int\frac{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{t}\frac{t\ dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\int\left(t^2+a^2\right)^2 dt=\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}a^2t^2+a^4t$$

În notația inițială:

$$I=\frac{1}{15}\sqrt{x^2-a^2}\left(3x^4+4a^2x^2+8a^4\right)$$

17. $I=\int\frac{x^5}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

Soluție. Se efectuează aceeaşi schimbare ca mai sus, iar în final, se obține:

$$I=\frac{1}{15}\sqrt{x^2+a^2}\left(3x^4-4a^2x^2+8a^4\right)$$

18. $I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

Soluție. Aducem integrala sub forma:

$$I=\int x^{-4}\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

cu $m=-4,\ \ n=2,\ \ p=\frac{1}{2},$ deci ne situăm în cazul (iii) cu :

$$a^2+x^2=t^2x^2,\quad x=\frac{a}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}},\quad dx=-\frac{at\ dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}},$$

iar integrala devine:

$$I=-\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{a^4}\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{at}\frac{at\ dt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{a^4}\int\left(t^2-1\right)dt=-\frac{t}{a^4}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)$$

sau

$$I=\frac{t}{3a^4}\left(3-t^2\right)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{3a^4x^3}\left(2x^2-a^2\right)$$

19. $I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}}$

Soluție. Ca şi la exercițiul precedent aducem integrala sub forma unei integrale Cebâşev:

$$I=\int x^{-4}\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

după care aplicăm transformarea:

$$x^2 - a^2 = t^2 x^2, \quad x = \frac{a}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad dx = \frac{at\ dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

apoi rescriem:

$$I = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{a^4} \cdot \frac{1}{at} \cdot \frac{at\ dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^4}\int\left(1-t^2\right)dt = \frac{1}{a^4}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$$

iar dacă înlocuim $t = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$ obținem, în final:

$$I = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{3a^4 x^3}\left(2x^2 + a^2\right)$$

20. $I = \int \dfrac{dx}{x^4\sqrt{a^2 - x^2}}$

Soluție. Cu schimbarea $a^2 - x^2 = t^2 x^2$, obținem:

$$x = \frac{a}{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad dx = -\frac{at}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt$$

Apoi:

$$I = -\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{a^4} \cdot \frac{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{at} \cdot \frac{at\ dt}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{a^4}\int\left(1+t^2\right)dt = \frac{t}{a^4}\left(\frac{t^2}{3}+1\right)$$

Revenind la notația inițială, cu $t = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ se obține, în final:

$$I = \frac{1}{3a^4 x^3}\sqrt{a^2 - x^2}\left(2x^2 + a^2\right)$$

21. $I = \int \sqrt[4]{\dfrac{x}{1+x^5}}dx$

Soluție. Aducem integrala sub forma unei integrale *Cebâşev*:

$$I = \int x^{\frac{1}{4}}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{4}}dx$$

cu $m = \dfrac{1}{4}$; $n = 5$; $p = -\dfrac{1}{4}$. Cum, însă:

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{\frac{1}{4}+1}{5}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in\mathbb{Z},$$

se poate face schimbarea:

$$1+x^5=t^4x^5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{5}}},\quad dx=-\frac{4t^3dt}{5\left(t^4-1\right)^{\frac{6}{5}}}$$

Apoi, ținând seama că:

$$\sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}}=x^{\frac{1}{4}}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{20}}}t^{-1}\frac{1}{\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}}=\frac{t^{-1}}{\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{5}}}$$

integrala se rescrie:

$$I=-\frac{4}{5}\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{4}{5}\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt=-\frac{4}{5}\left(\int\frac{dt}{t^2+1}+\underbrace{\int\frac{dt}{t^4-1}}_{I_1}\right)$$

sau

$$I=-\frac{4}{5}\left(\text{arctg } t+I_1\right)$$

Pentru a calcula I_1 să observăm că:

$$\frac{1}{t^4-1}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)}{t^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)$$

Dacă integrăm în ambii membrii găsim:

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\text{arctg}\, t\right)$$

Înlocuind mai sus expresia lui I, obținem:

$$I=-\frac{2}{5}\text{arctg}\, t-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|,\ \text{cu}\quad t=\sqrt[4]{\frac{1+x^5}{x^5}}$$

Exerciții propuse

1. a) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$

R: $\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}+\ln\frac{x}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3}+C$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$

R: $4\sqrt{\sqrt{x}+1}\left[\frac{1}{5}\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)+1\right]+C$

2. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

R: $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, unde $t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$

b) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$

R: $-\frac{\left(2-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}{4x^2}+C$

3. a) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx$

R: $\frac{1}{10}\left(5x^{\frac{4}{3}}+3\right)^{\frac{3}{2}}+C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$, $x\neq 0$

R: $3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$

5. $\int \frac{dx}{x^{-\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}}, \qquad x\in\mathbb{R}$

$R: \quad \frac{2}{3}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}-\frac{12}{5}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}$

6. $\int \frac{1}{x^{-5}}\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}\,dx, \qquad x\in\mathbb{R}$

$R: \quad \frac{3}{22}\left(1+x^2\right)^{\frac{11}{3}}-\frac{3}{8}\left(1+x^2\right)^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{10}\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{3}}$

7. $\int x^{-5}\left(1+x^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}}dx, \qquad x\neq 0$

$R: \quad -\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx, \qquad x>0$

$R: \quad \frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}$

9. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

$R: \quad 3\ln\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}$

10. $\int x^3\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx, \qquad x\in\mathbb{R}$

$R: \quad \frac{1}{15}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(3x^2-2\right)$

11. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}, \qquad x\in\mathbb{R}^*$

$R: \quad \frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (0,1)$

$R: \quad -\dfrac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{1-x^2}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1$

$R: \quad \dfrac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad x \in (0,1)$

$R: \quad \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad x > 1$

$R: \quad -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

$R: \quad \dfrac{5}{4}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} - \dfrac{5}{9}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$R: \quad \dfrac{\left(x^2-2\right)}{3}\sqrt{x^2+1}$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$R:\ \dfrac{\left(x^2+2\right)}{3}\sqrt{x^2-1}$

19. $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$R:\ -\dfrac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left(3x^4+4x^2+8\right)$

20. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$R:\ \dfrac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left(3x^4+4x^2+8\right)$

21. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$R:\ \dfrac{1}{15}\sqrt{1+x^2}\left(3x^4-4x^2+8\right)$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

$R:\ \dfrac{1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}\left(2x^2-1\right)$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

$R:\ \dfrac{1}{3x^3}\sqrt{1-x^2}\left(2x^2+1\right)$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$

$R:\ -\dfrac{1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}\left(2x^2+1\right)$

1.11. Integrale abeliene

Integrale de forma:

$$\boxed{\int R(x,y)dx}$$

unde y este o soluție a ecuației algebrice $F(x,y)=0$, se mai numesc şi integrale de tip *Abel* sau *abeliene.*
Dacă se găseşte o parametrizare rațională a curbei definită de această ecuație, atunci integrala se reduce la una rațională.

Exerciții rezolvate

1. $I=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5-x^3}}$

Soluție. Notăm $y=\sqrt[3]{x^5-x^3}$ sau $x^5-x^3=y^3$. Pentru a găsi o reprezentare parametrică se taie curba cu dreapta $y=tx$ şi se obține:

$$x^2-1=t^3 \Leftrightarrow x=\sqrt{t^3+1},\ \ y=t\sqrt{t^3+1},\ \text{ iar } \ dx=\frac{3t^2dt}{2\sqrt{t^3+1}}$$

Integrala devine, în acest caz:

$$I=\int \frac{1}{t\sqrt{t^3+1}}\cdot\frac{3t^2dt}{2\sqrt{t^3+1}}=\frac{3}{2}\int\frac{t}{t^3+1}$$

Pentru a evalua integrala din dreapta se caută o dscompunere de forma:

$$\frac{t}{t^3+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

astfel că identitatea obținută:

$$t\equiv A\left(t^2-t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t+1\right)$$

conduce la sistemul:

$$\begin{cases} A+B=0\\ -A+B+C=1\\ A+C=0\end{cases}$$

De aici găsim: $A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{3},$ iar

$$\int \frac{t\,dt}{t^3+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{(t+1)dt}{t^2-t+1} = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)+3}{t^2-t+1}dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Înlocuind acest rezultat în expresia lui I, obținem:

$$I = -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Restrângem şi apoi revenim la notația inițială:

$$I = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} - \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)} + 1}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2-1}-1}{\sqrt{3}}$$

2. $I = \int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x(x-1)}}$

Soluție. Se ataşează curba de ecuație $y = \sqrt{x(x-1)}$ sau $x^2 - x = y^2$. Reprezentarea parametrică se poate găsi dacă se taie curba cu dreapta $y = tx$. Astfel:

$$\begin{cases} x^2 - x = y^2 \\ y = tx \end{cases} \Rightarrow x - 1 = t^2 x$$

Deducem că:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{1-t^2} \end{cases} \qquad dx = \frac{2t\ dt}{\left(1-t^2\right)^2},\quad x^2 - 4 = \frac{\left(2t^2-1\right)\left(3-2t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\frac{1}{2}$$

Integrala devine:

$$I = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(2t^2-1\right)\left(3-2t^2\right)} \cdot \frac{1-t^2}{t} \cdot \frac{2t\,dt}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2t^2-2}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)+\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}dt = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}} + \int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-\sqrt{3}}{t\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right|$$

Ținând seama că $t=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ se obține în final:

$$I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(x-1)}-\sqrt{x}}{\sqrt{2(x-1)}+\sqrt{x}}\right|+\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(x-1)}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2(x-1)}-\sqrt{3x}}\right|$$

3. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$

Soluție. Asociem integralei date o curbă algebrică de ecuație $x^3-x^4=y^4$. Reprezentarea parametrică se obține tăind cuadrica cu o dreaptă de ecuație $y=tx$.

Astfel:

$$\begin{cases}x^3-x^4=y^4\\ y=tx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+t^4}\\ y=\dfrac{t}{1+t^4}\end{cases}\quad dx=-\frac{4t^3dt}{\left(1+t^4\right)^2}$$

Integrala revine la:

$$I=-4\int\frac{t^2dt}{t^4+1}$$

Vom proceda la descompunerea integrantului în fracții simple, căutând constantele A, B, C şi D, astfel încât să aibă loc reprezentarea:

$$\frac{t^2}{t^4+1}=\frac{At+B}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

unde s-a ținut cont că polinomul $t^4+1=\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)$ are două perechi de rădăcini complexe conjugate. Efectuând amplificările corespunzătoare se obține identitatea:

$$t^2\equiv(At+B)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)+(Ct+D)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}t^2\equiv At^3-\sqrt{2}At^2&+At\\ +Bt^2&-\sqrt{2}Bt+B\\ Ct^3+\sqrt{2}Ct^2&+Ct\\ +Dt^2&+\sqrt{2}Dt+D\end{aligned}$$

$$t^2\equiv(A+C)t^3+\left(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\right)t^2+\left(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D\right)t+(B+D)$$

Obținem astfel sistemul:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 1 \\ A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 0 \end{cases}$$

iar soluția este: $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = 0.$

Prin urmare:

$$I = \int \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{t\,dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}}_{I_1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{t\,dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}}_{I_2} \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-I_1 + I_2\right)$$

Evaluăm prima integrală I_1:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{\left(2t - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t - 1\right)$$

Analog, rezultă:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\left(2t + \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t + 1\right)$$

Înlocuid mai sus expresiile lui I_1 şi I_2 şi efectuând calculele vom obține în final:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{1 - 2t^2}$$

4. $I = \int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}$

Soluție. Se ataşează curba $\sqrt[3]{2x^2 - x^3} = y$ sau $x^3 + y^3 - 2x^2 = 0$. Cubica obținută are un punct dublu în origine, iar schimbarea: $y = tx$, permite obținerea unei reprezentări parametrice a curbei:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{2t}{1 + t^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x = \dfrac{t^3 - 1}{1 + t^3} \\ dx = -\dfrac{6t^2}{\left(1 + t^3\right)^2} \end{cases}$$

Înlocuind aceste relații în integrala dată vom putea scrie:

$$I=\int \frac{t^3+1}{t^3-1}\cdot\frac{t^3+1}{2t}\cdot\frac{\left(-6t^2\right)dt}{\left(t^3+1\right)^2}=-3\int\frac{t\ dt}{t^3-1}$$

Pentru a putea calcula integrala din membrul drept să observăm că reprezentarea:

$$\frac{t}{t^3-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

conduce la identitatea:

$$t\equiv A\left(t^2+t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t-1\right)$$

unde A, B, C sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} A+B \qquad\ \ =0 \\ A-B+C=1 \\ A \qquad\ -C=0 \end{cases}$$

Se obțin:

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{1}{3},\quad \text{iar apoi:}$$

$$I=-3\int\frac{t\ dt}{t^3-1}=-\ln\left|t-1\right|+\underbrace{\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt}_{I_1}$$

unde:

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{\left(2t+1\right)-3}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|t+1\right|-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

Astfel în variabila t avem:

$$I=\frac{1}{2}\left|t+1\right|-\ln\left|t-1\right|-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

Dacă ținem seama că $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ se găseşte expresia finală a integralei:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)-\ln\left|\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{3x}}$$

Integrale diverse

1. $I_n = \int \sqrt[n]{\frac{x}{1+x^{n+1}}}dx$

Soluție. Dacă scriem:

$$I = \int x^{\frac{1}{n}}\left(1+x^{n+1}\right)^{-\frac{1}{n}} dx$$

recunoaştem tipul de integrală Cebâşev cu $\overline{m} = \frac{1}{n}$, $\overline{n} = n+1$, $\overline{p} = -\frac{1}{n}$.

Cum $\frac{m+1}{n} + p = \frac{\frac{1}{n}+1}{n+1} - \frac{1}{n} = 0$ suntem în cazul (iii). Se face schimbarea:

$$1+x^{n+1} = t^n x^{n+1} \quad \text{sau} \quad x^{-(n+1)} + 1 = t^n$$

Derivăm ultima relație, astfel:

$$-(n+1)x^{-(n+2)}dx = nt^{n-1}dt \Leftrightarrow dx = -\frac{n}{n+1}x^{n+2}t^{n-1}dt$$

Înlocuim aceste expresii în integrala dată şi exprimăm apoi pe x ca funcție de noua variabilă t:

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\int x^{\frac{1}{n}}\left(t^n x^{n+1}\right)^{-\frac{1}{n}} x^{n+2}t^{n-1}dt = -\frac{n}{n+1}\int x^{n+1}t^n dt =$$

$$= -\frac{n}{n+1}\int \frac{t^{n-2}}{t^n-1}dt = -\frac{n}{n+1}K_n$$

Rezultă că:

$$I_n = \int \sqrt[n]{\frac{x}{1+x^{n+1}}}dx = -\frac{n}{n+1}\int \frac{t^{n-2}}{t^n-1}dt\ , \quad \forall n \geq 2$$

$$I_4 = \int \sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}}dx = -\frac{4}{5}\int \frac{t^2}{t^4-1}dt, \quad t = \sqrt[4]{\frac{x^5+1}{x^5}}$$

Am văzut în *paragraful 1.5.* că:

$$\int \frac{t^2}{t^4-1}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

De aici deducem că:

$$\int \sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}}dx = -\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^5}}\right) - \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^5+1}-x}{\sqrt[4]{x^5+1}+x}\right|$$

2. $I_n = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}}$, $n \geq 2$

Soluție. Să observăm că:

$$I=\int x^0\left(1+x^n\right)^{-\frac{1}{n}}dx$$

cu $m=0,\ n,\ p=-\dfrac{1}{n},$ ne situăm în cazul (iii) de la integrala Cebâşev, deoarece $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}=0.$ Se pune: $1+x^n=t^nx^n$ sau $x^{-n}+1=t^n$. Apoi prin diferențiere: $-nx^{-(n+1)}dx=nt^{n-1}dt$ sau $dx=-x^{n+1}t^{n-1}dt.$

Pe de altă parte $\left(1+x^n\right)^{-\frac{1}{n}}=\left(t^nx^n\right)^{-\frac{1}{n}}=t^{-1}x^{-1}$. Înlocuind aceste expresii în integrala dată, găsim:

$$I_n=\int x^nt^{n-2}dt=-\int\frac{t^{n-2}}{t^n-1}dt=K_n$$

unde $K_n=\displaystyle\int\frac{t^{n-2}}{t^n-1}$, $n\geq 2$

Aplicație. Cazul $n=4$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-x}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\right|$$

3. $I_n=\displaystyle\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}},\qquad n\in\mathbb{N}$

Soluție. Întrucât integrala se mai scrie:

$$I_n=\int x^{\frac{n}{2}}\left(a+x^{n+2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

cu $\dfrac{m+1}{n}+p=0$, ne situăm în cazul $iii)$ de la integralele binome. Se face schimbarea :

$$a+x^{n+2}=t^2x^{n+2}\qquad\text{sau}\qquad ax^{-(n+2)}+1=t^2$$

Apoi se obține :

$$-(n+2)ax^{-(n+3)}dx=2t\ dt\qquad\text{sau}\qquad dx=-\frac{2t}{a(n+2)}x^{n+3}dt$$

Înlocuind mai sus, integrala devine:

$$I_n=-\frac{2}{a(n+2)}\int x^{\frac{n}{2}}\left(t^2x^{n+2}\right)^{-\frac{1}{2}}tx^{n+3}dt=-\frac{2}{a(n+2)}\int x^{n+2}dt=$$

$$=-\frac{2}{a(n+2)}\int\frac{a\ dt}{t^2-1}=\frac{1}{n+2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|,\ \text{ unde }\ t=\sqrt{\frac{a+x^{n+2}}{x^{n+2}}}$$

Revenim la notația inițială şi scriem:

$$I_n = \frac{1}{n+2}\ln\left(\frac{\sqrt{a+x^{n+2}}+\sqrt{x^{n+2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}-\sqrt{x^{n+2}}}\right) = \frac{2}{n+2}\ln\left(\sqrt{a+x^{n+2}}+\sqrt{x^{n+2}}\right)$$

4. $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}}$

Soluție. Întrucât:

$$I = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}dx$$

iar $\dfrac{n+1}{n} + p = 0$. Se notează: $1 + x^{\frac{4}{3}} = t^4 x^{\frac{4}{3}}$ sau $x^{-\frac{4}{3}} + 1 = t^4$. De aici, prin derivare găsim:

$$dx = -3x^{\frac{7}{3}}t^3 dt$$

şi dacă înlocuim relațiile obținute în integrala dată, atunci:

$$I = -3\int x^{-\frac{2}{3}}\left(t^4 x^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{7}{3}}t^3 dt = -3\int x^{\frac{4}{3}}t^2 dt = -3\int \frac{t^2 dt}{t^4-1}$$

dar

$$\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

astfel că, în final integrala este:

$$I = \frac{3}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t,\quad t = \sqrt{\frac{1+x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}}$$

Mai mult, dacă înlocuim *t* ca funcție de *x,*

$$I = \frac{3}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{x^{\frac{4}{3}}+1}-\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}}{\sqrt{x^{\frac{4}{3}}+1}-\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}}\right) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^{\frac{4}{3}}+1}{x^{\frac{4}{3}}}}$$

şi apoi raționalizăm, obținem în final:

$$I = \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^{\frac{4}{3}}+1}-\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}\right) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x^{\frac{4}{3}}+1}{x^{\frac{4}{3}}}}\right)$$

5. $I=\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\left(1+\sqrt[3]{x^4}\right)^{\frac{3}{4}}dx$

Soluție. Integrala se aduce la forma uneia binome i.e.

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}dx$$

cu $m=-\frac{2}{3},\ n=\frac{4}{3},\ p=\frac{3}{4}$ şi întrucât $\frac{m+1}{n}+p=1,$ se face:

$$1+x^{\frac{4}{3}}=t^4x^{\frac{4}{3}} \quad \text{sau} \quad x^{-\frac{4}{3}}+1=t^4$$

Derivăm ultima relație, astfel că se obține:

$$-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}dx=4t^3dt \quad \text{sau} \quad dx=-3x^{\frac{7}{3}}t^3dt$$

Integrala se transformă în:

$$I=-3\int x^{-\frac{2}{3}}\left(t^4x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}x^{\frac{7}{3}}t^3dt=-3\int x^{\frac{8}{3}}t^6dt$$

Cum, însă, $x^{\frac{3}{8}}=\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^2=\frac{1}{\left(t^4-1\right)^2}$, rezultă că:

$$I=-3\int\frac{t^6dt}{\left(t^4-1\right)^2}$$

Calculul integralei obținute se face cu ajutorul descompunerii în fracții simple. Astfel reprezentarea:

$$\frac{t^6}{\left(t^4-1\right)^2}=\frac{At+B}{t^2-1}+\frac{Ct+D}{\left(t^2-1\right)^2}+\frac{Et+F}{t^2+1}+\frac{Gt+H}{\left(t^2+1\right)^2}$$

se poate obține cu ajutorul metodei coeficienților nedeterminați. Să observăm totuşi că rezolvarea unui sistem de opt ecuații nu este tocmai simplă. Vom trata problema direct. Astfel:

$$f:=\frac{t^6}{\left(t^4-1\right)^2}=\frac{\left(t^6-1\right)+1}{\left(t^4-1\right)^2}=\frac{\left(t^2-1\right)\left(t^4+\mathrm{t}^2+1\right)+1}{\left(\mathrm{t}^4-1\right)^2}=f_1+f_2$$

unde:

$$f_1=\frac{t^4+t^2+1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)^2}=\frac{\left(t^2+1\right)^2-t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{t^2-1}-\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)^2}$$

$$f_2=\frac{1}{\left(t^4-1\right)^2}$$

Vom descompune separat fracțiile f_1 şi f_2, ținând seama de următoarele două observații:

1)

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^k\left(t^2+1\right)^s}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)+\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^k\left(t^2+1\right)^s}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)^k\left(t^2+1\right)^{s-1}}+\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{k-1}\left(t^2+1\right)^s}\right)$$

2)

$$\frac{1}{\left(t^2-1\right)^k\left(t^2+1\right)^s}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^k\left(t^2+1\right)^s}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)^k\left(t^2+1\right)^{s-1}}-\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{k-1}\left(t^2+1\right)^s}\right)$$

Cu acestea, vom scrie:

$$f_1=\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)+\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}}_{f_{11}}+\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)$$

$$f_2=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2\left(t^2+1\right)}}_{f_{21}}-\underbrace{\frac{1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)^2}}_{f_{22}}\right)$$

unde

$$f_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)$$

$$f_{21}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}-\frac{1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)$$

$$f_{22}=\frac{1}{2}\frac{\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}-\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Înlocuind mai sus, găsim:

$$f_1=\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)$$

$$f_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}-\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\right)$$

Apoi:

$$f=f_1+f_2=\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Integrând ultima egalitate şi ținând cont că:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arctg}t\right)$$

găsim în final:

$$I=\frac{3t^3}{4t^4-1}-\frac{9}{8}\operatorname{arctg}t-\frac{9}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|,\quad \text{cu}\quad t=\sqrt[4]{\frac{1+x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}}$$

6. $I=\int\frac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2+x^4}}$

Soluție. Notăm $1+x=t\therefore x\,dx=\frac{1}{2}dt,$ apoi:

$$\sqrt{1+x^2+x^4}=\sqrt{1+x^2\left(1+x^2\right)}=\sqrt{1+\left(t-1\right)t}=\sqrt{1-t+t^2}$$

Integrala se transformă în:

$$I=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-t+1}}=-\int\frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\left(\frac{1}{t}\right)^2}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1-u+u^2}}$$

cu $u=\frac{1}{t}$. Dacă ținem cont că:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u+u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{2u-1}{2}+\sqrt{u^2-u+1}\right)$$

obținem:

$$I = -\ln\left(\frac{2-t}{2t}+\frac{2\sqrt{t^2-t+1}}{2t}\right)$$

iar în variabila x:

$$I = \ln\frac{2\sqrt{1+x^2}}{2-\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{1-x+x^2}}$$

7. $I = \int \frac{3dx}{x\sqrt{x^6+x^3-2}}$

Soluție. Integrala se mai scrie:

$$I = -\int \frac{\frac{3}{x^2}dx}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-2\left(\frac{1}{x^3}\right)^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t-2t^2}}$$

unde $t = \frac{1}{x^3}$. Apoi, dacă se ține seama de faptul că: $1+t-2t^2 = (1-t)(1+2t)$, se ajunge la:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)(1-t)}}$$

adică o integrală de forma:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(t+a)(b-t)}}$$

pentru care se face schimbarea:

$$t = u+\frac{b-a}{2} \quad \text{cu} \quad \sqrt{(t+a)(b-t)} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2-u^2}$$

Aici: $a = -\frac{1}{2}$ şi $b = 1$, deci $t = u-\frac{3}{4} \therefore dt = du$, iar

$$\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)(1-t)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-u^2} = \sqrt{\alpha^2-u^2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

astfel:

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\alpha^2-u^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{u}{\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin 4\left(t+\frac{3}{4}\right)=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4+3x^3}{x^3}\right)$$

8. $I=\int\frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^4}}dx$

Soluție. Observăm că integrala se descompune în:

$$I=\underbrace{\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}}_{I_2}=I_1+I_2$$

Pentru I_1 putem scrie:

$$I_1=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{2}{x^3}dx}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

Alegem $\frac{1}{x^2}=t\therefore-\frac{2}{x^3}dx=dt,$ astfel că:

$$I_1=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)$$

Pentru I_2 schimbarea $x^2=u$ conduce la scrierea:

$$I_2=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)$$

Adunând expresiile lui I_1 şi I_2 obținem:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{1+x^4}}{1+\sqrt{1+x^4}}x^2\right)$$

9. $I=\int\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^4}}dx$

Soluție. Împărțind numărătorul şi numitorul cu $x^2,$ integrala se aduce la forma:

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}$$

Se notează, apoi $x+\frac{1}{x}=t \therefore \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$. Pe de altă parte $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

aşa că vom obține:

$$I=\int \frac{-dt}{t\sqrt{t^2-2}}$$

O nouă schimbare: $t=\frac{1}{u}$ cu $dt=-\frac{du}{u^2}$ şi $\sqrt{t^2-2}=\frac{\sqrt{1-2u^2}}{u}$, astfel:

$$I=\int \frac{du}{\sqrt{1-2u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}u\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$$

10. $I=\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$

Soluție. Procedăm ca la *exercițiul 9*.

$$I=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)+1}}=\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)' dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}},$$

unde $t=x+\frac{1}{x} \therefore dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$. Astfel că:

$$I=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)=\ln\left(\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right)$$

11. $I=\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx$

Soluție. Integrala se mai poate scrie:

$$I=\int \frac{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}=-\int \frac{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx}{x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=-\int \frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 x}$$

$$= -\int \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Cu substituția: $x - \frac{1}{x} = t \therefore \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dt, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2,$ integrala se va scrie:

$$I = -\int \frac{\sqrt{t^2 + 2} dt}{t\left(t^2 + 4\right)} = -\int \frac{\sqrt{t^2 + 2} t \ dt}{t^2\left(t^2 + 4\right)}$$

Schimbarea $t^2 + 2 = u^2 \therefore t \ dt = u \ du$ conduce la:

$$I = -\int \frac{u^2 \ du}{\left(u^2 - 2\right)\left(u^2 + 2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(u^2 + 2\right) + \left(u^2 - 2\right)}{\left(u^2 + 2\right)\left(u^2 - 2\right)} du =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u^2 + 2} + \frac{1}{u^2 - 2}\right) du = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left|\frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}}\right|$$

Revenind la notația inițială deducem, în final:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4} - x\sqrt{2}} \right| - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x\sqrt{2}} \right)$$

12. $I_n = \int \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} dx$

Soluție. Vom face o integrare prin părți, luând:

$$\begin{cases} u = \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2} - 1} x \ dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I_n = x\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} - n\int x^2 \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2} - 1} dx \Leftrightarrow$$

$$I_n = x\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} - n\int \left[\left(a^2 + x^2\right) - a^2\right]\left(a^2 + x^2\right) dx \Leftrightarrow$$

$$I_n = x\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} - nI_n + a^2 n I_{n-2}$$

De aici, obținem relația de recurență pentru I_n :

$$\boxed{I_n = \int \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{1}{n + 1} x\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} + \frac{na^2}{n + 1} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2}$$

13. $I_n=\int\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}$

Soluție. Procedăm ca la *exercițiul 12* alegând:

$$\begin{cases} u=\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}} \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-n\left(a^2-x^2\right)^{\frac{x}{2}-1} n\,dx \\ v=x \end{cases}$$

Apoi scriem succesiv:

$$I_n=x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}+n\int x^2\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dx \Leftrightarrow$$

$$I_n=x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}+n\int\left[a^2-\left(a^2-x^2\right)\right]\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dx \Leftrightarrow$$

$$I_n=x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}+na^2I_{n-2}-nI_n$$

De aici rezultă că:

$$\boxed{I_n=\int\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{n+1}x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{na^2}{n+1}I_{n-2},\quad \forall n\geq 2}$$

14. $I_n=\int\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}}dx$

Soluție. Procedăm ca la *exercițiul 12* şi găsim:

$$\boxed{I_n=\int\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{n}{n+1}x\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}}-\frac{na^2}{n+1}I_{n-2},\quad n\geq 2}$$

Exerciții propuse

1. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$

$$R:\quad 2\sqrt{3}\,\text{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}\right)$$

Indicație. Se ataşează curba $\sqrt[3]{x^3+x^2}=y$ şi apoi $y=tx.$ Se obține parametrizarea $x=t^3-1,\ \ y=t\left(t^3-1\right)$ iar integrala se reduce la $\int\frac{3t\,dt}{t^3-1}.$

2. $I=\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x(x+2)}}$

$R:\quad 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}}\right|$

Indicație. Se asociază integralei hiperbola de ecuație $x^2+2x-y^2=0$ a cărei parametrizare se obține punând $y=tx.$ Se obțin: $x=\frac{2}{t^2-1},$ $y=\frac{2t}{t^2-1},$ $dx=-\frac{4t\ dt}{\left(t^2-1\right)^2},$ iar apoi integrala se reduce la: $\int\frac{\left(4t^2-4\right)dt}{\left(t^2-3\right)\left(t^2+1\right)}$

3. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-2)}}$

$R:\ -4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}+2\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x-2}-\sqrt[4]{x}}\right|$

Indicație. Se asociază curba de ecuație $y=\sqrt[4]{x^3(x-2)}$ şi se intersectează cu dreapta $y=tx$. Se obțin: $x=\frac{2}{1-t^4},$ $y=\frac{2t}{1-t^4},$ $dx=\frac{8t^3dt}{\left(1-t^4\right)^2}$ iar integrala se reduce la una rațională: $\int\frac{8t^3dt}{1-t^4}.$

4. $I=\int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt[3]{3x^2+x^3}}$

$R:\ 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{3x}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}}\right|$

Indicație. Curba de ecuație $y=\sqrt[3]{3x^2+x^3}$ se parametrizează luând $y=tx;$ de aici găsim: $x=\frac{3}{t^3-1},$ $y=\frac{3t}{t^3-1}$ şi $dx=\frac{-9t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2};$ se ajunge la: $-3\int\frac{t\ dt}{t^3+1}.$

1. 12. Integrale diverse

1. $\int x\sqrt{x-5}\,dx, \quad x \geq 5$

Soluție. Substituim $x-5=t^2$, $x=t^2+5$, $\quad dx=2t\,dt$, $\quad$ iar integrala devine:

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = 2\int\left(t^2+5\right)t^2dt = \frac{2}{5}t^5+\frac{10}{3}t^3 = \frac{2\left(x-5\right)^{5/2}}{5}+\frac{10\left(x-5\right)^{3/2}}{3}$$

Observație. Mai general, când avem de calculat:

$$\int\left(\alpha x+\beta\right)\sqrt{ax+b}\,dx \qquad x \geq -\frac{b}{a}$$

se face schimbarea: $\quad ax+b=t^2$

2. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

Soluție. Efectuăm schimbarea de variabilă $1+e^x=t$, de unde rezultă:

$$e^x=t-1,\ \ x=\ln\left(t-1\right),\ \ dx=\frac{dt}{t-1},$$

iar după înlocuiri:

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t\left(t-1\right)}=\int\frac{t-\left(t-1\right)}{t\left(t-1\right)}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|$$

sau revenind la notația inițială, obținem, în final:

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)=x-\ln\left(1+e^x\right)$$

3. $\int \dfrac{\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^4+3x^2+1\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+1}{x}}$

Soluție. Aducem mai întâi integrala la forma:

$$I =: \int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

apoi se substituie: $\quad x+\frac{1}{x}=t \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$

Integrala se transformă în

$$I=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)\operatorname{arctg}t}$$

Dacă se notează: $\operatorname{arctg} t = u$ cu $\dfrac{dt}{t^2+1} = du$, atunci:

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

Ne întoarcem la substituţiile iniţiale, astfel că:

$$I = \ln|\operatorname{arctg}\ t| = \ln\left|\operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|$$

4. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^4} dx, \qquad x \neq 0$

Soluţie. Aducem mai întâi integrala la forma:

$$I = \int \sqrt{a^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1}\,\frac{dx}{x^3}$$

apoi luăm $\dfrac{1}{x^2} = t$, cu $-\dfrac{2dx}{x^3} = dt$, astfel integrala se transformă în:

$$I = -\frac{1}{2}\int \sqrt{a^2 t + 1}\,dt = -\frac{1}{2a^2}\left(\frac{a^2 t + 1}{3/2}\right)^{3/2} = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2} + 1\right)^{3/2}$$

sau, mai simplu:

$$I = -\frac{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}{3a^2 x^3}$$

5. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx, \qquad 0 < x < a$

Soluţie. Observăm că:

$$I = \int \frac{x\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}}{x^4} dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{a^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\ \frac{dx}{x^2}$$

Substituim: $\dfrac{1}{x} = t$, iar $-\dfrac{dx}{x} = dt$. Apoi:

$$I = -\int t\sqrt{a^2t^2 - 1}\ dt = \frac{1}{a^2}\int \sqrt{a^2t^2 - 1}\ a^2 t\ dt$$

Notăm $a^2t^2 - 1 = u^2$ cu $2a^2 t\ dt = 2u\ du$ şi obţinem:

$$I = \frac{1}{a^2}\int u \cdot u\ du = \frac{2}{3a^2}u^3 = \frac{2}{3}\left(a^2t^2 - 1\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{3/2}$$

sau mai simplu:

$$I=\frac{2\left(a^2-x^2\right)^3}{3x^2}$$

6. $I=\int\frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx, \qquad x>0$

Soluție. Observăm că dacă luăm $3+x\ln x=\varphi(x)$, atunci $1+\ln x=\varphi'(x)$, iar integrala se transformă în:

$$I=\int\frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx=\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\ln\left(3+x\ln x\right)$$

7. $I=\int\cos\left(\ln x\right)dx$

Soluție. Vom integra prin părți alegând:

$$\begin{cases}u=\cos\left(\ln x\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\frac{1}{x}\sin\left(\ln x\right)dx\\ v=x\end{cases}$$

Astfel:

$$I=x\cos\left(\ln x\right)+\underbrace{\int\sin\left(\ln x\right)dx}_{I_1}$$

Pentru integrala din membrul drept vom face o nouă integrare prin părți:

$$\begin{cases}u=\sin\left(\ln x\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}\cos\left(\ln x\right)\\ v=x\end{cases}$$

$$I_1=\int\sin\left(\ln x\right)dx=x\sin\left(\ln x\right)-\underbrace{\int\cos\left(\ln x\right)dx}_{I}$$

Înlocuind I_1 în expresia lui I obținem:

$$I=x\cos\left(\ln x\right)+x\sin\left(\ln x\right)-I$$

de unde rezultă:

$$I=\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)$$

8. $I=\int x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)dx, \qquad x>0$

Soluție. Observăm că:

$$\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(x+1\right)-\ln x$$

De aici rezultă:

$$I=\int x\ln(x+1)\,dx-\int x\ln x\,dx=I_1-I_2$$

Integralele I_1 si I_2 le vom calcula prin părți. Substituim:

$$\begin{cases}u=\ln(x+1)\\dv=x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x+1}\\v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$$

Astfel:

$$I_1=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-1\right)+1}{x+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\left(\int(x-1)dx+\int\frac{dx}{x+1}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Analog cu:

$$\begin{cases}u=\ln x\\dv=x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\dv=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$I_2=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

Înlocuind expresiile lui I_1 şi I_2 mai sus, obținem:

$$I=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x^2-(x-1)^2}{4}+\ln(x+1)+C$$

sau încă:

$$I=\frac{x^2}{2}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{2x-1}{4}-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{x^2}{2}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{2}+\ln(x+1)+C_1$$

unde $C_1=C-\dfrac{1}{4}$.

9. $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+1}\left[\ln\left(x^2+1\right)-2\ln x\right]}{x^4}dx,\qquad x>0$

Soluție. Aducem integrala sub forma:

$$I=\int\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\;\cdot\;\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{x^3}$$

Apoi schimbăm variabila de integrare:

$$1+\frac{1}{x^2}=t^2 \quad \therefore \quad -\frac{2dx}{x^3}=2t\ dt$$

astfel:

$$I=-\int t^2\ln\left(t^2\right)dt=-2\int t^2\ln t$$

Integrăm, mai departe prin părți, alegând:

$$\begin{cases} u=\ln t \\ dv=t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dt}{t} \\ v=\dfrac{t^3}{3} \end{cases}$$

Aşadar:

$$I=-2\left(\frac{t^3}{3}\ln t-\frac{1}{3}\int t^3\cdot\frac{1}{t}dt\right)=-\frac{2}{3}t^3\ln t+\frac{t^3}{9}=\frac{t^3}{9}\left(1-6\ln t\right)$$

Revenim la notatia inițială şi obținem în final :

$$I=\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\left[1-3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

10. $I=\int\dfrac{dx}{\sin x},\qquad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

Soluție 1. Observăm că $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ iar:

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{tg\,\dfrac{x}{2}}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

unde $\varphi(x)=tg\,\frac{x}{2}$ iar $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

Astfel integrala devine:

$$I=\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln\left|\varphi(x)\right|=\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|$$

Soluție 2. Se mai poate scrie şi:

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}=\frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\frac{(1+\cos x)+(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

Notăm, apoi, $\cos x=t \ \therefore\ -\sin x\, dx=dt$ şi integrala inițială se transformă în:

$$I=\frac{1}{2}\left(-\int\frac{dt}{1-t}-\int\frac{dt}{1+t}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|$$

Dacă ținem de formulele de linearizare ale funcțiilor $\sin x$ şi $\cos x$ vom scrie:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\qquad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$$

şi, de aici: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$

În final, rezultă:

$$I=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$$

11. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$

Soluție 1. Întrucât $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, integrala se poate aduce sub forma:

$$I=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Substituim $\dfrac{\pi}{2}-x=t \ \therefore\ -dx=-dt$, astfel că:

$$I=-\int\frac{dt}{\sin t}=-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|$$

unde am ținut seama de *exercițiul 10*. Revenim la notația inițială, astfel că:

$$I=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|=\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$$

Soluție 2. Se poate observă că:

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=2\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=2\frac{\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)'}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Substituim $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,$ iar integrala se transformă în:

$$I=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\ln\left|\frac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|=\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}}\right|=\ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\right|=\ln\left|\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$$

12. $I=\int\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}\,dx,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Soluție 1. Observăm că:

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}=\frac{(\mathrm{tg}\ x)'}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$$

Astfel:

$$I=\int\frac{(\mathrm{tg}\ x)'\,dx}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}=\int\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+\varphi^2(x)}}dx$$

unde $\varphi(x)=\mathrm{tg}\,x,$ integrala dată ia forma:

$$I=\ln\left(\varphi(x)+\sqrt{1+\varphi^2(x)}\right)=\ln\left(tg+\sqrt{1+tg^2x}\right)$$

Soluție 2. Întrucât:

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}=\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos x},\qquad\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Apoi, din *exercițiul 11*:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$$

Observație. Vom face câteva transformări în rezultatul dat la *soluția 1* și vom arăta că se ajunge la rezultatul obținut ulterior:

$$\ln\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right) = \ln\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1}{\cos x}\right) =$$

$$= \ln\left|\frac{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}{\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| = \ln\left|\frac{\cancel{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\cancel{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$$

unde am ținut seama de raționamentul făcut la exercițiul anterior.

13. $I = \int \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Soluție. Se caută constantele A și B, astfel încât:

$$2\sin x + \cos x = A(\sin x + 2\cos x) + B(-2\sin x + \cos x), \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Identificăm coeficienții nedeterminați după $\sin x$ și $\cos x$:

$\sin x: \qquad A - 2B = 2$

$\cos x: \qquad 2A + \ B = 1$

Sistemul obținut ne dă soluția: $A = \frac{4}{5}, \ \ B = \frac{3}{5}$

Odată cu valorile A și B găsite, integrala dată se va transforma, astfel:

$$I = \int \frac{\frac{4}{5}(\sin x + 2\cos x) + \frac{3}{5}(-2\sin x + \cos x)}{\sin x + 2\cos x}dx = \frac{4}{5}\int dx + \frac{3}{5}\int \frac{-2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} =$$

$$= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}\int \frac{(\sin x + 2\cos x)'}{\sin x + 2\cos x}dx = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}\ln(\sin x + 2\cos x)$$

14. $I=\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx, \qquad x\in(0,1)$

Soluție. Vom integra prin părți considerând:

$$\begin{cases} u=\arcsin x \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases}$$

Aşadar:

$$I=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Apoi, integrala obținută se va transforma după cum urmează:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=-\int\frac{\frac{-1}{x^2}dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}=-\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}=$$

$$=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)=-\ln\left(\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Înlocuind acest rezultat mai sus, deducem în final:

$$I=-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

15. $I=\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx, \qquad |x|<a$

Soluție. Vom integra mai întâi prin părți, pentru care alegem:

$$\begin{cases} u=\sqrt{x^2-a^2} \\ dv=u^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} \\ v=\frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Astfel, se poate scrie succesiv:

$$I=\frac{1}{3}x^3\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{3}x^3\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{3}\int\frac{x^2\left[\left(x^2-a^2\right)+a^2\right]}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$I=\frac{1}{3}x^3\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{3}\underbrace{\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx}_{I}-\frac{a^2}{3}\underbrace{\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}}_{J}$$

Evaluăm, apoi integrala J, tot prin părți:

$$J=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)'dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-J$$

Rezultă că

$$J=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

Apoi, dacă înlocuim expresia lui J mai sus, obținem ecuația:

$$I=\frac{x^3}{3}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{3}I-\frac{a^2}{3}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$$

de unde rezultă:

$$I=\frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2x}{6}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{6}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$$

sau

$$I=\frac{x^3}{4}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2x}{8}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

16. $I=\int e^{\arcsin x}dx,\quad J=\int\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad |x|<1$

Soluție. Integrăm prin părți prima integrală, alegând:

$$\begin{cases}u=e^{\arcsin x}\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ v=x\end{cases}$$

Astfel:

$$I=xe^{\arcsin x}-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx=xe^{\arcsin x}-J$$

unde

$$J=\int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)'e^{\arcsin x}dx=-\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x}+\int\sqrt{1-x^2}\,\frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow$$

$$J=-\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x}+I$$

Prin urmare:

$$I=xe^{\arcsin x}+\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x}-I$$

apoi:

$$\boxed{I=\int e^{\arcsin x}dx \ =\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}}$$

iar

$$J=-\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}+I=-\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin}+\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}$$

de unde rezultă în final:

$$\boxed{J=\int\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}}$$

17. $I=\int\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx, \quad J=\int\dfrac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$

Soluție. Integrăm prin părți ambele integrale. Pentru I luăm:

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-\dfrac{x\ dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \\ v=e^{\operatorname{arctg}x} \end{cases}$$

Rezultă:

$$I=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x}}+\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}+J$$

Pentru J luăm:

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}dx \\ v=e^{\operatorname{arctg}x} \end{cases}$$

Astfel:

$$J=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-I$$

Am obținut sistemul:

$$\begin{cases} I - J = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \\ I + J = \dfrac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccl} / & 2J & = \dfrac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \\ \hline 2I & / & = \dfrac{(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

În final, urmează că:

$$I = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} dx = \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$\boxed{J = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}}$$

18. $I = \int x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} dx, \qquad |x| < 1$

Soluție. Observăm că:

$$I = \int x \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = A + B$$

unde $A = -\sqrt{1-x^2}$, iar B se obține integrând prin părți. Astfel:

$$B = \int x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x - B$$

Obținem:

$$B = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x$$

iar, în final:

$$I = -\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x \Leftrightarrow I = \frac{x-2}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x$$

Exerciții propuse

1. $\int (2x-1)\sqrt{3-x},\qquad x \le 3$

$R:\ -\dfrac{2}{15}(3-x)^{3/2}(7+6x)$

2. $\int \dfrac{dx}{e^{-x}+1},\qquad x \in \mathbb{R}$

$R:\ \ln\left(1+e^{x}\right)$

3. $\int \dfrac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^4-x^2+1\right)\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)}$

$R:\ -\ln\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

4. $\int \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx,\qquad x \in (0,2)$

$R:\ -\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\dfrac{x}{2}$

5. $\int \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx,\qquad x \in (0,2)$

$R:\ \sqrt{4-x^2}+2\ln x-2\ln\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)$

6. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx,\qquad |x| > a$

$R:\ \dfrac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{3a^2x}$

7. $\int \dfrac{3+2(1+x)\ln x}{1+2x\ln x}dx,\qquad x > 0$

$R:\ x+\ln(1+2x\ln x)$

Indicație. Se caută A şi B constante reale, astfel încât:

$$3+2(1+x)\ln x = A(1+2x\ln x)+B(1+2x\ln x)'.$$

8. $\int \sin(\ln x)\,dx, \qquad x>0$

$R:\quad -\frac{1}{2}x\left[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)\right]$

9. $\int x\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)dx, \qquad x\in(0,1)$

$R:\quad -\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x^2\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)$

10. $\int \frac{1}{x^2}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)dx, \qquad x>0$

$R:\quad \frac{1}{x}+2\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\left(\ln\left(x^2-1\right)-2\ln x\right)}{x^4}dx, \qquad x>0$

$R:\quad -\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\left[2+3\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$

12. $\int \frac{dx}{\cos 2x}, \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$R:\quad \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|$

13. $\int \frac{dx}{\sin 2x}, \qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$R:\quad \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} x\right|$

14. $\int \operatorname{tg} x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx, \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$R:\quad \frac{1}{\cos x}$

15. $\int \frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}dx, \qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$R:\ \frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln(2\cos x+\sin x)$

16. $\int \frac{\arccos x}{x^2}dx, \qquad x\in(0,1)$

$R:\ -\frac{\arccos x}{x}+\ln\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

17. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx, \qquad x\in\mathbb{R}$

$R:\ \frac{x^3}{4}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

18. $a)\ I=\int e^{\arccos x}dx, \qquad x\in(-1,\ 1)$

$R:\ J=-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arccos x}$

$b)\ J=\int \frac{xe^{\arccos x}dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x\in(-1,\ 1)$

$R:\ I=-\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arccos x}$

19. $a)\ I=\int xe^x\sin x\ dx$

$R:\ J=\frac{1}{2}e^x\left[-\sin x+x(\sin x+\cos x)\right]$

$b)\ J=\int xe^x\cos x\ dx$

$R:\ I=\frac{1}{2}e^x\left[cox+x(\sin x+\cos x)\right]$

20. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx, \qquad x\in(-1,\ 1)$

$R:\ 4\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\arcsin x$

21. $\int \sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x^4}}dx$

$R:\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{(t-1)^2}{t^2+t+1},\qquad t=\sqrt[3]{1+x^{-4}}$

22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$R:\quad -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(t-1)^2}{t^2+t+1},\quad t=\sqrt[3]{1+x^3}$

23. $\int \dfrac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1-x^{n+2}}}$

$R:\quad -\dfrac{2}{n+2}\text{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x^{n+2}}{x^{n+2}}}$

24. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^4}\left(1-\sqrt[5]{x^6}\right)^{\frac{1}{6}}}$

$R:\quad \dfrac{5}{6}\text{arctg}\dfrac{t}{3-2t^2}+\dfrac{5}{3}\text{arctg }t+\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\ln\left|\dfrac{t^2-\sqrt{3}t+1}{t^2+\sqrt{3}t+1}\right|$ unde $t=\sqrt[6]{x^{-\frac{6}{5}}-1}$

2. INTEGRALA DEFINITĂ

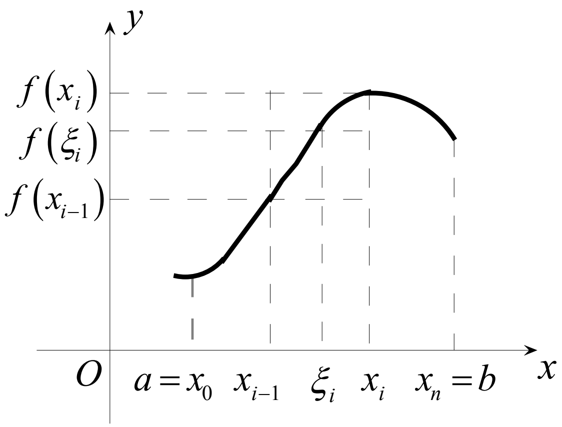
2.1. Sume Riemann. Noțiunea de integrală definită

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită şi $\Delta=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu norma $\|\Delta\|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-x_{i-1}|$.

Fie $\xi=(\xi_i)_i$, $(1\le i\le n)$, un sistem de puncte intermediare, cu $x_{i-1}\le\xi_i<x_i$ Notăm:

$$\boxed{\sigma_f(\Delta,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})}$$

suma Riemann asociată funcției *f*, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ_i.



Se zice că *f* este *integrabilă Riemann* (sau *în sens Riemann*) pe $[a,b]$ dacă, pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\ge1}$ ale intervalului $[a,b]$, $\Delta_n=\{x_0^n,x_1^n,...,x_n^n\}$ cu norma, $\|\Delta_n\|\to0$ şi orice sistem de puncte intermediare $\xi^n=(\xi_i^n)_i$, $x_{i-1}^n\le\xi_i^n\le x_i^n$ $(1\le i\le n)$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi^n)=I$$

Numărul real I se numeşte *integrala definită* (*în sens Riemann*) a funcției f pe intervalul $[a,b]$ şi se notează cu $\int_a^b f(x)dx$ sau $\int_a^b f$.

Observații

(i) Dacă limita există, atunci ea este unic determinată de funcția f.

(ii) Dacă $a<b$, atunci $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

Exemple

1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$, $c = const.$ Atunci:

$$\int_a^b cdx=c(b-a)$$

Soluție. Într-adevăr, dacă notăm:

$$\Delta=\{a=x_0<x_1<....<x_n=b\} \text{ şi } \xi=(\xi_i)_{1\le i\le n}$$

ca mai sus, atunci:

$$\sigma_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})\,c=$$
$$=c(\cancel{x_i}-x_0+\cancel{x_2}-\cancel{x_1}+.....+x_n-\cancel{x_{n-1}})=c(x_n-x_0)=c(b-a)$$

Iar, dacă se aleg arbitrar şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\ge1}$ cu $\|\Delta_n\|\to0$ şi sistemul de puncte intermediare ξ^n. Astfel încât $x_{i-1}^n\le\xi_i^n\le x_i^n$, $(\forall\ i=\overline{1,\ n})$atunci evident:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi^n)=c(b-a)$$

Din unicitatea limitei, rezultă că:

$$\int_a^b cdx=c(b-a)$$

2. Fie $f:[1,\ 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Atunci:

$$\int_1^2 f(x)dx=\ln2$$

Soluție. Fie $q=\sqrt[n]{2}$ şi $\Delta_n=\left\{1,q,q^2,...,q^n\right\}$ un şir de diviziuni ataşat intervalului $[1,2]$ şi $\xi^n=\left\{q,q^2,....,q^n\right\}$ un şir de puncte intermediare. Atunci, evident:

$$\left\|\Delta_n\right\|=\max_{1\le i\le n}\left|q^i-q^{i-1}\right|=\max_{1\le i\le n}\left\{(q-1),q(q-1),...,q^{n-1}(q-1)\right\}=q^{n-1}(q-1)\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

şi $\xi_i^n=x_i^n=q_n^i$. Atunci:

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)=\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i^n\right)\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{q^i}\left(q^i-q^{i-1}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{q^{i-1}}{q^i}(q-1)=$$

$$=\frac{q-1}{q}n=\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}}n=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to+\infty}-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

unde am ținut seama că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)n=\ln a,\qquad a>0,\quad a\neq 1$$

Urmează că:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^n\right)=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$$

3. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

În particular, dacă $a=0$ şi $b=0$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f$$

Soluție. Mai întâi să observăm că pentru intervalul $[a,b]$, diviziunea:

$$\Delta=\left\{a=x_0<x_1<...<x_k<....<x_n=b\right\}$$

cu $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)$, $(1\le k\le n)$ este *echidistantă*, în sensul că:

$$\left\|\Delta_n\right\|=\left|x_k^n-x_{k-1}^n\right|=\frac{b-a}{n},\ \forall\ k=\overline{1,n}$$

Apoi, $\left\|\Delta_n\right\|\to 0$, iar sistemul de puncte $\xi^n=\left(\xi_k^n\right)_{1\le k\le n}$ se alege, astfel încât:

$$\xi_k^n=x_k^n$$

Astfel că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\varepsilon_k^n\right)\left(x_k^n-x_{k-1}^n\right)\frac{1}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Aplicații

a) Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+....+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$

Soluție. Notăm $f(x)=\sqrt{1+x}, \quad x\in[0,1]$. Conform celor de mai sus:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+...\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$

b) Să se calculeze:

$$\int_a^b e^x dx$$

Soluție. Notăm $f(x)=e^x \quad x\in[a,b]$ şi fie $h=\frac{b-a}{n}=h(n)$

Atunci:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^h\right)^k h\right)e^a=\left(\lim_{n\to\infty} h\, e^h\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1}\right)e^a$$

Cum $n\to\infty$, rezultă că $h\to 0$, Astfel că limita precedentă devine:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}\left(e^{b-a}-1\right)=\frac{1}{\ln e}\left(e^{b-a}-1\right)$$

Înlocuim mai sus acest rezultat, astfel că:

$$\int_a^b e^x dx=e^a\left(e^{b-a}-1\right)=e^b-e^a$$

Observație. Egalitatea de la *exercițiul 3* se mai poate scrie şi sub forma:

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{k=1}^{n} f(a+hk)=\int_a^b f$$

unde $h=\frac{b-a}{n}$ este chiar norma diviziunii echidistante Δ asociată intervalului $[a,b]$.

Aplicație. Să se arate că:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

Soluție. Să observăm că:

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{n+3(k-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}(k-1)}}$$

Notăm $k-1=i$ cu $i=\overline{0,\ n-1}$. Atunci:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}i}}$$

Fie acum $a=0,\ b=3$ și $f:[0,3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, atunci:

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(hi)=\int_0^3 f=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

Exerciții propuse

1. Folosind definiția integralei Riemann să se arate că:

$$\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$$

2. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$

Să se arate, plecând de la definiție, că *f* este integrabilă și:

$$\int_0^1 f(x)dx=1$$

3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{1+x},\quad \forall\, x\in[0,1]$. Să se arate că f este integrabilă și:

$$\int_0^1 f(x)=\ln 2$$

4. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$$

5. Să se calculeze următoarele limite folosind sumele Riemann:

a) $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$

$R:\ \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k\left(\frac{n+1}{n}\right)}$.

$R:$ ln2

Indicație. Se alege, $\frac{k-1}{n}\le\xi_k^n\le\frac{k}{n}$, unde $\xi_k^n=\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}$, $(1\le k\le n)$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

$R:\ \frac{4}{e}$

Indicație. Se va scrie a_n sub forma:

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n^n}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

Apoi se logaritmează şi se calculează:

$$\lim_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots.+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

2.2. Formula lui Leibniz – Newton

Reamintim, fără demonstrație, câteva din rezultatele fundamentale ale teoriei funcțiilor integrabile (*în sensul lui Riemann*).

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Atunci:

1) Dacă f integrabilă pe $[a,b]$, atunci f este mărginită.

2) Dacă f continuă pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă.

3) Dacă f este continuă pe $[a,b]$, iar $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f pe [a,b], atunci:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$ *(Formula lui Leibniz – Newton)*

Observație. Uneori scriem $F(x)\Big|_a^b$ în loc de $F(b)-F(a)$; x se numeşte *variabila de integrare*, iar integrala definită este un *număr real* care nu depinde de variabila de integrare:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Exemple

1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c, \quad c=const.$
Evident, f este continuă pe $[a,b]$, iar o primitivă F a lui f este funcția $F(x)=cx,\ x\in[a,b]$, Astfel::

$$\int_a^b f(x)dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$$

2. $f:[1,2]\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\frac{1}{x}.$

Aici, $F(x)=\ln x$ şi $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln x\,|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Exerciții rezolvate

Să se aplice *formula lui Leibniz – Newton* la calculul următoarelor integrale definite:

1. $\int_0^1 \left(x^2+e^x\right)dx$

Soluție. Fie $f(x)=x^2+e^x,\ x\in[0,1]$. Evident, f continuă pe $[0,\ 1]$ ca sumă de funcții elementare iar, funcția $F(x)=\frac{x^3}{3}+e^x$ este o primitivă a lui $f(x)$ pe $[0,\ 1]$. Astfel:

$$\int_0^1 \left(x^2+e^x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+e^x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{3}+e\right)-(0-1) = \frac{4}{3}+e$$

2. $\int_4^7 \frac{dx}{x^2-5x+6}$

Soluție. Fie $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}, \quad x\in[4,7]$. Se observă că:

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

iarprimitiva lui *f* este:

$$F(x)=\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) \quad x\in[4,7]$$

Astfel:

$$\int_4^7 f(x)=\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\Bigg|_4^7=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{1}{5}=\ln 4$$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Soluție. Fie $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $x\in[0,1]$. Evident, f continuă pe $[0,1]$ drept compunere de funcții elementare. Notăm:

$$F(x)=\int f(x)dx$$

o primitivă a lui *f*. Pentru a determina F vom utiliza schimbarea de variabilă:

$$x\to t \therefore 1+\sqrt{x}=t \quad \text{cu} \quad x=(t-1)^2 \quad \text{şi} \quad dx=2(t-1)dt$$

Apoi:

$$F(x)=\int\frac{2(t-1)dt}{t}=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2(t-\ln t)=2\left[1+\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right],$$

iar

$$F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=2(2-\ln 2)=4-\ln 4$$

4. $\int_2^3 \sqrt{x^2-4}dx$

Soluție. Fie

$$F(x)=\int\sqrt{x^2-a^2}dx, \quad |x|\ge a$$

S-a văzut în *Cap. 1* că, o primitivă a funcției $x\to\sqrt{x^2-a^2}, \quad |x|\ge a$ este:

$$F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

Astfel pentru $a=2$ se obține:

$$\int_2^3\sqrt{x^2-4}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}\,\Big|_2^3-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\Big|_2^3=\frac{3\sqrt{5}}{2}-2\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

5. $\int_0^1\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$

Soluție. Notăm:

$$F(x)=\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx,\quad x\in[0,1]$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $x\to t\ \therefore\ \sqrt{x}=t$ cu $dx=2tdt$

Astfel:

$$F(x)=2\int\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}tdt=2\int\frac{t(1-t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}-2\underbrace{\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}_{I}=-2\sqrt{1-t^2}-2I$$

unde

$$I=\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int t\left(-\sqrt{1-t^2}\right)'dt=-t\sqrt{1-t^2}+\int\sqrt{1-t^2}\,dt=$$

$$=-t\sqrt{1-t^2}+\int\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t-I$$

Prin urmare:

$$I=\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t,$$

iar dacă înlocuim expresia lui I mai sus, se obține:

$$F(x)=(t-2)\sqrt{1-t^2}-\arcsin t=\left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}$$

Valoarea integralei este conform Leibniz – Newton:

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx=\left[\left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}\right]\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

6. $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$

Soluție. Fie $F(x)=\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}, \quad x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Se va utiliza schimbarea:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \therefore dx=\frac{2t}{1+t^2} \quad \text{de unde} \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

se obține:

$$F(x)=\int\frac{tdt}{t^2+t+2}=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)-1}{t^2+t+2}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right)-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}$$

Apoi:

$$I=F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

În final, se obține:

$$I=-\ln\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

Exerciții propuse

Să se aplice formula lui Leibniz – Newton la calculul următoarelor integrale definite:

1. $\int_0^1 (2x-1)^9 dx$

   R: 0

2. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

   R: $\frac{2}{3}$

3. $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}dx$

$R: \ \dfrac{\sqrt{5}}{2}+2\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. $\int_{2}^{3}\sqrt{x^2-4}dx$

$R: \ \dfrac{3\sqrt{5}}{2}+2\ln\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{1+\cos x}$

$R: \ 1$

6. $\int_{0}^{1}\dfrac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$

$R: \ \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\cos xdx$

$R: \ \dfrac{1}{4}$

8. $\int_{-3}^{-2}\dfrac{(x+2)dx}{x^3-2x^2}$

$R: \ \ln\dfrac{6}{5}-\dfrac{1}{6}$

9. $\int_{1}^{2}\dfrac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$

$R: \ 2(1-\ln 2)$

10. $\int_{e}^{e^2}\dfrac{\ln xdx}{x(1+\ln x)}$

$R: \ 1-\ln\dfrac{3}{2}$

11. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}$

R: $\frac{2}{3}\ln 2$

12. $\int_o^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

R: $\frac{1}{2}\left(1+e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

13. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

R: $\pi\sqrt{2}-4$

14. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

R: $\frac{3\pi}{2}-\frac{152}{35}$

15. $\int_0^1 \sin^3 x \cos^2 dx$

R: $\frac{2}{15}$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

R: $\frac{1}{9}\left(\pi\sqrt{3}+\ln 8\right)$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

R: $\frac{8}{15}$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^5 x dx$

$R:\ \frac{1}{4}(\ln 4-1)$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$

$R:\ \frac{1}{2}$

20. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}$

$R:\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}$

2. 3. Proprietățile integralei definite

Reamintim câteva din proprietățile integralei Riemann studiate în analiza matematică din liceu:

(P_1) *Proprietatea de liniaritate*

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții continue pe [a,b] şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci:

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$$

(P_2) *Proprietatea de aditivitate la interval*

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă şi $c\in(a,b)$, atunci:

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

(P_3) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă şi $f\geq 0$ pe $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f\geq 0$

Observație

Reciproca nu este, în general, adevărată. De exemplu, pentru:

$$f(x)=x^2-x,\quad x\in[0,2]$$

integrala are valoarea:

$$\int_0^2 f(x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}\geq 0$$

însă pe intervalul $[0,2]$: $f\leq 0$.

Consecințe

1) Dacă f continuă pe [a,b] şi $f \leq 0$ pe $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq 0.$

2) Dacă f, g continue pe [a,b] şi $f \leq g$ pe $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$

(P_4) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă şi $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b],$ atunci:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(P_5) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$, atunci este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Consecințe

i) Dacă f continuă pe [a,b] şi $f \geq 0$, atunci pentru orice subinterval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ are loc inegalitatea:

$$\int_\alpha^\beta f \leq \int_a^b f$$

ii) Dacă f continuă pe [a,b] şi dacă există $x_0 \in [a,b]$, Astfel încât $f(x_0) > 0$ atunci:

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Exerciții rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale definite:

1. $\int_0^2 |x-1|dx$

Soluție. Întrucât:

$$|x-1| = \begin{cases} (1-x) & 0 \leq x < 1 \\ (x-1) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

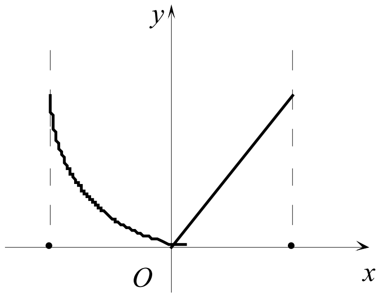
deducem conform proprietății (P_2), că:

$$\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = -\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

2. $I = \int_{-1}^{1} \max\{x, x^2\}dx$

Soluție. Folosind definiția maximului a două funcții sau cu metoda grafică (*vezi figura*) putem scrie că:

$$\max\{x, x^2\} = \begin{cases} x^2 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



Apoi, ținând seama de proprietatea (P_2), deducem că:

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_0^1 x dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

3. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

Soluție. Pentru $n \le x \le n+1$ au loc inegalitățile:

$$\sqrt{1+n^2} \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{1+(n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

Integrând în ultima relație termen cu termen între n şi $n+1$, avem succesiv:

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+(n+1)^2}} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+n^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2}} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

Trecând la limită după $n \to +\infty$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

4. Să se calculeze integrala:

$$A=\int_0^{\pi}\left|\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|dx$$

Soluție. Explicităm mai întâi modulul:

$$\left|\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\\ \sin x-\frac{1}{\sqrt{2}} & x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\end{cases}$$

Apoi, cu proprietatea (P_2), vom scrie:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\left(\cos x+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\cos x\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}-1-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Un calcul simplu arată că:

$$A=\sqrt{2}-2$$

5. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}<\frac{\pi}{6}$$

Soluție. Întrucât pe $0\le x\le\frac{1}{2}$ funcția $f(x)=x^n$ este strict descrescătoare pentru $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, putem scrie succesiv:

$$x^{2n}<x^2\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}<\sqrt{1-x^{2n}}\Leftrightarrow 1<\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

Se integrează pe $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, astfel încât:

$$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}<\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}<\frac{\pi}{6}$$

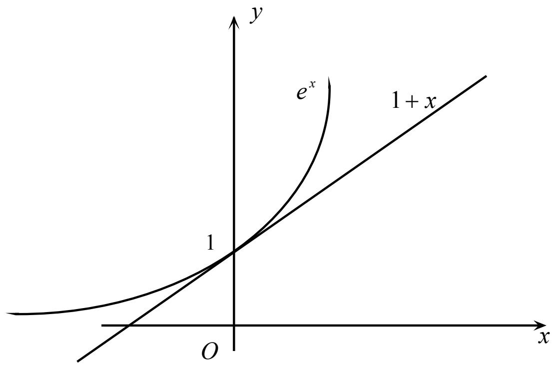
6. Să se demonstreze că:

$$\frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{1}{4}$$

Soluție. Se pleacă de la inegalitatea:

$$e^x>1+x,\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

care se poate proba pe cale analitică sau grafică (*vezi figura de mai jos)*



Apoi, se schimbă x cu $-x^2$, respectiv x^2 a.î.

$$e^{-x^2}>1-x^2,\quad \forall\, x\neq 0$$

$$e^{x^2}>1+x^2,\quad \forall\, x\neq 0$$

De aici deducem dubla inegalitate:

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$$

Care se integrează pe [0,1]:

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

În final, rezultă:

$$\frac{2}{3}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx<\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}=1$$

7. Să se determine numărul real a, $|a|\leq 2$, Astfel încât valoarea integralei:

$$\int_{-1}^1|x-a|dx$$

să fie maximă.

Soluție. Fie $h(a)=\int_{-1}^1|x-a|dx$, $a\in[-2,2]$. Distingem următoarele cazuri:

$i)$ $-2\leq a<-1$. Deducem că:

$$1<-a\leq 2\Leftrightarrow 0\leq x+1<x-a\leq x+2$$

De aici rezultă:

$$h(a)=\int_{-1}^{1}(x-a)dx=\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left[\left(1-a^2\right)-\left(1+a^2\right)\right]=-2a$$

$ii)$ $-1\le a\le 1$. În acest caz, din *proprietatea de aditivitate la interval* rezultă că:

$$h(a)=\int_{-1}^{a}|x-a|dx+\int_{a}^{1}|x-a|dx=\int_{-1}^{a}(a-x)dx+\int_{a}^{1}(x-a)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(a-x)^2\Big|_{-1}^{a}+\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_{a}^{1}=\frac{1}{2}\left[(a+1)^2+(1-a)^2\right]=a^2+1$$

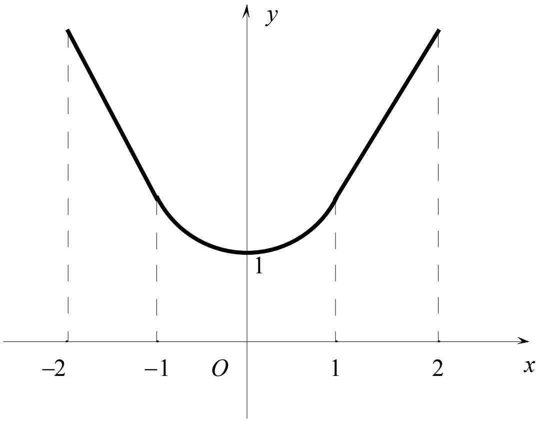
$iii)$ $1<a\le 2$. Urmează că, $x-a<0$, iar

$$h(a)=\int_{-1}^{1}(a-x)dx=-\frac{1}{2}(a-x)^2\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left[(a+1)-(a-1)^2\right]=2a$$

Prin urmare, se obține funcția:

$$h(a)=\begin{cases}-2a & a\in[-2,-1)\\ a^2+1 & a\in[-1,1]\\ 2a & a\in(1,2]\end{cases}$$

al cărei grafic este reprezentat mai jos:



Se observă că maximul funcției $h(a)$ este atins în punctele $a\in\{-2,\ 2\}$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze $\int_{-1}^{1}f(x)dx$, unde $f(x)=\begin{cases}1+e^x & x\in[-1,0]\\ x+1 & x\in(0,1]\end{cases}$

$R: \ \frac{7}{2}-\frac{1}{e}$

2. Să se demonstreze inegalitățile următoare fără a calcula integralele:

a) $\int_1^2 \ln(1+x)dx < \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\int_0^1 e^x dx \leq \int_0^1 (1+x)^{1+x} dx$

3. Să se stabilească inegalitățile:

a) $\frac{2}{e} \leq \int_{-1}^1 e^{x^2} dx \leq 2$

b) $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5}dx \leq \sqrt{10}$

Indicații: a) Se arată că $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \in [-1,\ 1]$ şi apoi se integrează pe $[-1,1]$

b) f strict crescătoare pe $[-1,\ 1]$, deci $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$ i.e. $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{10}$, apoi se integrează.

4. Să se arate că dacă $f,\ g:[0,1] \to \mathbb{R}$ sunt două funcții de clasă $C^1[0,1]$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)g(x)dx = f(0)g(0)$$

Indicație. Notăm $h(t) = f(t)g(t), t \in [0,1]$. Se aplică *teorema creşterilor finite* pe intervalul $[0,\ x^n]$ şi mai departe se procedează ca la *exercițiul 11* din *paragraful 2.3*.

5. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^3} < 1$

b) $\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2} dx < \frac{e+2}{3}$

Indicație. a) Se arată mai întâi că $\frac{2x}{1+x^2} < \frac{2x}{1+x^{13}} < 2x, \ \forall\, x \in (0,\ 1)$ şi apoi se integrează pe $[0,1]$.

b) Se verifică în prealabil că $x^2+1 \le (e-1)x^2+1, \ \forall x \in [0,1]$.

6. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$R:\ 0$

7. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$$

$R:\ \frac{1}{2}$

8. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_{-2}^{2} \left(\left|x^2-1\right| + \left|2x-x^2\right|\right)dx$

$R:\ 12$

b) $\int_{0}^{2\pi} \left(\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|\right)dx$

$R:\ 8$

c) $\int_0^1 f(x)dx,$ unde $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le t \\ t\dfrac{1-x}{1-t} & t < x \le 1 \end{cases}$

$R:\ \frac{t}{2}$

9. Să se calculeze:

$$A(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$R:\ A(a)=\begin{cases}\ln\dfrac{4-a}{2-a} & a\le 1\\ \ln\left(4a-a^2\right) & 1<a\le 3\\ \ln\dfrac{a}{a-2} & a>3\end{cases}$$

10. Fie $(f_n)_{n\ge 1}$ un şir de funcţii, definit recurent prin:

$$f_1(x)=1,\qquad f_{n+1}(x)=\int_1^x f_n(t)\,dt,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall\ n\ge 1$$

Notăm: $a_n=f_{n+1}(2)$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

Indicaţie. Se probează prin inducţie că $f_{n+1}(x)=\dfrac{(x-1)^n}{n!}$

Valoarea maximă a lui h se obţine pentru $a=0$

11. Să se calculeze:

$$A(\lambda)=\int_0^1\left|x^2-\lambda\right|d\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{ fixat.}$$

Soluţie. Explicităm funcţia care apare sub integrală ţinând seama de valorile parametrului real λ:

$i)$ $\lambda>1$. Întrucât $\left|x^2-\lambda\right|=\lambda-x^2,\quad \forall x\in[0,1]$, rezultă că:

$$A(\lambda)=\int_0^1\left(\lambda-x^2\right)dx=\lambda-\frac{1}{3},\quad \lambda>1$$

$ii)$ $\lambda<0$. Deoarece, $\left|x^2-\lambda\right|=x^2-\lambda,\quad \forall x\in[0,1]$

$$A(\lambda)=\int_0^1\left(x^2-\lambda\right)dx=\frac{1}{3}-\lambda\quad \lambda<0$$

$iii)$ $0\le\lambda\le 1$. În acest caz:

$$\left|x^2-\lambda\right|=\left|\left(x-\sqrt{\lambda}\right)\right|\left(x+\sqrt{\lambda}\right)=\begin{cases}\lambda-x^2 & 0\le x<\sqrt{\lambda}\\ x^2-\lambda & \sqrt{\lambda}\le x\le 1\end{cases}$$

Mai departe, rezultă:

$$A(\lambda)=\int_0^{\sqrt{\lambda}}\left(\lambda-x^2\right)dx+\int_{\sqrt{\lambda}}^1\left(x^2-\lambda\right)dx=\left(\lambda x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\lambda}}+\left(\frac{x^3}{3}-\lambda x\right)\Bigg|_{\sqrt{\lambda}}^1=$$

Prin urmare:

$$A(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\lambda & \lambda<0\\ \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{\lambda}-1\right)\lambda+\dfrac{1}{3} & 0\le\lambda\le 1\\ \lambda-\dfrac{1}{3} & \lambda>1\end{cases}$$

12. Să se calculeze integrala:

$$L=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2\alpha x+1},\qquad |\alpha|\le 1$$

Soluție. Întrucât $x^2+2\alpha x+1=(x+\alpha)^2+(1-\alpha^2)$, distingem următoarele situații:

$i)$ $|\alpha|<1$, caz în care:

$$L=\int_0^1\frac{dx}{(x+\alpha)^2+\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

$ii)$ $|\alpha|>1$. În acest caz:

$$L=\int_0^1\frac{dx}{(x+\alpha)^2-\left(\sqrt{\alpha^2-1}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}}\ln\left|\frac{x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}}\ln\left|\frac{x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\cdot\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\ln\left[\left(\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha-1}\right)\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right]$$

13. Să se calculeze integralele definite:

a) $A=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx$

Soluție. Întrucât $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ rezultă că $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$

Pe de altă parte, pentru $0 \le x \le 2\pi$, avem: $\sin\frac{x}{2} > 0$, astfel că:

$$A = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}dx = 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

b) $A = \int_{e^{-1}}^{e} |\ln x| dx$

Soluție. Avem: $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x & \frac{1}{e} \le x < 1 \\ \ln x & 1 \le x \le e \end{cases}$

apoi:

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x \, dx$$

Notăm: $F(x) = x(\ln x - 1), \quad \forall\, x > 0$. Atunci:

$$A = -x(\ln x - 1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x(\ln x - 1)\Big|_1^e = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

14. Să se arate că dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este de clasă $C^1_{[a,b]}$ (i.e. f este o funție derivabilă cu derivata continuă pe $[a,b]$) atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$$

Soluție. Se aplică *teorema creşterilor finite a lui Lagrange* funcției $f(t)$ pe intervalul $\left[0, x^n\right]$. Astfel:

$$f(x^n) - f(0) = f'(c_n)x^n, \qquad c_n \in (0,\, x^n)$$

Întrucât f este de clasă $C^1_{[a,b]}$, rezultă că f' este mărginită pe $[a,b]$. Aşadar:

$$\exists\, \lambda > 0 \quad \therefore \quad |f'(c_n)| \le \lambda, \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n \in (0, x^n)$$

Prin urmare, dacă se integrează inegalitatea din urmă, se obține:

$$\left|\int_0^1 \left[f(x^n) - f(0)\right] dx\right| \le \int_0^1 x^n \left|f'(c_n)\right| dx \le \lambda \int_0^1 x^n dx = \frac{\lambda}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0,$$

iar prin trecere la limită se obține:

Aplicație. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$$

Soluție. Definim $f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^n}}$.

Este evident că f este de clasă $C^1_{[0,\,1]}$, iar $f(0)=1$. Astfel, din cele arătate anterior:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}=1$$

15. Să se studieze convergenta şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin termenul general:

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Soluție. Notăm: $F_n(x)=\int x^n\sqrt{1-x}\,dx,\qquad \forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}$

Atunci, dacă se integrează prin părți cu:

$$\begin{cases} u=x^n \\ dv=\sqrt{1-x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=nx^{n-1}dx \\ v=-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x}\,(1-x) \end{cases}$$

se obține:

$$F_n(x)=\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}+\frac{2n}{3}\int x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\Rightarrow$$

$$F_n(x)=\frac{2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}+\frac{2n}{3}\big(F_{n-1}(x)-F_n(x)\big)$$

De aici rezultă relația de recurență:

$$F_n(x)=\frac{2}{2n+3}x(1-x)\sqrt{1-x}+\frac{2}{2n+3}F_{n-1}(x),\quad \forall\ n\geq 1$$

a_n se obține din relația:

$$a_n=F_n(x)\Big|_0^1$$

Astfel

$$a_n=\frac{2n}{2n+3}a_{n-1},\quad \forall\ n\geq 1$$

Pe de altă parte, integrantul $x^n\sqrt{1-x}\geq 0,\ \forall\ x\in[0,1]$ a.î. conform *proprietății* (P_3), urmează că:

$$a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx \geq 0, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Evaluând diferența:

$$a_n - a_{n-1} = \left(\frac{2n}{2n+3} - 1\right) a_{n-1} = -\frac{3}{2n+3} a_{n-1} \leq 0, \quad \forall n \geq 1$$

se deduce că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi în plus:

$$0 \leq a_n \leq a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

Pe de altă parte, şirul a_n este mărginit întrucât:

$$\forall\ 0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \sqrt{1-x} \leq 1 \quad \text{şi} \quad x^n \sqrt{1-x} \leq x^n$$

Adică:

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1$$

În concluzie, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit, deci convergent.

Trecând la limită în ultima inegalitate se obține:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

16. Dacă $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^1_{[0,1]}$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$$

Soluție. Să observăm că funcția $x \to x^n f(x)$ este continuă pe $[0,1]$ şi dacă notăm $H_n(x)$ o primitivă a acestei funcții, urmează că:

$$H_n(x) = \int x^n f(x)dx$$

Vom integra prin părți această integrală:

$$H_n(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}f(x) - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}f'(x)dx$$

Apoi scriem:

$$n\int_0^1 x^n f(x)dx = nH_n(x)\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}f(1) - \int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx \qquad (*)$$

Întrucât f' este mărginită pe $[0,1]$, rezultă că $\exists\lambda$ şi $\mu \in \mathbb{R}$ a.î.

$$\lambda < f'(x) < \mu \qquad \forall\ x \in [0,1]$$

De aici rezultă:

$$\lambda x^{n+1} < x^{n+1}f'(x)dx < \mu x^{n+1}, \quad \forall\ x \in [0,1]$$

iar dacă se integrează pe $[0,1]$, se obține:

$$\frac{\lambda}{n+2} < \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx < \frac{\mu}{n+2}, \qquad \forall\ n \ge 1$$

Trecând la limită după $n \to +\infty$ în ultima relație, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx = 0$$

Ținând seama de acest rezultat în egalitatea $(*)$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} f(1) - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx = f(1)$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soluție. Notăm: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \forall\ x \in [0,1]$. Evident f este de clasă $C^1_{[0,1]}$.

Conform celor arătate mai sus:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

17. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$. Să se arate că, dacă $f \ge 0$ pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f = 0$, atunci $f \equiv 0$ pe $[a,b]$.

Soluție. Presupunem prin absurd că există $x_0 \in [a,b]$, astfel încât $f(x_0) > 0$, Cum f este continuă în punctul x_0, atunci există o vecinătate V a lui x_0, a.î. $f(x) > 0, \quad \forall\ x \in V$. Fie $\varepsilon > 0$ astfel încât $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset V$, atunci:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx > 0$$

iar din *consecința* 1) a *proprietății* (P_3) rezultă că:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx > 0$$

Ceea ce contrazice faptul că $\int_a^b f(x)\,dx = 0$! Urmează că,

$$f(x) = 0, \quad \forall\ x \in [a,b].$$

18. Fie $f,\, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții continue având acelaşi semn pe $[a,b]$.
Să se arate că:

dacă $\int_a^b fg=0,$ atunci $f=0$ sau $g=0$ pe $[a,b]$.

Soluție. Se ia $g=f$ şi se aplică *exercițiul 14* cu f^2 în loc de f.

2.4. Formula de integrare prin părți pentru integrala definită

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții de clasă $C^1_{[a,b]},$ atunci:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Dacă schimbăm: $f(x)\to u(x)$ şi $g'(x)dx\to dv(x),$ atunci formula de mai sus se rescrie sub forma:

$$\boxed{\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu}$$

unde $h\Big|_a^b=h(b)-h(a)$ reprezintă saltul lui *h*.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

Soluție. Se integrează prin părți, alegând:

$$\begin{cases}u=x\\ dv=e^{-x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$$

Astfel:

$$I=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)\Big|_0^1=1-\frac{2}{e}$$

2 $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

Soluție. Se aleg:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Apoi, se integrează prin părți:

$$I = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx}_{J}$$

Pentru integrala notată J se aleg:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

şi vom integra prin părți:

$$J = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Înlocuind mai sus, găsim:

$$I = \left(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

3. $I=\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$

Soluție. Se scrie integrala sub forma:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2\int_0^1 \sqrt{x} \left(e^{-\sqrt{x}}\right)' dx$$

şi apoi se integrează prin părți:

$$I = -2\left(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx\right) = -2\left(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right)\Big|_0^1 = -2\left(\sqrt{x}+1\right)e^{-\sqrt{x}}\Big|_0^1 = 2 - \frac{4}{e}$$

4. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$

Soluție. Dacă scriem $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, atunci integrala devine:

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx}_{J} = \frac{1}{4}x^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}J$$

unde J se integrează prin părți cu:

$$\begin{cases} u = x \\ 2v = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Aşadar:

$$I = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right) + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{8}\left(-8 - 4\pi + 3\pi^2\right)$$

5. $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Soluție. Vom face o integrare prin părți luând:

$$\begin{cases} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ v = x \end{cases}$$

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a + \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{\left(a^2 - x^2\right) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \Leftrightarrow$$

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a - I \Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a + \frac{a^2}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{4}$$

6. $I = \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

apoi:

$$I = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx}_{J}$$

Ultima integrală se mai poate scrie:

$$J = \int_0^1 \frac{x\left(x^2+1\right)-x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1$$

iar dacă înlocuim mai sus acest rezultat, găsim:

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^6}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}(\pi - 2 + \ln 4)$$

7. $I = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$

Soluție. Se observă că:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+1}}}_{I_2} = I_1 + I_2$$

Evaluăm separat cele două integrale:

$$I_1 = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx = x^2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = x^2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\Big|_0^1$$

$$I_2 = \int_0^1 x^4\left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx = x^4\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - 4\underbrace{\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx}_{I} = x^4\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - 4I_1$$

Atunci, prin înlocuirea lui I_1 și I_2 în expresia lui I se obține:

$$I = \left[x^2\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]\Bigg|_0^1 + \left(x^4\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - 4I_1\right) \Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{5}\left[x^4\sqrt{x^2+1}+x^2\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]_0^1=\frac{1}{15}\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\left(3x^2-2\right)\right]_0^1$$

sau în final:

$$I=\frac{2}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

8. $I=\int_0^1 x^2\arcsin x dx$

Soluție. Se integrează prin părți, alegând:

$$\begin{cases} u=\arcsin x \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=\dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

Aşadar:

$$I=\frac{x^3}{3}\arcsin x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1}=\frac{x^3}{3}\arcsin x\Big|_0^1-\frac{1}{3}I_1$$

unde:

$$I_1=:\int x^2\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

I_1 se obține efectuând o nouă integrare prin părți:

$$\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Astfel:

$$I_1=-x^2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1+2\underbrace{\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx}_{J}=-x^2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1+J$$

unde:

$$J=-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\left(-2x\right)dx=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\Big|_0^1$$

Astfel că:

$$I_1=-x^2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\Big|_0^1$$

iar mai departe:

$$I = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{2}{9}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\Big|_0^1$$

sau dacă restrângem şi efectuăm calculele se obține:

$$I_1 = \frac{1}{9}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^3 \arcsin x\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$$

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$

Soluție. Ținând seama de faptul că:

$$\operatorname{tg}^2 x = \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) - 1 = \left(\operatorname{tg} x\right)' - 1$$

integrala se mai scrie:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\operatorname{tg} x\right)' dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = x \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= x \operatorname{tg} x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln\left(\cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

sau mai departe, după efectuarea calculelor:

$$I = \frac{\pi\left(8-\pi\right)}{32} - \frac{1}{2}\ln 2$$

10. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx$

Soluție. Se va integra prin părți cu:

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x dx \end{cases}$$

Astfel:

$$I = -\frac{e^x}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx}_{I_1} = -\frac{e^x}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}I_1$$

În ultima integrală se alege:

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x dx \end{cases}$$

Prin urmare:

$$I_1 = \frac{e^x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^x \sin 2x dx = \frac{e^x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}I_1$$

iarcu expresia lui I_1 înlocuită mai sus se obține:

$$I = \left(-\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{e^x}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}I_1$$

de unde, în final, se obține:

$$I = \frac{e^x}{5}\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}\left(1 + e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

Exerciții propuse

1. $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 x dx$

   $R:\ \dfrac{4}{3}$

2. $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x dx$

   $R:\ 0$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$

   $R:\ \left(-1 - e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \ln(x+1) dx$

   $R:\ \dfrac{\ln 4}{3} - \dfrac{5}{18}$

5. $\int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}} dx$

$R: \ 2-\frac{5}{e}$

6. $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

$R: \ 4-\frac{10}{e}$

7. $\int_0^\pi x \sin^2 x dx$

$R: \ \frac{\pi^2}{4}$

8. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

$R: \ \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$

$R: \ \frac{1}{3}$

b) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

$R: \ \frac{2}{15}$

10. $\int_0^1 x^2 \arccos x dx$

$R: \ \frac{2}{19}$

11. $\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arcctg} x dx$

$R: \ \frac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\pi}{12}+\frac{1-\ln 2}{6}$

2.5. Alte proprietăți ale integralei definite

(P_1) Orice funcție continuă pe $[a,b]$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a,b]$.

(P_2) Dacă f continuă pe un interval centrat în origine $[-a,a]$, atunci:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad f \text{ impară pe } [-a,a] \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx & \text{dacă} \quad f \text{ pară pe } [-a,a] \end{cases}$$

Într-adevăr, conform *proprietății de aditivitate la interval*, deducem:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

iar de aici:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

Apoi:

(i) dacă f este impară pe $[-a,a]$ i.e. $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a,a]$ urmează că:

$$\int_{-0}^{a} f(-x)dx = -\int_{-0}^{a} f(x)dx$$

de unde:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(ii) dacă f este pară pe $[-a,a]$ i.e. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-a,a]$, atunci:

$$\int_{0}^{a} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

astfel că:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(P_3) Dacă f este continuă pe $[a,b]$, iar $f(a+b-x) = f(x)$, atunci:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Într-adevăr, dacă se efectuează substituția:

$$a+b-x = t \ \therefore dx = -dt$$

şi se ține seama de tabelul de valori:

x	a	b
t	$b \searrow$	a

rezultă că:

$$\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b xf(a+b-x)dx=\int_a^b (a+b-t)f(t)\,dt=(a+b)\int_a^b f(t)dt-\int_a^b tf(t)dt$$

Variabila de integrare t fiind arbitrar aleasă, se renotează cu *x,* astfel încât:

$$\int_a^b xf(x)dx=(a+b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b xf(x)dx$$

de unde:

$$\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

(P_4) Dacă f este continuă pe $[a,b]$, iar

$$f(a+b-x)=f(a)+f(b)-f(x), \quad \forall x\in[a,b]$$

atunci:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

Într-adevăr, dacă se integrează pe $[a,b]$ în egalitatea din enunț:

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b\left[f(a)+f(b)-f(x)\right]dx$$

şi se efectuează schimbarea de variabilă:

$x\to t \therefore a+b-x=t$ cu $dx=-dt,$

atunci prima integrală se rescrie sub forma:

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(t)dt,$$

iar mai departe, integrala din membrul drept devine:

$$\int_a^b\left[f(a)+f(b)\right]dx-\int_a^b f(x)dt=(b-a)\big(f(a)+f(b)\big)-\int_a^b f(x)dx$$

Prin urmare, înlocuind mai sus expresiile obținute şi renotând variabila de integrare cu x, avem:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]-\int_a^b f(x)dx$$

sau

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

(P_5) Dacă $f:[0,a]\to[0,b]$ continuă pe $[0,a]$ şi derivabilă pe $(0,a)$ cu $f'(x)>0,\ \forall x\in(0,a),\ f(0)=0,\ f(a)=b,$ atunci f este inversabilă (f^{-1} este inversa) şi

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy=ab$$

Într-adevăr, cum $f''>0$ pe $(0,a)$ deducem că f este strict crescătoare pe $(0,a)$, deci injectivă, iar din faptul că $f(0)=0$ şi $f(a)=b$ rezultă că

$\operatorname{Im} f=(0,b)$, astfel că este surjectivă pe $[0,a]$. Prin urmare f este bijectivă pe $[0,a]$. Fie $f^{-1}:[0,b]\to[0,a]$ inversa lui f, atunci dacă se face schimbarea de variabilă:

$$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\therefore dx=\left(f^{-1}(y)\right)'dy,\quad y\in[0,b]$$

în integrala:

$$\int_0^a f(x)dx$$

rezultă că:

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^b y\left(f^{-1}(y)\right)'dy=y\,f^{-1}(y)\Big|_0^b-\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

Dar cum $f^{-1}(b)=a$ obținem în final:

$$\int_0^a f(x)dx=ab-\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

adică:

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy=ab$$

(P_6) a) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

b) $\int_0^b f(x)dx=\int_0^b f(b-x)dx$

c) $\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(2a-x)\right]dx$

Într-adevăr, pentru a) se notează $a+b-x=t$ cu $dx=-dt$ şi $t\in[b,a]$, astfel:

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=-\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$$

Dacă se ia $a=0$, atunci se obține egalitatea b).
Pentru a obține egalitatea c) vom scrie:

$$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)\,dx$$

iar în ultima integrală vom efectua schimbarea:

$$x\to t\therefore 2a-x=t\ \text{ cu }\ dx=dt$$

Aşadar:

$$\int_a^{2a} f(x)dx=-\int_a^0 f(2a-t)dt=\int_0^a f(2a-x)dx$$

Înlocuind mai sus expresia găsită obținem în final:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)+\int_0^{2a} f(2a-x)dx$$

(P_7) Dacă f continuă pe $[a,b]$ şi f periodică de perioadă T atunci:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx,\qquad n\in\mathbb{Z}$$

Într-adevăr, dacă se efectuează schimbarea:

$$x \to t \therefore x = t + nT \text{ cu } t \in [a,b]$$

integrala din membrul drept se rescrie succesiv sub forma:

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(t+nT)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx,$$

unde s-a ținut cont că f este periodică.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze integralele definite:

1. $\int_{-1}^{1} |x| dx$

Soluție. Întrucât funcția $x \mapsto f(x) = |x|$ este pară astfel, conform proprietății (P_1),

$$\int_{-1}^{1} |x| dx = 2\int_0^1 |x| dx = 2\int_0^1 x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

2. $\int_{-7}^{7} \frac{x^2 \sin x}{x^4 + 2} dx$

Soluție. Întrucât integrantul este o funcție impară deducem că integrala are valoarea zero.

3. a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

Soluție. *i*) Dacă f este o funcție pară atunci:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 2\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$

ii) Dacă f este o funcție impară atunci:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 2\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$

Soluție. Notăm $f(x)=\dfrac{x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}$, $x\in[-\pi,\pi]$

Evident, $f(x)=x\left(\dfrac{x^2\sin x}{x^2+1}\right)^2$ este o funcție impară astfel că, integrala se anulează pe $[-\pi,\pi]$.

5. $I=\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

Soluție. Notând integrantul cu $f(x)$, se observă că:

$$f(x+\pi)=\frac{\sin(2x+2\pi)}{\cos^4(x+\pi)+\sin^4(x+\pi)}$$

însă

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin^4(x+\pi)=\sin^4 x \text{ şi } \cos^4(x+\pi)=\cos^4 x$$

de unde rezultă că, f este o funcție periodică pe intervalul $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$ având perioada principală $T=\pi$ i.e. $f(x+\pi)=f(x)$, $\forall\, x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$

Mai mult,

$$f(x+n\pi)=f(x),\quad \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall\, x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$$

Prin urmare:

$$I=\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}f(x)dx=\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\int_0^{\pi}f(x)dx$$

Pe de altă parte:

$$f(x)=\frac{2\sin x\cos x}{\left(\operatorname{tg}^4 x+1\right)}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

astfel că, efectuând schimbarea:

$$x\to t \therefore \operatorname{tg} x=t \text{ cu } \frac{dx}{\cos^2 x}=dt$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\nearrow$	1

urmează că:

$$I=\int_0^1\frac{2t}{t^4+1}dt=\int_0^1\frac{\left(t^2\right)'dt}{1+\left(t^2\right)^2}=\operatorname{arctg}\left(t^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

6. $I=\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}\frac{\sin^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$

Soluție. Notăm:

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x},\quad \forall x\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right]$$

Atunci:

$$f(x+\pi)=f(x),\quad \forall x\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right]$$

Aşadar:

$$I=\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}f(x)dx=\int_{\pi+\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$$

Însă, cum:

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2},\quad \forall x\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right]$$

putem schimba:

$$x\to t\therefore \operatorname{tg}x=t \text{ cu } dx=\frac{dt}{1+t^2} \text{ şi } t\in\left[1,\sqrt{3}\right]$$

Urmează că:

$$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)\left(a^2t^2+b^2\right)}$$

Scriem integrantul sub forma:

$$\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)\left(a^2t^2+b^2\right)}=\frac{\left(a^2t^2+b^2\right)+a^2\left(t^2+1\right)-\left(a^2+b^2\right)}{\left(t^2+1\right)\left(a^2t^2+b^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{t^2+1}+\frac{a^2}{a^2t^2+b^2}--\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}\frac{\left(a^2t^2+b^2\right)-a^2\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)\left(a^2t^2+b^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{t^2+1}+\frac{a^2}{a^2t^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{t^2+1}-\frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2-b^2}\frac{1}{a^2t^2+b^2}=$$

$$=\frac{2a^2}{a^2-b^2}\frac{1}{t^2+1}-\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a^2t^2+b^2}$$

Apoi, integrala se va scrie:

$$I=\frac{2a^2}{a^2-b^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+1}-\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{a^2t^2+b^2}=$$

$$=\frac{2a^2}{a^2-b^2}\operatorname{arctg}t\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b}\Big|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2a^2}{a^2-b^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2ab}{a^2-b^2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\sqrt{3}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)\right]=$$

$$=\frac{2ab}{a^2-b^2}\left[\frac{\pi}{12}ab+\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a\sqrt{3}}{b}\right)\right]$$

7. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că:

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

Soluție. Evident avem:

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$$

Substituția:

$$x\to t\therefore x=\pi-t \text{ cu } dx=-dt$$

aduce ultima integrală sub forma:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(\sin t)dt=$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,f(\sin t)dt$$

Înlocuim mai sus acest rezultat, astfel că:

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,f(\sin x)dx+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,f(\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,f(\sin x)dx$$

adică

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$$

Soluție. Notăm *I* integrala dată. Conform celor arătate mai sus:

$$I=\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

Efectuăm schimbarea de variabilă:

$$x\to t\quad\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\quad\text{cu}\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\quad\text{şi}\quad t\in[0,1]$$

şi ținem seama că $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, integrala se va rescrie succesiv:

$$I=\pi\int_0^1\frac{2t\,dt}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}=\pi\int_0^1\frac{\left(1+t^2\right)-\left(1+t^2\right)}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}dt=\pi\left(\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1\frac{dt}{(1+t)^2}\right)=$$

$$=\pi\left(\operatorname{arctg}t\Big|_0^1+\frac{1}{1+t}\Big|_0^1\right)=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(\pi-2)$$

8. Să se demonstreze că:

$$\int_{-a}^{a}f\left(x^2\right)\cos x\,dx=2\int_0^a f\left(x^2\right)\cos x\,dx$$

Soluție. Notăm: $h(x)=f\left(x^2\right)\cos x$. Evident h este o funcție pară:

$$h(-x)=f\left(x^2\right)\cos(-x)=h(x),\quad \forall x\in[-a,a]$$

Aşadar:

$$\int_{-a}^{a}h(x)dx=2\int_0^a h(x)dx=2\int_0^a f\left(x^2\right)\cos x\,dx$$

9. Să se calculeze:

$$I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}dx$$

Soluție. Descompunem integrala după cum urmează:

$$I=\underbrace{\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7-10x^5-7x^3+x}{x^2+2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{3x^2\left(x^4-4\right)+1}{x^2+2}dx}_{I_2}=I_1+I_2$$

Dar $I_1=0$, integrantul fiind o funcție impară, iar I_2 se va transforma în:

$$I_2=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[3x^2\left(x^2+2\right)+\frac{1}{x^2+2}\right]dx=2\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(3x^4+6x^2\right)dx+\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2+2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{3}{5}x^5\Big|_0^{\sqrt{2}}+2x^3\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)=-\frac{16}{5}\sqrt{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

10. Să se calculeze:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$$

Soluție. Să observăm că funcția $\varphi(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ este impară pe $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Într-adevăr:

$$\varphi(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-\varphi(x),$$

atunci integrantul este o funcție impară deoarece,

$$\cos(-x)\varphi(-x)=-\cos x\varphi(x)$$

astfel că integrala are valoarea 0.

11. Să se arate că:

$$\int_0^t f(x)g(t-x)dx=\int_0^t g(x)f(t-x)dx$$

Soluție. Aplicăm schimbarea de variabilă:

$$x\to z \therefore t-x\equiv z \text{ cu } dx=-dz$$

astfel, integrala din membrul drept se va scrie

$$-\int_t^0 g(t-z)f(z)dz=\int_0^t g(t-z)f(z)dz$$

12. Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx$$

Soluție. Conform proprietății (P_6) $a)$

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

Pentru $a=0,\ \ b=\dfrac{\pi}{2}$ avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dt$$

Aplicație. Să se calculeze integralele:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx \text{ şi } J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

Soluție. Scriem combinațiile liniare:

$$\begin{cases} I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2} \\ I=J \end{cases}$$

de unde:

$$2I=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Prin urmare:

$$I=J=\frac{\pi}{4}$$

13. Să se demonstreze egalitățile:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx + \int_0^{\ln 2} \operatorname{arctg}\left(e^y - 1\right) dy = \frac{\pi}{4}\ln 2$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\pi^2}{8}$

Soluție. Vom aplica proprietatea (P_5)

a) Notăm $f : \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \to [0,\ln 2] \qquad f(x) = \ln(1+\operatorname{tg} x)$

Evident, f continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)} > 0, \qquad \forall x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$$

Inversa lui f este:

$$f^{-1} : [0,\ \ln 2] \to \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}\left(e^y - 1\right)$$

Într-adevăr, fie $y \in [0,\ln 2]$ a.î.

$$f(x) = y \text{ i.e. } y = \ln(1+\operatorname{tg} x)$$

Atunci:

$$1+\operatorname{tg} x = e^y \text{ şi } x = \operatorname{arctg}\left(e^y - 1\right), \qquad \forall x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$$

Mai departe:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f^{-1}(y)dy = \frac{\pi}{4}\ln 2$$

Analog, funcția:

$$f : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \qquad f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$$

are următoarele proprietăți:

i) $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;

ii) $f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} > 0 \qquad \forall x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

În acest caz, f inversabilă şi inversa ei $f^{-1} : \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \to \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ se obține din ecuația $f(x) = y$ rezolvată în raport cu x

$$\operatorname{arctg}(\sin x) = y \Rightarrow \sin x = \operatorname{tg} y \quad \text{sau} \quad x = \arcsin(\operatorname{tg} y)$$

Conform (P_6) rezultă că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\operatorname{tg} y)dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

14. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$

b) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

c) $\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}dx$

Soluție. a) Notăm I integrala dată, atunci putem scrie:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right)dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x)dx}_{I_1} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x \, dx$$

Ținând seama că:

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

urmează că:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$$

În integrala din membrul drept substituim:

$$x = \frac{\pi}{4} - t \therefore dx = -dt$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$
t	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

Urmează că:

$$I_1 = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\, dt$$

Înlocuind mai sus pe I_1 avem:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\operatorname{tg}x\right)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos x\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos x\right)dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

b) Schimbarea

$$x\to\theta\therefore x=\operatorname{arctg}\theta\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+\theta^2}$$

x	0		1
θ	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

aduce integrala dată la forma dată de la punctul a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\operatorname{tg}\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

c) Se scrie mai intâi integrantul sub forma

$$\frac{\ln\left(a+x\right)}{a^2+x^2}=\frac{\ln a\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a^2+x^2}=\ln a\frac{1}{a^2+x^2}+\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$

aşadar,

$$\int_0^a\frac{\ln\left(a+x\right)}{a^2+x^2}dx=\ln a\int_0^a\frac{dx}{a^2+x^2}+\frac{1}{a}\int_0^a\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}dx$$

unde

$$\int_0^a\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\ln a}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^a=\frac{\pi\ln a}{4a}$$

iar

$$\frac{1}{a}\int_0^a\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}dx=\frac{1}{a}\int_0^1\frac{\ln\left(1+t\right)}{1+t^2}dt$$

unde $t=\frac{x}{a}$. Din punctul b) rezultă:

$$\int_0^1\frac{\ln\left(1+t\right)}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

iar de aici:

$$I=\frac{\pi\ln a}{4a}+\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{8}\ln 2=\frac{\pi}{4a}\ln\left(a\sqrt{2}\right)$$

15. Găsiţi greşeala care apare în următorul raţionament:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x\left(3\operatorname{tg}^2 x+1\right)}=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\left(\operatorname{tg}x\right)' dx}{3\operatorname{tg}^2 x+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)\Big|_0^{\pi}=0$$

Soluție. Cum $f>0$ pe $\left(0,\pi\right)\Rightarrow\int_0^{\pi}f>0$! Greşeala provine din faptul că *formula lui Leibniz-Newton* nu este aplicabilă în acestz caz. Funcția:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right)$$

nu este primitivă a funcției

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1+2\sin^2 x}\ \text{ pe }\left(0,\pi\right)$$

întrucât $F\left(x\right)$ are o discontinuitate în $x=\frac{\pi}{2}$. Într-adevăr

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}F\left(x\right)=\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(+\infty\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}}F\left(x\right)=\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(-\infty\right)=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

O soluție ar fi să considerăm integrala dată sub forma:

$$\int_0^{\pi}f\left(x\right)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}f\left(x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi}f\left(x\right)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(F\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}+F\left(x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[F\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-F\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right]$$

Efectuând calculele, urmează că:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

O altă soluție ar fi să rescriem integrala ca:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\left(\operatorname{ctg}x\right)' dx}{3+\operatorname{ctg}^2 x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(-\infty\right)-\operatorname{arctg}\left(+\infty\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Să se calculeze integralele de mai jos, folosind eventual proprietatea (P_6):

16. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{ctg}x)dx$

Soluție. Fie $f(x)=\ln(\operatorname{ctg}x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Cu $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$

proprietate (P_6) a) revine la:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{ctg}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

iar schimbarea

$$x\to t\therefore\frac{\pi}{2}-x=t \text{ cu } dx=-dt$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0

aduce ultima integrală sub forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg}x)dx$$

Astfel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{ctg}x)dx \tag{1}$$

Pe de altă parte,

$$0=\ln 1=\ln(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x)=\ln(\operatorname{tg}x)+\ln(\operatorname{ctg}x)$$

iar prin integrare de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ se obține:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg}x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{ctg}x)dx=0 \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{ctg})x\ dx=0$$

17. $I=\int_0^{\pi}\frac{x|\cos x|}{1+\sin x}dx$

Soluție. Fie $f(x)=\dfrac{x|\cos x|}{1+\sin^2 x},\quad x\in[0,\pi]$. Luăm $a=0,\quad b=\dfrac{\pi}{2}$ iar

$$\int_a^b f(a+b-x)dx-\int_0^\pi f(\pi-x)dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)|\cos(\pi-x)|}{1+\sin(\pi-x)}dx$$

Notăm $\pi-x=t \therefore dx=-dt$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	0

Astfel:

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_0^\pi \frac{t|\cos t|}{1+\sin t}dt=\int_0^\pi \frac{x|\cos x|}{1+\sin x}dx=\int_a^b f(x)dx$$

Urmează că:

$$I=\int_0^\pi \frac{x|\cos x|}{1+\sin x}dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)|\cos(\pi-x)|}{1+\sin(\pi-x)}dx=\pi\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{1+\sin x}dx-I$$

de unde

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{1+\sin x}dx$$

Evaluăm integrala din membrul drept:

$$I=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx\right)=\frac{\pi}{2}\left[\ln(1+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\right.$$

$$\left.-\ln(1+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{\pi}{2}(\ln 2+\ln 2)=\pi\ln 2$$

18. $I=\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$

Soluție. Notăm $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\sin^2 x},\quad x\in[0,\pi]$. Atunci conform (P_6)

$$I=\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(\pi-x)dx=\int_0 \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\sin^2(\pi-x)}dx=$$

$$=\underbrace{\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx}_{I_1}-\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dt=\pi I_1-I$$

Prin urmare:

$$I=\frac{\pi}{2}I_1=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x\, dx}{2-\cos^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{(\cos x)dx}{\cos^2 x-2}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^\pi=$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right|-\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

19. $I=\int_0^{2a}\left(2ax-x^2\right)^{\frac{2}{3}}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)dx$

Soluție. Notăm $f\left(x\right)=\left(2ax-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right),\ \ x\in\left[0,2a\right]$

Atunci:

$$\int_0^{2a}f\left(x\right)dx=\int_0^{2a}f\left(2a-x\right)dx$$

Însă:

$$f\left(x\right)=\left[a^2-\left(a-x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\arccos\left(\frac{a-x}{a}\right)$$

iar

$$f\left(2a-x\right)=\left[a^2-\left(x-a\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\arccos\frac{x-a}{a}$$

Deducem că:

$$2I=2\int_0^{2a}f\left(x\right)dx=\int_0^{2a}f\left(x\right)dx+\int_0^{2a}f\left(2a-x\right)dx$$

sau

$$2I=\int_0^{2a}\left[a^2-\left(x-a\right)\right]^{\frac{3}{2}}\underbrace{\left[\arccos\frac{a-x}{a}+\arccos\frac{x-a}{a}\right]}_{b}dx$$

Evaluăm termenul din paranteză, notat cu b:

$$b=\underbrace{\arccos\frac{a-x}{a}}_{u}+\underbrace{\arccos\frac{x-a}{a}}_{v}$$

Aplicând funcția cosinus în ambii membrii, se obține sucesiv:

$$\cos b=\cos\left(u+v\right)=\cos u\cos v-\sin u\sin v=\frac{a-x}{a}\cdot\frac{x-a}{a}-$$

$$-\sqrt{1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}=-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2-1+\left(\frac{a-x}{a}\right)^2=-1$$

Aşadar:

$$\cos b=-1\Leftrightarrow b=\pi$$

Prin urmare:

$$2I=\pi\int_0^{2a}\left(a^2-\left(x-a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$$

Notăm:

$x - a = a\cos t$ cu $dx = -a\sin t$

x	0		$2a$
t	π	$\searrow$	0

Atunci:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(a^2 - a^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}} a\sin t\; dt = \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\pi}\sin^4 t\; dt =$$

$$= \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{\pi a^4}{8}\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t\right)dt =$$

$$= \frac{\pi a^4}{8}\left(t\Big|_0^{\pi} + \sin 2t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}dt\right) = \frac{\pi a^4}{8}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^2 a^4}{16}$$

Exerciții propuse

I. Să se calculeze următoarele integrale definite:

1. a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx$

R: 4

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\, dx$

R: $4\left(\sqrt{2}-1\right)$

2. a) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$

R: $200\sqrt{2}$

b) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

R: $200\sqrt{2}$

3. Să se arate că dacă $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

Indicație. Se ține seama de *exercițiul 7*.

II. Să se calculeze următoarele integrale definite:

4. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^5+x^3+x+1\right)\sin x\,dx$

$R:\quad 0$

5. a) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$

$R:\quad \frac{1}{a^2-b^2}\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2b^2}\right)$

b) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$

$R:\quad \frac{1}{a^2-b^2}\left[-\frac{\pi}{2}+\left(a^2+b^2\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$

6. a) $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$

$R:\quad \frac{\pi}{a\left(a+b\right)},\qquad a^2+b^2\neq 0$

b) $\int_{0}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$

$R:\quad \begin{cases}\frac{\pi}{a+b} & \text{dacă } a\neq b\\ \frac{\pi}{2a} & \text{dacă } a=b\end{cases}$

7. a) $\int_{0}^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\sin x}$

$R:\quad \pi$

b) $\int_{0}^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\sin^2 x}$

$R:\quad \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

8. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{3x^5+x^4-6x^3-4x^2+2x+3}{x^2-4}dx$

$R:\quad 2\sqrt{3}+\frac{3}{2}\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)$

9. $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)dx$

$R:\ 0$

10. $\int_a^b \frac{|x|}{x}dx,\quad a<b$

$R:\quad |b|-|a|$

11. Să se găsească greşeala în raționamentul următor:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\operatorname{arctg}0\right]=-\frac{\pi}{6}$$

Indicație. $\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad x\neq 1$

12. Să se demonstreze egalitățile:

a) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin x^2 dx+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\arcsin x}\ dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

b) $\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{\frac{1}{e}} \sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx=\frac{1}{e}$

Indicație. Se ține seama de proprietatea P_5

III. Să se calculeze integralele de mai jos, folosind eventual proprietatea (P_6)

13. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg}x)dx$

$R:\ 0$

Indicație. Se ține seama de $(P_6)\,b)$. Se observă că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{ctg}x)dx$$

şi se ține seama că $\ln(\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x)=0$

14. $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{ctg}x)dx$

R: $\frac{\pi}{8}\ln 2$

Indicație. Se poate nota $x=\frac{\pi}{2}-t$

15. $I=\int_0^{2a}\left(2ax-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)dx$

$R:\ \frac{\pi a^3}{4}$

16. $I=\int_0^1\left(x-x^2\right)\arcsin(1-x)\,dx$

$R:\ \frac{2}{9}-\frac{\pi}{24}$

17. Să se arate că:

$$\int_1^7\sqrt{(x-1)(7-x)}dx=\int_{-1}^5\sqrt{(x+1)(5-x)}dx$$

Indicație. Se face schimbarea $x\to t\therefore x=t+2.$

2. 6. Formule de medie pentru integrala definită

(P_1) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există $\xi\in[a,b]$ a.î.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)}$$

Într-adevăr, *f* continuă pe $[a,b]\Rightarrow f$ mărginită şi îşi atinge marginile i.e.

$$\exists\, m,\ M\in\mathbb{R}\ \therefore\ m\le f(x)\le M,\quad \forall x\in[a,b]$$

Integrând inegalitățile de mai sus pe $[a,b]$ obținem:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

sau

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

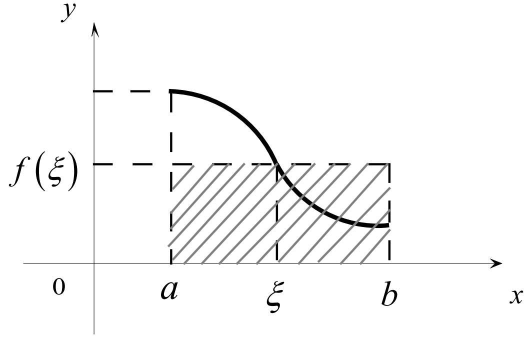
Însă *f* continuă, deci are *proprietatea lui Darboux* pe $[a,b]$ i.e.

$$\exists\ \xi\in[a,b]\ \ a.î.\ \ f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ \blacksquare$$

Observații.

(1) Numărul real $\dfrac{1}{b-a}\int f(x)dx$ se numeşte *valoarea medie* a lui f pe $[a,b]$.

(2) Dacă $f\ge 0$ atunci există un punct $\xi\in[a,b]$ a.î. subgraful lui *f* să aibă aceeaşi arie cu cea a dreptunghiului avînd baza $b-a$ şi înălțimea $f(\xi)$.



(P_2) Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue şi $g\geq 0$ pe $[a,b]$, atunci există $\xi\in[a,b]$ a.î.

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx}$$

Într-adevăr, raționând ca mai sus:

$$\exists\ m,\ M\in\mathbb{R}\ \text{a.î. } m\leq f(x)\leq g(x)\quad \forall x\in[a,b]$$

De aici rezultă că:

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$$

apoi integrând pe $[a,b]$

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leq M\int_a^b g(x)dx$$

Dacă $\int_a^b g(x)dx=0,$ atunci egalitatea din enunț are loc, $\forall\xi\in[a,b]$

Dacă $\int_a^b g(x)dx>0,$ atunci din ultima relație se obține

$$m\leq\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leq M$$

iar mai departe, există $\xi\in[a,b]$ a.î.

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$$

Mai mult:

$$\int_a^b fg=f(\xi)\int_a^b g$$

(P_3) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile cu g monotonă.
Atunci:

$$\exists\ \xi\in[a,b]\ \text{a.î. } \int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(x)\int_a^\xi f(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

Consecință.

Dacă f,g integrabile pe $[a,b]$, iar g monoton descrescătoare şi negativă pe $[a,b]$, atunci:

$$\exists\ \xi\in[a,b]\ \text{a.î. } \int_a^b fg=g(a)\int_a^\xi f$$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine valoarea medie pentru următoarele funcții şi să se menționeze punctul ξ corespunzător acestei valori:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\sin x$

Soluție. Evident funcția $f(x)=\sin x$ continuă pe $[0,\pi]$, deci conform (P_1) există $\xi\in[0,\pi]$ a.î.

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx=-\frac{\cos x}{\pi}\bigg|_0^\pi=\frac{2}{\pi}$$

Din $f(\xi)=\frac{2}{\pi}$, rezultă $\sin\xi=\frac{2}{\pi}$, iar $\xi=\arcsin\frac{2}{\pi}$

b) $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}\quad f(x)=\sin x+\cos x$

Soluție. Funcția $x\to\sin x+\cos x$ este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ca sumă de funcții continue, deci există $\xi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ a.î.

$$f(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=\frac{2}{\pi}(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

De aici rezultă că:

$$f(\xi)=\frac{4}{\pi}\ \text{sau}\ \sin x+\cos x=\frac{4}{\pi}$$

de unde

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\xi+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\xi=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{sau}\ \sin\xi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\xi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

urmează că:

$$\sin\left(\xi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\Leftrightarrow\xi=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

(evident $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}<1$)

2. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\int_1^{1+x}\ln t\,dt$$

Soluție 1. Aplicăm *teorema de medie* funcției

$$f:[1,\ 1+x]\to\mathbb{R},\quad f(t)=\ln t$$

Astfel:

$$f(\xi_x)=\frac{1}{x}\int_1^{1+x}\ln t\,dt$$

De aici rezultă că:

$$\int_1^{1+x}\ln t\,dt=x\ln\xi_x\to 0 \text{ când } x\to 0$$

Soluție 2. Calculăm integrala:

$$\int_1^{1+x}\ln t\,dt=t(\ln t-1)\Big|_1^{1+x}=(x+1)\ln(1+x)-x$$

Trecând la limită după $x\to 0$ obținem:

$$\lim_{x\to 0}\int_1^{1+x}\ln t\,dt=\lim_{x\to 0}\left[(x+1)\ln(1+x)-x\right]=0$$

3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ a.î. $2\int_0^1 f(x)dx=1$. Atunci există $x_0\in(0,1)$ a.î. $f(x_0)=x_0$

S*oluție*. Din ipoteză $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$, iar $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$, atunci putem scrie că:

$$\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=0$$

Aplicăm *teorema de medie* (P_1) astfel că $\exists x_0\in(0,1)$ a.î.

$$0=\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=f(x_0)-x_0$$

adică

$$f(x_0)=x_0$$

4. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi strict crescătoare. Atunci există un singur punct $c\in[a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

Soluție. În baza teoremei de medie (P_1) există $c \in [a,b]$ a.î.

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Unicitatea se probează prin reducere la absurd. Presupunem că există c, c' $c \neq c'$ a.î.

$$f(c')\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{şi} \quad f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

De aici, deducem că:

$$f(c) = f(c')$$

Pe de altă parte, f este strict crescătoare, deci f este injectivă i.e.

$$f(c) = f(c') \Rightarrow c = c' \quad \text{contradicție!}$$

5. Fie $f:[1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se determine $c \in (1,3)$ a.î.

$$\int_1^3 f(x)dx = 2f(c)$$

Soluție. Din teroema de medie (P_1) rezultă că există $c \in [1,3]$ a.î.

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_1^3 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Din $f(c) = \frac{13}{3}$ deducem că $c = \sqrt{\frac{13}{3}}$. Evident $c \in (1,3)$

6. Fie f, $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ conține pe $[a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

Atunci $\exists\, c \in [a,b]$ a.î. $f(c) = g(c)$

Soluție. Din ipoteză rezultă că $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = 0$. Aplicăm teorema de medie (P_1) funcției $h = f - g$ pe $[a,b]$. Astfel:

$$\exists\, c \in [a,b] \text{ a.î. } h(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dx = 0$$

Urmează că, $h(c) = 0$, deci $f(c) = g(c)$.

7. Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 f(x) = \frac{\pi}{4}$$

Atunci:

$$\exists\, c \in [0,1] \text{ a.î. } \frac{1}{1+c} < f(c) < \frac{1}{2c}$$

Soluție. Fie $g:[0,1] \to \mathbb{R} \quad g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Evident:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

Atunci, conform *exercițiului 6*,

$$\text{există } c \in [0,1] \text{ a.î. } f(c) = g(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

Pe de altă parte:

$$\frac{1}{1+c} \le \frac{1}{1+c^2} \le \frac{1}{2c}$$

astfel că există $c \in [0,1]$ a.î.

$$\frac{1}{1+c} < f(c) < \frac{1}{2c}$$

8. Fie $f:[0,1] \to [0,\infty)$ continuă pe $[0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 \sin f(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

Atunci $\exists\, c \in [0,1]$ a.î. $c^2 \sin f(c) + \sin f(c) - 1 = 0$

Soluție. Din

$$\int_0^1 \sin f(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

rezultă, ca mai sus, că:

$$\int_0^1 \left(\sin f(x) - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = 0$$

Evident integrantul este o funcție continuă pe $[0,1]$, astfel că $\exists c \in [0,1]$ a.î.

$$\sin f(c) - \frac{1}{1+c^2} = 0$$

De aici rezultă că:

$$c^2 \sin f(c) + \sin f(c) - 1 = 0$$

9. Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe $[0,1]$. Atunci $\exists\, c \in [0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(c)$$

Soluție. Se integrează *f* pe $[0,1]$ prin părți de două ori succesiv.

$$\int_0^1 f(x)dx = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx =$$

$$= (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx =$$

$$= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx$$

În ultima integrală se aplică *teorema de medie*, astfel:

$$\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx = f''(c)\int_0^1 (x-1)^2 dx = f''(c)\cdot\frac{1}{6} \quad \text{cu} \quad c\in[0,1]$$

Prin urmare, există $c\in[0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(c)$$

10. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $[0,1]$. Atunci $\exists\, c\in[0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(\xi)$$

Soluție. Se integrează prin părți funcția $f(x)$ pe $[0,1]$:

$$\int_0^1 f(x)dx = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx = f(0) - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx$$

Integralei din membrul drept i se aplică *teorema de medie* (P_1), astfel că există $\xi\in[0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx = f(\xi)\int_0^1 (x-1)dx = f(\xi)\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}f(\xi)$$

Înlocuind mai sus obținem:

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(\xi), \quad \xi\in[0,1]$$

11. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție monoton crescătoare. Atunci:

$$f(a) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(b)$$

Soluție. Cum f este monoton crescătoare pe $[a,b]$ avem:

$$a \le x \le b \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$$

Integrăm pe $[a,b]$ această inegalitate dublă, astfel că:

$$(b-a)f(a) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(b)$$

sau

$$f(a) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(b)$$

Aplicații. Să se stabilească inegalitățile:

a) $1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx < e$

Soluție. Notăm $f(x) = e^{x^2}$, $x \in [0,1]$. Evident f continuă şi derivabilă pe $[0,1]$, iar $f'(x) = 2xe^{x^2} \ge 0$, $\forall x \in [0,1]$. Deci, f este monoton crescătoare. Urmează că:

$$f(0) \le \int_0^1 f(x)dx \le f(1)$$

sau

$$1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e$$

b) $0 \le \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \le 1$

Soluție. Funcția $f(x) = \left(1-x^2\right)^n$ este continuă şi derivabilă pe $[0,1]$, iar

$$f'(x) = -2nx\left(1-x^2\right)^n \le 0, \quad x \in [0,1]$$

deducem că f este monoton descrescătoare. Atunci:

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow f(1) \le f(x) \le f(0)$$

iar prin integrare între 0 şi 1 obținem:

$$0 \le \int_0^1 f(x)dx \le 1$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze valoarea medie pentru următoarele funcții şi să se precizeze punctul ξ corespunzător:

a) $f:\left[0,\ \pi^2\right]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\cos\sqrt{x}$

$R:\ \ f(\xi)=-\dfrac{4}{\pi^2};\qquad \xi=\left(\pi\pm\arccos\dfrac{4}{\pi^2}\right)^2$

b) $f:\left[1,\sqrt{e}\right]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\sin(\pi\ln x)$

$R:\ \ f(\xi)=\dfrac{\sqrt{e}+\pi}{1+\pi^2};\qquad \xi=e^{\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{e}+\pi}{1+\pi^2}}$

2. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^{1+x} e^{\sqrt{x}}dx$

$R:$ 0

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{x^3}{1+x^5}dx$

$R:$ 0

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{1+t}dt$

$R:$ 0

3. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă a.î. $2\int_a^b f=b^2-a^2$,

Atunci $\exists\ c\in(a,b)$ a.î. $f(c)=c$

4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă a.î. $3\int_0^1 f=1.$

Atunci $\exists\ c\in[a,b]$ a.î. $f(c)=c^2.$

5. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă a.î. $f(a)>0$ şi $\int_a^b f(t)dt<0.$

Atunci $\exists\ x_0\in(a,b)$ a.î. $f(x_0)=0.$

Indicație. Din teorema de medie aplicată funcției *f* pe $[a,b]$ rezultă că: $\exists\xi[a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{b-a}f(\xi)<0$$

Apoi din $f(a)>0$ şi $f(c)<0$ rezultă că există $x_0\in(a,c)$ a.î. $f(x_0)=0$

6. Fie $f:\left[1,e^2\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Să se determine $c\in\left(1,e^2\right)$ a.î.

$\int_1^{e^2} f(x)=e^c$

$R:\quad c=\ln 4$

7. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă şi $\int_0^1 f(x)dx=\ln 2.$

Atunci $\exists\ c\in[0,1]$ a.î. $\dfrac{1}{1+c^2}<f(c)<\dfrac{1}{2\sqrt{c}}.$

8. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^n pe $[0,1]$

Atunci există un punct $\xi\in[0,1]$ a.î.

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(0)}{1!}+\frac{f'(0)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{n!}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}$$

9. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă a.î.

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n$$

Să se arate că există $x_0\in[0,1]$ a.î.

$$f(x_0)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\ldots+a_n$$

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $a_i\in\mathbb{R}$, $\forall\ i=\overline{0,n}$

Să se arate că există $c\in[0,1]$ a.î.

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=f(c)$$

11. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\sqrt{3}<\int_2^5\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}dx<\sqrt{6}$

b) $\dfrac{1}{5}\le\int_5^8\dfrac{2x-9}{2x+5}dx\le 1$

2.7. *Inegalități integrale*

(I_1) *Inegalitatea lui Cebâşev*

a) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții având aceeaşi monotonie. Atunci:

$$\boxed{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)\le(b-a)\int_a^b fg}$$

Demonstrație. Presupunem *f, g* monoton crescătoare şi fie $x,y\in[a,b]$ a.î. $x\le y$. Atunci:

$$\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\ge 0\ ,\quad \forall x,y\in[a,b]$$

sau

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x)\ge 0$$

Se integrează în raport cu *x* pe $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)f(y)g(y)-g(y)\int_a^b f(x)dx--f(y)\int_a^b g(x)dx\ge 0$$

Apoi inegalitatea obținută se integrează în raport cu *y* pe $[a,b]$:

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy-\int_a^b g(y)dy\int_a^b f(x)dx-$$
$$-\int_a^b f(y)dy\int_a^b g(x)dx\ge 0$$

Cum integrala Riemann nu depinde de variabile de integrare, rezultă că:

$$2(b-a)\int_a^b fg-2\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)\ge 0$$

sau

$$\int_a^b f\int_a^b g\le(b-a)\int_a^b fg\ \blacksquare$$

Obsevație. Dacă *f, g* sunt monoton descrescătare se schimbă $f,\ g$ cu $-f$, respectiv $-g$, şi se urmează acelaşi raționament.

b) Fie $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții având monotonii diferite. Atunci:

$$\int_a^b f\int_a^b g\ge(b-a)\int_a^b fg$$

Demonstrație. Presupunem f monoton crescătoare şi g monoton descrescătoare. Atunci funcția $\overline{g}=-g$ este monoton crescătoare şi aplicând rezultatul de la punctul a) obținem:

$$\int_a^b f\int_a^b \overline{g} \le (b-a)\int_a^b f\overline{g}$$

sau

$$-\int_a^b f\int_a^b g \le -(b-a)\int_a^b fg$$

de unde rezultă că:

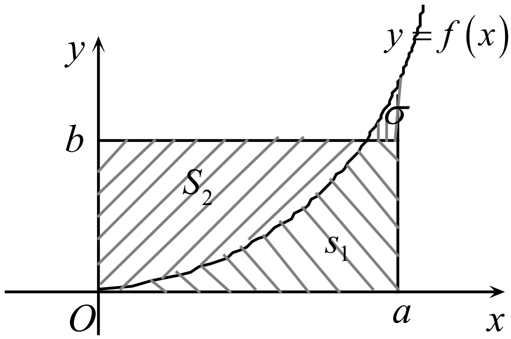
$$\int_a^b f\int_a^b g \ge (b-a)\int_a^b fg$$

(I_2) *Inegalitatea lui Young*

Fie $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcție continuă, strict crescătoare a.î. $f(0)=0.$ Atunci:

$$\forall a \ge 0 \text{ şi } b \in f(\mathbb{R}_+) \Rightarrow \boxed{a\cdot b \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy}$$

Demonstrație. Notăm S_1 porțiunea din plan mărginită de curba $y=f(x)$, axa Ox şi dreapta $x=a$



Atunci $\text{aria}(S_1)=\int_0^a f(x)dx.$

De asemenea, notăm S_2 – porțiunea din plan mărginită de graficul funcției $y=f(x),$ axa Oy şi dreapta $y=b.$

Evident:

$$\text{aria } (S_2)=\int_0^b f^{-1}(y)dy$$

Atunci:

$$\text{aria } (S_1)+\text{aria}(S_2)=ab+\sigma \ge ab\ , \quad \sigma \ge 0 \ \ (\textit{vezi figura})$$

Observație. Egalitatea are loc dacă $b=f(a)$

Consecință. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi $p,q>0$ a.î. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$ Atunci:

(I_3) $\boxed{|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}}$

Demonstrație. Înlocuim a şi b prin $|a|$ şi, respectiv $|b|$ putem presupune $a \ge 0$ şi $b \ge 0$. Considerăm $\alpha > 0$ şi fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^\alpha$. Evident f continuă şi strict crescătoare cu $f(0) = 0$. Atunci fixând a şi b în *inegalitatea lui Young* rezultă că:

$$ab \le \int_0^a x^\alpha dx + \int_0^b y^{\frac{1}{\alpha}} dy$$

unde $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\alpha}}$ este inversa funcției $f(x) = x^\alpha$.
Urmează prin integrare:

$$ab \le \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{b^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1} \qquad (*)$$

Dar din ipoteză $0 < \frac{1}{p} < 1$ şi $0 < \frac{1}{q} < 1$ rezultă că $p > 1$ şi $q > 1$. Notăm: $\alpha = p - 1$, apoi:

$$\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1}$$

Însă $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şi obținem $p = \frac{q}{q-1}$, astfel că:

$$\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{\frac{q}{q-1}}{\frac{1}{q-1}} = q$$

Inegalitatea (*) se scrie în acest caz:

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \blacksquare$$

(I_4) *Inegalitatea lui Hölder*

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcții integrabile şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Atunci:

$$\boxed{\int |fg| \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Demonstrație. Dacă $\int_a^b |f|^p = 0$ sau $\int_a^b |g|^p = 0$ rezultă că $f = 0$ a.p.t. sau $|g| = 0$ a.p.t., deci $|fg| = 0$ a.p.t. Vom presupune $\int_a^b |f|^p > 0$ şi $\int_a^b |g|^q > 0$,

Notăm:

$$\alpha := \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \beta := \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Atunci, utilizând inegalitatea (I_3) pentru:

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

obținem:

$$\frac{|f|\cdot|g|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{|f|^p}{p\int_a^b |f|^p} + \frac{|g|^q}{q\int_a^b |g|^q}$$

de unde, prin integrare rezultă:

$$\frac{\int_a^b |f|\cdot|g|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{\int_a^b |f|^p}{p\int_a^b |f|^p} + \frac{\int_a^b |g|^q}{q\int_a^b |g|^q}$$

sau

$$\int_a^b |f|\cdot|g| \le \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \ \blacksquare$$

Consecințe.

(I_5) *Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz*

Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile pe $[a,b]$, atunci:

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$$

Demonstrație. Fixăm $\beta = q = 2$ în *inegalitatea lui Hölder* a.î.

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \int_a^b |fg| \le \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(I_6) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a,b]$, atunci:

$$\int_a^b |f| \le (b-a)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \blacksquare$$

Demonstrație. Alegem $q=1$ în inegalitatea (I_4)

$$\int_a^b |f| \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b 1\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \ \blacksquare$$

(I_7) *Inegalitatea lui Minkowski*

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile şi $p\ge 1,$ atunci:

$$\boxed{\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Demonstrație. Dacă $p=1,$ atunci evident:

$$\int_a^b |f+g| \le \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$$

Dacă $\int_a^b |f+g|^p = 0,$ atunci inegalitatea se păstrează.

Presupunem $p>1$ şi $\int_a^b |f+g|^p > 0$. Atunci:

$$|f+g|^p \le |f+g|^{p-1}|f+g| \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

Apoi prin integrare obținem:

$$\int_a^b |f+g|^p \le \int_a^b |f|\cdot|f+g|^{p-1} + \int_a^b |g|\cdot|f+g|^{p-1} \qquad (*)$$

Pentru integralele din membrul drept vom aplica *inegalitatea lui Hölder*:

$$\int_a^b |g||f+g|^{p-1} \le \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

respectiv

$$\int_a^b |g||f+g|^{p-1} \le \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Astfel, inegalitatea (*) devine:

$$\int_a^b |f+g|^p \le \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Însă, din $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ rezultă că $(p-1)q=p,$ aşa că:

$$\int_a^b |f+g|^p \le \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

sau mai departe:

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |q|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

iar în final, cu $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$, obținem:

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \blacksquare$$

Consecință

$$(I_6) \quad \sqrt{\int_a^b |f+g|^2} \le \sqrt{\int_a^b |f|^2} + \sqrt{\int_a^b |g|^2}$$

Demonstrație. Se ia $p=\dfrac{1}{2}$ în (I_5) $\blacksquare$

(I_8) *Inegalitatea lui Jensen*

Fie funcțiile f şi φ definite prin compunerea:

$$[a,b] \xrightarrow{\ f\ } [\alpha,\beta] \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{R}$$

cu f integrabilă pe $[a,b]$, iar φ convexă şi continuă pe $[\alpha,\beta]$, atunci pentru $\forall n \ge 1$ definim şirul de diviziuni echidistante $(\Delta_n)_n$, având temenul general:

$$\Delta_n =: \left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)_{0\le k\le n} \qquad (n\to\infty)$$

şi punctele intermediare $\left(\xi_k^n\right)_{1\le k\le n}$

$$\xi_k^n =: \left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)_{k=\overline{1,n}}$$

Atunci:

$$\|\Delta_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0, \qquad (n\to\infty)$$

iar

$$\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi^n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f, \quad (n\to\infty)$$

Pe de altă parte, $\varphi\circ f$ este integrabilă pe $[a,b]$, astfel că

$$\sigma_{\Delta_n}\left(\varphi\circ f,\xi^n\right) = \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f \quad (n\to\infty) \quad (*)$$

Din faptul că funcția φ este convexă pe $[a,b]$ i.e.

$$\forall x_i \in [a,b] \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum \varphi(x_i)$$

Prin urmare:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right), \quad \forall n\ge 1$$

Trecând la limită în ultima inegalitate şi ținând seama de (*) şi de faptul că φ este continuă, rezultă că:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f$$

Observație. Dacă φ este concavă atunci *inegalitatea lui Jensen* devine:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f \quad \blacksquare$$

Consecințe.

(i) Fie $I,J \subseteq \mathbb{R}$ două intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ cu f *local integrabilă* (i.e. f integrabilă pe orice compact $K \subset I$), φ convexă şi continuă. Atunci:

$$\forall\ a,\ b\in I,\ a<b \text{ avem } \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f$$

(ii) Fie $I,J \subseteq \mathbb{R}$ şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ cu f local integrabilă, iar φ de clasă $C^2(J)$, cu $\varphi'' \ge 0$ pe J (respectiv $\varphi'' \le 0$ pe J). Atunci, $\forall\ a,\ b\in I,\ a<b$ avem:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f \qquad (a)$$

respectiv

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f \qquad (b)$$

(iii) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ local integrabilă şi strict pozitivă. Atunci $\forall a,b\in I,\ a<b$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \qquad (a)$$

$$\int_a^b f \ge (b-a)^2\left(\int_a^b f\right)^{-1} \qquad (b)$$

Demonstrație. Prima inegalitate se obține aplicând consecința (ii) (b) pentru f şi funcția convexă $\varphi(x)=\ln x,\quad x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$. ■

Pentru a doua inegalitate se alege funcția convexă $\varphi(x)=\frac{1}{x},\quad \forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$

(iv) Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ local integrabilă şi nenegativă. Atunci $\forall\ a,\ b\in I,\quad a<b,\quad \forall\ p>1$ (respectiv $0<p<1$) avem:

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^p\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f \qquad (a)$$

Respectiv:

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^p\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b f \qquad (b)$$

Demonstrație. (a) Aplicăm *consecința* (ii) pentru f şi funcția concavă

$$\varphi(x)=x^p,\quad x\in\mathbb{R}_{+}^{*},\quad p>1$$

(b) Se alege funcția convexă

$$\varphi(x)=x^p,\quad x\in\mathbb{R}_{+}^{*},\ p\in(0,1)$$ ■

Exerciții rezolvate

1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă şi monoton crescătoare. Atunci:

$$\int_a^b xf(x)\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

Soluție. Dacă $a=b$ sau f este constantă, atunci are loc egalitatea. Presupunem $a<b$ şi f neconstantă pe $[a,b]$. Considerăm funcția $g(x)=x,\ x\in[a,b]$. Atunci f şi g sunt monoton crescătoare pe $[a,b]$ şi din *inegalitatea lui Cebâşev* (I_1) rezultă că:

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b x\,dx\le(b-a)\int_a^b xf(x)dx$$

sau

$$\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)dx\le(b-a)\int_a^b xf(x)dx$$

Împărțind cu $b-a$ ultima relație deducem că:

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{+}$ continuă şi derivabilă cu $f'<0$ pe $[a,b]$. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{b+a}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$$

Soluție. Să observăm că:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \ge 0$$

deci $\dfrac{f(x)}{x}$ este monoton descrescătoare. Utilizând *inegalitatea lui Cebâşev* pentru funcțiile $\dfrac{f(x)}{x}$ şi x avem:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{x}\cdot x\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\int_a^b x\,dx =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx = \frac{b+a}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi monotonă. Atunci:

$$\forall a>0 \qquad \int_{-a}^a xf(f(x))dx \ge 0$$

Soluție. Cum f este monotonă rezultă că $f\circ f$ este crescătoare. Se aplică *inegalitatea lui Cebâşev* pentru funcțiile x şi $f\circ f$:

$$\int_{-a}^a xf(f(x))dx \ge \int_{-a}^a f(f(x))dx\int_{-a}^a x\,dx = 0$$

4. Să se arate că:

$$\int_0^e \sqrt{e^x-1}dx + \int_0^e \ln(x^2+1)dx \ge e^2$$

Soluție. Se aplică *inegalitatea lui Young* funcției:
$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\quad f(x)=\ln(x^2+1)dx$. Evident f continuă pe $\mathbb{R}_+$ şi

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,$ deci f strict crescătoare şi $f(0)=0.$ Atunci, f inversabilă cu

$$f^{-1}(y)=\sqrt{e^y-1},\quad \forall y\ge 0$$

iar

$$\int_0^e \sqrt{e^y-1}dy + \int_0^e \ln(x^2+1)dx \ge e^2$$

Schimbând y cu x în prima integrală obținem inegalitatea din enunț.

5. Fie $f:[0,2]\to[0,2]$, f continuă, bijectivă cu $f(0)=0$ şi $f(f(x))\geq x$, $\forall x\in[0,2]$. Atunci:

$$\int_0^2 f(x)dx\geq 2$$

Soluție. Din ipoteză, deducem că f este strict crescătoare. Astfel, $f(2)=2$. Din $f(f(x))\geq x$, $\forall x\in[0,2]$ obținem $f(x)\geq f^{-1}(x)$, iar dacă se integrează pe $[0,2]$ această inegalitate, rezultă că:

$$\int_0^2 f(x)dx\geq \int_0^2 f^{-1}(x)\,dx$$

Pe de altă parte, din *inegalitatea lui Young* aplicată lui f pentru $a=b=2$

rezultă:

$$4\leq \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f^{-1}(x)\leq 2\int_0^2 f(x)dx$$

adică

$$\int_0^2 f(x)dx\geq 2$$

6. Fie $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile. Atunci:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}}$$

Soluție. Recunoaştem aici *inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz*. Vom da o altă demonstrație.

$$0\leq\int_a^b\left(f(t)-xg(t)\right)^2dx=\int_a^b f^2(t)\,dt-2x\int_a^b f(t)dt\int_a^b g(t)dt+x^2\int_a^b g^2(t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Inegalitatea este satisfăcută pentru orice $x\in\mathbb{R}$, dacă discriminantul ecuației de gradul doi ataşat, $\Delta_x\leq 0$ adică:

$$\left(\int_a^b f\right)^2-\int_a^b f^2\int_a^b g^2\leq 0$$

De aici deducem că:

$$\left(\int_a^b f\right)^2\leq\int_a^b f^2\int_a^b g^2$$

sau sub altă formă:

$$\left|\int_a^b fg\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$$

7. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă. Atunci:

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

Soluție. Dacă $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă atunci:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\le\int_a^b f^2\int_a^b g^2$$

Prin urmare, dacă aplicăm inegalitatea de mai sus integralelor din membrul stâng, vom avea:

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b\sin^2 x\,dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b\cos^2 x\,dx$$

Adunăm termen cu termen aceste inegalități:

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\left(\int_a^b\sin^2 x\,dx+\int_a^b\cos^2 x\,dx\right)=$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b dx=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

8. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 a.î. $f(1)-f(0)=a^2$. Atunci:

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\ge a^2$$

Soluție. Se aplică *inegalitatea lui Cauchy* (I_5) pentru funcțiile $f'(x)$ şi x continue şi strict crescătoare

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx=\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\cdot\int_0^1 1^2dx\ge\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2=f(x)\Big|_0^1=a^2$$

9. Să se determine funcțiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care satisfac condițiile:

i) $\int_0^1 f^2(x)dx=c$

ii) $\int_0^1 f^4(x)dx=c^2\quad(c>0)$

Soluție. Pentru simplitate vom scrie:

$$c=\int_0^1 f^2\quad\text{şi}\quad c^2=\int_0^1 f^4$$

Cu inegalitatea (I_5) rezultă că:

$$c^4=\left(\int_0^1 f^2\right)^4=\left(\int_0^1 f^2\right)^2\left(\int_0^1 f^2\right)^2\ge\int_0^1 f^2\cdot f^2=\int_0^1 f^4=c^2$$

Pe de altă parte

$$c^4=\left(c^2\right)^2=\left(\int_0^1 f^4\right)^2\le\left(\int_0^1 f^2\cdot f^2\right)^2\le\int_0^1 f^2\cdot\int_0^1 f^2=\left(\int_0^1 f^2\right)^2=c^2$$

Prin urmare, am obținut inegalitățile:

$$c^4\ge c^2 \qquad c^4\le c^2$$

adică $c^4=c^2$, de unde rezultă $c=1$. Din condiția $i)$ deducem că $f^2=k$ $k=\text{const.}$, adică $f(x)=\sqrt{k}$.

10. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)dx$$

Soluție. Se aplică inegalitatea (I_5) pentru integrala din membrul stâng:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2=\left(\int_0^1 x\left(xf(x)\right)dx\right)^2\le\int_0^1 x^2dx\cdot\int_0^1 x^2 f^2(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)dx$$

Exerciții propuse

1. Să se arate că dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă şi monoton crescătoare, atunci:

$$\int_0^1 xf(x)dx\ge\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

Indicație. Se aplică *exercițiul 1* din paragraful anterior pentru $a=0$ şi $b=1$.

2. Să se arate că dacă $f:[0,1]\to[0,\infty)$ este o funcție derivabilă cu $f'<0$ pe $[0,1]$, atunci:

$$\int_0^1 f(x)dx\le\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx$$

Indicație. La fel, se ia $a=0$ şi $b=1$ în *exercițiul 2* de la paragraful anterior.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă şi monotonă. Atunci:

$$\int_{-1}^1\frac{f\left(f(x)\right)}{x}dx\ge 0$$

4. Să se stabilească inegalitățile:

a) $\int_0^1 \text{arctg}^2 x+\int_0^{\frac{\pi^2}{9}}\text{tg}\sqrt{x}\,dx\ge\frac{\pi^2}{9}$

b) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\sin x^2dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx\ge\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Indicație. Se aplică *inegalitatea lui Young* pentru

a) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$ b) $f(x) = \sin x^2$

5. Să se stabilească egalitățile:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx + \int_0^{\ln 2} \operatorname{arctg}(e^y - 1)dy = \dfrac{\pi \ln 2}{4}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\operatorname{tg} x)dx = \dfrac{\pi^2}{8}$

Indicație. Inegalitatea lui Young devine egalitate pentru $b = f(a)$

6. Fie $f:[0,a] \to [0,b]$ o funcție continuă şi bijectivă, $f(0)=0$ $(a<b)$

Dacă $f(f(x)) \ge x$, $\forall x[0,a]$, atunci:

$$\int_0^a f(x)dx \ge \frac{ab}{2}$$

7. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2}\right)^2 dx \le \frac{\pi+2}{8}$$

Indicație. Se foloseşte *inegalitatea lui Cauchy–Buniakowski–Schwartz* şi se ține seama că :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\pi+2}{8}$$

8. Fie $f:[0,\ 1] \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^1_{[0,1]}$, monoton descrescătoare cu $f(1) - f(0) = e.$ Atunci:

$$\int_0^1 x^2 f'^2(x)dx \ge e^2$$

Soluție. Aplicăm inegalitatea (I_5) şi apoi se integrează prin părți:

$$\int_0^1 x^2 f'^2(x)dx = \int_0^1 \left(xf'(x)\right)^2 \cdot 1^2 dx \ge \left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2 = \left(xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx\right)^2 =$$

$$= \left(f(1) - f(\xi)\right)^2$$

unde $\xi \in [0,1]$ a.î. $\int_0^1 f(x)dx = f(\xi)$

Mai mult, *f* este strict crescătoare, iar $f(1) - f(0) = e$, deci

$$f(1) - f(\xi) \ge f(1) - f(0) = e$$

Astfel:

$$\int_0^1 x^2 f'^2(x)dx \ge e^2$$

2. 8. Formule de recurență la integrala definită

Exerciții rezolvate

1. $I_n = \int_1^e \ln^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Vom efectua o integrare prin părți alegând:

$$\begin{cases} u = \ln^n x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{n \ln^{n-1} x}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

Astfel:

$$I_n = x \ln^n x\Big|_1^e - n\int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \ln^{n-1} x\, dx = x \ln^n x\Big|_1^e - nI_{n-1} = e - nI_{n-1}$$

Prin urmare:

$$I_n \equiv \int_1^e \ln^n x\, dx = e - nI_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$I_3 = \int_1^e \ln^3 x\, dx$$

Avem:

$$I_0 = \int_1^e \ln^0 x\, dx = x\Big|_1^e = e - 1$$

$$I_1 = \int_1^e \ln x\, dx = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = 1$$

$$I_2 = \int_1^e \ln^2 x\, dx = e - 2I_1 = e - 2$$

$$I_3 = \int_1^e \ln^3 x\, dx = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6 - 2e$$

Observație. Din relația de recurență putem obține termenul general I_n. Se pot scrie succesiv relațiile:

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

$$I_{n-1} = e - (n-1)I_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_2 = e - 2I_1$$

$$I_1 = 1$$

$$I_0 = e - 1$$

Înlocuind de jos în sus valorile găsite pentru $I_1, I_2, ...$ obținem:

$$I_n = e - ne + n(n-1)e - n(n-1)(n-2)e + ...$$

$$...+(-1)^{n-1}n(n-1)...\,3\cdot 2e+(-1)^n n! \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

2. $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$

Soluție. Alegem:

$$\begin{cases} u=x^n \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dv=nx^{n-1}dx \\ v=e^x \end{cases}$$

şi integrăm apoi prin părți

$$I_n=x^n e^x\Big|_0^1-n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx=x^n e^x\Big|_0^1-nI_{n-1}=e-nI_{n-1}$$

Prin urmare:

$$I_n\equiv\int_0^1 x^n e^x dx=e-nI_{n-1}, \quad \forall n\geq 1$$

Din relația de recurență se obține analog formula generală de calcul pentru I_n, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$I_n=e-ne+n(n-1)e-n(n-1)(n-2)e+...+(-1)^{n-1}n(n-1)...3\cdot 2e+(-1)^n n!$$

3. $I_{n,\alpha}=\int_1^e x^\alpha \ln^n x\, dx, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}, \ \forall\, \alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

Soluție. *i*) Pentru $\alpha=-1$ integrala devine:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\ln^n x\, dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big|_1^e=\frac{1}{n+1}$$

ii) Pentru $\alpha\neq-1$, funcția $x\to x^\alpha\ln^n x$ este continuă pe $[1,e]$ iar o primitivă a acesteia este (*vezi exercițiul 3*)

$$F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}, \quad \forall n\geq 1$$

Prin urmare:

$$I_{n,\alpha}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x\Big|_1^e-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}=\frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}, \quad \forall n\geq 1, \ \forall\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int_1^e \sqrt[3]{x}\ln^2 x\, dx$$

Notăm $I_{2,\frac{1}{3}}$ integrala din enunț. Atunci, conform *exercițiului 3* de la *paragraful 1.4*, avem:

$$I_{0,\frac{1}{3}}=\int_1^e \sqrt[3]{x}\, dx=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^4}\Big|_1^e=\frac{4}{3}\left(e\sqrt[3]{e}-1\right)$$

$$I_{1,\frac{1}{3}} = \int_1^e \sqrt[3]{x}\ln x\, dx = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4}\left(\frac{4}{3}\ln x - 1\right)\Bigg|_1^e = \frac{3}{4}e\sqrt[3]{e}$$

$$I_{2,\frac{1}{3}} = \int_1^e \sqrt[3]{x}\ln^2 x\, dx = \frac{27}{64}\sqrt[3]{x^4}\left(\ln^2 x - \frac{8}{3}\ln x + 2\right)\Bigg|_1^e = \frac{3}{32}\left(5e\sqrt[3]{e} - 9\right)$$

4. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\, dx$

Soluție. Vom integra de două ori prin părți. Alegem mai întâi:

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sin x\; dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}dx \\ v = -\cos x\; dx \end{cases}$$

Apoi, se scrie:

$$I_n = -x^n \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cos x\; dx$$

Mai departe, cu

$$\begin{cases} u = x^{n-1} \\ dv = \cos x\; dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)x^{n-2}dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Obținem:

$$I_n = -x^n \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + nx^{n-1}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - n(n-1)\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x\; dx}_{I_{n-2}}$$

i.e.

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\; dx$$

Soluție. Notăm I_2 şi respectiv I_3 integralele din enunț. Atunci I_0 şi I_1 se calculează din definiția lui I_n, iar I_2 şi I_3 cu ajutorul relației de recurență.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\; dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\; dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 - 2\cdot 1 I_0 = \pi - 2$$

$$I_3 = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 3\cdot 2\cdot I_1 = \frac{3}{4}\left(\pi^2 - 8\right)$$

5. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Din *exercițiul 12 paragraful 1.4* avem

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2$$

adică

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

Aplicație. Să se calculeze I_3 şi I_4 plecând de la formula de recurență obținută mai sus:

Soluție. Observăm că:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \frac{3}{2} I_1 = \frac{2}{3}$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}$$

Observație. *i*) pentru $n = 2p, \quad p \in \mathbb{N}$ relația de recurență devine:

$$I_n = I_{2p} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2}$$

ii) pentru $n = 2p+1, \ p \in \mathbb{N}$ analog:

$$I_n = I_{2p+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot n} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2p}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2p+1)} = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}.$$

6. $J_n = \int_0^{\pi} x \sin^n x\, dx$

Soluție. Notăm $f(x)=\sin^n x,\quad x\in[0,\pi]$. Atunci f continuă pe $[0,\pi]$ şi $f(x)=f(\pi-x)$. Conform *paragrafului 2.5* rezultă că:

$$\int_0^\pi xf(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{\pi}{2}K_n$$

unde

$$K_n=\int_0^\pi \sin^n x\ dx$$

Însă

$$K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x\ dx$$

iar dacă în ultima integrală schimbăm:

$$x\to t\therefore x=\pi-t\quad \text{cu}\quad dx=-dt$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & \frac{\pi}{2} & & \pi \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \searrow & 0 \end{array}$$

atunci:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$$

Astfel:

$$K_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx=2I_n$$

unde $\quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx\quad$ este calculat la *exercițiul 5*.

Prin urmare:

$$J_n\equiv\int_0^\pi x\sin^n x\ dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$$

Aplicație. Să se calculeze:

$$J_3=\int_0^\pi x\sin^3 x\ dx$$

Soluție. Avem

$$J_3=\pi\int_0^\pi \sin^3 x\ dx=\pi I_3=\frac{2\pi}{3}$$

7. a) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}dx,\quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(4n+1)x}{\cos x}dx$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}I_n,\quad \lim\limits_{n\to\infty}J_n$

Soluție. Să observăm, mai întâi, că:

$$I_{2n+1}-I_{2n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos 2nx}{\sin x}dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx\,dx=\frac{1}{n}\sin 2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

Astfel:

$$I_{2n+1}=I_{2n-1}=...=I_3=I_1=\frac{\pi}{2}$$

Întrucât:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

Pe de altă parte:

$$I_{2n+2}-I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+2)x-\sin 2nx}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos(2n+1)x}{\sin x}dx=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\sin(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{(-1)^n\,2}{2n+1}$$

Deci pentru $k\in\mathbb{N}$,

$$I_{2k+2}-I_{2k}=\frac{(-1)^k}{2k+1},\quad k\in\mathbb{N}^*$$

Dăm valori lui $k=1,2,...,n$ şi adunăm termen cu termen egalitățile obținute

$$I_4-I_2=-\frac{1}{3}\cdot 2$$

$$I_6-I_4=\frac{1}{5}\cdot 2$$

....

$$I_{2n+2}-I_{2n}=\frac{(-1)^n\cdot 2}{2n+1}$$

$$I_{2n+2}-I_2=2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)$$

Însă

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2$$

Aşadar:

$$I_{2n+2}=2+2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Dacă schimbăm $n\to n-1$ găsim în final:

$$I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n-1}\right)=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Pentru a evalua integrala J_n să observăm că:

$$I_{2n+1}-I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin 2nx}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos(4n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{(4n+1)x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

Se schimbă

$$x\to t\therefore\frac{x}{2}=t$$

şi se obține

$$I_{2n+1}-I_{2n}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(4n+1)x}{\cos x}dx=2J_n$$

Astfel

$$J_n=\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$$

Evaluăm suma:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$$

Din binomul lui Newton

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

pentru $n\to\alpha,\ \ a=1,\ \ b=x,$ obținem:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}C_\alpha^k x^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

apoi, pentru $\alpha=-1$ şi $n\to\infty$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

iar dacă se schimbă $x\to x^2$ şi apoi se integrează, găsim:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

sau

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Seria astfel obținută este convergentă conform *criteriului lui Abel* pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, astfel că dacă se alege $x=1$ se obține evaluarea:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}2\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

iar

$$\lim J_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\right)=0$$

8. a) $I_n=\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,dx$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

Soluție. a) Mai întâi să remarcăm faptul că:

$$I_0=\int_0^1\sin\pi x\,dx=-\frac{\cos\pi x}{\pi}\bigg|_1^0=\frac{2}{\pi}$$

iar

$$I_1=\int_0^1 x\sin\pi x\,dx=-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}$$

Pentru a determina relația de recurență a lui I_n vom integra de două ori prin părți. Astfel:

$$I_n=-\frac{x^n}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1+\frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x^{n-1}}{\pi}\sin\pi x\Big|_0^1}_{0}-\frac{n-1}{\pi}\underbrace{\int_0^1 x^{n-2}\cos\pi x\,dx}_{I_{n-2}}\right)$$

Prin urmare

$$I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

Dacă schimbăm $n \to n+2$, atunci:

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n$$

De aici rezultă pentru $n=0$ şi $n=2$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} I_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^3}$$

b) Dacă $0 < x < 1$, atunci şirul $\left(x^n\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi $0 < \sin \pi x < 1$. Mai mult:

$$x^n \sin \pi x > x^{n+1} \sin \pi x \Rightarrow \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx > \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx$$

sau

$$I_{n+1} < I_n, \quad \forall n \geq 1$$

ceea ce înseamnă că şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Însă, pe de altă parte:

$$0 < x^n \sin \pi x < x^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

iar prin integrare rezultă că:

$$0 < I_n < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} < 1$$

adică şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este mărginit. Trecem la limită în inegalitatea:

$$0 < I_n < \frac{1}{n+1}$$

şi deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

9. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

Soluţie. Scriem mai întâi integrala sub forma:

$$I_n = -\int_0^{2\pi} \sin^{n-1} x \left(\cos x\right)' dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_o^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^{n-2} x \, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

De aici rezultă că:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 1$$

10. $I_n = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx$

Soluție 1. Se integrează prin părți

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos^{2n-1} x \, dx = \sin x \cdot \cos^{2n-1} x \Big|_0^{2\pi} +$$
$$= (2n-1)\int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2 x\right)\cos^{2n-2} x \, dx = (2n-1) I_{n-1} - (2n-1) I_n$$

Aşadar:

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-2}, \quad \forall n \ge 1$$

De aici rezultă că:

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} I_0$$

Dar $I_0 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$, astfel că:

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} 2\pi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2\pi$$

Soluție 2. După cum ştim:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

De aici rezultă că:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ şi } \cos^{2n} x = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^{2n}}{2^{2n}}$$

Dezvoltăm după formula lui Newton

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \left(e^{ix}\right) 2^{n-k} \left(e^{-ix}\right)^k = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2(n-k)ix}$$

Apoi scriem prin integrare:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{2(n-k)ix} dx$$

unde pentru $n \ne k$:

$$\int_0^{2\pi} e^{2(n-k)ix} dx = \frac{1}{2(n-k)i} e^{2(n-k)ix} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

iar pentru $n = k$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \frac{1}{2^{2n}} 2n C_{2n}^n \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \frac{2n}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= 2\pi \frac{(2n)^2 (2n-1)!}{(2^n n!)^2} = 2\pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}, \quad \forall n \geq 1$$

11. $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Soluție. Dacă dezvoltăm sub integrală după *formula lui Newton*

$$(a^2 - x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{2(n-k)} x^{2k}$$

şi apoi integrăm termen cu termen se obține

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{2n-k} \int_0^a x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{a^{2n+k+1}}{2k+1}$$

Evaluarea sumei este destul de incomodă. Vom proceda la o cale mai directă, integrând prin părți, scriind în prealabil integrala dată sub forma:

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} (a^2 - x^2) dx = a^2 I_{n-1} - \int_0^a x (a^2 - x^2)^{n-1} x\ dx$$

Alegem

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (a^2 - x^2)^{n-1} x\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int (a^2 - x^2)^{n-1} x\ dx = -\dfrac{1}{2n}(a^2 - x^2)^n \end{cases}$$

Apoi scriem succesiv:

$$I_n = a^2 I_{n-1} + \frac{x^2}{2n}(a^2 - x^2)^n \Big|_0^a - \frac{1}{2n} \underbrace{\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx}_{I_n}$$

$$I_n = a^2 I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_2$$

De aici se obține relația de recurență pentru I_n

$$I_n = a^2 \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

În plus, se poate scrie că:

$$I_n = (a^2)^n \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} I_0 = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

unde $I_0 = a$

12. Calculând în două moduri integrala:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

să se arate că:

$$1-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+...+(-1)^n\frac{C_n^n}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Soluție. Din *exercițiul11*, pentru $a=1$ rezultă că:

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Pe de altă parte, utilizând formula binomială a lui Newton:

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\left(1-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^n C_n^n x^n\right)dx$$

sau

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\left[x-\frac{C_n^1x^3}{3}+\frac{C_n^2x^5}{5}-\frac{C_n^3x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{C_n^n x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...+(-1)^n C_n^n$$

13. Să se calculeze integrala:

$$H_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$$

prin reducere la o integrală binomă.
Soluție. Substituția:

$$x\to t\therefore \cos x=t \text{ şi } -\sin x\,dx=dt \text{ sau } dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1 $\searrow$	0

aduce integrala dată la forma:

$$H_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^m dx=\int_0^1(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^1(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}dt=I$$

Însă din *exercițiul 9*, cunoaştem rezultatul:

$$I_n=\int_0^1(1-t^2)^n dt=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad \forall n\geq 1$$

astfel pentru $n=\frac{m-1}{2}$ i.e. $m=2n+1$ rezultă:

$$H_m=I_{\frac{m-1}{2}}=\frac{2\frac{m-1}{2}}{2\frac{m-1}{2}+1}I_{\frac{m-1}{2}-2}=\frac{m-1}{m}I_{\frac{m-3}{2}}=\frac{m-1}{m}H_{m-2}$$

Prin urmare relația de recurență pentru integrala dată este:

$$H_m \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \frac{m-1}{m} H_{m-2}$$

i) dacă m este impar, atunci formula de recurență se reduce la:

$$H_m = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot H_1 = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

întrucât $H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$

ii) dacă m este par, atunci analog:

$$H_m = \frac{(m-1)(m-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{m(m-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \cdot H_0 = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}$$

unde

$$H_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

14. $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$

Soluție. Integrând prin părți considerând:

$$\begin{cases} u = (1-x)^n \\ dv = x^m dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n(1-x)^{n-1} \, dx \\ v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} dx \end{cases}$$

Astfel:

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n \Big|_0^1 + \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} \, dx = \frac{n}{n+1} I_{m+1,n-1}$$

Am obținut formula de recurență:

$$I_{m,\,n} \equiv \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{n}{m+1} I_{m+1,\,n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Aplicând succesiv această relație putem scrie că:

$$I_{m,\,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,\,n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{m+2,\,n-2} = \ldots = \frac{n(n-1)\ldots\left[m-(n-1)\right]}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)} I_{m+n,0}$$

Însă:

$$I_{m+n,0} = \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{m+n+1}$$

De aici rezultă că:

$$I_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{m(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

15. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

a) Să se studieze convergenţa şirului $(I_n)_{n\geq 1}$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

b) Calculând efectiv integrala să se arate că:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots = \ln 2$$

Soluție. a) Evaluăm diferența:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx$$

Întrucât pentru $x \in [0,1]$, $\frac{1-x}{1+x} \leq 0$, deducem că $I_{n+1} - I_n \leq 0$ i.e. şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Mai departe avem:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \quad \forall n \geq 1$$

rezultă că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit. Astfel şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent i.e. $\exists\, l \in [0, \ln 2]$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = l.$ Însă:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

astfel că dacă se trece la limită după $n \to \infty$ în ultima egalitate, obținem:

$$l = \lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

b) Pentru a calcula integrala vom utiliza identitatea:

$$\frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-2} x^{n-2} + (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

care înmulțită cu $(-1)^{n-1}$ ne dă:

$$\frac{x^n + (-1)^{n-1}}{1+x} = x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x + (-1)^{n-1}$$

iar de-aici deducem că:

$$\frac{x^n}{1+x} = x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{1+x}$$

Integrăm pe $[0,1]$ egalitatea obținută astfel că:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{1} + (-1)^n \ln 2$$

Trecând la limită în ambii membrii şi ţinând seama de rezultatul de la punctul a) obţinem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \ln 2$$

adică,

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$$

16. Se consideră integrala

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^n x \, dx \quad n \in \mathbb{N}$$

a) Să se găsească o relaţie de recurenţă pentru calculul lui $(I_n)_n$

b) Folosind rezultatul de la punctul a să se obţină I_{2n}

c) Să se demonstreze că: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Soluţie. a) Vom integra prin părţi integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ astfel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = x\cos^{2n} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^{2n-1} x \sin x \, dx$$

Însă:

$$\left(\cos^{2n-1} x \sin x\right)' = -(2n-1)\cos^{2n-2} x \sin^2 x + \cos^{2n} x$$

Prin urmare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n-2} x \sin^2 x \, dx - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x \, dx =$$

$$= n(2n-1)I_{n-2} - n(2n-1)I_n - nI_n$$

i.e.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = n(2n-1)I_{n-2} - 2n^2 I_{2n}$$

Pe de altă parte (vezi exerciţiul 5)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Astfel, din ultimele două reprezentări rezultă

$$2n^2 I_{2n} - n(2n-1) I_{2n-2} = -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \quad \forall n \geq 2$$

b) Rezultatul precedent se mai scrie şi sub forma:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} - \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} I_{2n-2} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Dăm valori lui $n = 2,4,...,n$ şi adunăm, termen cu termen, egalităţile obţinute

$$\frac{2!!}{1!} I_2 - I_0 = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1^2}$$

$$\frac{4!!}{3!!} I_4 - \frac{2!!}{1!!} I_2 = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2^2}$$

....

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} - \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} I_{2n-2} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} - I_0 = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$$

Dar

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{\pi^3}{24}$$

de unde obţinem:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$$

Mai rămâne de arătat că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} = 0$$

Într-adevăr, din inegalitatea evidentă:

$$\frac{x}{\sin x} < \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

urmează că:

$$x^2 \le \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

apoi

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\, dx \le \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n} x\, dx = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^{2n} x - \cos^{2n+2} x\right)$$

Însă:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2}$$

aşa că:

$$I_{2n} \le \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

iar mai departe:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} \le \frac{\pi^3}{8}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{\pi^3}{8}\frac{1}{2n+2} \to \infty \text{ pentru } n \to \infty$$

În final, avem:

$$0 = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right)$$

sau

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^3}{6}$$

Exerciții propuse

1. a) Să se stabilească o formulă de recurență pentru integrala:

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \ge 2$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\, dx$

c) Să se calculeze utilizând rezultatul de la punctul a)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n} x\, dx$$

R: a) $I_{m,n} = \dfrac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$

b) $\frac{\pi}{32}$

c) 0

Indicație. a) Se integrează prin părți.

b) Se particularizează pentru $m=4$ şi $n=2$.

c) Se ține seama că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$

2. Să se calculeze integrala:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Să se găsească o relație de recurență pentru integrala:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx$$

şi apoi să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$$

4. Să se arate că:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx$$

Să se deducă de aici că

$$I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$I_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} dx = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

5. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos(\pi x) dx$$

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se găsească o relație de recurență pentru I_n.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

2.9. Existența primitivelor unei funcții continue

Teoremă. (T)

Pentru orice funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, aplicația $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin:

$$\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)dt}$$

este o *primitivă* a lui f care se anulează în punctul $x=a$.

Consecințe

(1) F derivabilă şi $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b]$

Într-adevăr, pentru $x_0\in[a,b]$:

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^x f(t)dt$$

Apoi:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right)$$

Integralei din prima relație îi aplicăm teorema de medie:

$$\exists\ \xi_x\in[x_0,x]\ \text{ a.î. } \int_{x_0}^x f(t)dt=f(\xi_x)(x-x_0)$$

Prin urmare:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(\xi_x)=f(x_0)$$

Cum $x_0\in[a,b]$ este arbitrar, deducem că $F'=f$ pe $[a,b]$. ■

(2) Dacă $f\ge 0$, atunci $\int_a^b f(t)dt$ este aria subgraficului funcției f

Exerciții rezolvate

1. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}dt.$ Să se determine $F'(x)$.

Soluție. Notăm $f(t)=\frac{\sin t}{1+t^2},\quad t\in[0,x]$. Evident f continuă, iar în baza teoremei fundamentale $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, iar $F(0)=0$.

Apoi $F'(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2},\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$

2. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Fie $J\subset\mathbb{R}$ un alt interval iar $\varphi:I\to J$ o funcție derivabilă. Atunci $\forall a\in I$ funcția:

$$\boxed{F(x)=\int_a^{\varphi} f(t)\,dt,\quad x\in J}$$

este o primitivă a funcției f, iar

$$\boxed{F'(x)=\varphi'(x)f(\varphi(x)),\ \forall\, x\in J}$$

Aplicație. Să se calculeze derivata funcției:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\int_o^{\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{\ln(1+t^2)}{t^3+1}dt$$

Soluție. Notăm $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$. Evident, φ derivabilă, iar

$$\varphi'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$$

Pe de altă parte, F primitivă a lui f cu $F(0)=0$. Aşadar:

$$F'(x)=\varphi'(x)\frac{\ln(1+\varphi^2(t))}{1+\varphi^3(t)}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cdot\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)}{2+x^2}$$

3. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.
Fie $J\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi $\varphi,\psi:J\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile. Atunci funcția:

$$\boxed{F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt,\quad x\in J}$$

este derivabilă şi are loc relația:

$$\boxed{F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x),\quad \forall x\in J}$$

Soluție. Fie $a\in I$ fixat. Atunci:

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{\psi} f(t)\,dt=\int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt-\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

Din *exercițiul 2* rezultă că:

$$F'(x)=\psi'(x)f(\psi(x))-\varphi'(x)f(\varphi(x))$$

Aplicație. Să se calculeze $F'(x)$, unde:

$$F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\frac{\sin x}{1+t^2}$$

Soluție. Notăm:

$$\varphi(x)=\sqrt{x}, \quad \psi(x)=x^2, \quad \forall x>0$$

$$f(t)=\frac{\sin x}{1+t^2}, \quad t\in\left[\sqrt{x},x^2\right].$$

Cum φ şi ψ derivabile, atunci:

$$F'(x)=2x\frac{\sin x}{1+x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\sin x}{1+x}$$

4. Să se studieze monotonia funcției:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad F(x)=\int_0^{x^4}\frac{dt}{t^4+1}$$

Soluție. Întrucât $F'(x)=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că:

a) pe $(0,\infty)$, F este strict crescătoare deoarece $F'>0$ pe $(0,\infty)$;

b) pe $(-\infty,0)$, F este strict descrescătoare.

5. Să se arate că:

$$\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}\geq 0, \quad \forall x\in[0,2\pi]$$

Soluție. Funcția $f(t):=\dfrac{\sin t}{1+t}$ este continuă pe $[0,2\pi]$, deci:

$$F(x):=\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}, \quad x\in[0,2\pi]$$

este o primitivă a lui $f(x)$ cu $F(0)=0$

Atunci,

$$F'(x)=\frac{\sin x}{1+x}, \quad \forall x\in[0,2\pi]$$

Rădăcinile ecuației $F'(x)=0$ sunt: 0, π, 2π, iar monotonia funcției F reiese din tabelul următor:

x	0		π		2π
$F'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$F'(x)$	0	$\nearrow$	$F(\pi)$	$\searrow$	$F(2\pi)$

unde

$$F(2\pi)=\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{t+1}dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+1}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{t+1}dt$$

În a doua integrală schimbăm:

$$t\to u \ \therefore\ u=t-\pi \quad \text{cu} \quad dt=du$$

t	0		2π
u	0	$\nearrow$	π

astfel că:

$$F(2\pi)=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+1}dt+\int_0^{\pi}\frac{\sin(\pi+u)}{u+1+\pi}du=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+1}-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+1+\pi}>$$

$$>\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+1}dt-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+1}du=0$$

Apoi din faptul că $\dfrac{\sin t}{t+1}\geq 0$ pe $[0,\pi]$, rezultă că:

$$F(\pi)=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+1}dt\geq 0$$

Aşadar:

i) pentru $0\leq x\leq\pi$, F este strict crescătoare i.e.

$$0=F(0)\leq F(x)\leq F(\pi)\ \Rightarrow\ F(x)\geq 0,\quad \forall x\in[0,\pi]$$

ii) pentru $\pi\leq x\leq 2\pi$, F este strict descrescătoare i.e.

$$0=F(2\pi)\leq F(x)<F(\pi)\ \Rightarrow\ F(x)\geq 0,\quad \forall x\in(\pi,2\pi]$$

6. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad F(x)=\int_o^x e^{t^2}\left(t^2-3\right)dt$$

Soluţie. Din teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue deducem că:

$$F'(x)=e^{x^2}\left(x^2-3\right),\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

iar ecuaţia $F'(x)=0$ are rădăcinile $x=\pm\sqrt{3}$.

Din tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$F\left(-\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	$F\left(\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

urmează că funcția F admite un punct de maxim local în $x=-\sqrt{3}$ şi un punct de minim local în $x=\sqrt{3}$

7. Să se determine minimul funcției $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definită prin

$$F(x)=\int_0^x (x-t)^2 \sin t\, dt$$

Soluție. Suntem în condiția teoremei (T). Dacă scriem mai întâi pe F sub forma:

$$F(x)=x^2\int_0^x \sin t\, dt-2x\int_0^x t\, \sin t\, dt+\int_0^x t^2 \sin t\, dt$$

rezultă că

$$F'(x)=2x\int_0^x \sin t\, dt+x^2\sin x-2\int_0^x t\sin t\, dt-2x^2\sin x+x^2\sin x$$

Apoi, dacă ținem seama că:

$$\int_0^x \sin t\, dt=-\cos t\Big|_0^x=1-\cos x$$

$$\int_0^x t\sin t\, dt=-t\cos t\Big|_0^x+\int_0^x \cos t\, dt=-x\cos x+\sin x$$

urmează că

$$F'(x)=2x(1-\cos x)-2(-x\cos x+\sin x)=2(x-\sin x)$$

Singura rădăcină a ecuației $F'(x)=0$ este $n=0$ pe $(0,\pi]$ întrucât,

$$F''(x)=2(1-\cos x)\geq 0 \qquad \forall x\in[0,\pi]$$

deducem că F' este strict crescătoare pe $(0,\pi)$ astfel

$$\forall\, 0<x<\pi\ ,\quad 0=F'(0)<F'(x)<F'(\pi)$$

aşadar, $F'(x)\geq 0 \Rightarrow F$ monoton crescătoare pe $[0,\pi]$, iar minimul funcției F pe $[0,\pi]$ este $F(0)=0.$

8. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilă care satisface ecuația integrală:

$$x^2+2\int_0^x t\, f(t)dt=\left(x^2+1\right)f(x), \qquad \forall x>0$$

Soluție. Derivăm relația dată în raport cu x

$$2x+2x\,f(x)=\left(x^2+1\right)f(x)+2x\,f(x)$$

apoi din:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\ ,\quad \forall x>0$$

se obține

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+C$$

Înlocuim pe f astfel obținut în ecuația integralei din enunț:

$$x^2+2\int_0^x t\ \ln\left(t^2+1\right)dt=\left(x^2+1\right)\left(\ln\left(x^2+1\right)+C\right)$$

Alegem $x=0$ în ultima egalitate şi găsim că $C=0$. Prin urmare:

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

9. Să se determine funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ continuă care satisface ecuația integrală:

$$x+\int_1^x f(t)\ dt=\int_1^{\ln x} t\,f\left(e^t\right)dt$$

Soluție. Derivăm relația dată şi ținem seama de *exercițiul 2* în integrala din membrul drept:

$$1+f(x)=\frac{\ln x}{x}f(x)$$

De unde prin rezolvare în raport cu $f(x)$ găsim:

$$f(x)=\frac{x}{\ln x-x},\quad \forall x>0$$

10. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arcsin^2 t}{x^3}dt$

Soluție. Observăm că limita este de tipul $\dfrac{0}{0}$. Fie

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}\quad f(t)=\arcsin^2 t$$

Întrucât f este continuă pe $[-1,1]$, f admite primitive. Dacă $F:(-1,1)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f atunci:

$$F(x)=\int_0^x \arcsin^2 t\ dt,\qquad F(0)=0$$

iar

$$F'(x)=\arcsin^2 x$$

Prin urmare, dacă se aplică *regula lui l'Hospital* putem scrie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt}{x}$

Soluție. Se aplică *formula de medie* integralei de la numărător,

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt=\sqrt{x}e^{-\xi^2},\qquad 0\le\xi\le\sqrt{x}$$

iar limita devine:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\xi^2}\cdot\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\xi^2}\sqrt{x}}$$

Însă mai putem scrie:

$$0\le\xi\le\sqrt{x}\ \Rightarrow\ e^0\le e^{\xi^2}\le e^x\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\le\frac{1}{\sqrt{x}e^{\xi^2}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Prin trecere la limită găsim:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

astfel că:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\xi^2}\sqrt{x}}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to 0_+}\left(\int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Soluție. Notăm $h(x)=\left(\int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}dt\right)^{\frac{1}{x^2}},\ \ x>0.$ .Atunci:

$$\ln h(x)=\frac{\int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}dt}{x^2}$$

Când $x\to 0_+$ limita este de forma $\dfrac{0}{0}$. Astfel, dacă se aplică *regula lui l'Hospital* şi se ține seama de *exercițiul 2*

$$\lim_{x\to 0}\ln h(x)=\ln\left(\lim_{x\to 0}h(x)\right)=\ln\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{\sqrt{x}}}{2x}\right)=\ln e^0=0$$

11. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$$

Soluție. Într-adevăr f continuă pe $[0,1]$, deci f mărginită i.e.

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } |f(x)| < M, \ \forall x \in [0,1]$$

Pe de altă parte:

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |x^n f(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x)|\,x^n\,dx \le M\int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Prin urmare:

$$\int_0^1 x^n f \to 0 \text{ pentru } n\to\infty$$

12. Să se calculeze cu ajutorul *teoremei fundamentale* a calculului integral o primitivă a funcției:

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|,\qquad x\in[0,2\pi]$$

Soluție. Cum f este continuă pe $[0,2\pi]$ rezultă că f admite primitive pe $[0,2\pi]$. Fie:

$$F:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

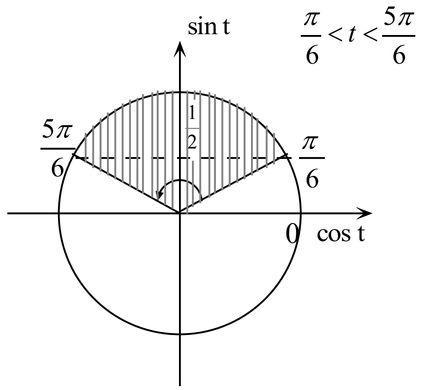
Întrucât:

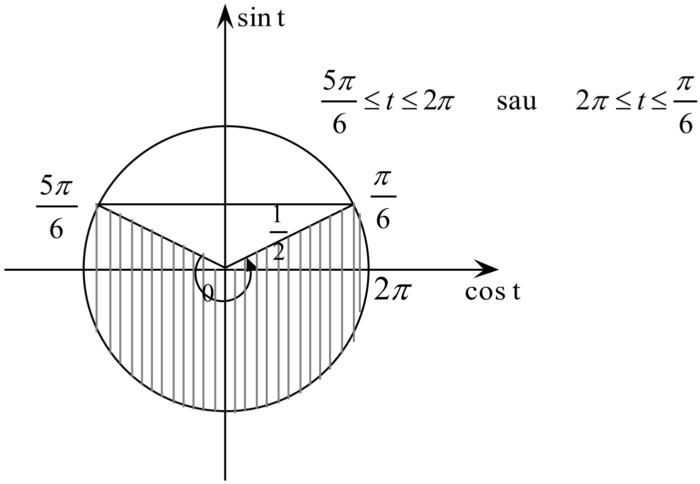
$$f(t)=\begin{cases}\sin-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}-\sin t<0\\[2mm] \dfrac{1}{2}-\sin t & \dfrac{1}{2}-\sin t\ge 0\end{cases}$$

iar inegalitatea $\frac{1}{2}-\sin t<1$ este echivalentă cu

$$\sin t>\frac{1}{2},\quad 0\le t\le 2\pi$$

de unde, $t\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.





Evident, $\sin t \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$. Astfel că:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t - \frac{1}{2}, & t \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \frac{1}{2} - \sin t, & t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right] \end{cases}$$

Urmează că:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt, & x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \left(\sin t - \frac{1}{2}\right) dt, & x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin t - \frac{1}{2}\right) dt + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{x} \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt, & x \in \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right] \end{cases}$$

De aici se obține:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + (\cos x - 1), & x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\ \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1 - \frac{x}{2} - \cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \cos x + \frac{x}{2} + 2\sqrt{3} - 1 - \frac{2\pi}{3}, & x \in \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right] \end{cases}$$

13. Să se calculeze următoarele limite folosind *regula lui l'Hospital*:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,dt}$

Soluție. Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt\right)'}{\left(\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,dt\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\, e^{\sin^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}e^{\operatorname{tg}^2 x}}=1$

b) $\lim\limits_{x\to o_+}\dfrac{\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt}{\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt}$

Soluție. Avem: $\lim\limits_{x\to o_+}\dfrac{\left(\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)'}{\left(\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)'}=\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{-\sin x\sqrt{1-\cos^2 x}-\cos x\sqrt{1-\sin^2 x}}$

dar

$$\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|=\sin x \quad \text{dacă,} \quad x\to 0_+ \quad \text{şi analog } \sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$$

Aşadar, se obține:

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\sqrt{1+\sin x}}{-\sin^2 x-\cos x}=\lim_{x\to 0_+}\left(\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\sqrt{1+\sin x}\right)=1$$

14. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă şi $h>0$. Atunci:

a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x)\right]dt=0$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\int_0^h\left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]dt=0$

Soluție. a) Fie $x\in[a,b]$ şi $\delta>0$ a.î. $[x-\delta,x+\delta]\subseteq[a,b]$. Considerăm funcția:

$$g(t)=f(x+t)-g(x),\quad t\in[0,\delta]$$

Evident g este integrabilă pe $[0,\delta]$, iar $g(0)=0$. Atunci funcția:

$$G(h)=\int_0^h g(t)dt$$

este o primitivă a lui $g(t)$, iar $G'(h)=g(h)$.

Prin urmare, limita dată se mai scrie:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h g(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0} g(h)=g(0)=0$$

b) Să observăm că din punctul a) mai rezultă că:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left[f(x-t)-f(x)\right]dt=0$$

Într-adevăr, dacă schimbăm:

$$t\to\tau \;\therefore\; t=-\tau$$

atunci $dt=-d\tau$, iar τ variază între $-h$ şi 0

t	0	h
τ	0	$-h$

Aşadar

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left[f(x+t)-f(x)\right]dt=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{-h}\left[f(x-\tau)-f(x)\right]d\tau=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{\overline{h}}\left[f(x-\tau)-f(x)\right]d\tau$$

unde $\overline{h}=-h$.

Cum limita nu depinde de h, rezultă că:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left[f(x)-(x-t)\right]dt=0$$

Mai departe,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]dx=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left[f(x+t)-f(x)\right]dt+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left[f(x-t)-f(x)\right]dt=0$$

14. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci $\forall x_0\in I$ un punct în care f este continuă:

a) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt=f(x_0)$

b) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(t)dt=f(x_0)$

Soluție. Fie $x_0\in I$ şi $\delta>0$ a.î. $\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]\subseteq I$. Atunci f continuă pe $\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]$. Fie funcția:

$$F(h)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \text{ cu } F(0)=0.$$

Atunci F este primitivă pentru funcția f iar:

$$F'(h)=f(x_0+h)\quad \forall\in\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]$$

În acest caz,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F'(h)}{1} = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

b) Analog se poate arăta că:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0} f(t)dt = f(x_0)$$

Astfel:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\int_{x_0-h}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2f(x_0) = f(x_0)$$

15. Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ care satisfac condiția:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x f(x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Soluție. Derivând în ambii membri se obține o ecuație diferențială în necunoscuta $f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

sau

$$xf'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Se rezolvă ecuația aducând-o la forma echivalentă

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Prin integrare se obține:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

sau

$$\ln|f(x)| = \ln|x| + C_1$$

unde C_1 este o constantă arbitrară.

Dacă alegem $C_1 = \ln|C|$, atunci ultima egalitate se mai scrie:

$$\ln|f(x)| = \ln|x| + \ln|C|, \quad x \neq 0$$

de unde:

$$|f(x)| = |Cx|$$

Se alege constanta a.î. ambii membrii să aibă acelaşi semn,

$$f(x) = Cx\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

16. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci există $\xi\in(a,b)$ a.î.

$$f(\xi)=\frac{a+b-2\xi}{(\xi-a)(\xi-b)}$$

Soluție. Din ipoteză rezultă că funcția:

$$x\mapsto g(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x\in[a,b]$$

este o primitivă a lui *f*. Considerăm funcția $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\varphi(x)=(x-a)(x-b)e^{g(x)},\quad x\in[a,b]$$

Evident φ continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), iar $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Atunci φ satisface condițiile *teoremei lui Rolle* şi

$$\exists\ \xi\in(a,b)\ \text{a.î.}\ \varphi'(\xi)=0$$

Dar

$$\varphi'(x)=(x-b)e^{g(x)}+(x-a)e^{g(x)}+(x-a)(x-b)f'(x)e^{g(x)}$$

Deducem că:

$$\varphi'(\xi)\equiv\left[(\xi-a)+(\xi-b)\right]e^{g(x)}+(\xi-a)(\xi-b)+f(\xi)e^{g(\xi)}=0$$

sau

$$f(\xi)=\frac{a+b-2\xi}{(\xi-a)(\xi-b)},\qquad \xi\in(a,b)$$

17. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci:

$$\exists\ \xi,\ \eta\in(a,b)\ \text{a.î.}\ \xi<\eta\ \text{ şi }\ f(\eta)=\frac{\eta-a}{\eta-b}f(\xi)$$

Soluție. Fie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție definită prin:

$$\varphi(x)=(b-x)\int_a^x f(t)dt,\quad \forall x\in[a,b]$$

Raționând ca la exercițiul anterior, φ continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), iar $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Din *teorema lui Rolle* rezultă că:

$$\exists\ \eta\in(a,b)\ \text{a.î.}\ \varphi'(\eta)=0.$$

Dar

$$\varphi'(x)=(b-x)f(x)-\int_a^x f(t)dt\ ,\quad \forall x\in(a,b)$$

astfel că

$$0=\varphi'(\eta)=(b-\eta)f(\eta)-\int_a^\eta f(t)dt$$

sau

$$\int_a^\eta f(t)=(b-\eta)f(\eta)$$

Cu formula de medie aplicată în ultima integrală rezultă că:

$$\exists\ \xi \in (a,\eta) \text{ a.î. } f(\xi)(\eta-a)=(b-\eta)f(\eta)$$

adică

$$f(\eta)=\frac{\eta-a}{\eta-b}f(\xi)$$

18. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții continue. Atunci

$$\exists\ \ \xi\in(a,b) \text{ a.î. } \left(\int_a^\xi f(t)dt\right)g(\xi)=f(\xi)\int_b^\xi g(t)dt$$

Soluție. Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ F(x)=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_b^x g(t)dt.$ Atunci F este derivabilă, iar $F(a)=F(b)=0$, deci, conform *teoremei lui Rolle*,

$$\exists\xi\in(a,b) \text{ a.î. } F'(\xi)=0 \ \Leftrightarrow\ 0=g(\xi)\int_a^\xi f(t)dt+f(\xi)\int_b^\xi f(t)dt$$

19. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții, f continuă și g este monotonă și de clasă C^1. Atunci $\exists\xi\in[a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

Soluție. Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_a^x f(x)dx,\ \forall x\in[a,b].$ Atunci F este derivabilă pe $[a,b]$ și $F(a)=0.$ Mai departe dacă integrăm prin părți:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b F(x)g(x)dx=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)dx$$

și apoi aplicăm teorema de medie pentru integrala din membrul drept, rezultă că: $\exists\ \xi\in[a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)F(b)-\underbrace{g(a)F(a)}_{0}-F(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)=$$

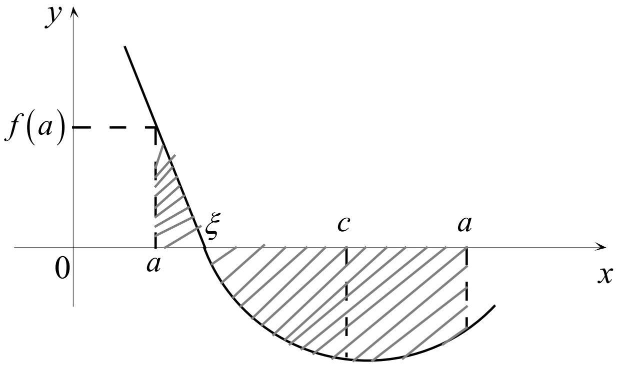
$$=g(b)\big[F(b)-F(\xi)\big]+F(\xi)g(a)=g(a)\int_a^\xi f+g(b)\int_\xi^b f$$

20. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții cu f continuă și $g(x):=\int_a^x f(t)dt,$ $\forall x\in[a,b].$ Dacă $f(a)g(b)<0,$ atunci:

$$\exists\ \ \xi,\eta\in(a,b) \text{ a.î. } f(\xi)=g(\eta)=0$$

Soluție. Presupunem $f(a)>0$ și $g(b)<0$ (dacă $f\ge 0$ pe $[a,b]$, atunci

$\int_a^b f \geq 0$, deci $g(b)=\int_a^b f \geq 0$ absurd). Deducem că există $c \in (a,b)$ a.î. $f(c)<0$, adică $f(a)f(c)<0$. Cum f este continuă pe $[a,b]$, deci şi pe $[a,c]$, rezultă, conform unei consecințe a *teoremei lui Lagrange*, că există $\xi \in (a,c)$ a.î. $f(\xi)=0$. Dar, f continuă şi $f(a)>0$, astfel există $x \in (a,\alpha)$ a.î. $f(x)>0$, $\forall x \in [a,\alpha]$, deci $g(\alpha)=\int_a^\alpha f(t)dt>0$. Prin urmare, g derivabilă pe $[a,b]$, g continuă pe $[\alpha,b]$ şi $g(\alpha)g(b)<0$. Atunci $\exists\ \eta \in (\alpha,b)$ a.î. $g(\eta)=0$.



21. Fie $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ şi $a>b>0$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} & x>0\\ b-a & x=0\end{cases}$

Fie $F(x)=\int_0^x f(t)dt.$ Atunci:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{b-a}{a}, \quad \forall x \geq 0$$

Soluție. Mai întâi să observăm că:

$$f(0_+)=\lim_{x\to 0_+} f(x)=\lim_{x\to 0_+}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\left(\lim_{x\to 0_+}\frac{e^{-ax}-1}{-ax}\right)(-a)-$$

$$-\lim_{x\to 0_+}\frac{e^{-bx}-1}{-bx}(-b)==-a\left(\lim_{t\to 0_-}\frac{e^t-1}{t}\right)+b\left(\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\right)$$

unde $t=-ax$, $u=-bx=-ba$.

Astfel $f(0_+)=f(0)=b-a$, de unde rezultă că, f este continuă pe $[0,+\infty)$, iar F este o primitivă a lui f. Se ştie apoi, că:

$$e^t>t+1, \quad \forall t>0$$

astfel că, pentru $t=-\alpha x$ avem:

$$e^{-\alpha x} > -\alpha x + 1 \quad \text{sau} \quad \frac{1-e^{-\alpha x}}{x} < \alpha, \quad x \neq 0, \quad \alpha > 0$$

Prin urmare, dacă scriem funcția f sub forma:

$$f(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \frac{e^{-ax}\left(1-e^{-(b-a)x}\right)}{x}, \quad \forall x > 0$$

şi ținem seama de inegalitatea obținută anterior pentru $\alpha = b - a > 0$, rezultă:

$$0 < f(x) = \frac{e^{-ax}\left(1-e^{-(b-a)x}\right)}{x} < e^{-ax}(b-a)$$

Integrând pe $[0, u]$:

$$0 < \int_0^u f(x)dt < \int_0^u e^{-ax}dx(b-a)$$

Cum însă,

$$\int_0^u e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^u = \frac{1}{a}\left(1-e^{-au}\right) < \frac{1}{a}, \quad \forall u \neq 0, \ a > 0$$

Atunci rezultă că:

$$0 < F(u) < \frac{b-a}{a}, \quad \forall u \geq 0$$

22. Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă şi monoton crescătoare. Atunci $\forall t \in [a,b]$ are loc inegalitatea:

$$\int_a^t f(x)dx \leq \frac{t-a}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Soluție. Definim funcția $g:[a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \int_a^t f(x)dx - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Atunci g derivabilă şi

$$g'(t) = f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \quad \forall \ t \in [a,b].$$

Din teorema de medie rezultă că $\exists c \in [a,b]$ a.î.

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Astfel

$$g'(t) = f(t) - f(c), \quad a \leq c \leq b$$

Derivata lui g se anulează pentru $t = c$. Mai departe,

i) pentru $0 \leq t \leq c$, $g'(t) \leq 0$ întrucât f este crescătoare;

ii) pentru $c \leq t \leq b$, $g'(t) \geq 0$.

Astfel, din tabelul de monotonie al funcției g

x	a		c		b
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(c)$	$\nearrow$	

obținem că $t=c$ este punct de minim local, iar din $g(a)=g(b)$ rezultă că: $g(t)\le 0,$ adică $\int_a^t f \le \dfrac{t-a}{b-a}\int_b^b f$

23. Determinați punctele de extrem ale funcției:

$$F:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \qquad F(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{1+t^2}dt$$

Soluție. Funcția $t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+t^2}$ este continuă pe $\left[0,\sqrt{x}\right],\ \forall x>0$ rezultă că F derivabilă şi $F'(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)},\quad \forall x>0.$

Punctele critice sunt rădăcinile ecuației $F'(x)=0$ i.e. $x_n=(n\pi)^2,\quad n\in\mathbb{Z}.$
Mai departe, derivata a doua este:

$$F''(x)=\frac{\sqrt{x}(1-x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\dfrac{1+3x}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{x(1+x)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}(1+x)\cos\sqrt{x}-(1+3x)\sin\sqrt{x}}{x(1+x)^2},\qquad \forall x>0$$

iar

$$F''\left((n\pi)^2\right)=\frac{1+n^2\pi^2}{n\pi\left(1+\sqrt{n\pi}\right)^2}(-1)^n\ne 0,\quad \forall n\in\mathbb{Z},\quad \forall x>0$$

De aici, deducem că $F''(x_n)\ne 0$ şi punctele $(x_n)_n$ sunt puncte de extrem, şi anume:

x_{2k+1} − puncte de maxim, $\forall k\in\mathbb{Z}$
x_{2k} − puncte de minim, $\forall k\in\mathbb{Z}$

24. Determinați derivata lui y în raport cu x pentru funcția reprezentată parametric prin :

$$\begin{cases} x = \int_1^{t^2} \sqrt{\tau}\ \mathrm{e}^{\tau} d\tau \\ y = \int_1^{2} \tau^2 \mathrm{e}^{-\tau^4} d\tau \end{cases} \qquad (\tau > 0)$$

Soluție. După cum ştim, $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y_t'}{x_t'}$

Apoi cu regula de derivare a primitivelor putem scrie succesiv:

$$x_t' = -\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\sqrt{\mathrm{t}}\right)^2 e^{-t^2} = -\frac{\sqrt{t}}{2} e^{-t^2}, \qquad \forall t > 0$$

$$y_t' = 2t\sqrt{t^2}e^{t^2} = 2t^2 e^{t^2}$$

Astfel că:

$$y'(t) = 4t\sqrt{t}e^{2t^2}, \quad t > 0$$

25. Să se determine inversa funcției:

$$h(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

Soluție. Derivăm în ambii membri relația dată a.î.:

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Întrucât, $h'(x) > 0,\ \forall |x| < 1,$ deducem că h este inversabilă, iar funcția: $x = h^{-1}(y)$ este inversa lui h. Derivata h' este dată de ecuația:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{h'(y)}$$

Se obține ecuația diferențială:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}$$

care scrisă sub forma:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dy$$

admite soluția:

$$\arcsin x = y + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Determinarea constantei se face alegând valoarea particulară $x = 0,$ astfel că $L(0) = 0$ şi apoi se obține $C = 0.$ Prin urmare:

$$x = h^{-1}(y) = \sin y, \quad \forall\, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

26. Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^{\sin x}\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_1^{\cos x}\sqrt{1-t^2}=0,\qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Soluție. Notăm $F(x)$ membrul drept. Atunci F derivabilă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$F'(x)=\frac{\sin^2 t}{|\cos x|}\cos x-|\sin x|\sin x=0,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Deci $F(x)=k,\ \ k-$ constantă.

Evaluăm constanta alegând arbitrar $x=\frac{\pi}{2}$, astfel de aici:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underbrace{\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}_{A}+\underbrace{\int_1^0\sqrt{1-t^2}\,dt}_{B}$$

Pentru a calcula integrala A observăm că integrantul are o singularitate în $t=1,$ însă o primitivă a lui $t\mapsto\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ este dată de funcția:

$$G(t)=\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int_0^x t\left(\sqrt{1-t^2}\right)'dx=-t\sqrt{1-t^2}\Big|_0^x+\int_0^x\sqrt{1-t^2}\,dt=$$
$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int_0^x\sqrt{1-t^2}\,dt$$

Aşadar:

$$A=G(x)\Big|_0^1=G(1)-G(0)=\left(-x\sqrt{1-x^2}+\int_0^x\sqrt{1-t^2}\,dt\right)\Big|_0^1=-\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=-B$$

Obținem:

$$A+B=0,\quad \text{apoi}\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \text{deci}\ k=0.$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

a) $F:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\quad F(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$R:\quad \frac{\ln}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x>0$

b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\int_0^x \sqrt[3]{t^4+1}\,dt$

$R:\quad \sqrt[3]{x^4+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$

2. Să se calculeze derivatele următoarelor primitive:

a) $F:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\ln t\,dt$

$R:\quad (9x^2-4x)\ln x,\quad \forall x>0$

b) $F:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)dt$

$R:\quad \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2},\quad x>0$

3. Determinați punctele de extrem ale funcției:

$F:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\quad F(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$

$R:\quad x=n\pi=\begin{cases}2k\pi & \text{puncte de minim, } k\in\mathbb{N}\\ (2k+1)\pi & \text{puncte de maxim, } k\in\mathbb{N}\end{cases}$

4. Să se determine derivata y'_x a lui y în raport cu x pentru funcția reprezentată parametric prin:

$$\begin{cases}x=\int_1^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln z\ dz\\ y=\int_{\sqrt{t}}^{3}z^2\ln z\ dz\end{cases}\qquad (z>0)$$

$R:\quad y'_x=-36x^2\sqrt{x}\quad (x>0)$

Indicație. Avem $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Apoi $x'_t=3t^2\sqrt[3]{t^3}\ln t^3=9t^3\ln t$ etc.

5. Să se evalueze limitele folosind *regula lui l'Hospital*:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}$

$R:\quad \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\ dt}{\sqrt{x^2+1}}$

$R: \quad \frac{\pi}{2}$

c) $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$

$R: \quad 0$

6. Să se arate că:

$$0<\int_0^x \frac{\arcsin t}{1+t}dt<1, \qquad \forall x\in[0,1]$$

Indicație. Se studiază monotonia funcției $F(x)=\int_0^x \frac{\arcsin t}{1+t}, \quad x\in[0,1]$ şi se obține că F este monoton crescătoare pe $[0,1]$. Se mai ține seama de faptul că:

$$\frac{\arcsin x}{x}<1, \quad \forall x\in[0,1]$$

7. Să se determine punctele de extrem şi punctele de inflexiune ale graficului funcției

$$h(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt, \qquad x\in\mathbb{R}$$

R: $x=1$ punct de minim, iar punctele de inflexiune ale graficului funcției f sunt $x_1=\frac{4}{3}$ şi $x_2=2$.

8. Să se determine curbura curbei definită parametric de ecuațiile:

$$\begin{cases} x=a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}dt \\ y=a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}dt \end{cases} \qquad (t>0)$$

$R: \quad K=\frac{\sqrt{\pi}}{a}t$

Indicație. Se ține seama de formula care ne dă curbura curbei într-un punct curent:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

9. Să se determine inversele funcțiilor:

a) $h(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$

$R: \quad h^{-1}(y) = e^{y}, \quad y \in \mathbb{R}$

b) $h(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

$R: \quad h^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \quad y \in \mathbb{R}$

10. Să se determine funcțiile de clasă C^1 pentru care:

a) $\int_0^x t f'(t)dt + \int_x^0 f(t)dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

$R: \quad f(x) = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$

$R: \quad f(x) = Ce^{x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}$

11. Să se arate că funcțiile de clasă $C^2(I)$ pentru care:

$$f(x) = x\int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R}$$

satisfac ecuația diferențială:

$$f''(x) - xf'(x) - 2f(x) = 0$$

Indicație. Se derivează de două ori egalitatea din enunț.

12. Să se calculeze cu ajutorul *teoremei fundamentale a calculului integral*, o primitivă a funcției:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left|1 - 2\cos^2 x\right|$$

$$R: \ F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sin 2x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \frac{1}{2}\sin 2x - 1, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ -2 - \frac{1}{2}\sin 2x, & x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ \frac{1}{2}\sin 2x - 3, & x \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) \\ -4 - \frac{1}{2}\sin 2x, & x \in \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \end{cases}$$

Indicație. Se explicitează funcția dată:

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos^2 x-1, & x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right) \\ 1-2\cos^2 x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right] \end{cases}$$

Apoi

i) $0\le x\le\frac{\pi}{4}$

$$F(x)=\int_0^x\left(1-2\cos^2 t\right)dt$$

ii) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 t\right)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}\left(2\cos^2 t-1\right)dt$$

iii) $\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 t\right)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(2\cos^2 t-1\right)dt+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}\left(1-2\cos^2 t\right)dt$$

iv) $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 t\right)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(2\cos^2 t-1\right)dt+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{x}\left(1-2\cos^2 t\right)dt+$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 t\right)dt$$

v) $\frac{7\pi}{4}\le x\le 2\pi$

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 t\right)dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(2\cos^2 t-1\right)dt+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 t\right)dt+$$

$$+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left(2\cos^2 t-1\right)dt+\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\left(1-2\cos^2 t\right)dt$$

13. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă şi $h>0$. Atunci:

a) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)-f(x)\right]dt=\frac{f'(x)}{2}$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[f(x)-f(x-t)\right]dt=\frac{f'(x)}{2}$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]=f'(x)$

Indicație. Se ține seama de formula de derivare a primitivelor şi de formula de calcul a derivatei, plecând de la definiție într-un punct:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

14. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f derivabilă şi $h>0$. Atunci:

a) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(t)dt=f(0)$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^h f(t)dt=f(0)$

15. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} & x>0\\ 1 & x=0\end{cases}$

şi fie

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\,.$$

Atunci: $0\le F(x)\le 1.$

Indicație. A se vedea *exercițiul 21*.

16. Să se calculeze egalitatea

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg}x}\frac{t\,dt}{1+t^2}+\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg}x}\frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}=1,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Indicație. A se vedea *exercițiul 26*.

17. Să se determine

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x}\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)},\qquad (0<\alpha<\beta)$$

2.10. Calculul aproximativ al integralelor definite

(a) *Reprezentarea funcțiilor de clasă C^∞ prin serii Taylor*

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(a<b)$ o funcție indefinit derivabilă, cu proprietatea că

$$\exists M>0 \text{ a.î } \forall n\ge 0,\quad \forall x\in[a,b],\quad \left|f^{(n)}(x)\right|\le M.$$

Atunci seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este uniform convergentă pe $[a,b]$ şi are ca sumă funcția f i.e.

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \forall x\in[a,b]}$$

Caz particular: pentru $x_0=0$ f se dezvoltă în serie de puteri după *formula lui Mac-Laurin*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad \forall x\in[a,b]$$

Aplicații.

După cum ştim:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Pentru $x\to ix$ are loc relația:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

iar pe de altă parte:

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!}+i\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-7)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Identificând părțile reală şi imaginară în ultimele două egalități, putem scrie:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{3}$$

Pentru a găsi dezvoltările în serie *Mac-Laurin* ale funcțiilor hiperbolice $\operatorname{sh} x$ şi $\operatorname{ch} x$, să observăm că:

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

iar

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!}x^n,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

astfel se obțin egalitățile:

$$\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!!},\qquad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!!},\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{5}$$

Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ fixat; pentru orice număr întreg $n\geq 0$, definim:

$$\binom{\alpha}{n}=\begin{cases}\dfrac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)}{n!} & n\geq 1\\ 1 & n=0\end{cases}$$

Dacă $\alpha\in\mathbb{N}$, atunci:

$$\binom{\alpha}{n}=\begin{cases}0 & n>\alpha\\ C_n^{\alpha} & n\leq\alpha\end{cases}$$

Seria de puteri reale:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n} \tag{6}$$

se numeşte *serie binomială* de exponent α.

Seria binomială (6) pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ are raza de convergență $R=1$ şi suma egală cu $\left(1+x\right)^{\alpha}$, $\forall x\in\left(-1,1\right)$, adică are loc reprezentarea:

$$\boxed{\left(1+x\right)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n,\quad \forall x\in\left(-1,1\right)} \tag{7}$$

sau $\forall x\in\left(-1,1\right)$:

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}X+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}X^2+...+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n+..., \tag{7'}$$

Aplicații.

Pentru orice $x\in\left(-1,\ 1\right)$ au loc următoarele dezvoltări remarcabile în jurul originii:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n=1-x+x^2-x^3+...+\left(-1\right)^n x^n+..., \tag{8}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+...+x^n+..., \tag{9}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ..., \tag{10}$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ..., \tag{11}$$

Dacă f admite reprezentarea sub formă de *serie Mac-Laurin*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \forall x \in [a,b]$$

atunci seria din membrul se poate integra termen cu termen şi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

Exerciţii rezolvate

1. Fie $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+x)$

   a) Utilizând reprezentarea sub formă de serie *Mac-Laurin* să se calculeze:

   $$\int \ln(1+x)dx$$

   b) Să se calculeze

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Soluţie. a) Integrăm temen cu termen în (8) şi scriem:

$$\int\frac{1}{1+x}dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

b) Pe de altă parte:

$$\int\frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x) + C$$

Astfel că:

$$\ln(1+x) + C = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

Pentru $x=0$ se obţine $C=0,$ astfel se obţine reprezentarea:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Dacă se alege valoare particulară $x=1$ scriem, în final:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1} = \ln 2$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$$

2. Să se calculeze:

$$\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

utilizând dezvoltările în serie de puteri.

Soluție. Fie $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in[0,1]$. Evident f este o funcție de clasă C^{∞} pe $[0,1]$, iar $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Pe de altă parte, în dezvoltarea (7) luând $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ putem scrie:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n+1}{2}\right)}{n!}x$$

Sau

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n n!}x^n,\qquad x\in(-1,\ 1) \tag{12}$$

Apoi schimbăm $x\to x^2$, astfel că:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n n!}x^n \tag{12'}$$

Integrând termen cu termen în ambii membri obținem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n n!}\int x^n dx+C$$

sau

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad x\in[0,1)$$

Luând $x=0$, găsim $C=0$ aşa că

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n(n+1)!}x^{n+1},\qquad x\in[0,1)$$

Integrând între 0 şi 1 în ultima egalitate rezultă în final:

$$\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n(n+2)!}$$

3. Folosind dezvoltările în serie de puteri, să se cacluleze primitivele:

a) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

Soluție. Din (2) avem:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iar de aici:

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!!}$$

Integrând pe $[0,x]$ în ambii membri, deducem că:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!!}$$

b) $\int_0^x e^{-t^2} dt$

Soluție. Din (1) avem:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iar pentru $t \to -t^2$

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

De aici, urmează că:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

c) $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$

Soluție. Din (8) avem:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad \forall t \in (-1,1)$$

apoi prin integrare:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad \forall t \in (-1,1)$$

Alegând $t = 0$ obținem $C = 0$, iar dacă împărțim prin *t* relația obținută

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n, \quad \forall t \in (-1,1)$$

Integrând între 0 şi x urmează că:

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

(b) Calculul aproximativ al integralelor definite:

Ne propunem să evaluăm integrala:

$$\int_a^b f(x)dx$$

cu N zecimale exacte $\left(N \in \mathbb{N}^*\right)$. Presupunem că f este *indefinit* derivabilă. Astfel f se dezvoltă în serie de puteri ale lui x în jurul originii a.î.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \forall x \in [a,b]$$

apoi scriem:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{(n+1)!}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

Notând $U_n -$ termenul general al seriei din membrul drept am obținut:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$$

Seria din membrul drept este convergentă, deci:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \mathrm{N}{=}\mathrm{N}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{a.î. } \forall n > N_\varepsilon, \qquad \left|U_{n+1}\right| < \varepsilon$$

Se alege $\varepsilon = \dfrac{1}{10^N}$ şi apoi se pune condiția:

$$\left|U_{n+1}\right| < \frac{1}{10^N}$$

de unde rezultă $n \geq k, \quad k \in \mathbb{N}$. Prin urmare:

$$\int_a^b f(x)dx \approx u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_k$$

Aplicații.

Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele:

a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

Soluție. Avem:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Seria este uniform convergentă pe $[0,1]$, deci se poate integra termen cu termen:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}\Big|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n$$

unde $U_n=:\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.

Seria obținută este convergentă, deci se poate determina $n\in\mathbb{N}$ a.î.

$$|U_n+1|<\frac{1}{10^3}$$

Condiția este echivalentă cu a scrie:

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}<\frac{1}{10^3}$$

de unde rezultă că $n\geq 4$. Prin urmare, intergala se calculează cu trei zecimale exacte, dacă alegem cel puțin patru termeni cu serii obținute:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\simeq u_0+u_1+u_2+u_3+u_4=1-\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}=$$
$$=1-0{,}3333+0{,}1-0{,}0238+0{,}0046=0{,}7475$$

b) $\int_0^1 x^x dx$

Soluție. Integrantul se poate scrie sub forma:

$$x^x\equiv e^{x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$$

unde seria din partea dreaptă este uniform convergentă pe $[0,1]$. Dacă se integrează termen cu termen, obținem:

$$\int_0^1 x^x dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1(x\ln x)^n dx$$

Notăm:

$$I_{m,\,n}=\int_0^1 x^m\ln^n x\,dx$$

Dacă integrăm prin părți găsim relația de recurență:

$$I_{m,\,n}=-\frac{n}{m+1}I_{m,\,n-1},\quad \forall m\in\mathbb{N},\ \forall n\geq 1$$

apoi schimbând $n\to n-1$, $n-1\to n-2$ ș.a.m.d., deducem că:

$$I_{m,\,n-1}=-\frac{n-1}{m+1}I_{m,\,n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_{m,\,1}=-\frac{1}{m+1}I_{m,\,0}$$

$$I_{m,\,n}=\left(-1\right)^{n}\frac{n!}{\left(m+1\right)^{n}}I_{m,\,0}$$

Dar:

$$I_{m,\,0}=\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$$

Astfel că:

$$I_{m,\,n}=\left(-1\right)^{n}\frac{n!}{\left(m+1\right)^{m+1}}$$

Alegând $m=n,$ obținem:

$$\int_0^1 \left(x\ln x\right)^n dx=\left(-1\right)^n\frac{n!}{\left(n+1\right)^{n+1}}$$

iar de-aici, urmează:

$$\int_0^1 x^x dx=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)^{n+1}}}_{U_n}$$

Seria $\sum_{n\geq 0}U_n$ este convergentă, iar condiția $\left|U_{n+1}\right|<\frac{1}{10^3}$ este echivalentă cu

$$\frac{1}{\left(n+1\right)^{n+1}}<\frac{1}{10^3}$$

Rezultă că, pentru $n\geq 4$ termeni, integrala dată se poate aproxima cu trei zecimale exacte, i.e.

$$\int_0^1 x^x dx\approx 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}=1-0,25+0,03703-0,0039=0,779$$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}$

Soluție. Notăm $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}},\quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

Din reprezentarea $\left(7'\right)$ pentru $\alpha=-\frac{1}{2}$ obținem (*vezi exercițiul 2*):

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!}x^n,\qquad x\in(-1,1) \tag{13}$$

apoi dacă schimbăm $x\to -x$ şi mai departe $x\to x^2$ găsim

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!}x^{2n},\quad x\in[0,1) \tag{13'}$$

şi de aici:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)^{2n},\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Integrând în ambii membri găsim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{2n}\,n!}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx}_{I_n}$$

dar (*vezi paragraful 2.5*):

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

Astfel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{1}{2^n}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}U_n$$

Seria de termen general:

$$U_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{1}{2^n}$$

este convergentă întrucât

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot 2^n=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2<\frac{1}{2}$$

De aici obţinem şi estimaţia:

$$U_{n+1}<\frac{1}{2}U_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Prin urmare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}U_n=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}U_k+\frac{\pi}{2}\underbrace{\left(U_{n+1}+U_{n+2}+U_{n+3}+\dots\right)}_{R_n}$$

Urmează

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx-\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}U_n\right|=\frac{\pi}{2}\left(U_{n+1}+U_{n+2}+U_{n+3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)U_n=\frac{\pi}{2^2}\left(\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)U_n$$

Dar:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

Astfel că:

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx-\frac{\pi}{2}\sum_{n}^{\infty}U_n\right|<\frac{\pi}{2}U_n$$

Din condiția:

$$\frac{\pi}{2}U_n<\frac{1}{10^3}$$

obținem $n=6,$ astfel pentru a calcula integrala dată cu trei zecimale exacte vom lua în considerare cel puțin şase termeni ai seriei $\sum_{n\geq 0}U_n.$ Deci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\approx\frac{\pi}{2}\left(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2\cdot 2!!}+\frac{3!!}{2^2\cdot 4!!}+\frac{5!!}{2^3\cdot 6!!}+\frac{7!!}{2^4\cdot 8!!}+\frac{9!!}{2^5\cdot 10!!}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot 1,41112\simeq 2,2165$$

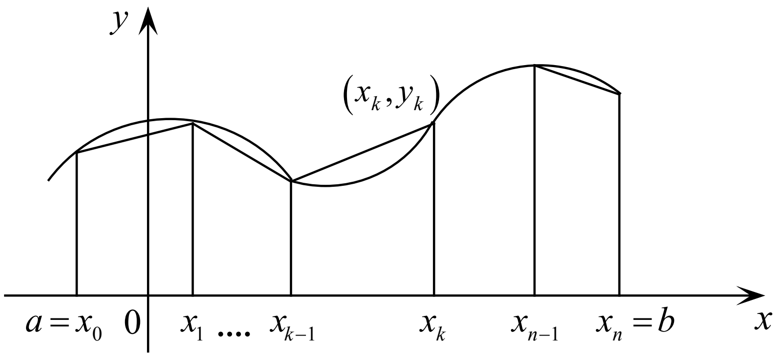
(2) *Formula trapezelor*

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R},$ f de clasă $C^2[a,b].$ Ne propunem să estimăm:

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Fie $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots x_k<\ldots<x_n=b\}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ definită prin:

$$x_k=a+hk,\quad h=\frac{b-a}{n},\quad 0\leq k\leq n$$



Are loc formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+...+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right] \qquad (1)$$

Eroarea *R* se estimează din inegalitatea:

$$|R| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \qquad (2)$$

unde

$$M_2 = \sup_{a\le x\le b}|f''(x)| \qquad (3)$$

Aplicație.

Să se aproximeze integrala:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

Soluție. Considerăm $n=10,\quad a=0,\quad b=1$ şi notăm:

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{1+x^2}$. Pentru fiecare $x_k\left(k=\overline{1,10}\right)$ calculăm:

$$\varepsilon_k y_k = f(xk) \qquad i=\overline{1,9}$$

unde

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & k=0 \text{ sau } k=10 \\ 1 & 1\le k\le 9 \end{cases}$$

Datele obținute se centralizează în tabelul:

k	x_k	$\varepsilon_k y_k$
0	0,0	
1	0,1	
2	0,2	
3	0,3	
4	0,4	
5	0,5	
6	0,6	
7	0,7	
8	0,8	
9	0,9	
10	1,0	
Σ		11,4838

Aplicând formula (1) obținem:

$$I \approx 0{,}1 \cdot 11{,}4838 \simeq 1{,}14838$$

Observație. Din *paragraful 2.1.* obținem valoarea exactă a integralei:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 1{,}14779$$

Eroarea de calcul este de ordinul 10^{-3}

$$I - I = 0{,}00059 \simeq 10^{-3}$$

Să evaluăm eroarea R cu ajutorul relației (2). Avem

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}, \qquad x \in [0,1]$$

$$f''(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \forall x \in [0,1]$$

Întrucât f'' pe $[0,1]$ rezultă:

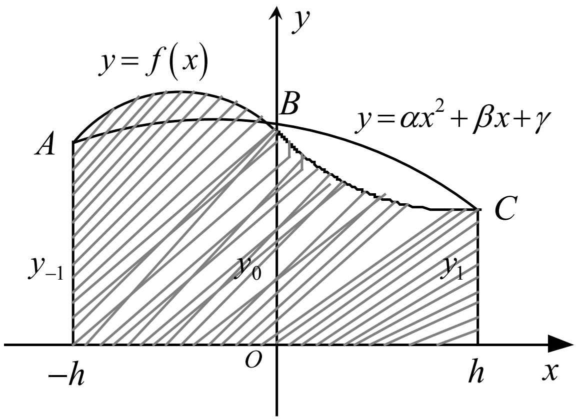
$$M_2 = \sup_{x\in[0,1]} \left|f''(x)\right| = f''(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}3535$$

astfel

$$|R| \le 0{,}5353 \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000} \simeq 0{,}000029 \simeq 10^{-4}$$

(3) *Formula lui Simpson*

Pentru a obține o formulă mai exactă se asimilează profilul curbiliniu cu un arc de parabolă. Fie o bandă verticală mărginită de funcția continuă $y = f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = -h$ şi $x = h$



Dacă h este suficient de mic, curba $y = f(x)$ se poate înlocui cu arcul de parabolă:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (1)$$

care trece prin punctele $A(-h, y_{-1}), B(0, y_0)$ şi $C(h, y_1)$. Atunci integrala:

$$I = \int_{-h}^{h} f(x)dx$$

este aproximativ egală cu

$$\int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx = \left(\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x \right)\Bigg|_{x=-h}^{x=h} = \frac{2\alpha}{3} h^3 + 2\gamma h \qquad (2)$$

Luând succesiv valorile particulare $x = -h, 0, h$ se obțin

$$y_{-1} = \alpha h^2 - \beta h + \gamma, \quad y_0 = \gamma, \quad y_1 = \alpha h^2 + \beta h + \gamma$$

De unde rezultă

$$\gamma = y_0, \quad \alpha = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{2h^2} \qquad (3)$$

Înlocuind (3) în (2) vom obține:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{1}{3} h(y_{-1} - 2y_0 + y_1) + 2y_0 h$$

sau $\boxed{\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{-1} + 4y_0 + y_1)}$ (*formula lui Simpson*) (4)

Aplicație.

Să se aproximeze cu ajutorul *formulei lui Simpson*:

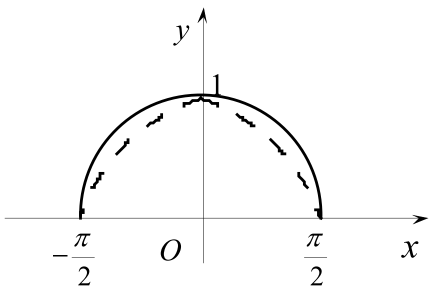
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

Soluție. Aici $h=\dfrac{\pi}{2},\quad y_{-1}=0,\quad y_0=0,\quad y_1=0.$

$$I\approx\frac{\pi}{6}(0+4+0)=\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}07$$

Valoarea exactă este:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2$$



Observație. Cu o translație de axe, formula lui Simpson se mai poate scrie

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right]}\tag{5}$$

unde $y=f(x),\quad h=\dfrac{b-a}{2}$

Pentru a îmbunătăți precizia de calcul, se consideră o diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ formată din $2n$ puncte:

$$x_k=a+kh,\ \text{unde}\quad h=\frac{b-a}{2n}.$$

Conform *proprietății de aditivitate ca funcție de interval* a integralei definite urmează:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2n}\Big\{f(x_0)+f(x_{2n})+4\left[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})\right]+$$
$$+2\left[f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2})\right]\Big\}\tag{6}$$

Presupunând că derivata de ordinul IV a lui f există şi este finită, eroarea de calcul se estimează după relația:

$$|R| < \frac{M_4 (b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad \text{unde} \quad M_4 = \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(IV)}(x) \right| \tag{7}$$

Exemplu. Să se aproximeze integrala :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

folosind *formula lui Simpson* pentru $n = 5$ cu trei zecimale exacte.

Soluție. Avem $n = 5, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in [0,1].$

Se calculează $f(x_{2k})$ şi $f(x_{2k-1}), \quad (k = \overline{1,5})$ şi apoi se centralizează datele într-un tabel:

x_i	$f(x_i)$
0,0	1,0000
0,1	0,9091
0,2	0,8333
0,3	0,7692
0,4	0,7143
0,5	0,6667
0,6	0,6250
0,7	0,5882
0,8	0,5556
0,9	0,5263
1	0,5000

Aplicând *formula lui Simpson* obținem succesiv:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{30}\Big[(1+0,5) + 4(0,9091+0,7692+0,6667+0,5882+0,5263) +$$

$$+2(0,8333+0,7143+0,6250+0,5556)\Big] =$$

$$= 0,0333(1,5+4\cdot 3,4595+2\cdot 2,7282) = 0,0333\cdot 20,7944 = 0,69307$$

Valoarea exactă este:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 \simeq 0,693147$$

Eroarea de calcul este

$$R \simeq 6\cdot 10^{-5}$$

Dacă evaluăm eroarea *R* după formula (7), atunci pentru $f(x) = \ln(1+x)$ avem $f^{(IV)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$. Cum funcția $x \to \left| f^{(IV)}(x) \right|$ este strict descrescătoare pe $[0,1]$, rezultă că $\sup\limits_{0\le x\le 1}\left|f^{(IV)}(x)\right| = \left|f^{(IV)}(0)\right| = 6$

Astfel cu inegalitatea (7) putem scrie:

$$|R| \le \frac{6\cdot 1}{180\cdot 10^4} \sim 3\cdot 10^{-6}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se aproximeze integrala:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

folosind *formula trapezelor* pentru $x = 10$ puncte.

Soluție. Evaluăm valorile integrantului $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ în punctele $x_i \quad \left(i = \overline{1,10}\right)$ cu o precizie de până la patru zecimale, apoi centralizăm datele în tabelul de mai jos:

x_i	$1+x_i$	$y_i = \dfrac{1}{1+x_i}$
0,0000	1,0000	1,0000
0,1000	1,1000	0,9091
0,2000	1,2000	0,8333
0,3000	1,3000	0,7692
0,4000	1,4000	0,7143
0,5000	1,5000	0,6667
0,6000	1,6000	0,6250
0,7000	1,7000	0,5882
0,8000	1,8000	0,5556
0,9000	1,9000	0,5263
1,0000	2,0000	0,5000

Utilizând formula trapezelor obținem:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\left(\left(\frac{1,0000+0,5000}{2}+0,9091+0,8333+0,7692+0,7143+\right.\right.$$

$$\left.+0,6667+0,6250+0,5556+0,5263\right) = \frac{1}{10}\cdot 6,9377 = 0,69377 \approx 0,6938$$

Estimăm eroarea de calcul. Întrucât:

$$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad x\in[0,1],$$

iar $|f''(x)|\le 2,\quad \forall x\in[0,1]$ găsim:

$$|R|\le\frac{2}{12\cdot 10^3}=\frac{1}{600}<0,0017$$

Să observăm că valoarea exactă dată de *formula lui Leibniz-Newton* este:

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln x\Big|_0^1=\ln 2\approx 0,69315$$

iar $I_1-I=0,0007$ i.e. acuratețea de calcul este de trei zecimale exacte.

2. Evaluați cu ajutorul *formulei lui Simpson* integrala:

$$\int_{0,5}^{1,5}\frac{e^{0,1x}}{x}dx$$

cu o precizie de patru zecimale.

Soluție. Pentru a determina valoarea *2n* care ne asigură precizia cerută, vom calcula mai întâi $f^{(IV)}(x)$. Derivăm succesiv:

$$f(x)=\frac{e^{0,1x}}{x}\ ,\quad x\in[0,5;\ 1,5]$$

găsim:

$$f^{(IV)}(x)=\frac{e^{0,1x}}{x^5}\left(0,0001x^4-0,004x^3+0,12x^2+24\right)\equiv\frac{P(x)}{x^5}e^{0,1x}$$

unde $P(x)$ este polinomul din paranteză. Pe intervalul $[0,5;\ 1,5]$ funcția $\varphi(x)=e^{0,1x}$ este strict crescătoare şi atinge valoarea maximă în $n=1,5$ astfel că:

$$\varphi(1,5)=e^{0,15x}<1,2$$

Pe de altă parte, $\frac{1}{x^k}\le(1,5)^k\ ,\quad \forall k\in\mathbb{N},$ iar apoi:

$$\left|\frac{P(x)}{x}\right|\le\frac{0,0001}{x}+\frac{0,004}{x^2}+\frac{0,12}{x^3}+\frac{2,4}{x^5}+\frac{24}{x^5}\le$$

$$\le 0,0002+0,016+0,96+38,4+768<808$$

Prin urmare:

$$\left|f^{(IV)}(x)\right|=\left|\frac{P(x)}{x^5}\right|\cdot e^{0,1x}<1,2\cdot 808<1000$$

de unde rezultă că:

$$M_4 = \sup_{0,5 \le x \le 1,5} \left| f^{(IV)}(x) \right| = 1000$$

Avem de calculat o integrală cu o precizie de patru zecimale. Pentru a ne asigura de o asemenea precizie cerem ca inegalitatea:

$$|R| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$$

să fie satisfăcută. Inegalitatea (7) revine la:

$$\frac{1^5 \cdot 1000}{180(2n)^4} < 5 \cdot 10^{-5}$$

de unde rezultă că:

$$2n > 19$$

Alegem $2n = 20,$ iar pasul de integrare h va fi:

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{20} = 0,5$$

o precizie mai bună arată că pentru $2n = 20,$

$$|R| < 3,5 \cdot 10^{-5}$$

Dacă calculăm $y_i = f(x_i)$ cu cinci zecimale exacte i.e. cu o eroare ce nu depăşeşte 10^{-5}, atunci eroarea finală de calcul nu va fi mai mare de 10^{-5}. Rezultă că:

$$|R| < 4,5 \cdot 10^{-5} < 0,0001.$$

Completăm tabelul de valori al funcției $y = \frac{e^{0,1x}}{x}$ în punctele intervalului $[0,5;\ 1,5]$ cu pasul $h = 0,05.$

	x_i	$0,1\,x_i$	$e^{0,1x_i}$	y_i
0	0,50	0,050	1,05127	2,10254
1	0,55	0,055	1,05654	1,92098
2	0,60	0,060	1,06184	1,76973
3	0,65	0,065	1,06716	1,64178
4	0,70	0,070	1,07251	1,53216
5	0,75	0,075	1,07788	1,43717
6	0,80	0,080	1,08329	1,35411
7	0,85	0,085	1,08872	1,28085
8	0,90	0,090	1,09417	1,21574
9	0,95	0,095	1,09966	1,15774
10	1,00	0,100	1,10517	1,10517
11	1,05	0,105	1,11071	1,05782

12	1,10	0,110	1,11628	1,01480
13	1,15	0,115	1,12187	0,97554
14	1,20	0,120	1,12750	0,93958
15	1,25	0,125	1,13315	0,90652
16	1,30	0,130	1,14454	0,87602
17	1,35	0,135	1,15027	0,84781
18	1,40	0,140	1,15604	0,82162
19	1,45	0,145	1,16173	0,79727
20	1,50	0,150	1,16183	0,77455

Pentru a pune în evidență valorile $f\left(x_{2k}\right)$ şi $f\left(x_{2k+1}\right)$ vom pune datele într-un tabel de forma:

i	x_i		y_i	
		pentru $i=0$ şi $i=k$	pentru $i=2k$	pentru $i=2k+1$
0	0,50	2,10254		
1	0,55		1,92098	
2	0,60			1,76973
3	0,65		1,64178	
4	0,70			1,53216
5	0,75		1,43717	
6	0,80			1,35411
7	0,85		1,28085	
8	0,90			1,21574
9	0,95		1,15754	
10	1,00			1,10517
11	1,05		1,05782	
12	1,10			1,01480
13	1,15		0,97554	
14	1,20			0,93958
15	1,25		0,90652	
16	1,30			0,87602
17	1,35		0,84781	
18	1,40			0,82162
19	1,45		0,79727	
20	1,50	0,77455		
	$\sum$	2,87709	12,02328	10,62893

Utilizând *formula lui Simpson* avem:

$$\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx \approx \frac{1}{60}\left(2,87709 + 4 \cdot 12,02328 + 2 \cdot 10,62893\right) =$$

$$= \frac{1}{60} \cdot 72,22807 = 1,2038$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze utilizând *formula lui Simpson*:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

cu o precizie de trei zecimale.

R: $0,601$

Indicație. Se estimează $\left|f^{(IV)}(x)\right|$ pe intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi se alege $2n = 6.$

2. Să se calculeze utilizând formula trapezelor:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

cu o precizie de trei zecimale.

R: $0,7462$

3. Să se aproximeze cu ajutorul formulei lui Simpson integrala:

$$\int_{1,05}^{1,36} f(x) dx$$

dacă integrantul este definit de următorul tabel:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,6

R: $0,96$

3. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE ÎN GEOMETRIE

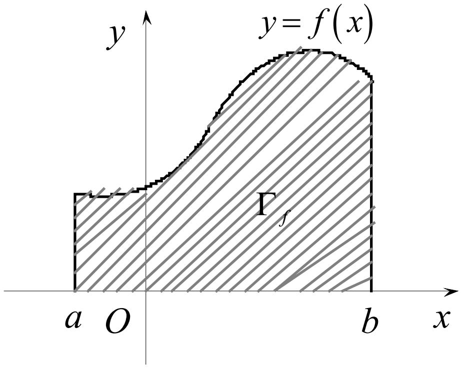
3.1. Calculul ariilor suprafețelor plane definite în coordonate carteziene

a) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă şi pozitivă pe $[a,b]$. Notăm:

$$\Gamma_f=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$$

Atunci mulțimea Γ_f este mărginită şi are aria:

$$\boxed{\text{aria}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx}$$

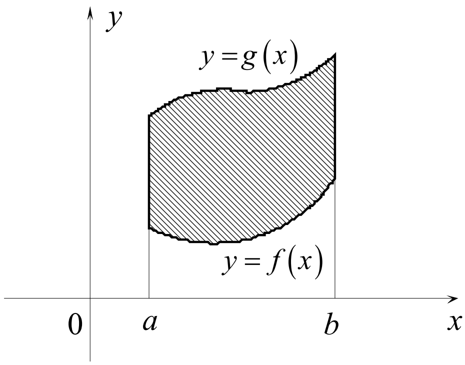


b) Fie $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue şi pozitive pe $[a,b]$. Notăm:

$$\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$$

Atunci mulțimea $\Gamma_{f,g}$ este mărginită şi are aria:

$$\boxed{\text{aria}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x))dx}$$



c) Fie curbele plane definite prin ecuațiile implicite:

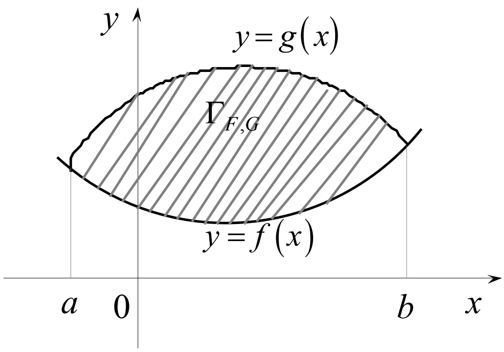
$$(C_1): F(x,y)=0$$

$$(C_2): G(x,y)=0$$

Dacă abscisele punctelor de intersecție ale celor două grafice sunt $x=a$ şi $x=b$, cu $a<b$, atunci mulțimea $\Gamma_{F,G}$ mărginită de curbele $F(x,y)=0$ şi $G(x,y)=0$ are aria egală cu:

$$\text{aria}\left(\Gamma_{F,G}\right)=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

unde $y=f(x)$ şi $y=g(x)$ sunt ecuațiile explicite ale curbelor (C_1), respectiv (C_2).



Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\text{aria}\left(\Gamma_f\right)$, pentru:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{-x}$$

Soluție. Pe $[0,1]$ funcția $x \mapsto xe^{-x}$ este continuă şi pozitivă, iar mulțimea:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le xe^{-x}\right\}$$

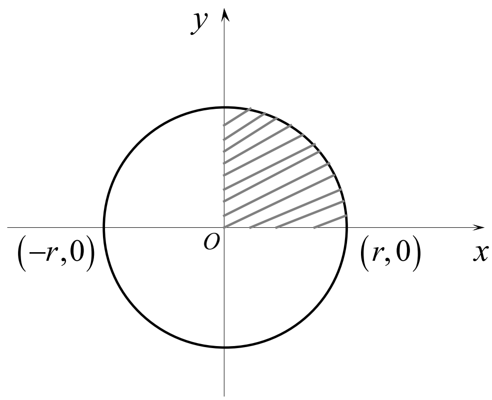
este mărginită. Atunci integrând prin părți avem:

$$\text{aria}\left(\Gamma_f\right) = \int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

2. Să se determine aria unui cerc de rază *r*.

Soluție. Fie cercul C_r de ecuație:

$$(C_r):\ x^2 + y^2 = r^2$$



Fie $f:[0,r] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Atunci *f* continuă şi pozitivă pe $[0,r]$, iar mulțimea:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le r,\quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$

este mărginită şi are aria egală cu:

$$\text{aria }\left(\Gamma_f\right) = \int_o^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

În plus, este evident că:

$$\text{aria}\left(C_r\right) = 4\,\text{aria}\left(\Gamma_f\right)$$

Prin urmare, este suficient să calculăm $\text{aria}\left(\Gamma_f\right)$. Efectuăm schimbarea:

$$x \to t,\quad x = r\cos t \therefore dx = -r\sin t$$

x	0	r
t	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	0

Astfel:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}\; r\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = r^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

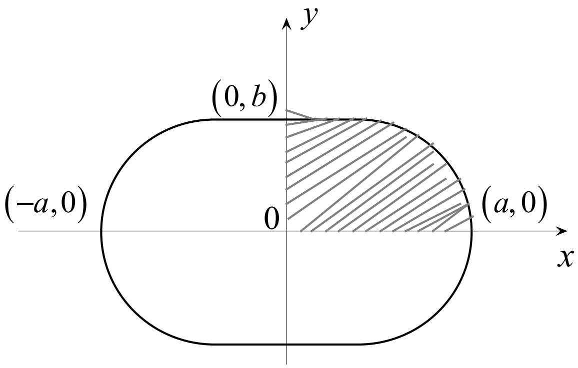
În final, se obține:

$$\text{aria}\left(C(O,r)\right) = 4\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2$$

3. Să se calculeze aria elipsei de semiaxe a şi b $(a,b>0)$.

Soluție. Fie elipsa de ecuație:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Considerăm funcția: $f:[0,a] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Atuncim f continuă şi pozitivă pe $[0,a]$, iar mulțimea:

$$\Gamma_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$

este mărginită. Atunci:

$$\text{aria}(E) = 4\text{aria}\left(\Gamma_f\right)$$

unde

$$\text{aria}\left(\Gamma_f\right)=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Efectuăm schimbarea:

$$x \to t \therefore x = a\sin t \text{ cu } dx = a\cos t\, dt$$

x	0		a
t	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

În aceste condiții:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\; a\cos t\, dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

Prin urmare:

$$\text{aria}\left(E\right)=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

4. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ unde:

$$f\left(x\right)=\sqrt{rx-x^2},\quad g\left(x\right)=\sqrt{r^2-x^2},\quad \forall x\in\left[0,\ r\right]$$

Soluție. Să observăm că:

$$f\left(x\right)\le g\left(x\right),\quad \forall x\in\left[0,1\right]$$

întrucât

$$\sqrt{rx-x^2}\le\sqrt{r^2-x^2} \Leftrightarrow rx-x^2\le r^2-x^2 \Leftrightarrow r\left(r-x\right)\ge 0,\quad \forall x\in\left[0,r\right]$$

Atunci mulțimea $\Gamma_{f,g}$ definită prin:

$$\Gamma_{f,g}=\left\{\left(x,y\right)\mid 0\le x\le r \quad \sqrt{rx-x^2}\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\right\}$$

este mărginită, iar

$$\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}-\sqrt{rx-x^2}\right)dx = A_1-A_2$$

unde

$$A_1=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx,$$

$$A_2=\int_0^r\sqrt{rx-x^2}\,dx.$$

Din *exercițiul 2* rezultă că:

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{4}$$

Pentru a evalua A_2 este suficient să observăm că integrantul poate fi scris sub forma:

$$\sqrt{rx - x^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{r}{2}\right)^2}$$

Efectuăm schimbarea:

$$x \to t \therefore x - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\cos t, \text{ cu } \quad dx = -\frac{r}{2}\sin t$$

x	0	r
t	π ↘	0

Atunci:

$$A_2 = \int_o^\pi \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}\cos^2 t}\ \frac{r}{2}\sin t\, dt = \frac{r^2}{4}\int_0^\pi \sin^2 t\ dt = \frac{r^2}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{r^2}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi r^2}{8}$$

deci

$$A_2 = \frac{\pi r^2}{8}.$$

Prin urmare:

$$\text{aria}\left(\Gamma_{f,g}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{8} = \frac{\pi r^2}{8}$$

S*oluție 2*. (*geometrică*)

Notăm $(C_1): y = \sqrt{r^2 - x^2}$, respectiv $(C_2): y = \sqrt{rx - x^2}$, $x \in [0,1]$, ecuațiile celor două curbe plane. Atunci ecuațiile lor implicite se mai scriu şi sub forma:

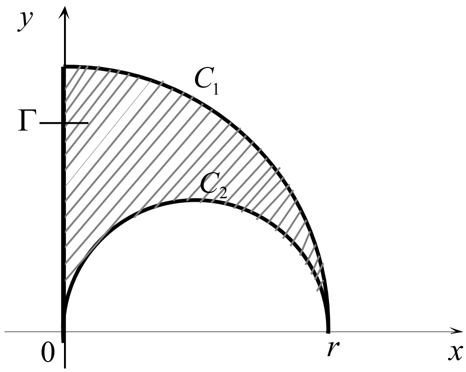
$$(C_1): x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$(C_2): x^2 - rx + y^2 = 0.$$

Recunoaştem aici ecuațiile implicite a două arce de cerc:

$$C_1 : x^2 + y^2 = r^2, \quad y \geq 0, \quad x \in [0, r],$$

$$C_2 : \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2, \quad y \geq 0, \quad x \in [0, r].$$



dacă Γ este mulțimea mărginită de dreptele $x = 0$, $y = 0$ şi curbele (C_1) şi (C_2), atunci:

$$\text{aria}(\Gamma) = \frac{1}{4}\text{aria } (C_r) - \frac{1}{2} \text{ aria } \left(C_{\frac{r}{2}}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{8} = \frac{\pi r^2}{8}$$

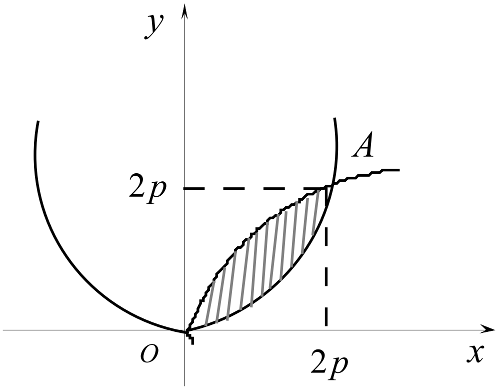
5. Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de parabolele:

$$(P_1) : y^2 = 2px \qquad (p > 0)$$
$$(P_2) : x^2 = 2py$$

Soluție. Punctele de intersecție ale celor două curbe sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x^2 = 2py \end{cases} \quad (x, y \geq 0, \quad p > 0)$$

obținem $O(0,0)$, $A(2p, 2p)$.



Mulțimea $\Gamma_{P_1,\,P_2} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 2p,\ \dfrac{x^2}{2p} \le y \le \sqrt{2px} \right\}$ este mărginită şi are aria egală cu:

$$\text{aria}\left(\Gamma_{P_1,P_2}\right) = \int_o^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, x\sqrt{x}\Big|_0^{2p} - \frac{x^3}{6p}\Big|_0^{2p} = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4p^2}{3}$$

6. Să se determine aria mulțimii mărginite de parabolele:

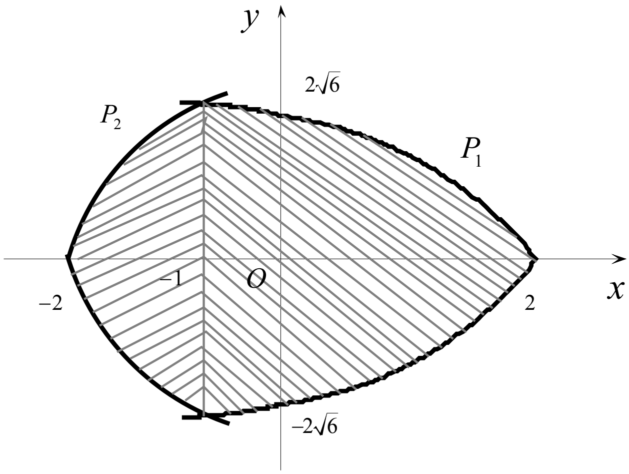
$(P_1): y^2 = 8(2-x)$

$(P_2): y^2 = 24(2+x)$

Soluție. Sistemul format de ecuațiile celor două curbe:

$$\begin{cases} y^2 = 8(2-x) \\ y^2 = 24(2+x) \end{cases}$$

are soluțiile: $\left(-1, 2\sqrt{6}\right), \left(-1\,,\ -2\sqrt{6}\right)$



Notăm K – interiorul mulțimii mărginite de cele două parabole. Graficele celor două curbe fiind simetrice față de Ox rezultă că este suficient să calculăm aria mulțimii:

$$\Gamma_{P_1,P_2} = \Gamma_{P_1} \cup \Gamma_{P_2}$$

unde:

$$\Gamma_{P_1} = \left\{(x,y) \mid -2 \le x \le -1,\ 0 \le y \le \sqrt{24(2+x)}\right\},$$

iar

$$\Gamma_{P_2} = \left\{(x,y) \mid -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{8(2-x)}\right\}$$

Întrucât mulțimile Γ_{P_1}, Γ_{P_2} sunt mărginite şi disjuncte urmează că:

$$\text{aria }(K) = 2\text{ aria }\left(\Gamma_{P_1,P_2}\right) = 2\left(\text{aria}\left(\Gamma_{P_1}\right) + \text{aria}\left(\Gamma_{\mathrm{P}_2}\right)\right)$$

Astfel

$$\text{aria}\left(\Gamma_{P_1}\right) = \int_{-2}^{-1} \sqrt{24(2+x)}\,dx = 2\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2+x)\sqrt{2+x}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

şi

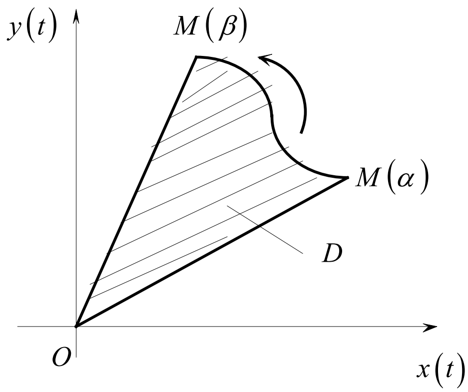
$$\text{aria}\left(\Gamma_{P_2}\right) = \int_{-1}^{2} \sqrt{8(2-x)}\,dx = -\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}\,(2-x)\sqrt{2-x}\Big|_{1}^{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

În final, obținem:

$$\text{aria }(K) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

3.2. Calculul ariilor în coordonate parametrice

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu plan mărginit de curba (C) reprezentată parametric de ecuația: $(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$



Atunci aria domeniului se calculează după una din relațiile:

$$\boxed{\text{aria}(D) = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\,dt} \tag{1}$$

$$\boxed{\text{aria}(D) = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)\,dt} \tag{2}$$

$$\boxed{\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (xy' - x'y)\,dt} \tag{3}$$

unde α şi β corespund valorilor parametrului t când conturul (C) se parcurge în sens direct (*vezi figura de mai sus*).

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze aria elipsei.

Soluție. Elipsa de ecuație implicită:

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

poate fi parametrizată alegând:

$$(E):\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \left(t \in [0,2\pi]\right)$$

De aici rezultă că:

$$\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = b\cos t \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-y) \\ \cdot x \end{array}\right.$$

$$xy' - x'y = ab\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = ab$$

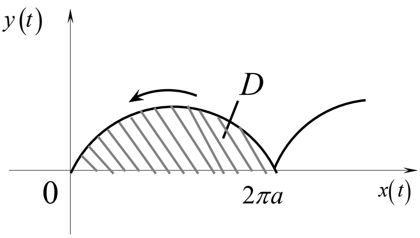
iar mai departe:

$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(xy' - x'y\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\ dt = \pi ab$$

2. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între arcul $\overset{\frown}{AB}$ de cicloidă şi axa Ox (*vezi figura alăturată*).

Soluție. Ecuațiile parametrice ale arcului de cicloidă din figură sunt:

$$\overset{\frown}{AB}:\ \begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right) \\ y = a\left(1 - \cos t\right) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi] \quad (a > 0)$$



Când parametrul t parcurge intervalul $[0,2\pi]$, x variază între 0 şi $2\pi a$. Din relația (2) rezultă (pentru $\alpha = 2\pi$ şi $\beta = 0$):

$$\text{aria}(D) = \int_\alpha^\beta y\,dx = -\int_{2\pi}^0 yx'\ dt = \int_0^{2\pi} a\left(1-\cos t\right)\cdot a\left(1-\cos t\right)dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left(1 - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

iar în final:

$$\text{aria}(D) = 3\pi a^2$$

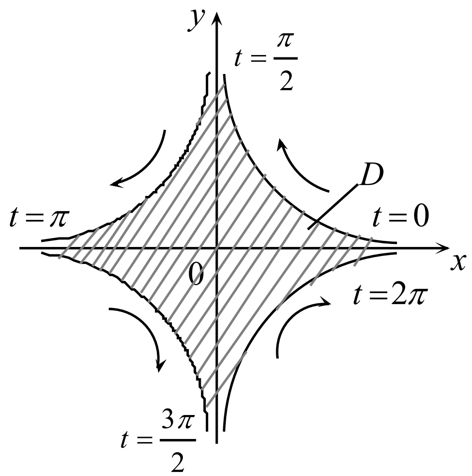
3. Determinați aria domeniului plan mărginit de *astroida*:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Soluție. Ecuațiile parametrice ale astroidei sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

Fie D domeniul plan haşurat în figura de mai jos. Vom utiliza relația (3) pentru calculul ariei.



$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')dt$$

Întrucât:

$$\begin{array}{l|l} x' = -3a\cos^2 t\sin t & \cdot(-y) \\ y' = 3a\sin^2 t\cos t & \cdot x \end{array}$$

$$x'y - xy' = 3a^2\left(\sin^2 t\cos^4 t + \cos t^4 \sin^2 t\right) = 3a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

urmează că:

$$\text{aria}(D) = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\ dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos^2 2t}{4}dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3a^2}{8}\left(\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{2\pi}\right)$$

iar în final:

$$\text{aria}(D) = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

4. Calculați aria regiunii plane mărginite de curba:

$$(C):\ \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\sin 2t \end{cases}$$

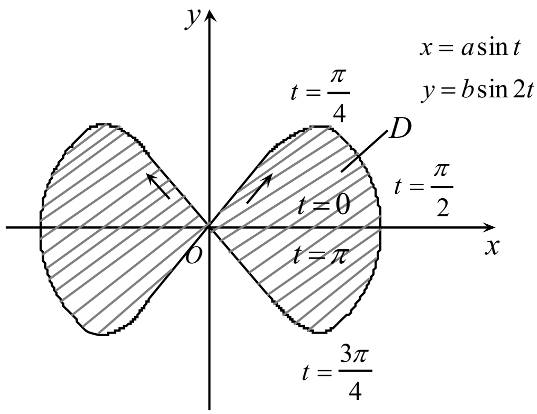
Soluție. Atunci când construim graficul unei curbe definite prin ecuațiile sale parametrice este util să ținem seama de simetriile în raport cu axele de coordonate. În cazul de față, dacă înlocuim t prin $\pi - t$, atunci:

$$x(\pi - t) = x(t) \ \text{ şi } \ y(\pi - t) = -y(t)$$

i.e. curba este simetrică în raport cu Ox. Apoi dacă substituim t prin $\pi + t$,

$$x(\pi + t) = -x(t) \quad \text{şi} \quad y(\pi + t) = y(t)$$

ceea ce înseamnă că curba este simetrică şi în raport cu Oy.



Mai mult, deoarece funcțiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt periodice, având perioada comună 2π, să considerăm ca interval de integrare $0 \le t \le 2\pi$. Din ecuațiile parametrice, mai putem observa că, x şi y sunt ambele pozitive când $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel pentru t în acest interval, arcul de curbă este situat în primul cadran (*vezi figura de mai sus*). După cum se observă din figură, este suficient să evaluăm aria buclei din semiplanul $x > 0$, care corespunde variației parametrului t între 0 şi π.

Prin urmare:

$$\text{aria}(D) = 2\int_0^{\pi} x'y\, dt = 2\int_0^{\pi} a\cos t \cdot b\sin 2t\ dt = 4ab\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos^2 t\, dt =$$

sau

$$\text{aria}(D) = -4ab\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{8ab}{3}.$$

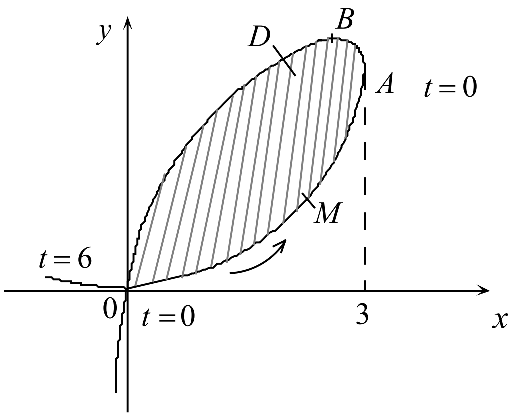
5. Determinați aria regiunii mărginită de bucla curbei definită prin:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{3}(6-t) \\ y = \dfrac{t^2}{8}(6-t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Soluție. Vom localiza mai întâi punctele de autointersecție ale curbei. Funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sunt definite pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În punctele de autointersecție, abscisele și, respectiv, ordonatele coincid pentru diferite valori ale lui t. Întrucât $x(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-3)^2$, rezultă că abscisele coincid pentru $t = 3 \pm \lambda$. Pentru ca funcția $y(t)$ să ia una și aceeași valoare pentru $t = 3 \pm \lambda$ trebuie să fie satisfăcută inegalitatea:

$$\frac{(3+\lambda)^2}{8}(3-\lambda) = \frac{(3-\lambda)^2}{8}(3+\lambda), \qquad \lambda \neq 0$$

adică pentru $\lambda = \pm 3$. Prin urmare în $t = 0$ și $t = 6$.



$x(t_1) = x(t_2) = 0$ și, respectiv $y(t_1) = y(t_2) = 0$ i.e. punctul $(0,0)$ este singurul punct de autointersecție. Când t variază în intervalul $[0,6]$ $(x(t), y(t))$ parcurge arcul de curbă din primul cadran, astfel pentru $0 \le t \le 3$, punctul $M(x,y)$ descrie partea inferioară a buclei, întrucât pentru $t \in [0,3]$, $x(t)$ și $y(t) = \dfrac{3tx}{x}$ sunt funcții crescătoare. Așa cum arată și figura, bucla se parcurge în sens direct astfel că, utilizând formula (3) putem scrie că:

$$\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_0^6 (xy'-yx')dt$$

Însă:

$$\begin{array}{l|l} x'=\frac{2}{3}(3-t) & \cdot(-y) \\ y'=\frac{t}{2}(3-t) & \cdot x \end{array}$$

$$xy'-x'y=\frac{t}{2}(3-t)\frac{t}{3}(6-t)-\frac{t^2}{8}(6-t)\frac{2}{3}(3-t)=\frac{1}{24}t^2(6-t)^2$$

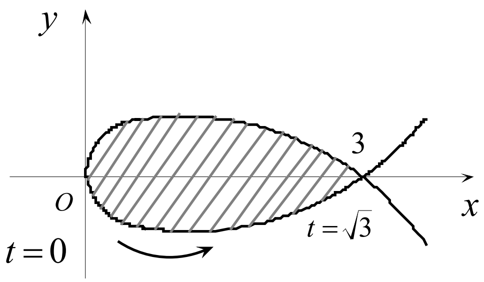
Prin urmare:

$$\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_0^6 \frac{t^2(6-t)^2}{24}dt=\frac{1}{48}\int_0^6 (36t^2-12t^3+t^5)dt=\frac{27}{5}$$

6. Determinați aria regiunii mărginită de buclele curbei definite implicit de ecuația:

$$9y^2=x(3-x)^2$$

Soluție 1. Se observă că curba taie axa Ox în punctele $x=0$ şi $x=3$. Din $x=\dfrac{9y^2}{(3-x)^2}$, $x\neq 3$ rezultă că $x\geq 0$, iar dacă se schimbă $y\to -y$, ecuația nu o modifică, prin urmare graficul este simetric față de Ox (*vezi figura*):



Vom face o parametrizare a curbei date, alegând:

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t\left(1-\dfrac{t^2}{3}\right) \end{cases} \quad t\in\left[0,\sqrt{3}\right]$$

Cum:

$$\begin{cases} x'=2t \\ y'=1-t^2 \end{cases}$$

Aplicăm formula (3):

$$\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}(xy'-yx')dt=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left[t^2\left(1-t^2\right)+2t^2\left(1-\frac{t^2}{3}\right)\right]dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}t^2\left(1+\frac{t^2}{3}\right)dt=\frac{8\sqrt{3}}{5}$$

Soluție 2. Ramura superioară a buclei este dată de funcția:

$$y(x)=\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{3}\right),\quad x\in[0,3]$$

Atunci:

$$\text{aria}(D)=2\int_0^3\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

Schimbăm:

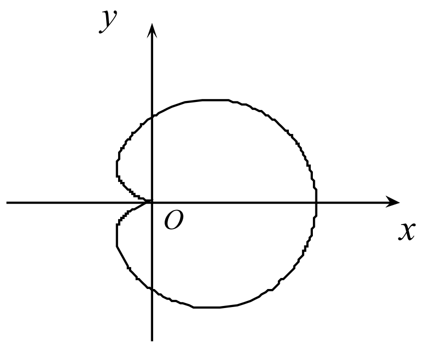
$$x\to t\therefore\sqrt{x}=t,\quad t\in\left[0,\sqrt{3}\right]\quad\text{cu}\quad x=t^2\quad\text{şi}\quad dx=2t\ dt$$

astfel:

$$\text{aria}(D)=2\int_0^{\sqrt{3}}2t^2\left(1-\frac{t^2}{3}\right)dt=\frac{8\sqrt{3}}{5}$$

7. Calculați aria suprafeței plane mărginite de *cardioda* de ecuații parametrice:

$$\begin{cases}x=a\cos t(1+\cos t)\\ y=a\sin t(1+\cos t)\end{cases}\qquad (a>0)$$



Soluție. Întrucât $x(t)$ şi $y(t)$ sunt funcții periodice având aceeaşi perioadă $T=2\pi$, este suficient să considerăm intervalul $[-\pi,\pi]$. Curba este simetrică în raport cu axa Ox, întrucât $x(-t)=x(t)$ în timp ce $y(-t)=-y(t)$. Pe de altă parte, $y\geq 0$ pentru $0\leq t\leq\pi$.

Funcția $u = \cos t$, pentru $0 \le t \le \pi$ descreşte de la 1 la -1, iar abscisa $x = au(1+u) = a\left[-\frac{1}{4} + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2\right]$ descreşte de la valoarea $x\big|_{u=1} = 2a$ la valoarea $x\big|_{u=-\frac{1}{2}} = -\frac{a}{4}$ şi apoi creşte către $x\big|_{u=-1} = 0.$ La fel se poate arăta că ordonata y este o funcție crescătoare pe intervalul $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$ şi descrescătoare pentru $\frac{\pi}{3} \le t \le \pi.$ Curba este reprezentată în figura de mai sus. Săgeata indică sensul de creştere al lui t.
Corespunzător relației (3) vom calcula $x'(t)$ şi $y'(t)$:

$$\begin{array}{l|l} x' = -a\sin t(1 + 2\cos t) & \cdot(-y) \\ \underline{y' = a\cos t(1 + \cos t - \sin t)} & \cdot x \end{array}$$

$$xy' - x'y = a^2\cos^2 t(1 + \cos t - \sin t)(1 + \cos t) +$$
$$+ a^2\sin^2 t(1 + 2\cos t)(1 + \cos t) = 4a^2\cos^4\frac{t}{2}$$

Apoi, relația (3) ne dă:

$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(xy' - x'y)dx = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4\frac{t}{2}dt = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = \frac{a^2}{2}\left[(t - 2\sin t)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos^2 t}{2}dt\right] =$$

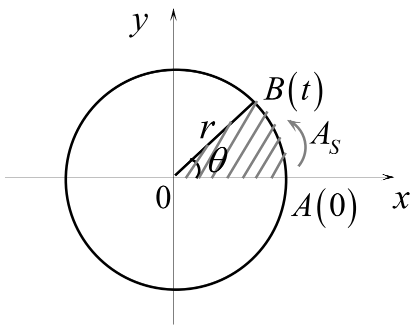
$$= \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze aria sectorului de cerc $\overset{\frown}{OAB}$ de rază r şi cu unghiul la centru de măsură θ. Să se deducă de aici aria cercului:

R: $\frac{r^2\theta}{2}$

Indicație. $\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \theta)$. $A_S = \frac{1}{2}\int_0^{\theta}(xy' - x'y)dt.$



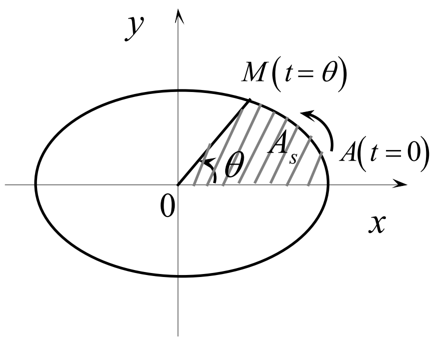
2. Fie elipsa de ecuații parametrice:

$$(E):\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Să se calculeze aria sectorului de elipsă $\overset{\frown}{OAM}$, unde punctelor A şi M le corespund valorile $t = 0$, respectiv $t = \theta$ iar 0 este centrul elipsei. Să se deducă de aici aria elipsei.

R: $\dfrac{\theta ab}{2}$

Indicație. $A_s = \dfrac{1}{2}\int_0^\theta (xy' - x'y)dt$



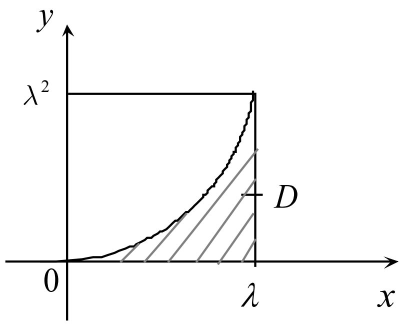
3. Fie parabola de ecuație $y = x^2$, $x \in [0, \lambda]$.

a) Să se determine aria mulțimii:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le \lambda,\ \ 0 \le y \le x^2\right\}$$

b) Să se parametrizeze convenabil ecuația parabolei şi să se calculeze aria(D) utilizând formula (2) corespunzătoare acestei parametrizări.

R: a) $\text{aria}(D) = \dfrac{\lambda^3}{3}$



$R:$ a) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \left(t \in [0,\lambda]\right)$. $\text{aria}(D) = \int_0^{\lambda} xy'dt$

4. Să se calculeze în două moduri aria mulțimii D, unde:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \le x, \quad y \ge x^2 \right\}$$

$R:$ $\dfrac{1}{6}$

Metoda 1. $\text{aria}(D) = \int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \dfrac{1}{6}$

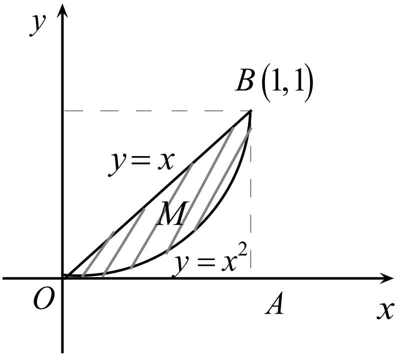


Fig. a)

Metoda 2. $\text{aria}(D) = \text{aria}(\Delta\text{OAB}) - \text{aria}\left(\overparen{OABO}\right)$

Fig. a)

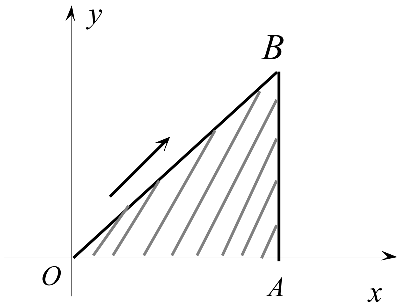
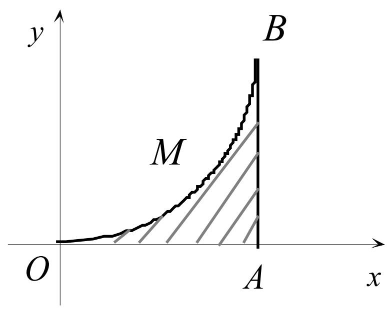


Fig. b)



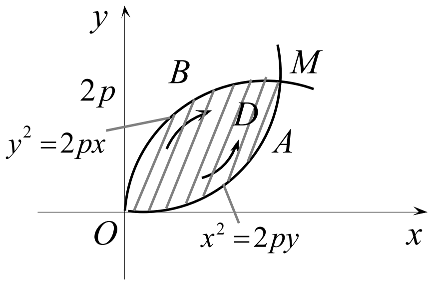
$\overset{\frown}{OB}: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $\quad$ $\text{aria}\left(\Delta OAB\right) = \int_0^1 xy'dt = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ (*vezi* Fig. *a*)

$\overset{\frown}{OMB}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $\quad$ $\text{aria}\left(\overset{\frown}{OABO}\right) = \int_0^1 xy'dt = \dfrac{1}{3}$ $\quad$ (*vezi* Fig. b)

5. Să se calculeze aria regiunii plane mărginite de parabolele $y^2 = 2px$ şi $x^2 = 2py,\ \ (p > 0)$ reprezentând curbele ce compun frontiera domeniului în coordonate parametrice.

$R: \ \dfrac{4p^2}{3}$

Indicație.



Conturul domeniului D (*vezi figura*) se parcurge în sens direct pe arcul $\overset{\frown}{OAM}$ şi în sens invers pe arcul $\overset{\frown}{OBM}$. Parametrizările celor două arce sunt, respectiv:

$$\overset{\frown}{OBM}: \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2p, \qquad S_{OBM} = \int_0^{2p} x'y\,dt = \frac{4p^2}{3}$$

$$\overset{\frown}{OAM}: \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases} \quad 0 \le t \le 2p, \qquad S_{OAM} = \int_0^{2p} xy'dt = \frac{8p^2}{3}$$

$$\text{aria}\left(D\right) = S_{OAM} - S_{OBM} = \frac{4p^2}{3}.$$

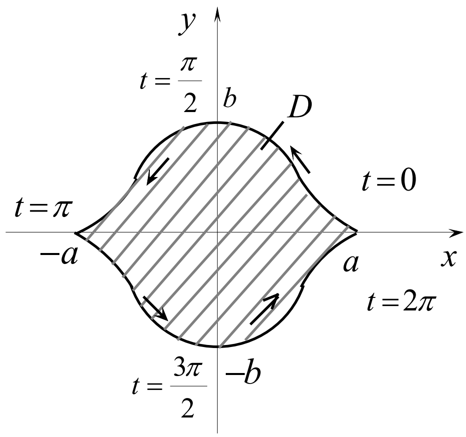
6. Calculați aria regiunii plane mărginite de curba definită parametric prin:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \quad (a,b>0)$$

$R:\quad \dfrac{3}{4}\pi ab.$

Indicație. Curba este simetrică în raport cu axele de coordonate pe care le intersectează în punctele $x=\pm a$ și $y=\pm b.$ Conturul se parcurge în sens direct de la $t=0,$ unde $x(0)=a$ până la $x=2\pi,$ unde $x(2\pi)=a$ (*vezi figura*).

$$\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-x'y)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)\sin^2 t\,dt.$$



7. Calculați aria suprafeței plane mărginite de curba definită parametric de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\cos^3 t \end{cases}$$

și axa Oy.

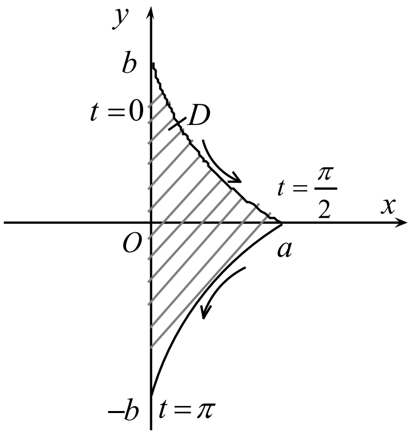
$R:\quad \dfrac{4ab}{5}$

Indicație. Curba se parcurge în sens invers de la $t=0,$ când punctul de pe curbă are coordonate $x(0)=0,\ \ y(0)=b,$ până la $t=\pi,$ când punctul are coordonatele $x(\pi)=0,\ \ y(\pi)=-b$ trecând prin $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$

$$\text{aria}(D) = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(xy' - x'y)dt = -\frac{1}{4}ab\int_0^{\pi}\cos^2 t(\cos 2t - 5)\sin t\, dt$$

sau în final:

$$\text{aria}(D) = \frac{4ab}{5}.$$



8. Determinați ariile suprafețelor mărginite de buclele curbelor:

a) $x = t^2 - 1,\quad y = t^3 - t$

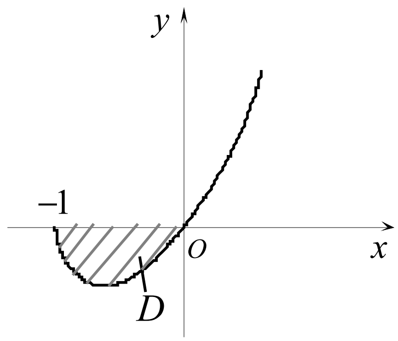
b) $x = 2t - t^2,\; y = 2t^2 - t^3$

c) $x = t^2,\quad y = \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)$

a) R: $\frac{4}{15}$

Indicație. Curba este simetrică în raport cu axa Ox pe care o intersectează de două ori în origine pentru $t = \pm 1$. Mai departe:

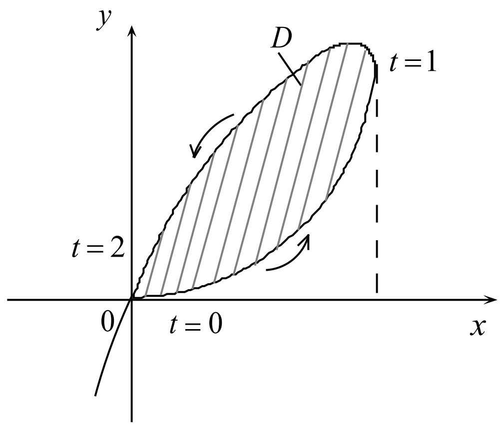
$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(xy' - x'y)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(-2t^2\right)\left(t^2 - 1\right)dt$$



b) R: $\frac{8}{15}$

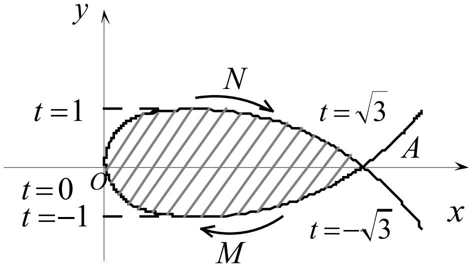
Indicație. Punctele de autointersecție se determină din condițiile: $x(t_1)=x(t_2)$, $y(t_1)=y(t_2)$ (*vezi figura*). Însă, $y(t)=tx(t)$, astfel că pentru $t_1=0$ şi $t_2=2$ se obțin: $x(0)=x(2)=0$, $y(0)=y(2)=0$. Prin urmare:

$$\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_0^2(xy'-x'y)dt=\frac{1}{2}\int_0^2(-2+t^2)t^2dt$$



c) *Indicație.* Punctele de autointersecție sunt $t=\pm\sqrt{3}$. Curba se parcurge în sens invers pe drumul *AMONA* începând cu valoarea $t=-\sqrt{3}$ şi terminând cu $t=\sqrt{3}$, când revine în punctul *A*.

$$\text{aria}(D) = -\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(xy' - x'y)dt = \frac{1}{6}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2\left(t^2+3\right)dt$$

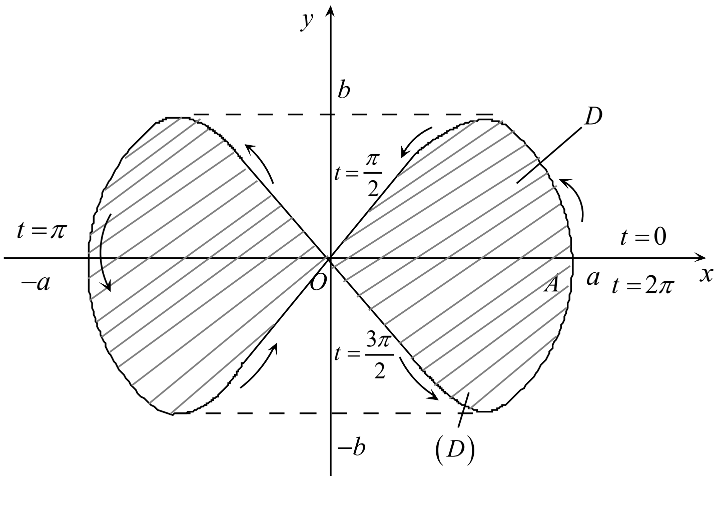


9. Determinați aria regiunii plane mărginită de curba definită parametric de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\cos^2 t \end{cases}$$

$R:\quad \dfrac{\pi ab}{4}.$

Indicație. Graficul se trasează pe intervalul $0 \le t \le 2\pi$.



3.3. Calculul ariilor în coordonate polare

Fie $\rho:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și nenegativă și:

$$D:=\left\{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \middle| \alpha\le\theta\le\beta,\ 0\le\rho\le\rho(\theta)\right\}.$$

Atunci:

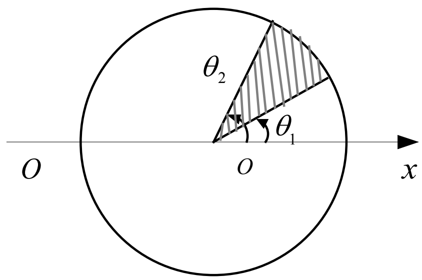
$$\boxed{\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)d\theta}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze aria unui *sector de cerc* de rază *r* și deschidere θ.

Soluție. Ecuația cercului în coordonate polare este:

$$\rho(\theta)=r,\quad \theta\in[\theta_1,\theta_2]$$



Atunci mulțimea:

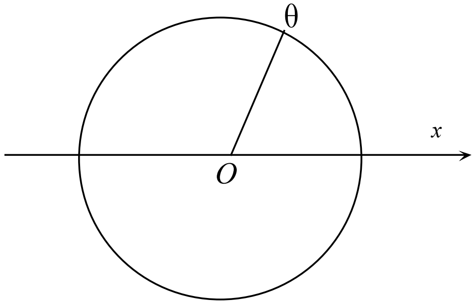
$$D=\left\{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \middle| \theta_1\le\theta\le\theta_2,\ 0\le\rho\le r\right\}$$

are arie, iar

$$\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta=\frac{(\theta_2-\theta_1)r^2}{2}$$

În particular, dacă $\theta_1\equiv 0$ și $\theta_2=\theta$, deducem că aria unui sector de rază *r* și deschidere (*unghi la centru*) θ este:

$$A_S=\frac{\theta r^2}{2}$$



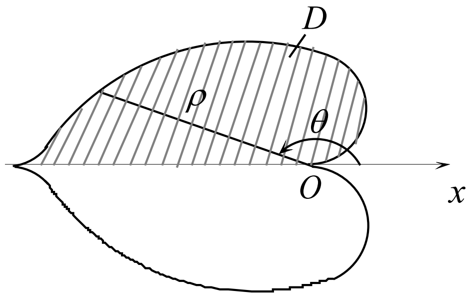
pentru $\theta = 2\pi$ se obține aria cercului:

$$A_C = \pi r^2$$

2. Să se calculeze aria *cardiodei*.

Soluție. În coordonate polare, cardioida (*vezi figura de mai jos*)are ecuația:

$$(C) \quad \rho(\theta) = a(1 - \cos\theta), \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$$



Considerăm:

$$D = \{(\theta, \rho) \big| 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \rho \le a(1 - \cos\theta)\}.$$

Atunci:

$$\text{aria}(D) = 2\,\text{aria}(D) = \int_0^\pi \rho^2(\theta) d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 - \cos\theta)^2 d\theta =$$

$$= a^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \pi a^2 - 2a^2 \sin\theta \Big|_0^\pi +$$

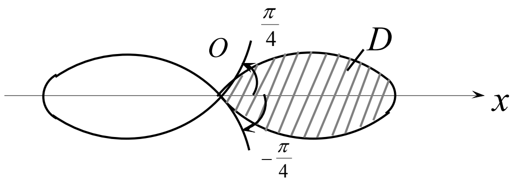
$$+ a^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2\theta \Bigg|_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Aşadar, aria cardioidei este:

$$\text{aria}(D) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

3. Să se găsească aria determinată de o buclă a *lemniscatei*.
Soluție. În coordonate polare, ecuația lemniscatei este:

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi], \qquad a > 0$$



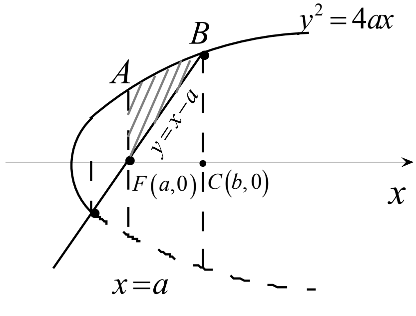
Vom considera bucla din dreapta pentru care $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, astfel că:

$$D = \left\{ (\theta, \rho) \middle| -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \ , \ 0 \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2\theta} \right\},$$

iar

$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

4. Să se găsească aria regiunii plane situate în primul cadran şi mărginită de parabola $y^2 = 4ax$ şi de dreptele de ecuații $y = x - a$ şi $x = a$.
Soluție 1. Fie *D* domeniul determinat în condițiile din enunț (*vezi figura*).



$$b := \left(3 + 2\sqrt{2}\right)a = \left(1 + \sqrt{2}\right)^3 a$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b, \ x - a \le y \le 2\sqrt{ax} \right\}$$

Atunci:

$$\text{aria}(D) = \int_a^b \left(2\sqrt{ax} - (x - a)\right) dx = 2\sqrt{a}\,\frac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{\frac{3}{2}} - \frac{(b - a)^2}{2} =$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left(5\sqrt{2}+6\right)-4a^2\,\frac{3+2\sqrt{2}}{2}=2a^2\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$$

Soluție. Vom introduce un sistem de coordonate polare având polul (originea) în punctul $F(a,0)$ – *focala parabolei* şi alegem direcția axei polare în sensul pozitiv al axei Ox. Ecuația parabolei va fi:

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

unde p este *parametrul* parabolei. În acest caz $p=2a$, astfel că în condițiile problemei, parabola va fi dată de ecuațiile polare:

$$\rho=\frac{2a}{1-\cos\theta},\qquad -\pi\le\theta\le\pi$$

iar dreptele de ecuații $y=x-a$ şi $x=a$ vor avea ecuațiile polare $\theta=\frac{\pi}{4}$, respectiv $\theta=\frac{\pi}{2}$. Prin urmare, domeniul haşurat scris în coordonate polare va fi:

$$\Delta=\left\{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le\frac{2a}{1-\cos\theta}\right\}$$

iar

$$\text{aria}(\Delta)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2(\theta)d\theta=2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-\cos\theta)^2}$$

Însă $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$, astfel că:

$$\text{aria}(\Delta)=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Mai departe, ținem seama că:

$$\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=-\frac{2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}\right)'=-2\left(1+\text{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}\right)'$$

Schimbarea de variabilă:

$$\theta\to z\therefore \text{ctg}\frac{\theta}{2}=z,\qquad \left(\text{ctg}\frac{\theta}{2}\right)'d\theta=dz$$

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
z	1	$\searrow$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$

conduce la:

$$\operatorname{aria}(\Delta)=a^2\int_0^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}\left(1+z^2\right)dz=a^2\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{8}\right)-\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]$$

Însă:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\operatorname{ctg}\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2}}{\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$$

Prin urmare:

$$\operatorname{aria}(\Delta)=a^2\left[\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right)-\frac{4}{3}\right]=2a^2\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$$

5. Să se determine aria domeniului plan mărginit de curba $\rho=2a\cos 3\theta$ şi exteriorul arcului de cerc $\rho=a$.

Soluție. Funcția $\theta\to 2a\cos 3\theta$ este periodică, având perioada principală $T=\frac{2\pi}{3}$, astfel că în intervalul $-\pi\le\theta\le\pi$ raza vectoare descrie trei bucle de arii egale. Sistemul de condiții:

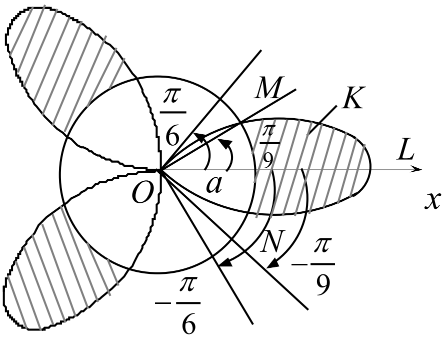
$$\begin{cases}\rho=2a\cos 3\theta\\ \rho\ge a\end{cases}$$

conduce la inegalitatea:

$$2\cos 3\theta\ge 1$$

satisfăcută pentru θ în intervalul:

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\qquad k\in\mathbb{Z}$$



Pentru $k=0$ raza vectoare $\rho=\rho(\theta)$ parcurge regiunea $[OMLNO]$ corespunzătoare primei bucle. i.e. mulțimea:

$$\left\{(\theta,\rho)\middle| -\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6};\quad 0\le\rho\le 2a\cos 3\theta\right\}$$

care se va intersecta cu mulțimea:

$$\left\{(\theta,\rho)\middle| \frac{-\pi}{9}\le\theta\le\frac{\pi}{9},\quad a\le\rho\le+\infty\right\}$$

Rezultă că aria domeniului:

$$K\equiv[MLNM]=\left\{(\theta,\rho)\middle| -\frac{\pi}{9}\le\theta\le\frac{\pi}{9},\quad a\le\rho\le 2a\cos 3\theta\right\}$$

Este:

$$\text{aria}(K)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left(4a^2\cos^2 3\theta-a^2\right)d\theta=\frac{a^2}{2}\left(4\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\cos^2 3\theta\, d\theta-\frac{a^2}{2}\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\right)$$

Însă:

$$\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\cos^2 3\theta\, d\theta=\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=2\frac{\pi}{9}+\frac{1}{12}\sin 6\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{2\pi}{9}+\frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{12}$$

astfel că, după efectuarea calculelor se obține, în final:

$$\text{aria}(K)=a^2\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

de unde rezultă şi aria întregii regiuni haşurate:

$$a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Observație. Coordonatele punctelor M şi N se obțin în sistemul:

$$\begin{cases} \rho = 2a\cos 3\theta \\ \rho = a \end{cases}$$

şi luând $k=0$ în soluţia generală:

$$\theta = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2K\pi}{3}$$

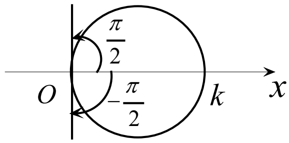
i.e. $\quad M\left(\frac{\pi}{9}\right), \quad N\left(-\frac{\pi}{9}\right).$

6. Să se determine aria domeniului plan mărginit de cercurile:

(C_1): $\rho = a\cos\theta$

(C_2): $\rho = b\cos\theta, \qquad (b > a > 0)$

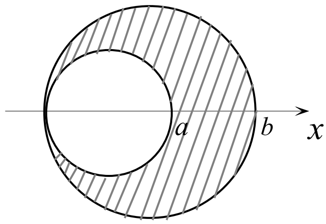
Soluţie. Pentru $k>0$ ecuaţia $\rho = k\cos\theta$ este un cerc de rază k (*vezi figura*).



Prin urmare regiunea cuprinsă între cercurile $\rho = a\cos\theta$ şi $\rho = b\cos\theta$ este reprezentată în figura de mai jos drept mulţimea:

$$K = \left\{ (\theta,\rho) \middle| -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ a\cos\theta \le \rho \le b\cos\theta \right\}$$

De aici urmează că:



$$\text{aria}(K) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b^2\cos^2\theta\ d\theta \right) = \frac{\pi}{4}\left(b^2 - a^2\right),$$

unde s-a ţinut seama că:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

7. Să se determine aria figurii plane mărginite, curbele

(C_1): $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\theta$

(C_2): $\quad \rho = 3a\sin\theta$

Soluție. Aşa cum am văzut la *exercițiul 6* curba $\rho = k\cos\theta$ este un cerc definit de mulțimea K_1. Prin urmare cercului (C_1) îi corespunde mulțimea:

$$K_1 = \left\{(\theta,\rho) \middle| -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 3\sqrt{2}a\cos\theta\right\}$$

Pentru a reprezenta curba (C_2) să observăm că:

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta^*$$

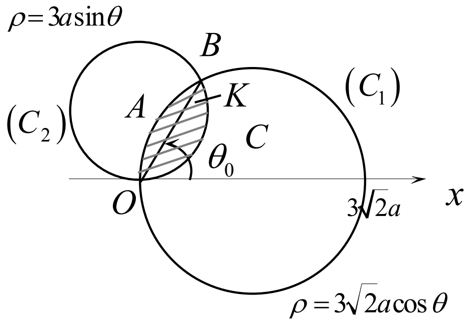
unde $\theta^* = \dfrac{\pi}{2} - \theta$. Astfel, curba (C_2) reprezintă tot un cerc, întrucât:

(C_2): $\quad \rho = 3\cos\theta^*$

şi corespunde mulțimii:

$$K_2 = \left\{(\theta^*,\rho) \middle| -\frac{\pi}{2} \le \theta^* \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 3a\cos\theta^*\right\} = \left\{(\theta,\rho) \middle| 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \rho \le 3a\sin\theta\right\}$$

Astfel, domeniul $K = K_1 \cap K_2$ este reprezentat de regiunea haşurată din figura de mai jos:



Punctele de intersecție ale cercurilor (C_1) şi (C_2) sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \rho = 3a\sin\theta \\ \theta = 3a\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

i.e. polul O şi punctul $B\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2},\ a\sqrt{6}\right)$.

Notăm $S = \text{aria}(K)$. Atunci:

$$S = S_{OABO} + S_{OBCO}$$

unde:

$$S_{OABO}=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2(\theta)\,d\theta=9a^2\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{9a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sin 2\theta_0\right)$$

unde $\sin 2\theta_0$ se evaluează în modul următor:

din $\theta_0=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ avem $\operatorname{tg}\theta_0=\sqrt{2}$, apoi:

$$\operatorname{tg}2\theta_0=\frac{2\operatorname{tg}\theta_0}{1-\operatorname{tg}^2\theta_0}=\frac{2\sqrt{2}}{1-2}=-2\sqrt{2}$$

Pe de altă parte:

$$\operatorname{tg}^2 2\theta_0=8\Leftrightarrow\frac{\sin^2 2\theta_0}{1-\sin^2 2\theta_0}=8\Leftrightarrow\sin^2 2\theta_0=\frac{8}{9}$$

de unde ținând seama că $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, avem:

$$\sin 2\theta_0=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

iar în final:

$$S_{OABO}=\frac{9a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

Apoi:

$$S_{OCBO}=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\theta_0}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\theta_0}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=$$

$$=\frac{9a^2}{4}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta_0\right)=\frac{9a^2}{4}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

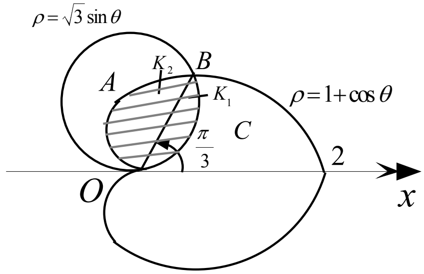
Însumând cele două arii obținem:

$$S=\frac{9a^2}{4}\left(\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right).$$

8. Să se determine aria domeniului plan mărginit de cercul $\rho=\sqrt{3}\sin\theta$ și cardioda $\rho=1+\cos\theta$.

Soluție. Punctele de intersecție ale celor două curbe sunt date de sistemul:

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{3}\sin\theta\\ \rho=1+\cos\theta\end{cases}\qquad(0\le\theta\le\pi).$$



Eliminând pe ρ între cele două ecuații rezultă:

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3} \\ \theta_2 = \pi \end{cases}$$

De aici găsim corespunzător $\rho_1 = \frac{3}{2}$ şi $\rho_2 = 0$. Astfel, punctele de intersecție ale celor două curbe sunt polul $O(\pi, 0)$ şi punctul $B\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

Notăm $K-$ domeniul plan haşurat din figura de mai sus. Atunci:

$$K = K_1 \cup K_2$$

unde:

$$K_1 = [OBCO] = \left\{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3},\ \ 0 \le \rho \le \sqrt{3}\sin\theta\right\}$$

iar

$$K_2 = [OABO] = \left\{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{\pi}{3} \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \rho \le 1 + \cos\theta\right\}$$

De aici se obține:

$$\text{aria}(K) = \text{aria}(K_1) + \text{aria}(K_2)$$

unde:

$$\text{aria}(K_1) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin^2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\theta) d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

iar

$$\text{aria}(K_2) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

Însumând cele două arii obținem:

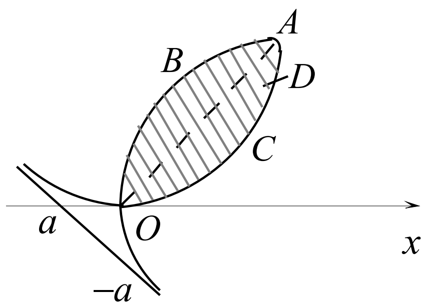
$$\text{aria}(K)=\frac{3}{4}\left(\pi-\sqrt{3}\right)$$

9. Să se determine aria regiunii plane mărginite de bucla curbei:

$x^3+y^3=3axy$ *(foliul lui Descartes)*

Soluție. Trecem la coordonate polare alegând:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$



Atunci ecuația curbei se va scrie:

$$\rho^3\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)=3a\rho^2\cos\theta\sin\theta$$

sau

$$\rho=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\frac{3a\sin 2\theta}{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\left(2-\sin 2\theta\right)}$$

De aici rezultă că pentru $\rho=0$, $\theta=0$ sau $\theta=\frac{\pi}{2}$, iar $\rho\to+\infty$ pentru $\theta=\frac{3\pi}{4}$ sau $\theta=-\frac{\pi}{4}$. Prin urmare, curba are ca asimptotă, o dreaptă de pantă $m=-1$, a cărei ecuației este $y=-x-a$ (*vezi figura*).

Corespunzător intervalului $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, bucla se găseşte în primul cadran, iar mulțimea:

$$D = \left\{ (\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \rho \le \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \right\}$$

este mărginită şi aria sa este:

$$S_{OBACO} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)^2}d\theta$$

Se observă că dreapta $y = x$ este axă de simetrie pentru bucla dată, astfel că:

$$S_{OABCO} = 2\int_{OCAO} = 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)^2}$$

Integrantul se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)^2} = \frac{\mathrm{tg}^2\theta}{\left(1 + \mathrm{tg}^3\theta\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Urmează schimbarea de variabilă:

$$\theta \to z \therefore \mathrm{tg}\,\theta = z \text{ cu } \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = dz$$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
z	0	$\nearrow$	1

care ne conduce la:

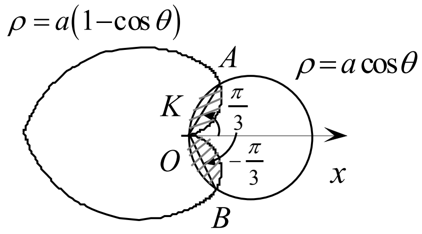
$$S_{OABCO} = 9a^2\int_0^1 \frac{z^2dz}{\left(1+z^3\right)^2} = -\frac{3a^2}{1+z^3}\bigg|_0^1 = 3a^2 - \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

10. Să se determine aria regiunii plane cuprinse între curbele de ecuație:

(C_1): $\rho = a(1 - \cos\theta)$

(C_2): $\rho = a\cos\theta$

Soluție. Curbele sunt reprezentate în *figura alăturată,* iar regiunea haşurată este notată cu *K*.



Se raționează ca la *exercițiul 8*. Punctele de intersecție dintre cardioda (C_1) şi cercul (C_2) sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \rho = a(1-\cos\theta) \\ \rho = a\cos\theta \end{cases} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

Eliminând ρ între cele două ecuații obținem:

$$1-\cos\theta = \cos\theta$$

sau

$$2a\cos\theta = 1$$

de unde $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ şi $\theta_2 = -\frac{\pi}{3}$.

De aici rezultă mai departe:

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{a}{2}$$

Mai mult, pentru $\rho = 0$ se găseşte $\theta = 0$. Astfel punctele de intersecție ale celor două curbe sunt polul *O*, $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{a}{2}\right)$ şi $B\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{a}{2}\right)$. Mulțimea *K* este formată din două bucle OAO şi OBO identice şi simetrice față de axa polară. Este suficient să calculăm aria buclei OAO situată în primul cadran, i.e. aria mulțimii $K_1 \cup K_2$, unde:

$$K_1 \equiv [OAO] = \left\{ (\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3},\quad 0 \le \rho \le a(1-\cos\theta) \right\}$$

$$K_2 = [OBO] = \left\{ (\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \rho \le a\cos\theta \right\}$$

Avem:

$$\text{aria}(K_1) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)$$

Apoi:

$$\text{aria}\left(K_2\right)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\; d\theta=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

de unde rezultă în final că:

$$\text{aria}\left(K\right)=2\left[\text{aria}\left(K_1\right)+\text{aria}\left(K_2\right)\right]=a^2\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$$

Exerciții propuse

1. Să se găsească ecuația cardiodei de ecuație:

$$\rho=2r\left(1+\cos\theta\right),\quad r>0$$

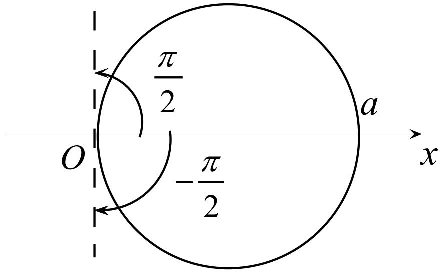
$R:\ 6\pi r^2$

2. Să se determine aria domeniului plan mărginit de curba de ecuație:

$$\rho=a\cos\theta$$

$R:\ \frac{\pi a^2}{4}$

Indicație. Curba reprezintă un cerc de rază $\frac{a}{2}$, ce trece prin pol şi este simetrică față de axa polară $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.



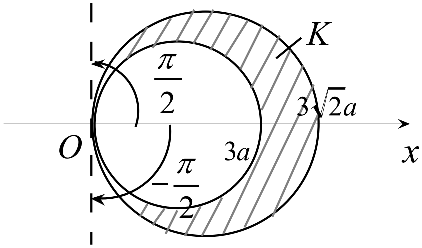
3. Să se determine aria domeniului plan mărginit de curbele:

$$(C_1): \quad \rho = 3\sqrt{2}a\cos\theta$$

$$(C_2): \quad \rho = 3a\cos\theta$$

$R: \quad \dfrac{9\pi a^2}{4}$

Indicație. Se ține seama de exercițiul 2. Regiunea dintre cele două cercuri este domeniul K haşurat în *figura alăturată*.

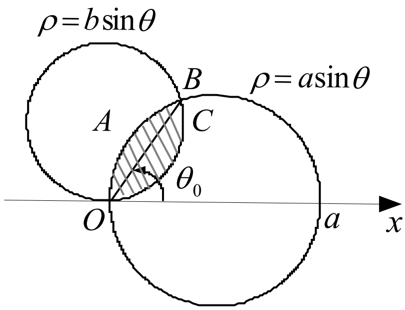


4. Să se determine aria regiunii plane mărginite de cercurile:

$$(C_1): \quad \rho = a\cos\theta$$

$$(C_2): \quad \rho = b\sin\theta \qquad (a > b > 0)$$

Indicație. Notăm S aria regiunii haşurate *(vezi figura alăturată).*



$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Atunci:

$$S = S_{OABO} + S_{OBCO} \text{ unde } S_{OABO} = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} a^2\cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{ab}{a^2+b^2} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$$

iar

$$S_{OBCO} = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} b^2\sin^2\theta\, d\theta = \frac{b^2}{4}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2} + \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$$

5. Să se determine aria regiunii plane mărginite de cercul $\rho = a$ şi cardioda $\rho = a(1-\cos\theta)$

R: $2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$

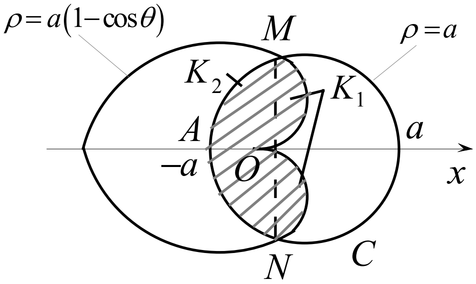
Indicație. Punctele de intersecție ale celor două curbe sunt $M\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ şi $N\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. Fie S aria mulțimii haşurate (*vezi figura*). Atunci:

$$S = \text{aria}(K_2)+\text{aria}(K_1),$$

unde:

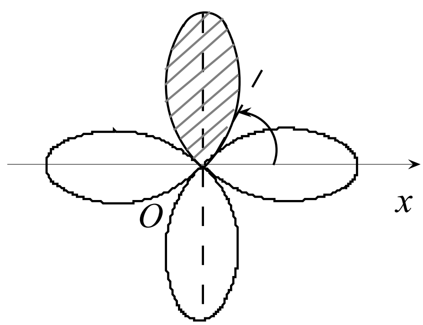
$$\text{aria}(K_2) = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2 d\theta\right) = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\text{aria}(K_1) = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\cos\theta)^2\, d\theta\right) = \pi a^2$$

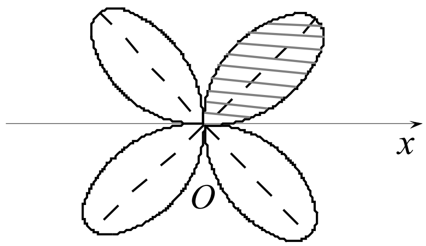


6. Să se determine ariile regiunilor plane mărginite de buclele curbelor:
   a) $\rho = a\cos 2\theta$
   b) $\rho = a\sin 2\theta$

R: a) $\frac{\pi a^2}{8}$



b) $\frac{\pi a^2}{8}$

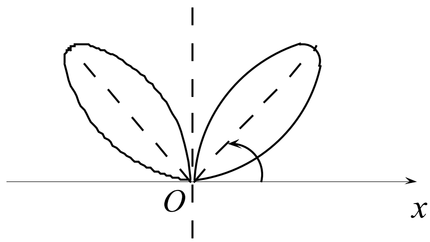


7. Să se determine aria regiunii mărginite de curba:

$$\rho = a\sin\theta\cos^2\theta, \quad (a>0).$$

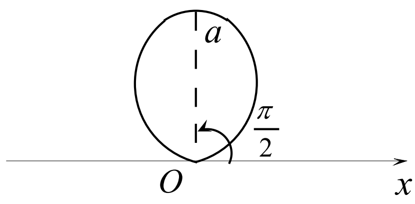
R: $\frac{\pi a^2}{32}$

Indicație.



8. Să se determine aria regiunii mărginite de curba $\rho = a\cos^3\theta, \quad (a>0)$.

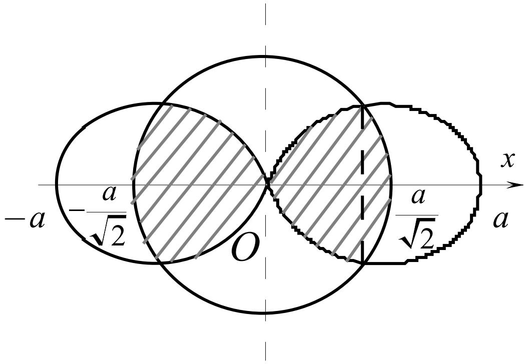
R: $\frac{5}{32}\pi a^2$



Indicație. Curba trece prin pol şi este simetrică față de axa polară.

9. Să se calculeze aria regiunii plane situate în interiorul cercului: $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$ şi mărginită de interiorul *lemniscatei lui Bernoulli*: $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

$R: \quad a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

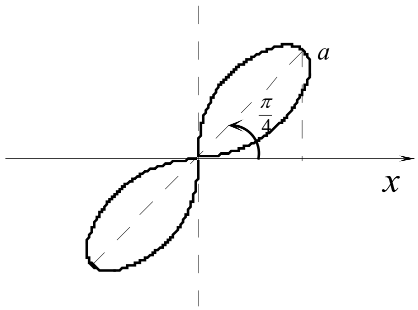


10. Trecând la coordonate polare, să se calculeze aria regiunii plane mărginite de curba de ecuație:

$$\left(x^2+y^2\right)^3=4a^2x^2y^2$$

Indicație. Notăm $x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta.$ Se obține reprezentarea curbei în coordonate polare:

$$\rho=a\sqrt{\sin 2\theta}$$



11. Trecând la coordonate polare, să se calculeze aria regiunii plane mărginite de curba de ecuație:

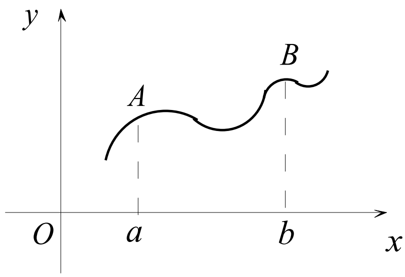
$$x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)$$

$R: \quad \sqrt{2}\pi a^2$

3.4. Lungimea unui arc de curbă plană reprezentată în coordonate carteziene

Fie (C) o curbă plană reprezentată explicit de ecuația:

(C): $y = f(x)$.



Presupunem f de clasă C^1 şi fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc pe (C) cuprins între punctele de abscisă $x = a$ şi $x = b$ (*vezi figura*). Atunci lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ va fi dată de relația:

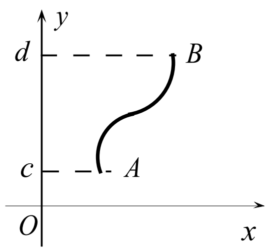
$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}$$

Observații. Dacă curba (C) este reprezentată de ecuația:

(C): $x = g(y)$ sau $x = x(y)$

(*vezi figura de mai jos*), atunci presupunând că *g* este de clasă C^1, lungimea unui arc $\overset{\frown}{AB}$ pe curba (C) va fi evaluată după relația:

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2}\,dy}$$

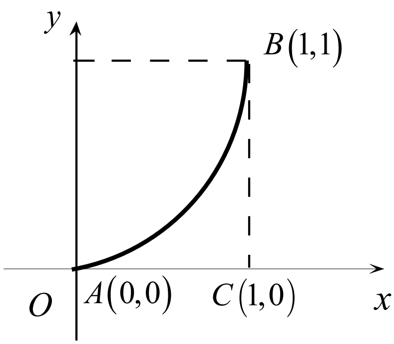


Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze arcul de parabolă $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, cuprins între punctele $A(0,0)$ şi $B(1,1)$.

   Soluție. Considerăm funcția $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, $f \in C^1(\mathbb{R})$, iar $f'(x) = 2x$. Atunci:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{a^2+x^2}\,dx, \text{ unde } a = \frac{1}{2}.$$



După cum ştim:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

astfel că:

$$l_{\widehat{AB}} = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) =$$

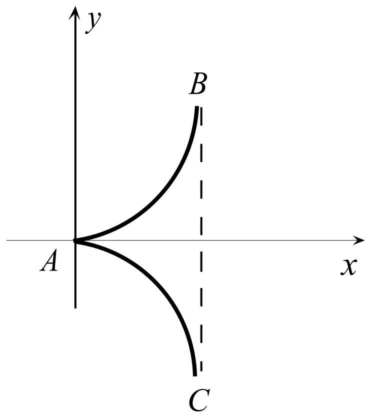
sau în final:

$$l_{\widehat{AB}} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$

2. Să se calculeze lungimea arcului de parabolă semicubică: $y^2 = x^3$ cuprins între punctele de abscisă $x = 0$ şi $x = 4$.

Soluție. Funcția $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ este definită pentru $x \geq 0$ (*vezi figura*), iar

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad x \in [0,4].$$



Întrucât punctului de abscisă $x=4$ îi corespund două valori $y=8$ şi $y=-8$, iar graficul este simetric faţă de axa Ox, lungimea arcului de curbă cuprins între punctele $x=0$ şi $x=4$ va fi:

$$l=2l_{\widehat{AB}}=2\int_0^4\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

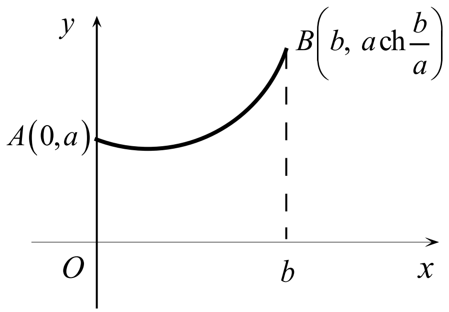
3. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\quad x\in[0,b]$$

Soluţie. Ecuaţia curbei se mai poate scrie şi sub forma:

$$(C):\ y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\quad x\in[0,b]$$

Recunoaştem un arc de lănţişor (*vezi figura*):



Avem:

$$y'(x)=\mathrm{sh}\frac{x}{a}$$

iar lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ va fi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}}=\int_0^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_0^b\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}dx=\int_0^b\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\bigg|_0^b=$$

$$=a\left(\mathrm{sh}\frac{b}{a}-\mathrm{sh}\frac{0}{a}\right)=a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}$$

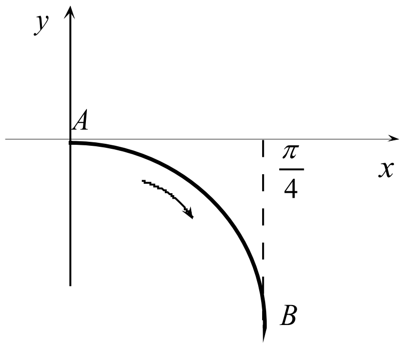
4. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ y=\ln\cos x$$

cuprins între punctele de abscisă $x=0$ şi $x=\frac{\pi}{4}$.

Soluție. Arcul de curbă este repezentat în figura de mai jos. Întrucât: $y'=-\mathrm{tg}\,x$ rezultă că:

$$\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x}=\frac{1}{\cos x}$$



Apoi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$$

După cum ştim:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$$

aşa că:

$$l_{\overset{\frown}{AB}}=\ln\left|\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}\right)$$

5. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1},\quad x>0.$$

cuprins între punctele de abscisă $x=a$ şi $x=b$, $(b>a>0)$.

Soluție. Se observă că

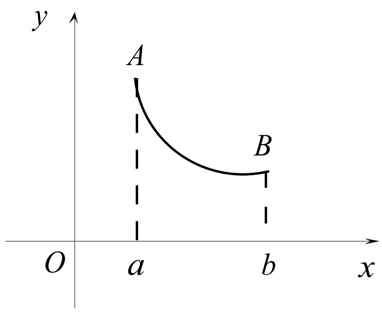
$$y'=-\frac{2e^x}{e^{2x}-1}\ ,\ \forall x>0,\ \text{iar}\quad 1+y'^2(x)=1+\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2$$

Prin urmare:

$$l_{\widehat{AB}}=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx=\int_a^b\frac{\frac{e^x+e^{-z}}{2}}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}dx=\int_a^b\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}dx=\ln(\operatorname{sh}x)\Big|_a^b$$

sau în final:

$$l_{\widehat{AB}}=\ln\left(\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}\right)$$

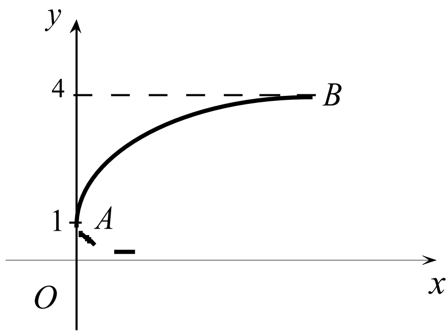


6. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\quad y>0$$

cuprins între punctele de ordonate $y=1$ şi $y=2$.

Soluție. Observăm că este mai convenabil să schimbăm rolul lui y şi x între ele considerând pe y ca variabilă independentă (*vezi figura*).

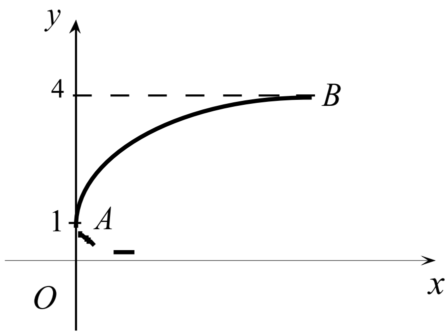


Atunci:

$$x'(y)=\frac{y}{2}-\frac{1}{2y},\ \text{iar}\ \sqrt{1+x'^2(y)}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2y}$$

Prin urmare:

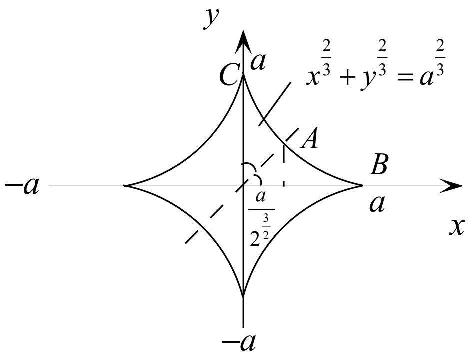
$$l_{\widehat{AB}}=\int_1^4\sqrt{1+x'^2(y)}dy=\int_1^4\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}\ln y\right)\Bigg|_1^4=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3+\ln 4}{2}$$



7. Calculați lungimea astroidei definită implicit de ecuația:

$$(C)\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\quad (a>0)$$

Soluție. După cum ştim (*vezi figura*) graficul astroidei este simetric în raport cu axele de coordonate şi cu bisectoarele unghiurilor formate de acestea.



Mai mult, este suficient să determinăm lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ cuprins între prima bisectoare şi axa Ox şi apoi să înmulțim rezultatul cu 8. Astfel, în primul cadran ecuația arcului $\overset{\frown}{AB}$ va fi:

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

unde extremitățile arcului au, respectiv, coordonatele:

$$A:\begin{cases}x=\dfrac{a}{2^{\frac{3}{2}}}\\ y=x\end{cases}\quad \text{şi}\quad B:\begin{cases}x=a\\ y=0\end{cases}$$

Mai departe:

$$y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}=-x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

iar

$$\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Corespunzător:

$$l_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{\frac{a}{2^{\frac{3}{2}}}}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{\frac{a}{2^{2/3}}}^{a}a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{\frac{a}{2^{2/3}}}^{a}=\frac{3}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)=\frac{3a}{4}$$

Prin urmare, lungimea astroidei este:

$$l=8l_{\overset{\frown}{AB}}=6a$$

Observație. Dacă am fi calculat lungime arcului $\overset{\frown}{AC}$ cuprins între axa Oy şi prima bisectoare, atunci integrala:

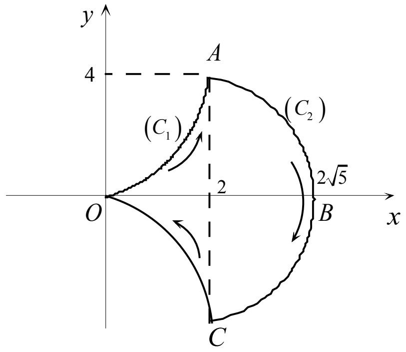
$$\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx$$

devenea infinită, dacă $x = 0$.

8. Să se calculeze lungimea drumului $OABCO$ format de reuniunea arcelor de curbă:

$$(C_1): \ y^2 = 2x^3 \qquad (x > 0),$$
$$(C_2): \ x^2 + y^2 = 20 \quad (x > 0).$$

Soluție. Datorită simetriei în raport cu axa Ox a celor două curbe (*vezi figura*) este suficient să evaluăm lungimile arcelor $\overset{\frown}{OA}$ şi $\overset{\frown}{AB}$ şi apoi să



înmulțim rezultatul cu 2. Mai întâi, să observăm că punctele A şi C sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y^2 = 2x^3 \end{cases}$$

de unde se obțin: $A(2,4)$ şi $C(2,-4)$. Prin urmare, pe arcul $\overset{\frown}{OA}$:

$$y = \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}\sqrt{2x}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9x}{2}},$$

astfel:

$$l_{\overset{\frown}{OA}} = \int_0^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{9x}{2}}\,dx = \frac{4}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Apoi, pe arcul $\overset{\frown}{AB}$:

$$y = \sqrt{20-x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{20-x^2}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\sqrt{20-x^2}},$$

de unde rezultă că:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_2^{2\sqrt{5}} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_2^{2\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{20-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2\sqrt{5}}\Bigg|_2^{2\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$$

În final:

$$l = 2\left(l_{\overset{\frown}{OA}} + l_{\overset{\frown}{AB}}\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) + \pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Observație. Evaluarea lungimii arcului $\overset{\frown}{AB}$ se putea face şi direct, ținând seama de măsura unghiului la centru $\widehat{AOB}$ şi raza cercului *R*:

$$\theta = m\left(\widehat{AOB}\right) = \operatorname{arctg} 2, \qquad R = 2\sqrt{5}$$

Astfel:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \theta R = 2\sqrt{5}\operatorname{arctg} 2$$

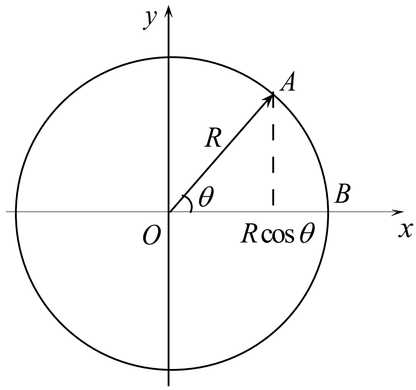
Lăsăm pe seama cititorului verificarea egalității:

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\operatorname{arctg} 2 \ \ !$$

9. Să se calculeze lungimea unui arc de cerc de rază *R* şi unghi la centru θ.
Soluție. Considerăm cercul de ecuație

$$(C):\ x^2 + y^2 = R^2$$

şi arcul $\overset{\frown}{AB}$ cuprins între axa Ox şi dreapta de ecuație $y = x\operatorname{tg}\theta$ (*vezi figura*).



Atunci coordonatele punctului *A* sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} y = x\operatorname{tg}\theta \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

i.e. $x_A = R\cos\theta$ şi $y_A = R\sin\theta$. Mai departe, scriem:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

iar lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ va fi :

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{R\cos\theta}^{R} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{R\cos\theta}^{R} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -R\arccos\frac{x}{R}\Bigg|_{R\cos\theta}^{R} = R\theta$$

Observație. Pentru $\theta = 2\pi$ se obține lungimea întregului cerc:

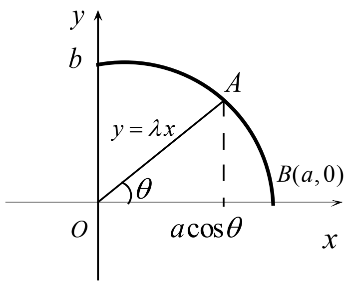
$l = 2\pi R$

10. Să se calculeze lungimea arcului de elipsă:

$$(C) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuprins între axa Ox şi dreapta de ecuație $y = \lambda x$.

Soluție. Fie θ măsura unghiului făcut de dreapta $y = \lambda x$ şi axa Ox. Atunci $\lambda = \operatorname{tg}\theta$, iar $\theta = \operatorname{arctg}\lambda$.



Pe arcul $\overset{\frown}{AB}$,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2 - x^2\right)}}.$$

Corespunzător, vom scrie că:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{a\cos\theta}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{a\cos\theta}^{a} \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2 - x^2\right)}}\,dx$$

Efectuăm schimbarea:

$$x \to \tau \therefore x = a\cos\tau,\ dx = -a\sin\tau\ d\tau$$

x	$a\cos\theta$		a
τ	θ	$\searrow$	0

aşa încât se obține reprezentarea integrală a lungimii arcului de curbă:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{\theta} \sqrt{a^2\sin^2\tau + b^2\cos^2\tau}\ d\tau$$

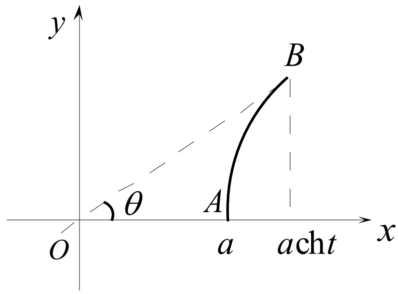
(A se vedea *exercițiul 13* de la acest paragraf).

11. Să se calculeze lungimea arcului de hiperbolă:

$$(C){:}\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x, y > 0$$

cuprins între axa Ox şi dreapta $y = \lambda x$.

Soluție. Fie θ măsura unghiului făcut cu dreapta $y = \lambda x$ cu axa *Ox*. Atunci $\lambda = \operatorname{th} t$ şi $t = \operatorname{arcth} \lambda$



Pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ putem scrie:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2\left(x^2 - a^2\right)}}.$$

Apoi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^{a\operatorname{ch} t} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_a^{a\operatorname{ch} t} \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2\left(x^2 - a^2\right)}}\,dx$$

Schimbăm:

$$x \to \tau \therefore x = a\operatorname{ch}\tau, \qquad dx = a\operatorname{sh}\tau\, d\tau$$

x	a		$a\operatorname{ch} t$
τ	0	$\nearrow$	t

astfel că:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_o^t \sqrt{a^2\operatorname{sh}^2\tau + b^2\operatorname{ch}^2\tau}\, d\tau$$

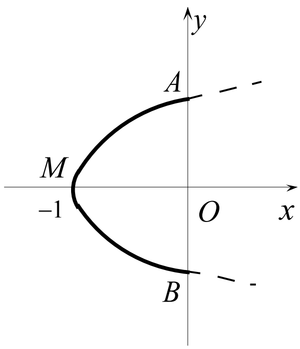
(A se vedea *exercițiul 13* de la acest paragraf).

12. Să se calculeze lungimea arcului de parabolă:

$$(C)\text{: } x = \frac{y^2}{2} - 1$$

tăiat în exterior de axa *Oy*.

Soluție. Raționând ca la *exercițiul 11*, vom considera *y* ca variabilă independentă.



Mai departe (*vezi figura*), se observă că arcul $\overset{\frown}{AB}$ este simetric față de axa Ox, astfel că este suficient să evaluăm $l_{\overset{\frown}{AM}}$. Prin urmare:

$$x'(y) = y,\quad \sqrt{1 + x'^2(y)} = \sqrt{1 + y^2},$$

iar

$$l_{\overset{\frown}{AM}} = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + x'^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + y^2}\,dy = \left(\frac{y}{2}\sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} - 1 \right) \right]$$

În final, rezultă că:

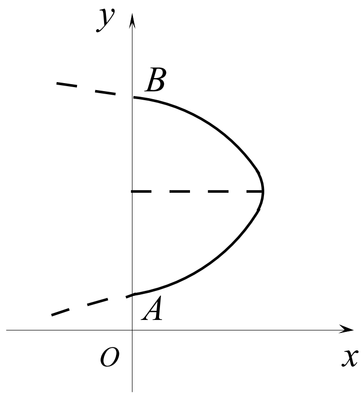
$$l_{\overset{\frown}{AB}} = 2l_{\overset{\frown}{AM}} = \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} - 1 \right)$$

13. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ x = \ln(2\sin y)$$

cuprins între punctele adiacente de intersecție cu axa Oy.

Soluție. Considerăm y ca variabilă independentă şi fie A şi B punctele de intersecție *(vezi figura alăturată)*.



Pentru $x=0$ se obțin $y_A=\dfrac{\pi}{6}$ şi $y_B=\dfrac{5\pi}{6}$, iar:

$$l_{\widehat{AB}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1+\frac{\operatorname{ctg}^2 y}{4}}\,dy$$

Efectuăm schimbarea de variabilă:

$$y\to t\therefore \operatorname{ctg} y=t,\quad dy=-\frac{dt}{1+t^2}$$

y	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$
t	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$

apoi scriem succesiv:

$$l_{\widehat{AB}}=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\,\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{4+t^2}}{1+t^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\left(4+t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)\sqrt{4+t^2}}$$

Pentru a evalua ultima integrală se recomandă a se scrie ca sumă de două integrale care se reduc printr-o schimbare convenabilă la integrale de funcții raționale. Lăsăm pe seama cititorului efectuarea acestor calcule! În final, se obține:

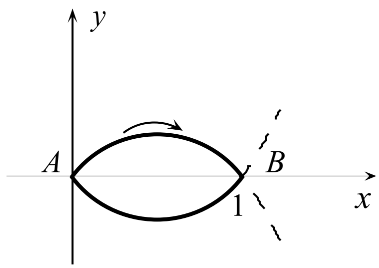
$$l_{\widehat{AB}}=\ln\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}$$

14. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ 3y^2=x(x-1)^2$$

cuprins între punctele adiacente ale intersecției cu axa Ox (i.e. jumătate din lungimea buclei).

Soluție. După forma ecuației se observă că graficul curbei este simetric față de axa Ox, iar din faptul că $x=\dfrac{3y^2}{(x-1)^2}\geq 0$, rezultă reprezentarea din *figura de mai jos*:



unde $A(0,0)$ şi $B(1,0)$. Avem de calculat:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Cu:

$$y = (x-1)\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{şi} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

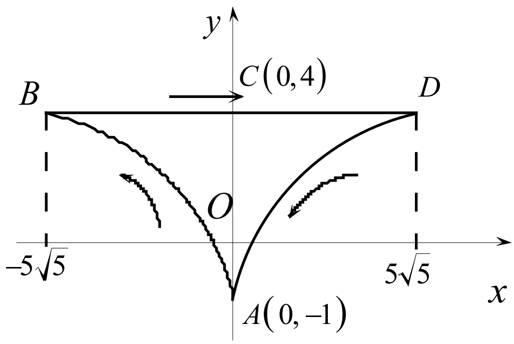
se obține:

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{12}\left(9x+\frac{1}{x}-6\right)} = \sqrt{\frac{1}{12}\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Mai departe:

$$l_{\widehat{AB}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1 \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

15. Să se calculeze lungimea drumului format de arcele de curbă. *Soluție*. Din definiție, curba $x^2 = (y+1)^3$ este simetrică față de axa Oy, iar din faptul că $(y+1)^3 \geq 0$ deducem că $y \geq -1$. Punctul $A(0,-1)$ este punct de întoarcere, iar dreapta $y=4$ taie curba în punctele de abscisă $x = \pm 5\sqrt{5}$ (*vezi figura lăturată*).



Avem de calculat lungimea drumului $ABCDA$. Este suficient să calculăm lungimile arcelor $\widehat{CD}$ şi $\widehat{AD}$. Astfel:

$$l_{\widehat{CD}} = 5\sqrt{5} \quad \text{şi} \quad l_{\widehat{AD}} = \int_1^4 \sqrt{-1+x'^2(y)}\,dy$$

unde:

$$x = (y+1)^{\frac{3}{2}}$$

De aici se obține:

$$x'(y)=\frac{3}{2}\sqrt{y+1},\qquad \sqrt{1+x'^2}=\sqrt{\frac{9x+13}{4}}$$

aşa că:

$$l_{\overset{\frown}{AD}}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{4}\sqrt{9x+13}dx=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(9x+13)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{7^3-2^3}{27}=\frac{335}{27}$$

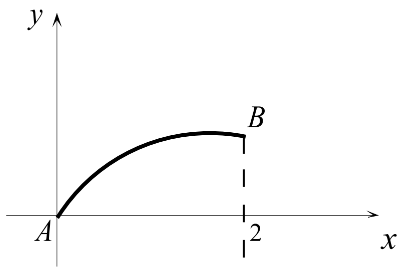
iar în final:

$$l=2\left(l_{\overset{\frown}{AD}}+l_{\overset{\frown}{CD}}\right)=10\left(\frac{67}{27}+\sqrt{5}\right)$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze lungimea arcului de parabolă $x=y^2$ cuprins între punctele $A(0,0)$ şi $B(2,4)$.

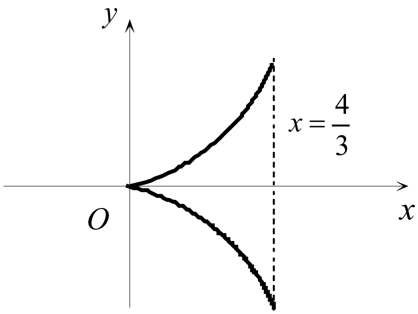
$R:\quad \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$



Indicație. Scriem $y=f(x)$, unde $f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,2]$.

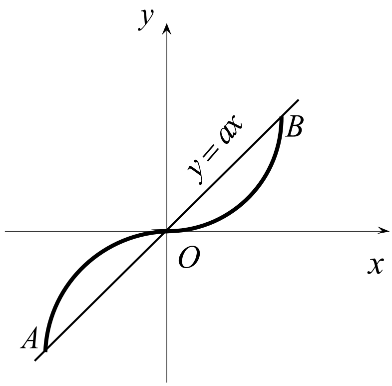
2. Să se calculeze lungimea arcului de curbă tăiat în exterior de dreapta $x=\frac{4}{3}$.

$R:\quad \frac{112}{27}$



3. Să se calculeze lungimea arcului de curbă $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ tăiat exterior de dreapta $y=ax$.

$R:\quad 2a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{b}{a}-1\right)$



Indicație. Scriem $y=a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$ şi considerăm sistemul:

$$\begin{cases} y=a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a} \\ y=ax \end{cases}$$

cu soluțiile: $A(-b,\ -ab)$ şi $B(b,\ ab)$.

Arcul de curbă $\overset{\frown}{AB}$ are lungimea:

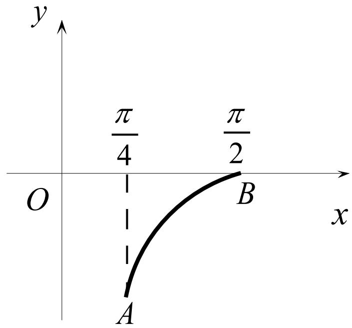
$$l_{\overset{\frown}{AB}}=2\int_0^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\int_0^b\sqrt{1+\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}dx=2a\left(\mathrm{ch}\frac{b}{a}-1\right).$$

4. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

(C): $y=\ln\sin x$

cuprins între punctele de abscisă $x = \frac{\pi}{4}$ şi $x = \frac{\pi}{2}$.

$R:\quad \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$

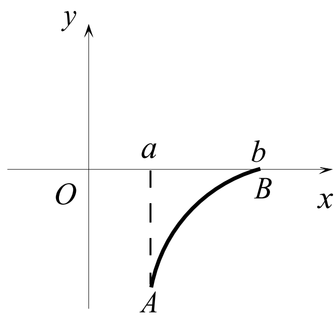


5. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right),\quad (x > 0)$$

cuprins între punctele de abscisă $x = a$ şi $x = b$, $(b > a > 0)$.

$R:\quad \ln\left(\frac{e^b + e^{-b}}{e^a + e^{-a}}\right)$



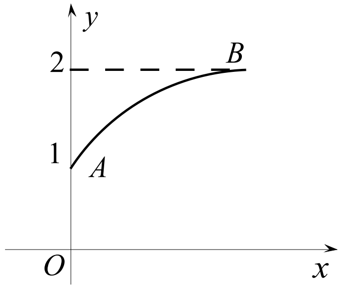
6. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ y = \frac{x^2}{2} - \ln x,\quad (x > 0),$$

cuprins între punctele de abscisă $x = 1$ şi $x = 2$.

$R:\quad 2 + \ln 2$

Indicație. $y' = x - \frac{1}{x}$, iar $\sqrt{1 + y'^2} = x + \frac{1}{x}$



7. Să se calculeze lungimea arcului de cerc:

$$(C):\ x^2 + y^2 = R^2,$$

cuprins între punctele $A\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}\right)$ şi $B\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$

$R:\quad \frac{5\pi R}{12}$

Indicație. Se va evalua integrala:

$$\int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

unde

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

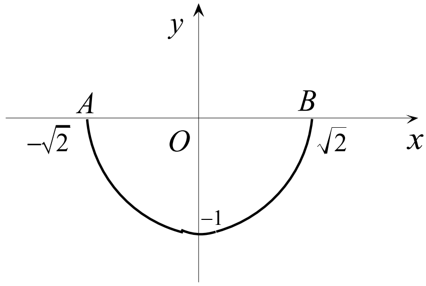
8. Să se calculeze lungimea arcului de parabolă:

$$(C):\ y = \frac{x^2}{2} - 1$$

tăiat în exterior de axa Ox.

$R:\quad \sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

Indicație. Se evaluează $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}\,dx.$



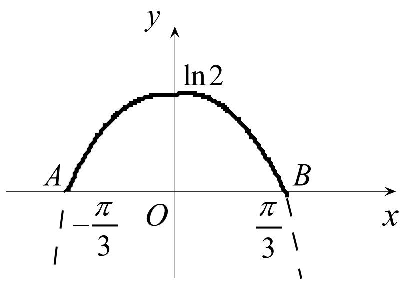
9. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ y=\ln(2\cos x)$$

între punctele adiacente de intersecție cu axa Ox.

R: $2\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

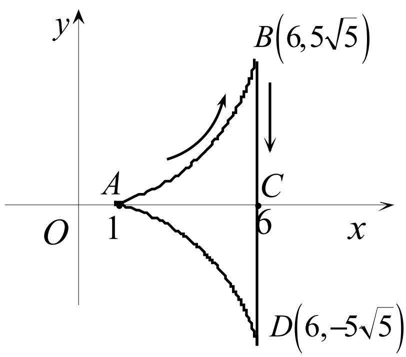
Indicație. Se evaluează $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x}\ dx$ utilizând eventual substituția: $\operatorname{tg} x=t$.



10. Să se calculeze lungimea drumului format de reuniunea arcelor cuprinse între curba $y^2=(x-1)^3$ şi dreapta $x=6$.

R: $\frac{558}{27}+10\sqrt{5}$

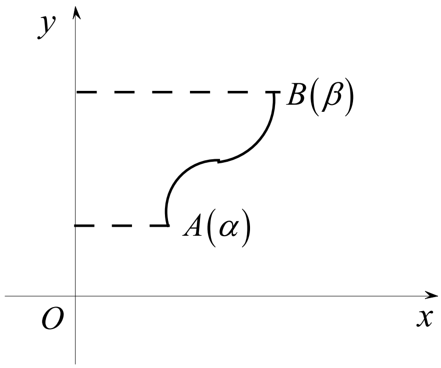
Indicație. $l_{\widehat{AB}}=\frac{1}{2}\int_1^6\sqrt{9x-5}\ dx$



3.5. Lungimea unui arc de curbă plană reprezentată în coordonate parametrice

Fie curba (C) reprezentată parametric de ecuațiile:

$$(C):\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$



Presupunând că funcțiile $x(t)$ şi $y(t)$ sunt de clasă $C^1[\alpha,\beta]$, atunci (*vezi figura*) lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ va fi:

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze lungimea unui arc de cerc:

$$(C):\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

având măsura unghiului la centru egală cu θ.

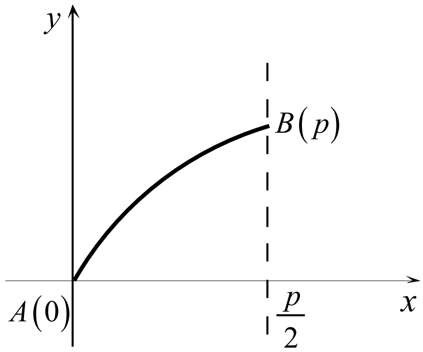
Soluție. Considerăm punctele *A* şi *B* definite de parametrii $t = 0$ şi respectiv, $t = \theta$. Atunci:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^\theta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^\theta \sqrt{R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = \int_0^\theta R\,dt = R\theta.$$

2. Să se calculeze lungimea arcului de parabolă $y^2 = 2px$ tăiat în exterior de dreapta $x = \dfrac{p}{2}$ şi situat în primul cadran.

Soluție. Considerăm o parametrizare a arcului de parabolă sub forma:

$$\overset{\frown}{AB}: \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \qquad \left(t \in [0, p] \right).$$



Atunci:

$$x'(t) = \frac{t}{p}, \quad y'(t) = 1, \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{p}\sqrt{t^2 + p^2}.$$

În acest caz:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^p \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^p \sqrt{t^2 + p^2}\,dt = \frac{1}{2p}\left(t\sqrt{t^2 + p^2} + \ln\left(t + \sqrt{t^2 + p^2} \right) \right)\Big|_0^p$$

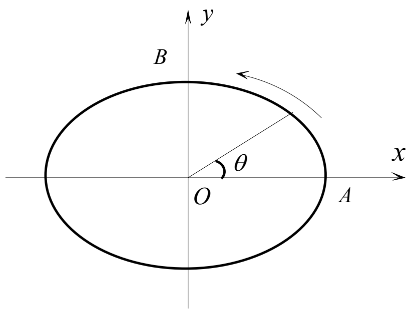
sau în final:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2p}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

3. Să se calculeze lungimea elipsei definite parametric de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Soluție. Lungimea elipsei (*vezi figura*) se poate calcula ca fiind de patru ori lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$.



Se obține integrala:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt$$

care a fost evaluată la *exercițiul 13* din *paragraful 3.4*.

4. Să se calculeze lungimea arcului *involutei* cercului:

$$(C): \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

cuprins între $t = 0$ şi $t = 2\pi$.

Soluție. Derivând în raport cu *t*, obținem:

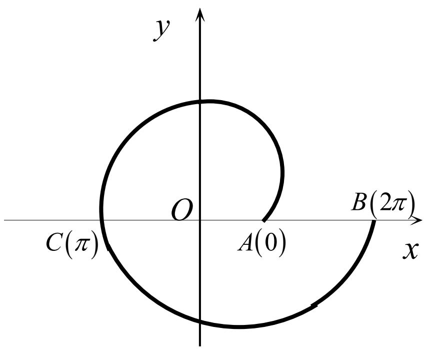
$$x'(t) = at\cos t, \quad y'(t) = at\sin t,$$

de unde rezultă:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = at$$

apoi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi^2 a$$



5. Să se calculeze lungimea unei bucle de *cicloidă*:

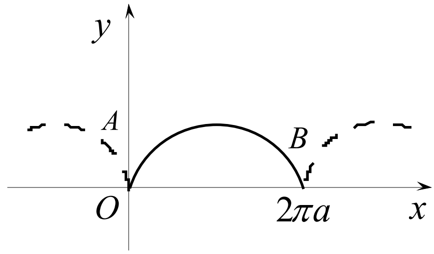
$$(C): \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Soluție. Vom scrie mai intâi:

$$\begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t \\ y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t \end{cases}$$

Apoi,

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = 3a\left|\sin t \cos t\right| = \frac{3a}{2}\left|\sin 2t\right|$$



Însă, pentru $0 \le t \le 2\pi$, $\sin 2t \ge 0$, aşa că:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{3a}{2}\sin 2t$$

Pe de altă parte funcția $\sin 2t$ este periodică de perioadă $\frac{\pi}{2}$, de unde

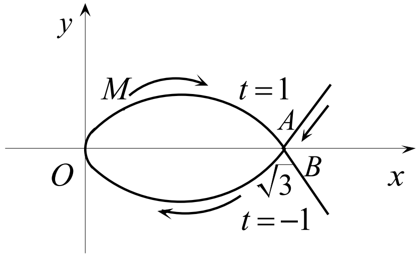
deducem că:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2}\sin 2t \; dt = 6a.$$

6. Să se calculeze lungimea buclei curbei:

$$(C): \begin{cases} x = \sqrt{3}t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Soluție. Mai intâi trebuie să stabilim limitele de integrare. Funcțiile $x(t)$ şi $y(t)$ sunt definite pentru orice $t \in \mathbb{R}$, însă $x(t) \ge 0$, astfel că bucla curbei este situată în semiplanul $x \ge 0$. Mai departe, întrucât $y(-t) = y(t)$ şi $x(-t) = x(t)$, deducem că curba (C) este simetrică în raport cu axa Ox. Intersecția curbei cu axa Ox se obține rezolvând ecuația $y(t)=0$. Originea și punctele $A(t=1)$, $B(t=-1)$ sunt singurele puncte de intersecție, iar $x(1)=x(-1)=\sqrt{3}$.



Corespunzător, $(\sqrt{3},0)$ este singurul punct de autointersecție al curbei. Astfel vom calcula:

$$l_{\widehat{AB}}=\int_{-1}^{1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

Derivând ecuațiile parametrice în raport cu t obținem :

$$\begin{cases} x'=2\sqrt{3}t \\ y'=1-3t^2 \end{cases}$$

iar apoi:

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{12t^2+\left(1-6t^2+9t^4\right)}=\sqrt{1+6t^2+9t^4}=1+3t^2$$

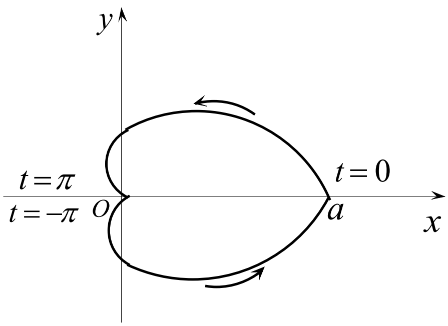
De aici deducem că:

$$l_{\widehat{AB}}=\int_{-1}^{1}\left(1+3t^2\right)dt=4$$

7. Să se calculeze lungimea cardiodei de ecuație:

$$(C):\ \begin{cases} x=a\cos t(1+\cos t) \\ y=a\sin t(1+\cos t) \end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$$

Soluție.



Datorită simetriei în raport cu axa Ox (*vezi figura de mai sus*), este suficient să calculăm:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

Astfel derivând în ecuațiile de mai sus, obținem:

$$\begin{cases} x' = -a\sin t - 2a\sin t\cos t \\ y' = a\cos t + 2a\sin t\cos t \end{cases}$$

apoi:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{2a^2\left(1+\cos t\right)} = 2a\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$

De aici, deducem că:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 2a\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\frac{t}{2}\, dt = 8a,$$

iar în final:

$$l = 2l_{\widehat{AB}} = 16a$$

8. Să se calculeze lungimea curbei:

$$(C): \begin{cases} x = 4\sqrt{2}a\sin t \\ y = a\sin 2t \end{cases}$$

Soluție. Reprezentarea grafică a curbei este dată în *paragraful 3.3*. Se va evalua:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

Astfel:

$$\begin{cases} x' = 4a\sqrt{2\cos t} \\ y' = 2a\cos 2t \end{cases}$$

iar

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2a\left(2+\cos 2t\right)$$

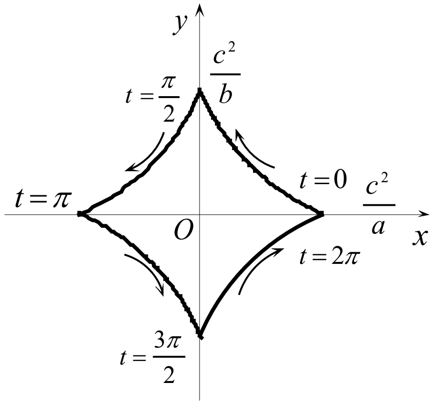
De aici rezultă că:

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\left(2+\cos 2t\right)dt = 8\pi a.$$

9. Să se calculeze lungimea arcului evolutei elipsei:

$$(C): \begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases} \quad \left(c^2 = a^2 - b^2\right).$$

Soluție. După cum știm, evoluta elipsei este o *astroidă* a cărei reprezentare este dată în *figura de mai jos*.



Evaluăm integrala:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

unde

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t \\ y'=-\dfrac{3c^2}{b^2}\sin^2 t\cos t \end{cases}$$

iar

$$x'^2+y'^2=9c^2\left(\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}\right)\cos^2 t\sin^2 t$$

Urmează că:

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=3c\left|\cos t\sin t\right|\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}=\frac{3c}{2}\left|\sin 2t\right|\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}$$

Relativ la periodicitatea funcției $\sin 2t$, vom raționa ca la *exercițiul 4,* astfel că:

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c}{2}\sin 2t\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}\,dt$$

Ținând seama că factorul de sub radical se scrie sub forma:

$$\frac{1}{a^2}\cos^2 t+\frac{1}{b^2}\sin^2 t=\frac{c^2}{a^2b^2}\sin^2 t+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\sin^2 t\right)$$

obținem:

$$l=\frac{bc}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\sin^2 t}\ \sin 2t\ dt$$

Efectuăm apoi schimbarea de variabilă:

$$t\to u\ \therefore\ \sin^2 t=u\quad \text{cu}\quad \frac{1}{2}\sin 2t\ dt=du$$

t	0		$\frac{\pi}{2}$
u	0	$\nearrow$	1

astfel că:

$$l=\frac{3c}{a^2b}\int_0^1\sqrt{b^2+c^2u}\ du=\frac{4c\left(a^3-b^3\right)}{ab}$$

10. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ \begin{cases} x=a\left(2\cos t-\cos 2t\right)\\ y=a\left(2\sin t-\sin 2t\right)\end{cases}$$

Soluție. Limitele de integrare sunt $t_1=0$ şi $t_2=T,\ \left(T>0\right)$.

Apoi:

$$\begin{cases} x'=a\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)\\ y'=a\left(2\cos t-2\cos 2t\right)\end{cases}$$

De aici urmează că:

$$x'^2+y'^2=a^2\left[\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)^2+\left(2\cos t-2\cos 2t\right)^2\right]=$$

$$=8a^2\left(1-\cos t\right)=16a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

Mai departe, pentru $T\in\left[0,\pi\right]$:

$$\int_0^T\sqrt{x'^2+y'^2}dt=4a\int_0^T\sin\frac{t}{2}dt=8a\left(1-\cos\frac{T}{2}\right)=16\sin^2\frac{T}{2}$$

11. Să se calculeze lungimea arcului de curbă al *evolventei* (*involutei*) cercului:

$$(C):\begin{cases} x=a\left(\cos t+t\sin t\right)\\ y=a\left(\sin t-t\cos t\right)\end{cases}$$

cuprins între $t=0$ şi $t=T,\ \left(T>0\right)$.

Soluție. Derivăm succesiv ecuațiile parametrice în raport cu t :

$$\begin{cases} x' = a\left(t\cos t - \sin t\right) \\ y' = a\left(-t\sin t + \cos t\right) \end{cases}$$

De aici urmează imediat:

$$x'^2 + y'^2 = a^2\left(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t\right) = a^2t^2$$

iar

$$l = \int_0^T \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^T at = \frac{aT^2}{2}.$$

12. Să se calculeze lungimea *astroidei*:

$$x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \qquad (a > 0)$$

trecând la coordonate parametrice.
Soluție. Dacă scriem ecuația de mai sus sub forma:

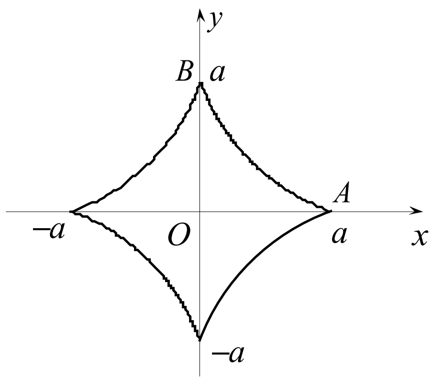
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

şi notăm:

$$x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\cos t, \quad y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\sin t,$$

obținem o parametrizare a astroidei:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad \left(0 \le t \le 2\pi\right).$$



Curba fiind simetrică față de axele de coordonate este suficient să calculăm lungimea unui arc $\overset{\frown}{AB}$ de astroidă situat în primul cadran unde $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Astfel:

$$\begin{cases} x' = -3a\cos^2 t\sin t \\ y' = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases}$$

iar

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 3a\sin t\cos t$$

apoi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\ dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}$$

În final, lungimea astroidei va fi:

$$l = 4l_{\overset{\frown}{AB}} = 6a$$

13. Să se calculeze lungimea elipsei:

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Soluție. Trecem la coordonate polare:

$$(E):\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Apoi,

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Datorită periodicității funcțiilor $x(t)$ și $y(t)$ putem scrie că:

$$l_{\mathcal{E}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt =$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 t}dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \varepsilon^2\sin^2 t}dt$$

unde $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ este *excentricitatea* elipsei.

Astfel lungimea elipsei va fi:

$$l = 4aE(\varepsilon),$$

unde

$$\boxed{E(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\tau}d\tau}$$

este *integrala eliptică de speța a doua.*

Este practic să notăm $\varepsilon = \sin\alpha$ și să folosim tabelele de valori pentru funcția:

$$E_1(\alpha) = E_1(\arcsin\varepsilon) = E(\varepsilon)$$

De exemplu, pentru $a = 10$ şi $b = 6$ obținem:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8 = \sin 53^\circ$$

iar din tabelele de valori ale lui $E(\varepsilon)$ găsim:

$$l = 40E_1(53^\circ) = 40 \cdot 1{,}2776 \simeq 51{,}1$$

Exerciții propuse

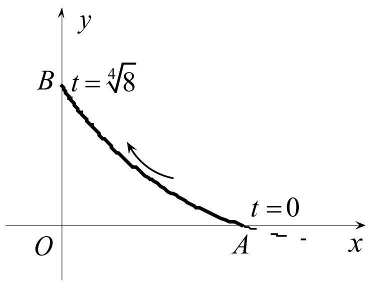
1. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C): \begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

cuprins între punctele de intersecție cu axele de coordonate

R: $\dfrac{13}{3}$

Indicație. Curba taie axele de coordonate în punctele *A* şi *B* de parametrii $t = 0$, respectiv, $t = \sqrt[4]{8}$. Se obține: $\sqrt{x'^2 + y'^2} = t^3\sqrt{t^4 + 1}$. Calculul integralei: $\int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^4 + 1}\ t^3 dt$ se poate face cu schimbarea: $u^2 = t^4 + 1$.

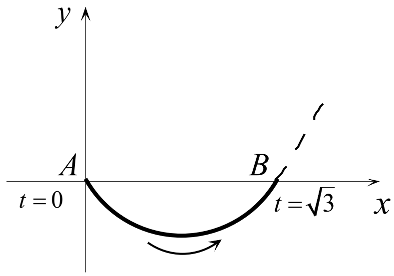


2. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C): \begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{3}\left(t^2 - 3\right) \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right).$$

$R:\quad 4\sqrt{3}$

Indicație. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\; dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2 + 1\right)\, dt$



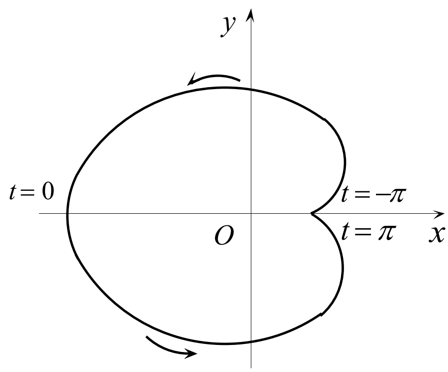
3. Să se calculeze lungimea cardiodei:

$$(C): \begin{cases} x = a\left(2\cos t - \cos 2t\right) \\ y = a\left(2\sin t - \sin 2t\right) \end{cases}$$

$R:\; 16a$

Indicație. Se va evalua:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{8a^2\left(1 - \cos t\right)}\, dt$$



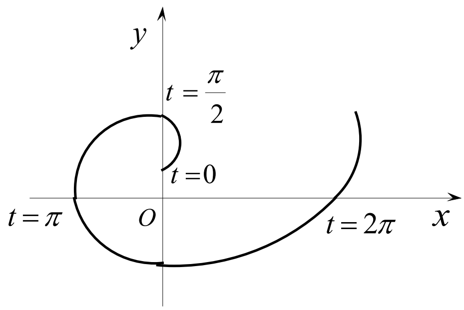
4. Să se calculeze lungimea arcului de curbă:

$$(C):\ \begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \end{cases}$$

cuprins între punctele $A(t=0)$ şi $B(t=\pi)$.

$R:\ \dfrac{\pi^3}{3}$

Indicație. Se obține $x'^2+y'^2=t^4$ apoi se calculează: $\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.



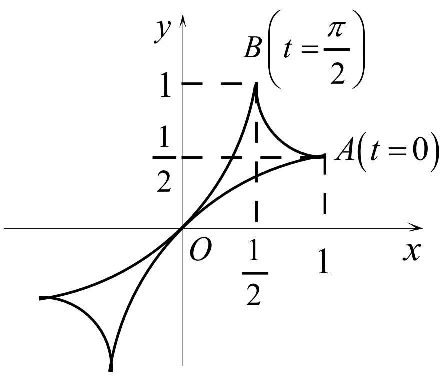
5. Să se găsească lungimea arcului curbei:

$$(C):\begin{cases} x=\cos^3 t+\dfrac{1}{2}\sin t \\ y=\sin^3 t+\dfrac{1}{2}\cos t \end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$$

cuprins între punctele $A(t=0)$ şi $B\left(t=\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$R:\ \dfrac{6-\pi}{4}$

Indicație. $x'^2+y'^2=\dfrac{1}{4}(1-3\sin 2t)^2$. Se integrează: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$



6. Să se calculeze lungimea buclei curbei:

$$(C): \begin{cases} x = \dfrac{3t}{(1-t)^3} \\ y = \dfrac{3t-1}{(1-t)^3} \end{cases} \quad t \in \left(-\infty\ , 2-\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{3}, +\infty\right)$$

$R:\quad 3\sqrt{3}$

Indicație. Se evaluează:

$$\int_{-\infty}^{2-\sqrt{3}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt + \int_{2+\sqrt{3}}^{+\infty} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \lim_{r \to +\infty} \left(\int_{-r}^{2-\sqrt{3}} + \int_{2+\sqrt{3}}^{r} \right) \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} \right) dt$$

unde

$$x'^2 + y'^2 = \frac{9\left(1+t^2\right)^2}{(1-t)^4}$$

Se ține seama de faptul că:

$$\int \frac{1+t^2}{(t-1)^4} dt = \frac{3t^2 - 3t + 2}{3(t-1)^2}$$

7. Să se calculeze lungimea curbei:

$$(C) \quad \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

$R:\ 2\pi a$

Indicație. A se vedea *exercițiul 11*.

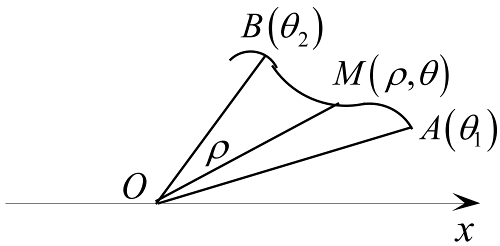
3.6. *Lungimea unui arc de curbă reprezentat în coordonate polare*

Dacă o curbă regulată este reprezentată în coordonate polare de ecuația:

$$(C):\ \rho = \rho(\theta), \qquad \theta \in I$$

atunci lungimea unui arc $\overset{\frown}{AB}$ pe curba (C) (*vezi figura*) va avea lungimea:

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)}\,d\theta}$$



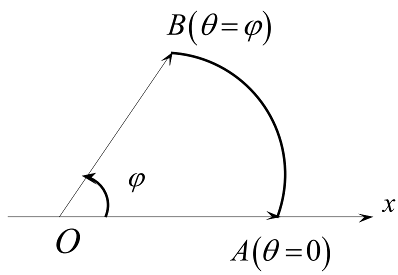
Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze lungimea unui arc pe *cercul*:

$$(C):\ \rho = R$$

şi să se deducă de aici lungimea întregului cerc.

Soluție. Fie arcul $\overset{\frown}{AB}$ definit de punctele de parametrii polari $\theta = 0$ şi $\theta = \varphi$ (*vezi figura alăturată*).



Întrucât $\rho = R = \text{const.}$ urmează că $\rho'(\theta) = 0$, iar $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)} = R$

rezultă că:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_0^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = \int_0^{\varphi} R\, d\theta = R\varphi$$

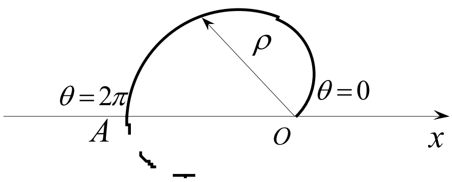
Observație. Pentru $\varphi = 2\pi$ se obține lungimea cercului: $l = 2\pi R.$

2. Să se găsească lungimea primului arc din *spirala lui Arhimede*:

$$(C):\ \ \rho = a\theta$$

tăiat în exterior de axa polară $\rho = 0.$

Soluție. Avem de calculat lungimea arcului $\widehat{OA}$ ale cărui extremități corespund valorilor $\theta = 0$ şi $\theta = 2\pi$ (*vezi figura*).



În acest caz:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)} = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} = a\sqrt{1+\theta^2}$$

iar

$$l_{\widehat{OA}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta =$$
$$= a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right]$$

3. Să se calculeze lungimea arcului de *spirală logaritmică*:

$$(C):\ \rho = ae^{m\theta}$$

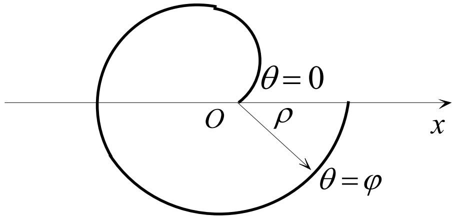
cuprins între punctele $A(\rho_0, \varphi_0)$ şi $B(\rho, \varphi)$.

Soluție. Avem: $\rho'(\theta) = ame^{m\theta} = m\rho$. Apoi:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)} = \sqrt{m^2+1}\rho = a\sqrt{m^2+1}e^{m\theta}$$

iar mai departe, presupunând $\varphi > \varphi_0$, se obține:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = a\sqrt{m^2+1}\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{m\theta} d\theta = \frac{a}{m}\sqrt{m^2+1}\left(e^{\varphi} - e^{\varphi_0}\right)$$



Interpretare. Dacă rescriem rezultatul de mai sus sub forma:

$$l_{\widehat{AB}}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left(ae^{\varphi}-ae^{\varphi_0}\right)=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left(\rho-\rho_0\right)=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\rho$$

deducem că lungimea spiralei logaritmice creşte proporţional odată cu creşterea razei polare corespunzătoare arcului.

4. Să se calculeze lungimea arcului de cardiodă:

$$(C)\ \ \rho=a(1+\cos\theta),\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad (a>0).$$

Soluţie. Aici:

$$\rho'(\theta)=-a\sin\theta$$

iar

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\sqrt{2a^2\left(1+\cos^2\theta\right)}=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

Prin urmare:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta.$$

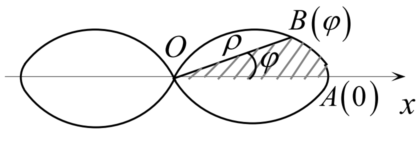
Însă, funcţia $\cos\frac{\theta}{2}$ este periodică având perioada principală π, aşa încât putem scrie:

$$l=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a.$$

5. Determinaţi lungimea arcului de lemniscată:

$$(C):\ \ \rho^2=2a^2\cos 2\theta$$

cuprins între punctele $A(\theta=0)$ şi $B(\varphi)$ cu $0\le\varphi<\frac{\pi}{4}$ (*vezi figura*).



Soluție. Dacă $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$, atunci $\cos 2\theta > 0$, iar din:

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta} \quad \text{şi} \quad \rho'(\theta) = -\frac{a\sqrt{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

urmează că:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{2a^2\left(\cos\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}\right)} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

De aici rezultă că:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_0^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = a\sqrt{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\sqrt{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}}$$

Notăm:

$$\boxed{K_m(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}} \quad (\textit{integrala eliptică de speța a doua}).$$

Atunci:

$$l_{\widehat{AB}} = a\sqrt{2}K_{\sqrt{2}}(\varphi)$$

Exerciții propuse

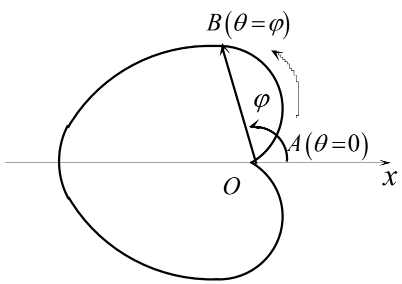
1. Să se calculeze lungimea arcului de cardioidă:

$$(C)\colon\ \rho = a(1 - \cos\theta)$$

cuprins între punctele A şi B de parametrii polari $\theta = 0$ şi respectiv, $\theta = \varphi$ cu $0 \le \varphi < \pi$.

R: $8a\sin\frac{\varphi}{2}$

Indicație.



Se ține seama că $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$, $(0 \le \theta < \varphi)$.

2. Să se calculeze lungimea arcului de *spirală hiperbolică*:

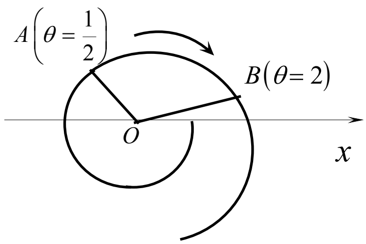
$$(C):\ \rho=\frac{1}{\theta}$$

cuprins între punctele $A\left(2,\frac{1}{2}\right)$ şi $B\left(\frac{1}{2},2\right)$.

$R:\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}+\ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Indicație. Se ține seama că:

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\frac{1}{\theta}\sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}$$



Mai departe (*vezi figura*):

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\rho+\rho'^2}\,d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{d\theta}{\theta^2\sqrt{1+\theta^2}}$$

Pentru ultima integrală se scrie:

$$\frac{1}{\theta^2\sqrt{1+\theta^2}}=\frac{1}{\theta^3}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\theta^2}}}$$

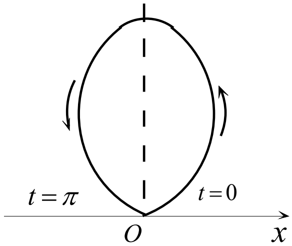
şi se efectuează schimbarea: $\theta\to\tau\ \therefore\ \dfrac{1}{\theta}=\tau.$

3. Să se găsescă lungimile arcului de curbă:

$$(C):\ \rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$$

$R:\ \dfrac{3\pi a}{2}$

Indicație. Se procedează ca mai sus (*vezi figura*).

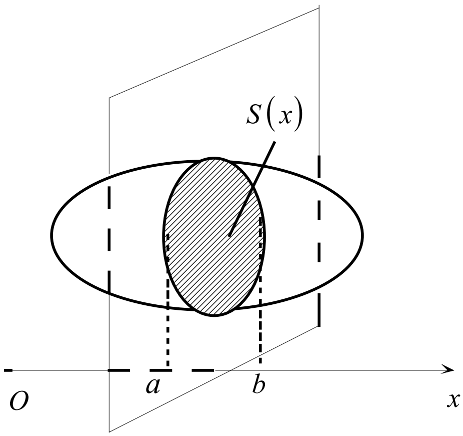


3.7. Calculul volumelor solidelor

(1) Volumul unui solid $D \subseteq R^3$ mărginit este dat de relația:

$$\boxed{V = \int_a^b S^2(x)dx}$$

unde $S(x)$ este aria secțiunii solidului cu un plan perpendicular pe axa Ox, iar a şi b sunt capetele intervalului unde ia valori x. Presupunem că $S(x)$ este o funcție continuă pe $[a,b]$.

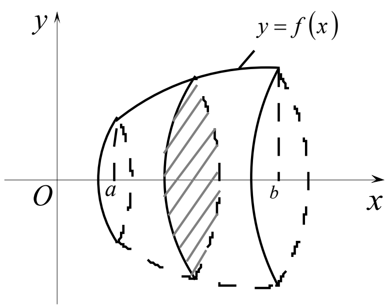


(2) Volumul V_x al unui solid obținut prin rotația în jurul axei Ox a trapezului curbiliniu mărginit de curba:

$y = f(x), \quad f(x) \geq 0$

şi dreptele $x = a$ şi $x = b$ $(a < b)$ (*vezi figura*), se calculează cu ajutorul relației:

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx}$$



(3) Volumul V_x al solidului obținut prin rotația în jurul axei Ox a figurii plane mărginite de curbele:

$$y = f(x) \text{ şi } y = g(x) \quad 0 \le f(x) \le g(x)$$

şi dreptele $x = a$ şi $x = b$ este dat de relația:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x) \right] dx}$$

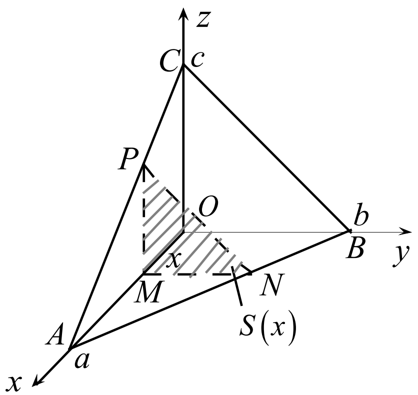
Observație. Dacă curba $y = f(x)$ este dată în coordonate parametrice sau polare se poate face o schimbare convenabilă în relația de mai sus.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze volumul tetraedului mărginit de planele:

$$(T): \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \end{cases}$$

Soluție. Fie $[OABC]$ tetraedul mărginit $[MPN]$ de planele date (*vezi figura*).



Se consideră secțiunea făcută cu un plan (π) variabil ales, perpendicular pe axa Ox la distanța $x = a$ de origine.

Notăm:

$$S(x) = \text{aria}(MNP), \qquad S_b = \text{aria}(OBC).$$

Atunci are loc relația de asemănare:

$$\frac{S(x)}{S_b} = \left(\frac{x - a}{a} \right)^2$$

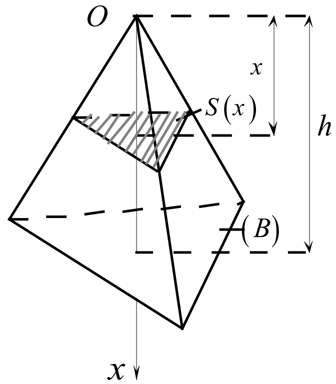
de unde rezultă:

$$S(x) = S_b = \frac{(x-a)^2}{a^2} = \frac{bc}{2a^2}(x-a)^2, \quad 0 \le x \le a$$

Aplicăm relația de calcul (1) pentru calculul volumului tetraedului:

$$V = \int_0^a S(x)dx = \frac{bc}{2a^2}\int_0^a (x-a)^2 dx = \frac{bc}{2a}\frac{(x-a)^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{abc}{6}$$

2. Să se calculeze volumul piramidei de bază (B) şi înălțime h (*vezi figura*).



Soluție. Fie O vârful piramidei şi axa Ox dirijată perpendicular pe baza (B). Se consideră secțiunea $S(x)$ determinată în piramidă de un plan (π) perpendicular pe axa Ox. Notăm $x-$ distanța de la vârful O la acest plan. Din relația de asemănare scrisă pentru secțiunile paralele obținem:

$$\frac{S(x)}{S_B} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

unde $S_B = \text{aria}(B)$. De aici rezultă că:

$$S(x) = \frac{S_B}{h^2}x^2, \quad x \in [0,h],$$

iar mai departe:

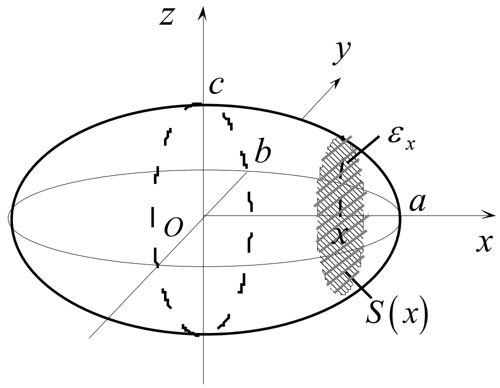
$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{S_B}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{S_b h}{3}.$$

3. Să se calculeze volumul elipsoidului:

$$(E): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Soluție. Intersecția elipsoidului cu planul $x = \text{const.}$ este elipsa:

$$(\varepsilon_x):\ \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$



de semiaxe $\alpha=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ şi $\beta=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ şi având aria:

$$S(x)=\pi\alpha\beta=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\qquad x\in[-a,a]$$

Mai departe, aplicăm formula de calcul a volumelor (1):

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

4. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația elipsei:

$$(E_0):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

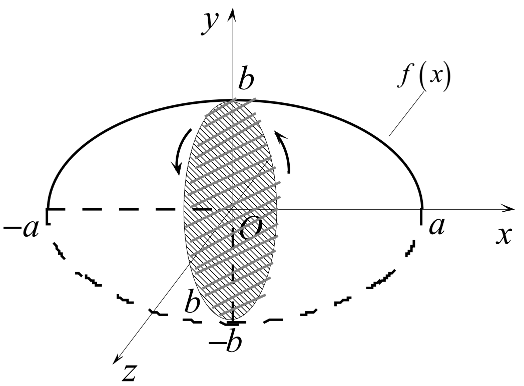
în jurul axei Ox.

Soluție. Rotind elipsa (E_0) în jurul axei Ox se găseşte elipsoidul de revoluție:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

Notăm $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[-a,a]$. Atunci:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}f^2(x)dx=2\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4\pi}{3}ab^2.$$



5. Să se calculeze volumul *sferei* de rază *R*.
Soluție 1. Se poate aplica formula care dă volumul elipsoidului de semiaxe egale cu $a = b = c = R$ i.e.

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Soluție 2. Se consideră cercul de ecuație:

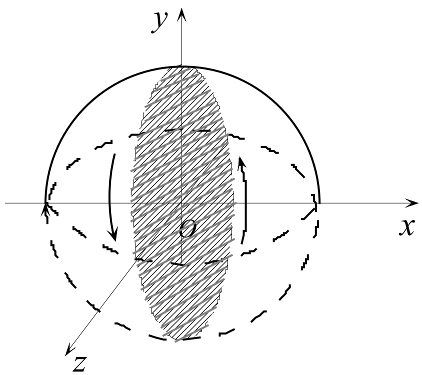
$$(C_0): \quad x^2 + y^2 = R^2$$

Rotind curba (C_0) în jurul axei Ox se obține sfera de ecuație:

$$(S): \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Notăm $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$. Mai departe:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)\,dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{4\pi R^3}{3}$$



Soluție 3. Fie sfera de ecuație:

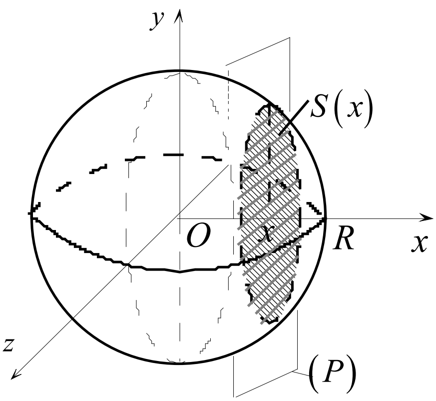
$$(S): \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

şi fie un plan (P) variabil perpendicular pe axa Ox care taie sfera după un cerc:

$$y^2+z^2=R^2-x^2,\quad x\in[-R,R]$$

de rază $r_0=\sqrt{R-x^2}$ şi arie $S(x)=\pi r_0^2=\pi\left(R^2-x^2\right)$. Rezultă că volumul corpului va fi, în virtutea relației (1):

$$V=\int_{-R}^{a}S(x)dx=2\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{4\pi R^3}{3}$$



6. Să se calculeze volumul *solidului sferic*:

$$x^2+y^2+z^2=16$$

cuprins între planele $x=2$ şi $x=3$.

Soluție 1. Se consideră cercul de secțiune cu planul $x=\text{const}$.

$$y^2+z^2=16-x^2$$

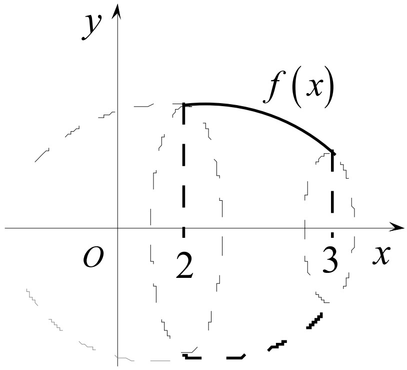
având aria $S(x)=\pi\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2=\pi\left(16-x^2\right)$. Atunci volumul solidului sferic va fi:

$$V=\int_2^3 S(x)dx=\pi\int_2^3\left(16-x^2\right)dx=\frac{29x}{3}.$$

Soluție 2. Fie cercul de ecuație:

$$(C_0):\ x^2+y^2=16$$

şi fie $f(x)=\sqrt{16-x^2},\quad x\in[2,3]$.



Atunci, volumul corpului obținut prin rotația arcului de cerc (C_0) în jurul axei Ox va fi :

$$V = \pi \int_2^3 f^2(x)dx = \pi \int_2^3 \left(16 - x^2\right)dx = \frac{29\pi}{3}.$$

7. Să se calculeze volumul unui con circular drept având raza bazei R şi înălțimea h.

Soluție 1. Se notează O vârful conului şi se alege axa Ox orientată de-a lungul axei conului. Se consideră secțiunea făcută în con de un plan variabil perpendicular pe axa Ox, adică discul de arie:

$$S(x) = \pi r^2(x)$$

unde $r(x)$ se poate obține din relația de asemănare (*vezi figura*):

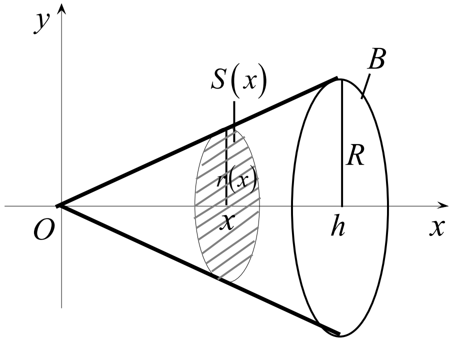
$$\frac{x}{h} = \frac{r(x)}{R} \Leftrightarrow r(x) = x\frac{R}{h}$$

Astfel:

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2$$

iar volumul conului va fi:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



Soluție 2. Fie α semiunghiul la vârf făcut cu axa Ox, iar:

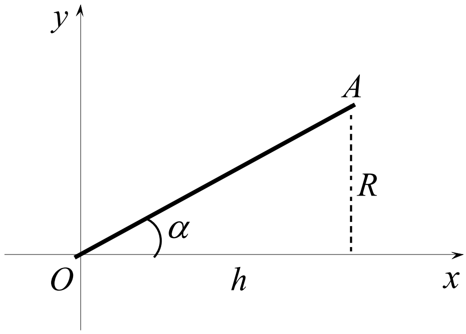
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{h} =: m$$

Se consideră funcția:

$$f(x) = mx, \quad x \in [0,h]$$

Rotind segmentul de dreaptă *OA* în jurul axei Ox se obține conul de revoluție având volumul:

$$V = \pi\int_o^h f^2(x)dx = \pi\int_0^h m^2x^2dx = \pi\left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



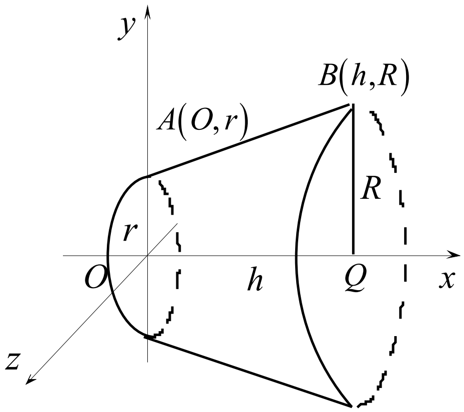
8. Să se calculeze volumul trunchiului de con circular având razele bazelor *r, R* şi înalțimea *h*, $(h>0,\, R>r>0)$.

Soluție. Fie sistemul de axe $Oxyz$ având originea în centrul bazei mici, iar axa Ox orientată în lungul axei trunchiului (*vezi figura*). Determinăm funcția de gradul întâi $f(x) = ax+b$ ce trece prin punctele $A(O,r)$ şi $B(h,R)$. Odată găsită funcția $f(x), x\in[0,h]$ obținem generatoarea trunchiului. Aşadar, din faptul că $A,B \in G_f$ au loc egalitățile:

$$\begin{cases} b = r \\ ha + b = R \end{cases}$$

rezultă că:

$$a = \frac{R-r}{h}, \quad b = r$$



De aici, generatoarea trunchiului de con va fi:

$$f(x) = \frac{R-r}{h}x + r, \quad x \in [0,h],$$

iar volumul:

$$V = \pi\int_0^h f^2(x)dx = \pi\int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^3\Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{\pi}{3}\frac{h}{R-r}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$$

9. Să se calculeze volumul segmentului solid:

$$(H): \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (a,b > 0) \quad (\textit{hiperboloidul de rotație})$$

delimitat de planele $x = \pm\lambda, \quad (|\lambda| > a)$.

Soluție. Se consideră hiperbola de ecuație:

$$(h_0): \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

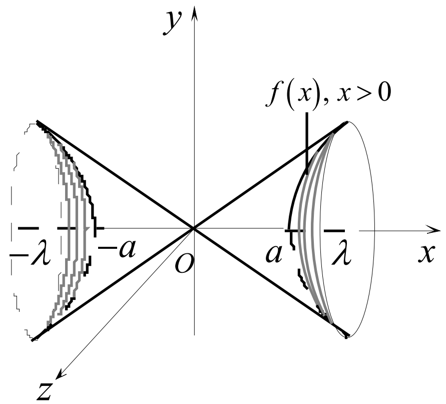
apoi se notează:

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad a\le |x|\le \lambda$$

În acest caz, volumul corpului obținut prin rotația hiperbolei (h_0) în jurul axei Ox se va scrie:

$$V=2\pi\int_a^\lambda f^2(x)dx=2\pi\left(\frac{b}{a}\right)^2\int_a^\lambda\left(x^2-a^2\right)dx=2\pi\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]\Bigg|_a^\lambda=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2(\lambda-a)^2(2a+\lambda)$$



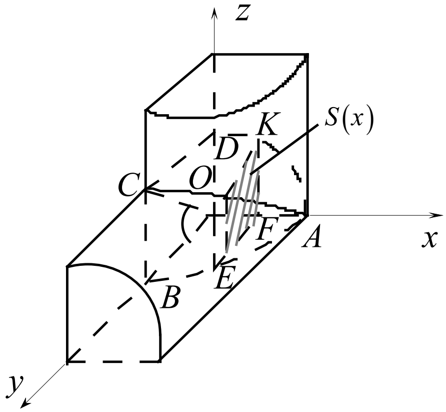
10. Să se calculeze volumul solidului obținut prin intersecția cilindrilor:

(C_1): $x^2+y^2=r^2$,

(C_2): $x^2+z^2=r^2$.

şi planele de coordonate.

Soluție. Axele celor doi cilindri fac între ele un unghi de măsură 90^0. Notăm O – punctul de intersecție al acestora şi considerăm un sistem de axe $Oxyz$, având semiaxele $y>0$ şi $z>0$ orientate în lungul axelor cilindrilor (C_2), respectiv, (C_1) (*vezi figura*). Solidul de intersecție este *OABCD*.



Planul de intersecție este $y = z$ şi se obține din rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + z^2 = r^2 \end{cases} \quad (x, y, z > 0).$$

Se duce un plan variabil perpendicular pe axa Ox, a.î. taie solidul *OABCD* după un pătrat *EFKL*.

Notăm x – abscisa punctului *F*, atunci $EF = \sqrt{r^2 - x^2}$, iar aria secțiunii *EFKL* este:

$$S(x) = EF^2 = r^2 - x^2$$

În acest caz volumul corpului *OABCD* este:

$$V = \int_0^r S(x)dx = \frac{16}{3}r^3$$

11. Fie un cerc de rază r şi o direcție $\vec{v}$ în planul cercului. Se duc coardele paralele la direcția dată şi se construiesc pe acestea segmente parabolice de aceeaşi înălțime h. Planele acestor segmente sunt perpendiculare pe planul cercului .

Să se găsească volumul solidului astfel obținut.

Soluție. Fie sistemul *xOyz*, a.î. *xOy* să fie planul cercului, iar axa *Oz* să fie orientată pe săgeata parabolei constituite pe coarda ce conține centrul cercului *O* (*vezi fig.a*).

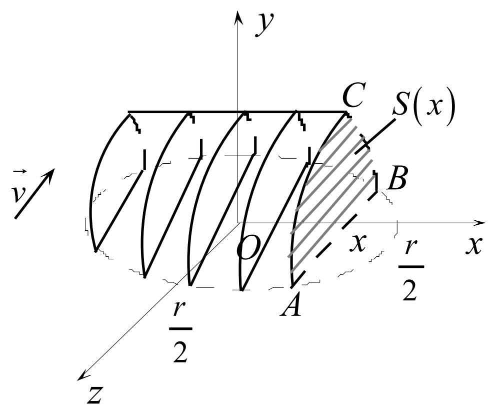


Fig.a

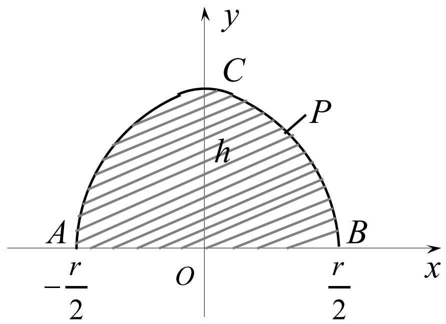


Fig.b

Mai întâi vom calcula aria segmentului de parabolă (P), construit prin punctul de abscisă x (*vezi fig. b*). Pentru aceasta vom determina ecuația arcului de parabolă $\overset{\frown}{ACB}$.

$$y = \alpha x^2 + h$$

unde α se determină din condiția ca punctul $B\left(\frac{r}{2},\ 0\right)$ să fie parabolă i.e.

$\alpha = -\frac{4h}{r^2}$, deci:

$$\overset{\frown}{ACB}:\ \ y = h - \frac{4h}{r^2}x^2 \qquad x \in [-r, r],$$

astfel aria $\overset{\frown}{ACB}$ este:

$$S = \int_{-r}^{r} y\,dx = 2\int_0^r \left(h - \frac{4h}{r^2}x^2\right)dx = \frac{2}{3}ah$$

Acum suntem în măsură să evaluăm volumul solidului după relația (1). Din faptul că A şi B sunt şi puncte pe cercul $x^2+y^2=r^2$, obținem legătura:

$$a=2y=2\sqrt{r^2-x^2}$$

iar de aici urmează că:

$$S=S(x)=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\cdot h=\frac{4h}{3}\sqrt{r^2-x^2},\qquad x\in[-r,r]$$

iar volumul corpului va fi,

$$V=\int_{-r}^{r}S(x)dx=2\frac{4h}{3}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

Cum

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}\Big|_0^r-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=\frac{\pi r^2}{4}$$

obținem, în final:

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h$$

12. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a arcului de parabolă

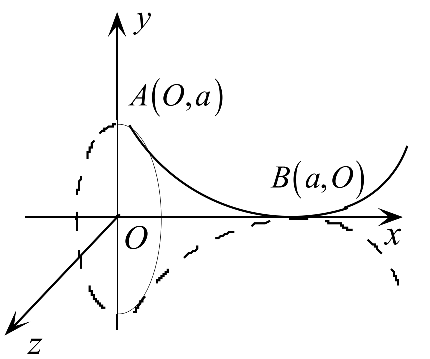
$$(C):\ x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$$

şi mărginit de axele de coordonate

Soluție. Punctele de intersecție ale curbei (C) cu axele de coordonate sunt $A(O,a)$ şi $B(a,O)$. Arcul AB rotit în jurul axei Ox generează corpul din *figură.* Notăm: $f(x)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2,\quad x\in[0,a]$. Atunci volumul corpului de revoluție va fi:

$$V=\pi\int_0^a f^2(x)dx=\pi\int_0^a\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^4dx=$$

$$=\pi\int_0^a\left(a^2-4a\sqrt{a}\sqrt{x}+60x-4ax\sqrt{x}+x^2\right)dx=\frac{\pi a^3}{15}$$

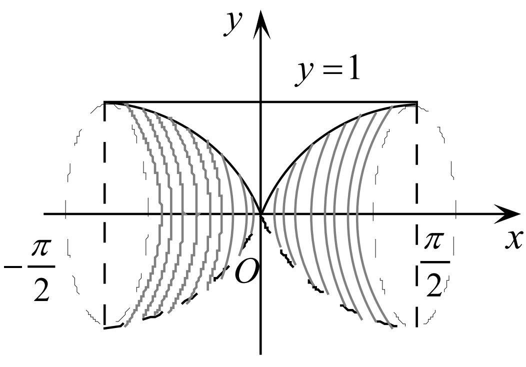


13. Arcul sinusoidal $y=|\sin x|$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ mărginit de dreptele $y=0$ şi $y=1$ se roteşte în jurul axei Ox (*vezi figura*). Să se calculeze volumul corpului de revoluție generat.

Soluție. Se aplică relația (2). Notând $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ scriem:

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=$$

$$=2\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi^2$$



14. Arcul logaritmic $y=\ln|x|$ mărginit de dreptele $y=0$ şi $y=1$ se roteşte în jurul axei Oy (*vezi figura*). Să se calculeze volumul corpului de revoluție generat.

Soluție. Funcția:

$$y=\begin{cases}\ln x & x<0\\ \ln(-x) & x>0\end{cases}$$

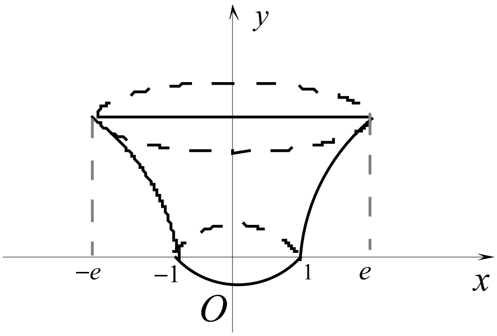
este inversabilă, iar inversa ei este:

$$x=\begin{cases}e^{y} & y\in[1,e]\\ -e^{y} & y\in[-1,e]\end{cases}$$

În acest caz vom scrie V formula de calcul a volumului, echivalentă cu (2):

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_c^d\left(f^{-1}(y)\right)^2dy$$

unde f bijectivă cu $f(a)=c$ şi $f(b)=d$.



Aşadar, volumul corpului generat va fi:

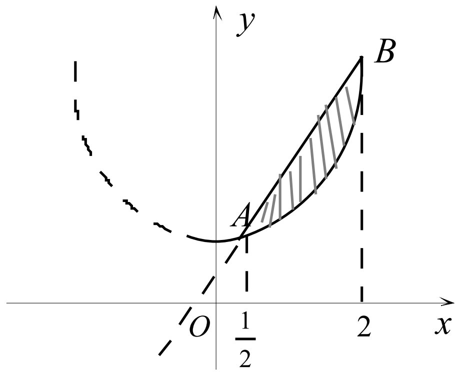
$$V=\pi\int_1^e x^2(y)\,dy=\pi\int_0^1 e^{2y}dy=\frac{\pi}{2}e^{2y}=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$$

15. Să se calculeze volumul solidului generat prin rotația în jurul axei Ox a arcului parabolic $y=\dfrac{x^2}{4}+2$ tăiat în exterior de dreapta $5x+8y+14=0.$

Soluție. Punctele A şi B de intersecție dintre curbă şi dreaptă se obțin din sistemul:

$$\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{4}+2\\ 5x-8y+14=0\end{cases}$$

Se obține $x_1=\dfrac{1}{2}$ şi $x_2=2.$ Notăm (*vezi figura*):



$$f(x)=\frac{x^2}{4}+2 \quad \text{şi} \quad g(x)=\frac{5x+14}{8}, \qquad x\in\left[\frac{1}{2},2\right].$$

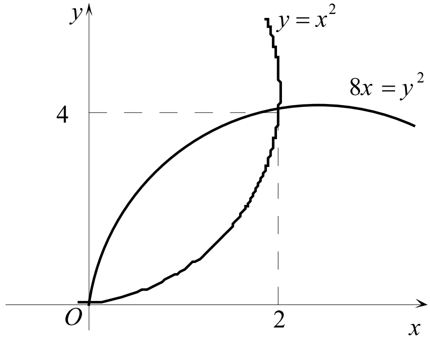
obținem cu ajutorul relației (3):

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{1}{64}(9x+14)^2-\left(\frac{x^2}{4}+2\right)\right]dx$$

sau în final:

$$V=\frac{891}{1280}\pi.$$

16. Să se calculeze volumul corpului generat prin rotația arcului mărginit de parabolele $y=x^2$ şi $8x=y^2$.



Soluție. Punctele de intersecție ale celor două curbe sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 8x = y^2 \end{cases}$$

Se obțin: $y_1 = 0$ şi $y_2 = 4$. Notăm $h(y) = \sqrt{y}$ şi $q(y) = \dfrac{y^2}{8}$.

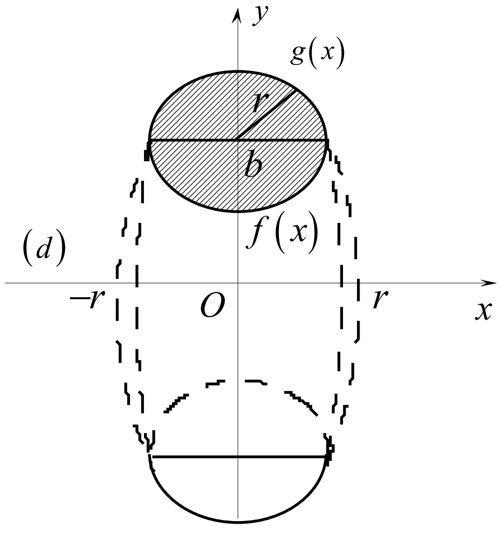
Cu aceeaşi observație făcută la *exercițiul 13* deducem că volumul corpului generat va fi:

$$V = \pi \int_0^4 \left[h^2(y) - q^2(y) \right] dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy = \frac{24}{5}\pi$$

17. Să se calculeze volumul *torului.*

Soluție. Torul este corpul generat prin rotația unui cerc de rază *r* în jurul unei drepte (d) situată în planul arcului la distanța b față de centrul cercului $(b \geq r)$.

Alegem axele de coordonate a.î. dreapta (d) să fie axa absciselor, iar axa ordonatelor să conțină centrul cercului (*vezi figura*).



Ecuația cercului în raport cu sistemul ales va fi:

$$(C):\ x^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Notăm:

$$f(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r$$

$$g(x)=b-\sqrt{r^2-x^2}, \quad |x|\le r.$$

Aşadar, volumul corpului generat va fi:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx=\pi\int_{-r}^{r}\left[\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right]dx=$$

$$=8\pi b\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

Substituția:

$$x\to\theta \therefore x=r\cos\theta \quad \text{şi} \quad dx=-r\sin\theta\,d\theta$$

x	0		r
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

conduce la:

$$V=8\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\sin^2\theta\,d\theta=8\pi br^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=2\pi^2r^2b$$

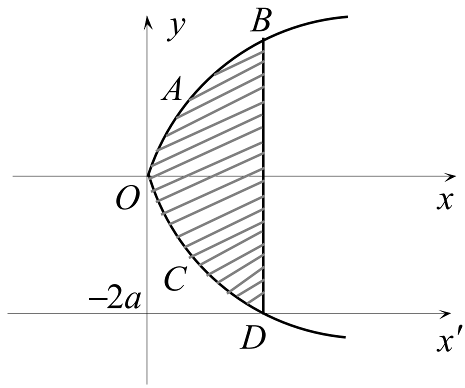
18. Să se calculeze volumul solidului generat prin rotația arcului de parabolă $y^2=4ax$ tăiat în exterior de dreapta $x=a$ în jurul $y=-2a$

Soluție. Efectuăm translația de axe:

$$(x,y)\to(x',y') \;\therefore\; \begin{cases} x'=x \\ y'=y+2a \end{cases}$$

astfel în noile coordonate funcția parabolei se rescrie sub forma:

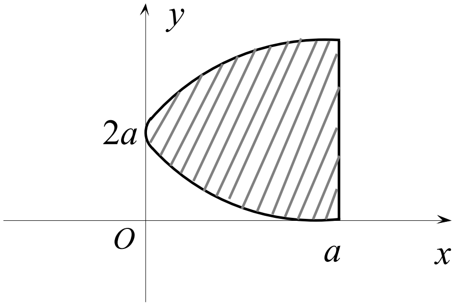
$$(y'-2a)^2=4ax'$$



Renotând variabilele, problema revine la rotația arcului de parabolă:

$$\left(y-2a\right)^2 = 4ax$$

mărginit de dreapta $x=a$ în jurul axei Ox (*vezi figura*).



Prin urmare, vom nota:

$$f\left(x\right)=2a-2\sqrt{ax}, \quad x\in\left[0,a\right]$$

$$g\left(x\right)=2a+2\sqrt{ax}, \quad x\in\left[0,a\right],$$

iar volumul corpului generat va fi în acest caz:

$$V=\pi\int_0^a\left[g^2\left(x\right)-f^2\left(x\right)\right]dx=\pi\int_0^a\left[\left(2a+2\sqrt{ax}\right)^2-\left(2a-2\sqrt{ax}\right)^2\right]dx$$

sau în final: $V=\dfrac{32}{3}\pi a^3$

19. Să se calculeze volumul solidului generat prin rotația *astroidei*:

$$\left(C\right):\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$$

în jurul axei Ox .

Soluție. Reprezentarea astroidei este cea de la *exercițiul 6*. În cazul de față, curba este exprimată în coordonate parametrice, drept pentru care vom fi nevoiți să facem schimbarea de variabilă în integrala care ne dă volumul:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2\left(x\right)dx=2\pi\int_0^a y^2\,dx$$

Astfel:

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\Leftrightarrow dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$$

x	0	a
t	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	0

Deaici rezultă că:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t \left(-3a\cos^2 t \sin t\right) dt =$$

$$= 6\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{7}} \sin^7 t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t\, dt \right]$$

Reamintim că pentru $m \in \mathbb{N}$:

$$H_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}$$

astfel că

$$H_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$$

iar

$$H_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}$$

Înlocuind mai sus obținem

$$V = 6\pi a^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \left(1 - \frac{8}{9}\right) = \frac{32}{105} \pi a^3$$

20. Să se calculeze volumul cardioidei definită prin ecuația sa în coordonate polare:

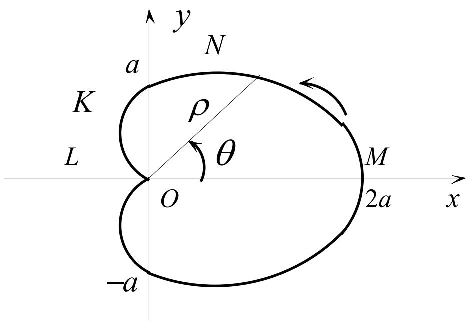
$$\rho = a(1 + \cos\theta).$$

Soluție. Volumul corpului generat va fi diferența volumelor corpurilor generate prin rotația arcelor *MNKLO* şi *OKLO* în jurul axei Ox (care este şi axă polară în acelaşi timp). Vom trece şi în acest caz la coordonate polare, considerând unghiul polar θ ca parametru:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = a\cos\theta(1 + \cos\theta) \\ y = \rho\sin\theta = a\sin\theta(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

Este evident că abscisa punctului *M* este $x_M = 2a$ (valoarea care se obține luând $\theta = 0$) iar abscisa punctului *C* este minimul funcției:

$$\theta \mapsto x \;\therefore\; x = a(1 + \cos\theta)\cos\theta$$



Pentru a găsi minimul acestei funcţii, vom căuta mai întâi punctele critice i.e. rădăcinile derivatei întâi:

$$x'(\theta) = -a\sin\theta(1+2\cos\theta)$$

Aşadar:

$$x'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = 0 \text{ şi } \theta_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

În $\theta_1 = 0$ găsim $x_M = 2a$, iar în $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\quad x_K = -\frac{a}{4}$.

De aici rezultă că volumul corpului generat va fi:

$$V = \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y_2^2 dx - \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{0} y_1^2 dx$$

unde $y = y_2(x)$ reprezintă ecuaţia arcului *MNKLO*, iar $y = y_1(x)$ corespunde arcului *OKLO*. Procedăm mai departe la schimbarea de variabilă:

$$x = a\cos\theta(1+\cos\theta)$$

astfel că:

$$y^2 = a^2(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta, \quad dx = -a\sin\theta(1+2\cos\theta)d\theta$$

x	$\frac{-a}{4}$		0
θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\searrow$	π

De aici rezultă:

$$V = \pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} a^2(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\left[-a\sin\theta(1+2\cos\theta)\right]d\theta -$$

$$-\pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\left[-a\sin\theta(1+2\cos\theta)\right]d\theta =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \left(1+\cos\theta\right)^2 \left(1+2\cos\theta\right) d\theta$$

Mai departe, facem schimbarea:

$$\theta \to u \ \therefore \ u = \cos\theta, \quad dx = -\sin\theta\, d\theta$$

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & & \pi \\ \hline u & -1 & \nearrow & 1 \end{array}$$

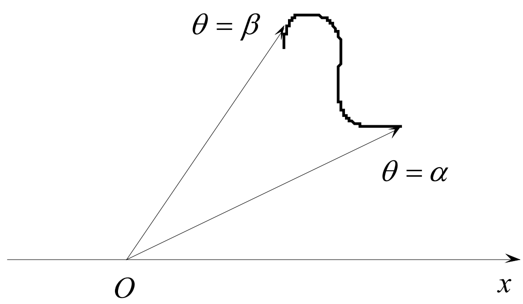
iar apoi scriem:

$$V = \pi a^3 \int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)\left(1+u^2\right)\left(1+2u\right) du = \frac{8\pi a^3}{3}$$

Observație. Volumul unui solid generat prin rotația în jurul axei polare a unui sector format din arcul de curbă $r = F(\theta)$ şi două raze vectoare $\theta = \alpha$ şi $\theta = \beta$ se poate calcula din relația:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta\, d\theta$$

Formula este utilă în cazul în care se cere volumul generat prin rotația în jurul axei polare a unei curbe închise definită în coordonate polare:

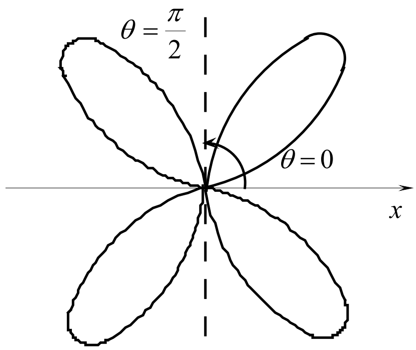


21. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația curbei: $r = a\sin 2\theta$ în jurul axei polare.

Soluție. Avem:

$$V = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{32\pi}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{64}{105} \pi a^3$$

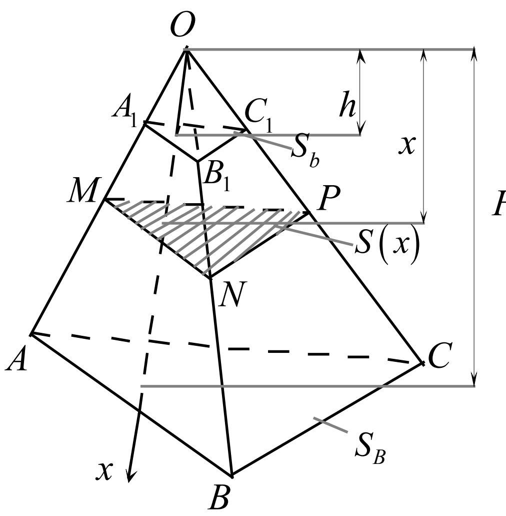


Exerciții propuse

1. Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă având bazele $[B]$, $[b]$ şi înălțimea *h*.

$R: \quad V = \frac{h}{3}\left(S_B^2 + S_b S_B + S_b^2\right)$

Indicație. Se aplică rezultatul de la *exercițiul 2* şi se ține seama de relațiile de asemănare între secțiunile S_b, $S(x)$ şi S_B.



2. Să se calculeze volumul solidului obținut din elipsoidul $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, tăindu-l în exterior de planele $x=2$ şi $x=3$.

R:

Indicație. Se ține seama de *exercițiul 6.* Considerăm elipsa:

$$\frac{y^2}{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}+\frac{z^2}{4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}=1, \text{ având aria } S(x)=\pi 3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}} \text{ x } 2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}.$$

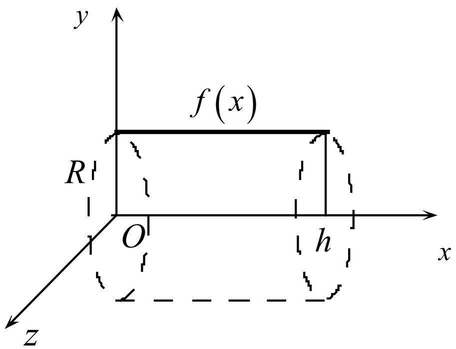
Se evaluează $\int_2^3 S(x)dx.$

Observație. Se poate aplica şi *soluția 2* de la acelaşi exercițiu.

3. Să se calculeze volumul cilindrului circular drept având raza bazei R şi înălțimea h.

R: $\pi R^2 h$

Indicație. Se consideră funcția constantă $f(x)=R,\quad x\in[0,h]$ şi se aplică relația (1).

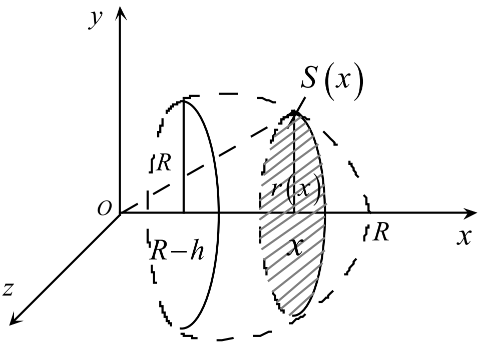


4. Să se calculeze volumul unei calote sferice de rază R şi înălțime h.

R: $\pi h^2\left(R-\frac{h^2}{3}\right)$

Indicație. Fie $S(x)$ aria secțiunii făcută în calota sferică cu un plan variabil perpendicular pe axa Ox: $S(x)=\pi r^2(x)$ unde $r(x)=\sqrt{R^2-x^2},\quad x\in[R-h,R]$.

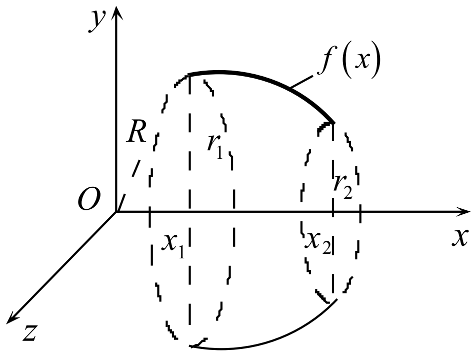
Mai departe se evaluează: $V=\int_{R-h}^{R} S(x)dx.$



5. Să se calculeze volumul unei zone sferice cu razele r_1, r_2 delimitată pe o sferă de rază R, $(R > r_1 > r_2 > 0)$.

R: $\pi\left[R^2\left(\sqrt{R^2-r_1^2}+\sqrt{R^2-r_2^2}\right)\right]+\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{R^2-r_1^2}\right)^3-\left(\sqrt{R^2-r_2^2}\right)^3\right]$

Indicație. Avem $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[x_1,x_2]$, unde $x_1=\sqrt{R^2-r_1^2}$ şi $x_2=\sqrt{R^2-r_2^2}$.



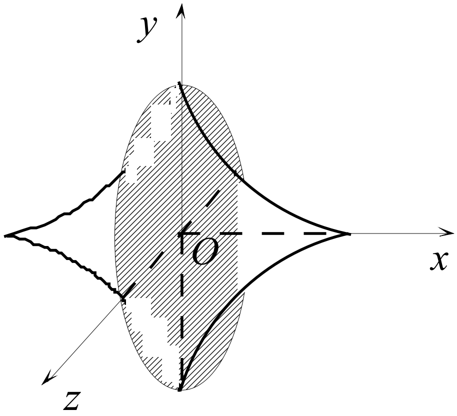
6. Să se găsească volumul astroidului de revoluție obținut prin rotația *astroidei*:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}, \qquad (a>0)$$

în jurul axei Ox.

R: $\frac{32}{105}\pi a^3$

Indicație. Avem $f(x)=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad a>0,\ x\in[0,a]$. Se calculează apoi $2\pi\int_0^a f^2(x)\,dx.$



7. Să se calculeze volumul solidului mărginit de suprafața:

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (x>0,\ y>0)$$

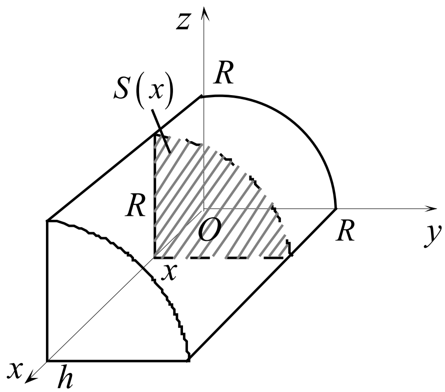
şi planele $x=0,\ x=h,\ (h>0)$.

$R:\quad \dfrac{\pi r^2 h}{4}$

Indicație. Se alege sistemul de axe $Oxyz$, ca în *figură*, şi se ia:

$$S(x)=\pi x^2, \quad x\in[0,h].$$

apoi se aplică (1).

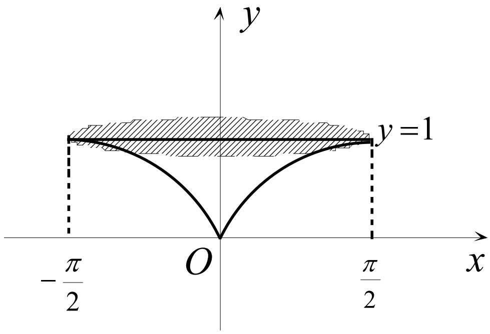


8. Arcul sinusoidal $y=|\sin x|$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ mărginit de dreptele $y=0$ şi $y=1$ se roteşte în jurul axei Oy. Să se determine volumul corpului de revoluție.

R: $\frac{\pi}{4}\left(\pi^2-8\right)$

Indicație. Vezi şi observația de la *exercițiul 13*.

Se evaluează $V=\pi\int_0^1 \arcsin^2 y\,dy$ utilizând schimbarea de variabilă: $\arcsin y=t$.



9. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație obținute prin rotația în jurul axei Ox a arcelor de curbe definite prin

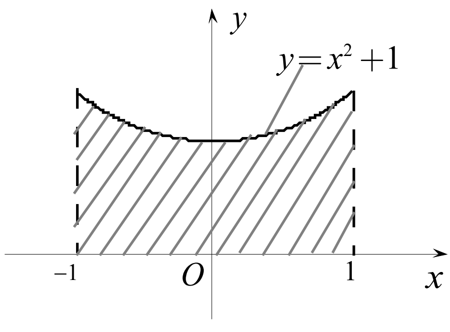
a) $y=1+x^2$, $y=0$, $x\in[-1,1]$

b) $y=\sin x$, $x\in[-\pi,\pi]$

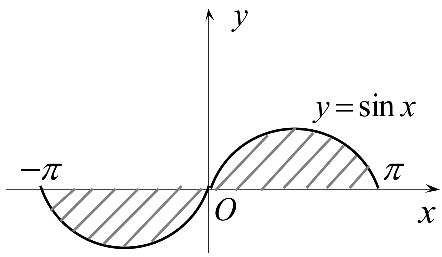
c) $y^2=x$, $y=x^2$

d) $x^2+y^2=\sqrt{2}$, $y=x^2$

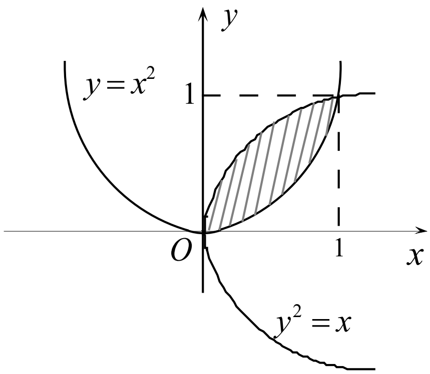
a) R: $\frac{56\pi}{15}$



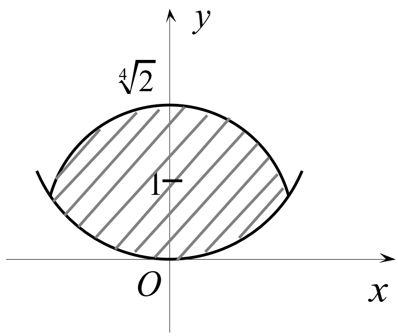
b) $R:\ \pi^2$



c) $R:\ \dfrac{3\pi}{10}$



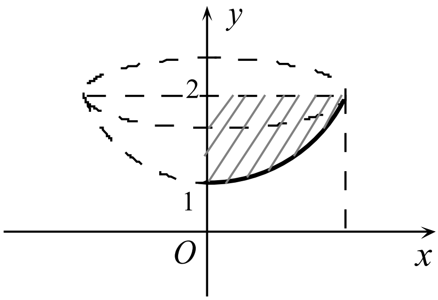
d) $R:\ \dfrac{10\pi}{3}$



10. Să se calculeze volumul corpurilor de rotație generate prin rotația în jurul axei Oy a arcelor de curbă definite la *exercițiul 9*.

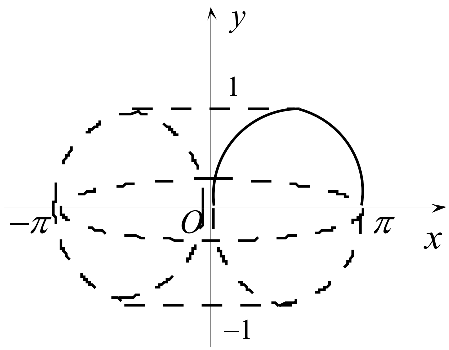
a) $R:\ \dfrac{2}{3}$

Indicație. Se evaluează $V = \int_1^2 \sqrt{y-1}\,dy,$ unde funcția $x = \sqrt{y-1},$ definită pe $[1,2],$ este inversa funcției $y = 1 + x^2.$



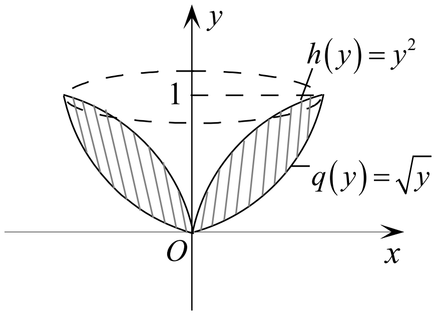
b) $R:\ \dfrac{\pi^2 - 8}{2}$

Indicație. Se va calcula $\pi \int_{-1}^{1} (\arcsin y)^2 dy.$ Pentru aceasta se poate face schimbarea de variabilă $\arcsin y = t.$



c) $R:\ \dfrac{3\pi}{10}$

Indicație. Evaluăm $\pi \int_0^1 \left(y - y^4\right) dy.$

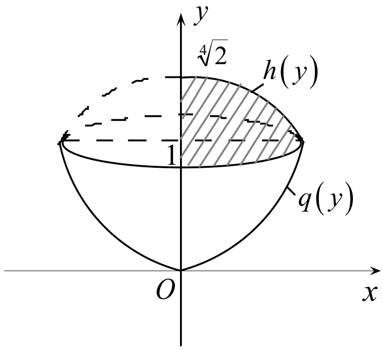


d) $R: \ \frac{1}{6}\left(5-9\sqrt{2}+4\sqrt[4]{8}\right)$

Indicație. Notăm $h(y)=\sqrt{\sqrt{2}-y^2}, \ q(y)=\sqrt{y}, \quad y\in\left[1, \sqrt[4]{2}\right]$.

Se evaluează apoi:

$$V=\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left[h(y)-q(y)\right]dy$$



11. Să se calculeze volumul corpului de revoluție obținut prin rotația figurii plane mărginite de curba plană:

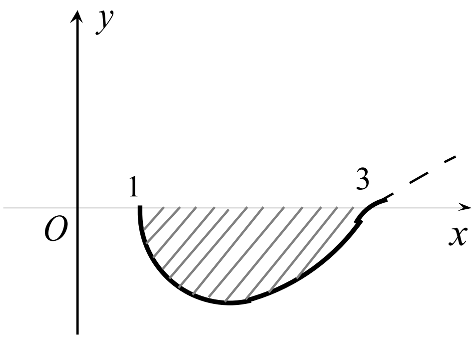
$$(C): x^2y^2=(x-1)(3-x)$$

în jurul axei Ox.

$R: \ 4\pi(\ln 3-1)$

Indicație. Se evaluează:

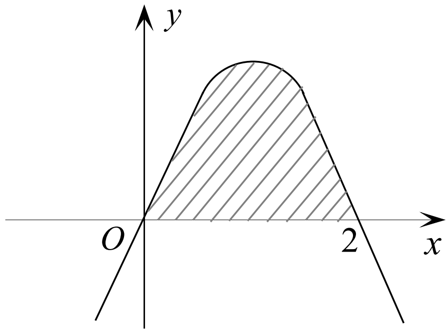
$$V=\pi\int_1^3 f^2(x)dx, \text{ unde } f(x)=\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{x}, \quad x\in[1,3].$$



12. Să se determine volumul solidului format prin rotația în jurul axei Ox a figurii plane mărginite de axa Ox şi de parabola $y=ax-x^2, \quad (a>0)$.

$R:\ \dfrac{\pi a^5}{30}$

Indicație. Domeniul de integrare este $x \in [1,2]$.

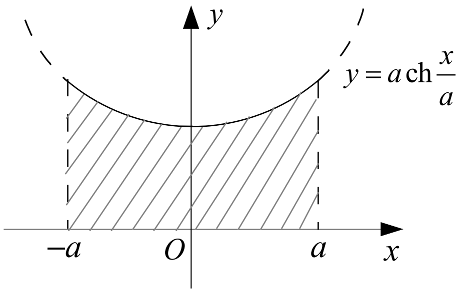


13. Determinați volumul generat prin rotația suprafeței plane mărginite de *lănțişorul* $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = \pm a$.

$R:\ \dfrac{\pi a^3}{4}\left(e^2 + 4 - e^{-2}\right)$

Indicație. Se va calcula:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \mathrm{ch}\frac{x}{a}\,dx$$

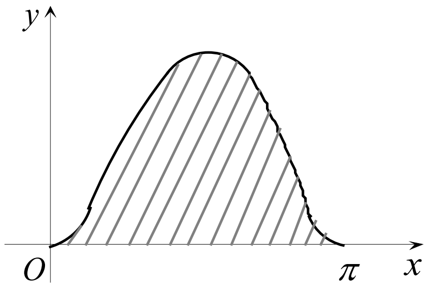


14. Determinați volumul solidului format prin rotația, în jurul axei Ox, a arcului de curbă $y = \sin^2 x$ cuprins în intervalul $x \in [0, \pi]$.

$R:\ \dfrac{3\pi^2}{8}$

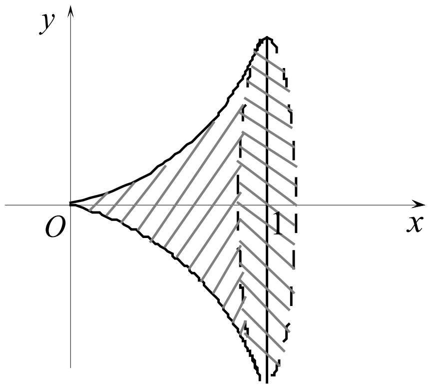
Indicație. Se va ține seama de relația de recurență a integralei:

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$$



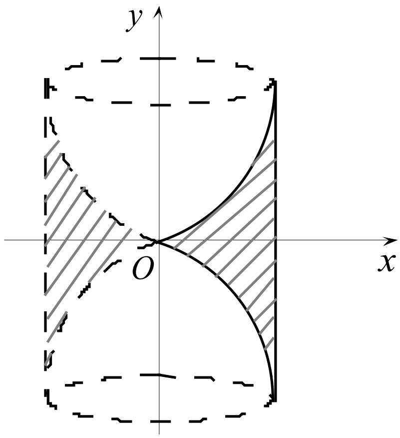
15. Determinați volumul solidului format prin rotația, în jurul axei Ox, a suprafeței plane mărginite de parabola semicubică $y^2 = x^3$, axa Ox şi dreapta $x = 1$.

$R:\ \frac{\pi}{4}$



16. Determinați volumul solidului format prin rotația aceleiaşi suprafețe de la *exercițiul 15*, dar în jurul axei Oy.

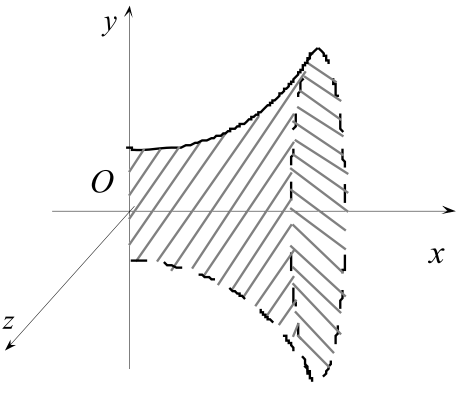
$R:\ \frac{4}{7}\pi$



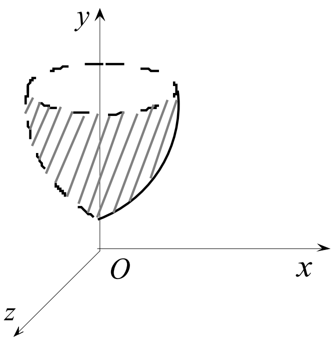
17. Determinați volumul solidului format din rotația suprafeței plane mărginite de curba $y = e^x$ şi axele de coordonate, în jurul:

a) axei Ox b) axei Oy

a) $R: \ \frac{\pi}{2}$

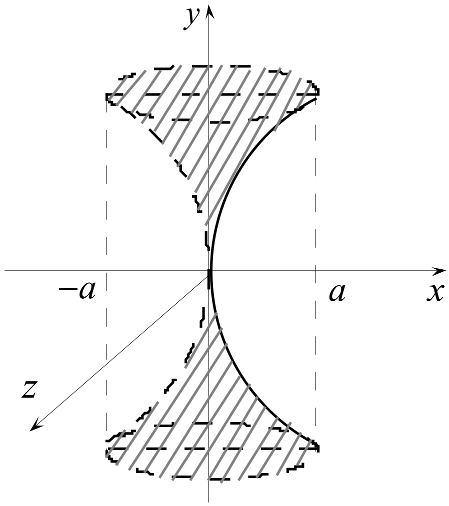


b) $R: \ 2\pi$



18. Determinați volumul solidului format prin rotația, în jurul axei Oy, a arcului parabolic $y^2 = 4ax$, $(a > 0)$ tăiat în exterior de dreapta $x = a$.

$R:\ \dfrac{16\pi a^3}{5}$



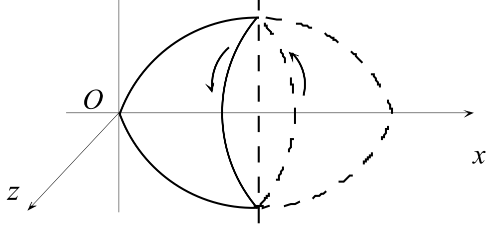
19. Determinați volumul solidului format prin rotația în jurul dreptei $x = a$, a segmentului de parabolă $y^2 = 4ax$, tăiat exterior de această dreaptă:

$R:\ \dfrac{32\pi a^3}{15}$

Indicație. Se face translația $(x, y) \to (x', y')$, a.î. $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + a \end{cases}$

Se va evalua:

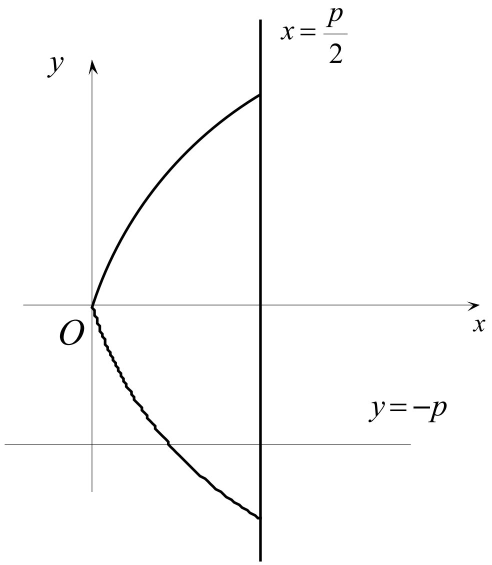
$$\pi \int_{-a}^{0} \left(2\sqrt{a(x+a)}\right)^2 dx$$



20. Determinați volumul solidului format prin rotația în jurul dreptei $y=-p$, a suprafeței plane mărginite de parabola $y^2=2px$ şi de dreapta $x=\frac{p}{2}$.

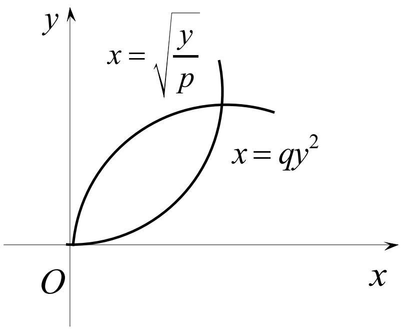
$R:\ \frac{4\pi p^3}{3}$

Indicație. Se face translația de axe a.î. axa Ox să devină dreapta $y=-p$.



21. Determinați volumul solidului format prin rotația, în jurul axei Oy, a suprafeței plane cuprinse între parabolele $y=px^2$ şi $x=qy^2$.

$R:\ \pi\left(\frac{q^2}{5}-\frac{1}{2p}\right)$



22. Determinați volumul solidului generat de rotația, în jurul axei Ox, a buclei curbei:

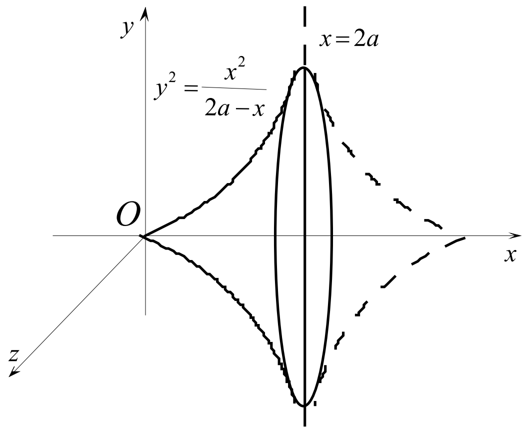
$$(C):\quad (x-a)y^2 = ax(x-3a), \quad (a>0)$$

$R:\ \dfrac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2)$

23. Determinați volumul solidului generat de rotația *cisoidei* $y^2 = \dfrac{x^2}{2a-x}$ în jurul asimptotei $x = 2a$.

$R:\ 2\pi^2 a^3$

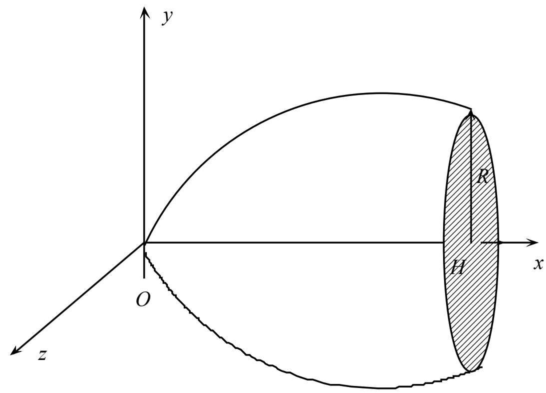
Indicație. Ca mai sus (*vezi figura*).



24. Să se calculeze volumul paraboloidului de revoluție cu raza bazei R și înălțime H.

$R:\ \dfrac{\pi R^2 H}{2}$

Indicație. Ecuația paraboloidului de revoluție, având ecuația $x = R\left(y^2+z^2\right)$ este generat de rotația parabolei $x = Ry^2$ în jurul axei Ox.



25. Determinați volumul solidului format prin rotația suprafeței plane mărginite de cicloida:

$$(C):\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

în jurul a) axei Ox; b) axei Oy; c) axei de simetrie a figurii.

a) R: $5\pi^2 a^3$

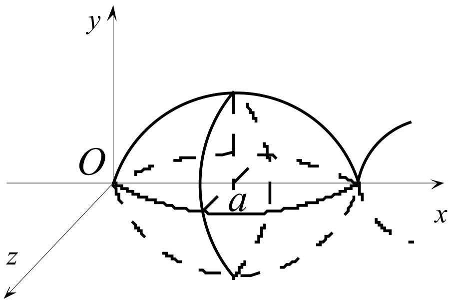


Fig. a), c)

b) R: $6\pi^3 a^3$

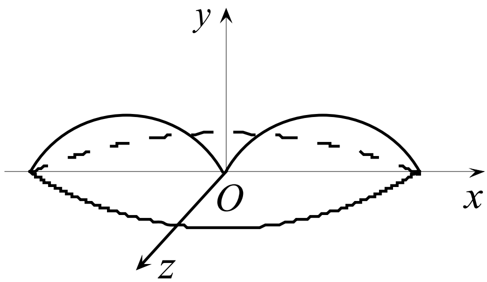


Fig. b)

c) $\frac{\pi a^3}{6}\left(9\pi^2-16\right)$

26. Determinați volumul solidului mărginit de hiperboloidul cu o pânză:

$$\left(H_1\right):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

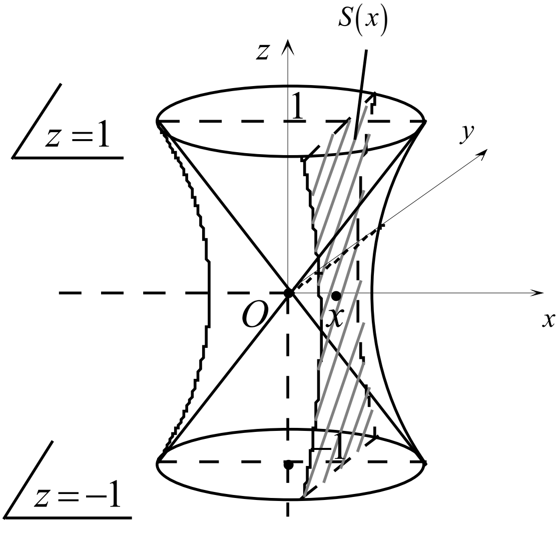
şi planele $z=-1$ şi $z=1$.

$R:\ 2\pi ab\left(1+\frac{1}{3c^2}\right)$

Indicație. Intersecția lui $\left(H_1\right)$ cu planul $x=\text{const}$ este hiperbola:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

Se determină apoi aria secțiunii $S(x)$ şi se aplică formula $V=\int_{-1}^{1}S(x)dx.$



4. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE ÎN MECANICĂ

4.1. Aplicații generale ale integralei definite în mecanica clasică

I. Presiunea unui fluid
Pentru a calcula forța de presiune a unui fluid, vom utiliza *legea lui Pascal*, care afirmă că forța de presiune a unui fluid P, ce acționează pe o suprafață S la o adâncime h, este dată de relația:

$$\boxed{P = \gamma h s} \tag{1}$$

unde γ este greutatea specifică a fluidului.

II. Lucrul mecanic
Dacă o forță variabilă $X = f(x)$ acționează pe direcția axei Ox, atunci lucrul mecanic efectuat de forță pe intervalul $[x_1, x_2]$ este dat de integrala:

$$\boxed{L = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx} \tag{2}$$

III. Energia cinetică
Energia cinetică a unui punct material de masă m şi viteză v este dată de relația:

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2}} \tag{3}$$

Observații

1) Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale având masele $m_1, m_2, ..., m_n$ şi, respectiv, vitezele $v_1, v_2, ..., v_n$ este egală cu:

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i v_i^2}{2}}$$

2) Pentru calculul energiei cinetice a unui solid, se face o partiție a solidului în particule elementare (care jocă rolul punctelor materiale), se însumează apoi energia cinetică corespunzătoare acestor particule, iar în final, se trece la limită, suma devenind o integrală.

IV. Câmpul electrostatic

Două sarcini electrice q_1 şi q_2 aflate la distanţa r una faţă de cealaltă interacţionează cu o forţă egală cu:

$$\boxed{F=\frac{q_1q_2}{r^2}} \qquad (4)$$

V. Mişcarea unui punct material

Dacă un punct material se află în mişcare de-a lungul unei curbe, având viteza $v=f(t)$ cunoscută la fiecare moment de timp *t*, atunci spaţiul parcurs într-un interval $[t_1,t_2]$ este dat de relaţia:

$$\boxed{s=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt} \qquad (5)$$

Exerciţii rezolvate

1. Viteza unui punct material este $v=0{,}1t^3$ m/s. Să se găsească spaţiul parcurs de punct în intervalul $T=10$ s. Care este viteza medie de deplasare în acest interval?

Soluţie. Spaţiul parcurs va fi:

$$s=\int_0^T v(t)\,dt=\int_0^{10}\frac{1}{10}t^3dt=\frac{1}{10}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10}=250\,\text{m}$$

Apoi viteza medie:

$$v_m=\frac{s}{T}=25\ \text{m/s.}$$

2. Ce lucru mecanic efectuează o forţă pentru a întinde un resort cu 6 cm, dacă o forţă de 1kg îl întinde 1cm?

Soluţie. Potrivit *legii lui Hooke*, o forţă $X\ [kgf]$ întinde un resort pe distanţa $x[m]$ care este egală cu $X=kx$, unde k este o constantă de elasticitate. Alegem $x=0{,}01m$, $X=1$ kgf. Atunci:

$$k=\frac{X}{x}=100\frac{kgf}{m}$$

iar de aici obţinem:

$$X=100x$$

Astfel, lucrul mecanic efectuat va fi:

$$L=\int_0^x X\,dx=\int_0^{0,06}100x\,dx=50x^2\Big|_0^{0,06}=0{,}18\ \ kg\cdot m$$

3. Determinați energia cinetică a unui cilindru circular de densitate δ având raza bazei R şi înălțimea h, care se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω.

Soluție. Pentru a determina masa elementară dm vom considera masa unui cilindru gol având înălțimea h şi raza interioară r şi grosimea pereților dr (*vezi figura de mai jos*).

Cu aceste notații vom scrie:

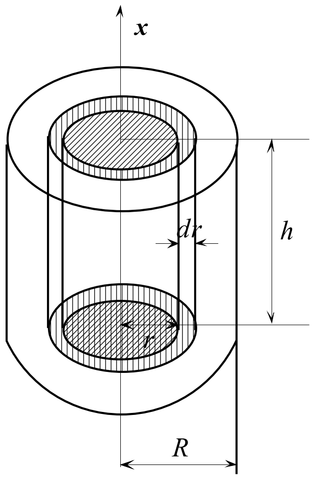
$$dm = 2\pi r \cdot h \delta \, dr$$

Viteza liniară a masei elementare este:

$$v = r\omega$$

iar energia cinetică elementară:

$$dK = \frac{v^2}{2} dm = \pi r^2 \omega^2 h \delta \, dr$$

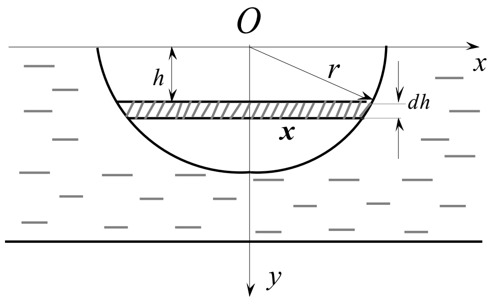


Integrând apoi, în raport cu r între 0 şi 2, urmeză:

$$K = \int_0^R \frac{v^2}{2} dm = \pi\omega^2 h \delta \frac{r^3}{3} = \frac{\pi\omega^2 \delta R^4 h}{4}$$

4. Determinați forța de presiune exercitată de un semicerc de rază r scufundat vertical în apă a.î. diametrul său să plutească pe suprafața apei (*vezi figura*).

Soluție. Partiționăm suprafața semidiscului în elemente – benzi paralele cu suprafața apei. Aria unui asemenea element (neglijând termenii infinitezimali de ordin superior) aflat la adâncimea h este:



$$dS = 2x\,dh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\,dh$$

Presiunea exercitată de acest element este:

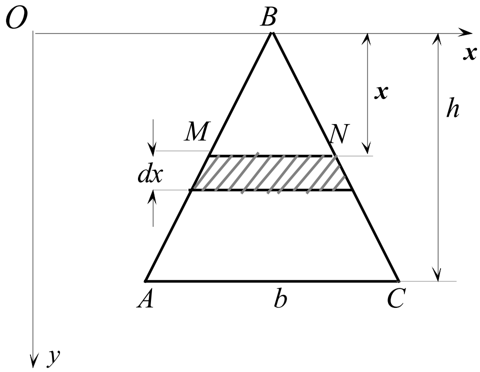
$$dP = \gamma h\,dS = 2\gamma h\sqrt{r^2 - h^2}\,dh$$

unde γ este greutatea specifică $\left(\gamma_{\text{apă}} = 1\right)$. De aici deducem că presiunea exercitată de semicerc asupra apei este:

$$P = 2\int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\,dh = -\frac{4}{3}\left(r^2 - h^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^r = \frac{4r^3}{3}$$

5. Determinați forța de presiune exercitată de un triunghi vertical având lungimile bazei *b* şi înălțimea egală cu *h*, scufundat în lungul bazei în apă a.î. vârful să atingă suprafața liberă a apei.

Soluție. Introducem un sistem de coordonate, ca în figură, şi considerăm un element – bandă orizontală de grosime dx şi aflată la adâncimea *x*.



Asimilând banda cu un dreptunghi, elementul de arie corespunzător va fi:

$$dS = MN\,dx$$

Apoi din asemănarea triunghiurilor *AMN* şi *ABC* rezultă:

$$\frac{MN}{b}=\frac{x}{h}\Leftrightarrow MN=\frac{bx}{h}$$

De aici, obținem expresia elementului de arie:

$$dS=\frac{b}{h}x\,dx$$

iar forța exercitată de elementul – bandă va fi:

$$dP=x\,dS$$

(termenii de ordin superior s-au neglijat, iar greutatea specifică este $\gamma_{\text{apă}}=1$).

Integrând ultima egalitate pe $[0,h]$, obținem forța de presiune exercitată de întreg triunghiul ABC asupra apei:

$$P=\int_0^h x\,dS=\frac{b}{h}\int_0^h x^2dx=\frac{1}{3}bh^2$$

6. Un jgheab vertical având secțiunea transversală de forma unui trapez cu lungimile bazelor 70 m, respectiv 50 m, iar înălțimea 20 *m* este plin cu apă (*vezi figura*). Să se determine forța de presiune a apei asupra pereților jgheabului.

Soluție. Elementul – bandă considerat are aria aproximativ egală cu:

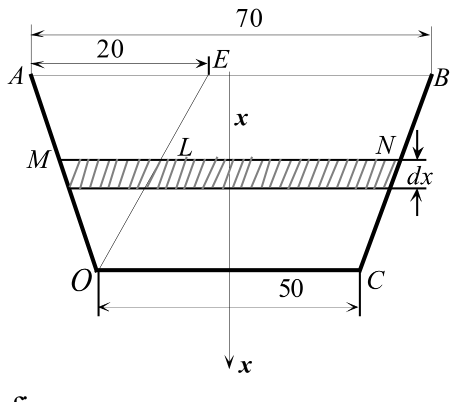
$$dS=MN\,dx$$

Ținând seama că $\Delta OML\sim\Delta OAE$ se obține egalitatea de rapoarte:

$$\frac{ML}{20}=\frac{20-x}{20}\Leftrightarrow ML=20-x$$

Mai departe,

$$MN=ML+LN=20-x+50=70-x$$



Elementul de arie va fi:

$$dS=MN\,dx=(70-x)dx$$

şi diferențiala forței de presiune a apei va fi:

$$dP=x\,dS=x(70-x)dS$$

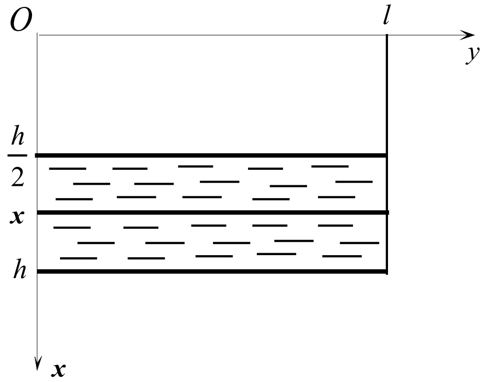
Integrând în raport cu x între 0 şi 20 vom scrie:

$$P=\int_0^{20} x(20-x)dx = 11333\frac{1}{3}$$

7. Un vas dreptunghiular este umplut cu volume egale de apă şi ulei. Să se arate că forța de presiune se reduce cu $\frac{1}{5}$ dacă se înlocuieşte apa cu uleiul.

Soluție. Notăm $h-$adâncimea vasului, iar cu $l-$lungimea lui. Introducem un sistem de coordonate ca în figură. Întrucât uleiul este situat deasupra apei şi ocupă jumătatea superioară a vasului, forța de presiune a uleiului asupra pereților vasului se exercită pe o jumătate din suprafața lui:

$$P_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}} xl\,dx=\frac{lh^2}{16}$$



Presiunea la adâncimea $x>\frac{h}{2}$ se datorează atât presiunii coloanei de ulei la adâncimea $\frac{h}{2}$, cât şi cea a coloanei de apă la adâncimea $x-\frac{h}{2}$, astfel:

$$dP_2=\left[\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]l\,dx=\left(x-\frac{h}{4}\right)l\,dx$$

de unde rezultă că forța de presiune a amestecului la jumătatea inferioară a vasului este:

$$P_2=\int_{\frac{h}{2}}^{h} l\left(x-\frac{h}{4}\right)dx=\frac{lh^2}{4}$$

Prin urmare presiunea amestecului asupra pereților vasului va avea valoarea:

$$P=P_1+P_2=\frac{lh^2}{4}+\frac{lh^2}{16}=\frac{5lh^2}{16}$$

Dacă vasul ar fi plin doar cu ulei, atunci forța de presiune asupra pereților ar fi:

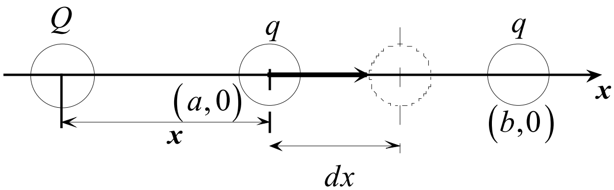
$$\overline{P} = \frac{1}{2}\int_0^h xl dx = \frac{lh^2}{4}$$

de aici rezultă că:

$$P - \overline{P} = \frac{1}{16} lh^2 = \frac{1}{5} P$$

8. O sarcină electrică Q concentrată în originea sistemului interacționează cu o altă sarcină situată în punctul $(a,0)$ pe care o deplasează în punctul $(b,0)$. Determinați lucrul mecanic L efectuat de forța de interacțiune F.

Soluție.



Lucrul mecanic elementar dL al forței F pe deplasarea dx este:

$$dL = F\,dx = \frac{Qq}{x^2}dx$$

de unde rezultă că:

$$L = \int_a^b F\,dx = -\frac{Qq}{x}\bigg|_a^b = Qq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Când $b \to +\infty$, lucrul mecanic, $L \to \frac{Qq}{a}$.

9. Calculați lucrul mecanic efectuat la aruncarea unui corp de greutate G vertical în sus până la înălțimea h.

Soluție. Notăm:

F – forța de atracție dintre Pământ şi corpul de masă m;

M – masa Pământului;

m – masa corpului.

Aplicând *legea lui Newton de atracție universală*, vom scrie:

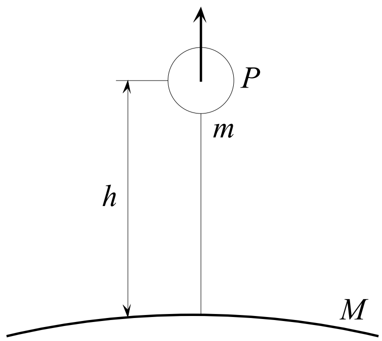
$$F = k\frac{Mm}{x^2}$$

unde x este distanța dintre corp şi centrul Pământului. Notând:

$$K = kmM$$

avem:

$$F(x) = \frac{K}{x^2}, \qquad R \le x \le h + R$$



unde R este raza Pământului.

Pentru $x = R$ forța $F(R)$ devine greutatea corpului i.e.

$$F(R) = G = \frac{K}{R^2} \Leftrightarrow K = GR^2$$

iar mai departe:

$$F(x) = \frac{GR^2}{x^2}$$

De aici obținem că lucrul mecanic elementar este:

$$dL = F(x)dx = \frac{GR^2}{x^2}dx$$

Prin integrare, găsim:

$$L = \int_R^{R+h} F(x) = -\frac{GR^2}{x}\bigg|_R^{R+h} = \frac{GRh}{R+h}$$

La limită pentru $h \to +\infty$ vom scrie:

$$\lim_{h\to+\infty} L(h) = \lim_{h\to+\infty} \frac{GRh}{R+h} = GR$$

ceea ce înseamnă că, la o valoare a lucrului mecanic egală cu *GR* corpul de masă *m*, iese din câmpul gravitațional terestru, (bineînțeles dacă se neglijează mişcarea Pământului).

10. O sferă de oțel de rază *R* se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω. Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru a opri sfera.

Soluție. Din teorema de conservare a energiei cinetice rezultă că:

$$\Delta K = L \Leftrightarrow K = L$$

Mai departe, pentru a calcula energia cinetică a sferei vom împărți sfera în cilindri concentrici goi de grosime dx; viteza punctelor unui asemenea cilindru de rază x este $v = \omega t$.
Elementul de volum a unui cilindru este:

$$dV = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx \lim_{x\to\infty}$$

Elementul de masă:

$$dM = \gamma dV$$

unde γ este greutatea specifică, astfel că diferențiala energiei cinetice va fi:

$$dK = 2\pi\gamma\omega^2 x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

De unde, rezultă, în final:

$$K = 2\pi\gamma\omega^2\int_0^R x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{4\pi\gamma R^3}{3}\cdot\frac{\omega^2 R^2}{5} = \frac{M\omega^2 R^2}{5}$$

unde am ținut seama că volumul sferei este:

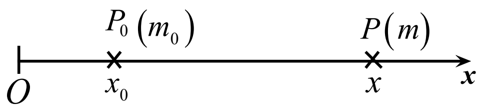
$$v_{sf} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

iar masa sferei:

$$M = \gamma V$$

11. Să se calculeze lucrul mecanic de atracție efectuat de forța de interacțiune dintre două particule P_0, P de mase m_0, respectiv m, situat pe axa Ox la distanța x_0, respectiv x (*vezi figura*).

Soluție. Presupunem $0 < x_0 < x$.



Considerăm particula P_0 fixă. Conform legii de atracție universală, forța care acționează asupra lui P (de la stânga spre dreapta) are mărimea:

$$F\left(x\right) = -k\frac{m_0 m}{\left(x - x_0\right)^2}$$

unde k este o constantă. În acest caz, lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a deplasa particula P dintr-un punct x_1 într-un punct x_2 $\left(x_2 > x_1 > x_0\right)$ este:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x\right)dx$$

i.e.

$$L = -km_0 m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\left(x - x_0\right)^2} = \frac{km_0 m}{x - x_0}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{km_0 m\left(x_1 - x_2\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)}$$

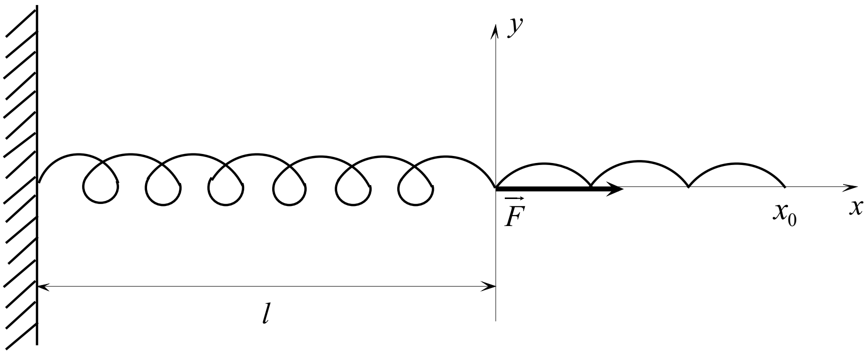
12. Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru a întinde un resort de lungime *l* şi constantă elastică *k* cu lungime x_0.

Soluție. Se ştie că pentru a întinde un resort de lungime dată *l* până la lungimea $l + x$ este necesară o forță proporțională de mărime egală cu valoarea alungirii i.e.

$$F\left(x\right) = kx$$

unde constanta *k* depinde de resort. Astfel lucrul mecanic va fi:

$$L = \int_0^{x_0} F\left(x\right)dx = \frac{kx_0^2}{2}$$



13. Un resort acționat de o forță $F = 100\,N$ este întins cu 1 cm. Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru a alungi resortul cu 5 cm.

Soluție. Conform legii lui Hooke:

$$F = kx$$

unde *x* reprezintă alungirea resortului. Pentru: $F = 100\,N$ şi $x = 0,01$ m, obținem:

$$100 = k \cdot 0,01 \Leftrightarrow k = 10000$$

iar de-aici găsim forța:

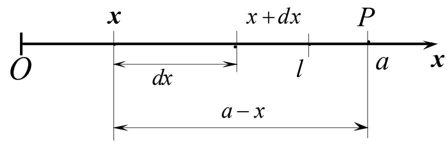
$$F\left(x\right) = 10000\,x$$

şi lucrul mecanic:

$$L = \int_0^{0,05} F\left(x\right)dx = 10000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,05} = 12,5\,J$$

14. Să se calculeze forța cu care o tijă omogenă $0 \le x \le l$ de densitate δ atrage un punct material P situat la distanța a pe axa Ox $\left(a > l\right)$ şi de masă m (*vezi figura*).

Soluție.



Un element infinitezimal din tijă, $\left[x, x + dx\right]$ având masa elementară:

$$dm = \delta\, dx$$

atrage punctul material P cu o forță:

$$dF = -k\frac{m\delta \cdot dx}{\left(a - x\right)^2}$$

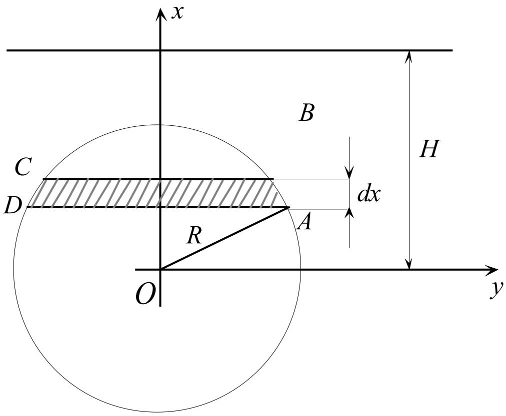
unde k este o constantă de proporționalitate. De aici, dacă se integrează în raport cu x între 0 şi l găsim:

$$F = -\int_0^l \frac{km\delta}{\left(a - x\right)^2}dx = -km\text{δ}\left.\frac{1}{a - x}\right|_0^l = -\frac{km\text{δ}l}{a\left(a - l\right)}$$

15. Să se calculeze forța de presiune a apei ce acționează asupra unui disc de rază R scufundat la adâncimea $H > 2R$ (măsurată între centrul discului şi suprafața liberă a apei) (*vezi figura*).

Soluție. Alegem sistemul de axe ca în figură cu originea în centrul cercului. Împărțim discul în n – benzi orizontale de lățime Δ_{x_i}, $\left(i = \overline{1, n}\right)$. Aria unei asemenea benzi "i" va fi:

$$dS_i \approx AB \cdot \Delta x_i = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\Delta x_i$$



Admițând că banda “i” este scufundată la adâncimea $H - x_i$ față de suprafața liberă a apei şi aplicând legea lui Pascal vom scrie că forța elementară de presiune a apei asupra elementului – bandă are valoarea:

$$\Delta P_i \simeq \gamma\left(H - x_i\right)\Delta S_i = 2\gamma\left(H - x_i\right)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i$$

unde γ este greutatea specifică a apei. Însumând în ambii membri ultima egalitate după $i = \overline{1,n}$ vom scrie:

$$P \simeq \sum_{i=1}^{n} 2\gamma\left(H - x_i\right)\sqrt{R^2 - x^2}\,\Delta x_i$$

Tinzând la limită după $n \to \infty$ rezultă formula exactă pentru forța de presiune a apei:

$$P = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\gamma\left(H - x_i\right)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i$$

unde membrul drept reprezintă chiar integrala lui Riemann a funcției

$$f\left(x\right) = 2\gamma\left(H - x\right)\sqrt{R^2 - x^2}$$

i.e.

$$P = 2\gamma\int_{-R}^{R}\left(H - x\right)\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \pi\gamma R^2 H$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze lucrul mecanic pe care îl efectuează o forță pentru a întinde un resort cu $0{,}5$ cm ştiind că pentru a-l întinde cu 1 cm este necesară o forță $F = 5$ N.

   R: $L = 62{,}5$ J

2. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 2 m, ştiind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară o forță $F = 100$ N.

   R: $L = 200$ J

3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 5 m ştiind că pentru a-l întinde cu 1 m este necesară forță de 10 N.

   R: $L = 0{,}0125$ J

4. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru a ridica un corp de masă $m = 5$ kg la înălțimea de 100 m.

R: $L = 4905$ J

Indicație. Se integrează $L = \int_0^{100} mg\,dx$, unde $G = mg$ este forța de greutate, iar $g = 9{,}81$ m/s^2 este accelerația gravitațională.

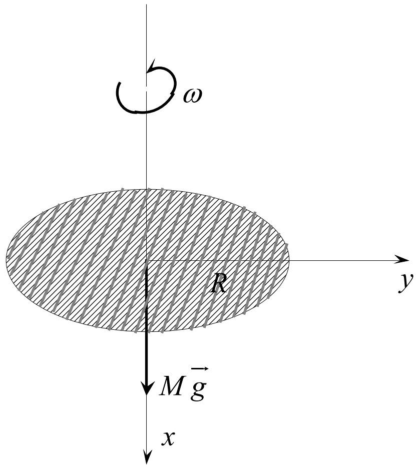
5. O picătură de apă având masa inițială M cade sub acțiunea greutății sale şi se evaporă uniform pierzând prin aceasta în fiecare secundă o masă m. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale până în momentul evaporării totale.
(*Se va neglija rezistența aerului*)

R: $L = \dfrac{1}{6} g^2 \dfrac{M^3}{m^2}$

6. Să se determine lucrul mecanic necesar pentru a pompa apa dintr-un boiler semisferic de rază R.

R: $L = \dfrac{\pi R^4}{4}$

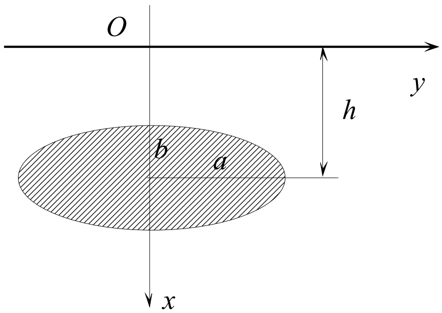
7. Să se determine energia cinetică a unui disc de masă M şi raza R care se roteşte cu viteză unghiulară ω în jurul unei axe ce trece prin centrul cercului perpendicular pe planul acestuia



R: $K = \dfrac{MR^2\omega^2}{4}$

8. Să se determine presiunea unui fluid având greutatea specifică γ ce acționează asupra unei elipse verticale de semiaxe a şi b şi al cărui centru este scufundat la adâncimea h față de nivelul fluidului $(h \geq b)$.

$R: \quad P = \pi ab\gamma h$



9. Să se determine presiunea unui fluid având greutatea specifică γ ce acționează pe pereții interiori ai unui cilindru circular drept cu raza bazei r şi înălțimea h (cilindrul este umplut cu fluid).

$R: \quad P = \pi r\gamma h^2$

10. Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru a învinge forța de gravitație la pomparea apei dintr-un vas conic având vârful orientat vertical în jos.

$R: \quad L = \dfrac{\pi R^2 H}{12}$

11. Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru a întinde un resort cu $6\,\text{cm}$ dacă o forță de $1\ \text{kgf}$ întinde resortul cu $1\ \text{cm}$.

$R: \quad L = 0{,}18\ \text{kgf}\cdot\text{m}$

12. Densitatea unei tije, $(0 \leq x \leq l)$ de lungime l se exprimă prin:

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{l}$$

unde q_0 este o constantă. Să se calculeze masa tijei.

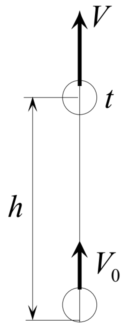
$R: \quad 2q_0\dfrac{l}{\pi}$

13. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0. Să se calculeze înălțimea la care se ridică după t secunde. (Se neglijează rezistența aerului).

$R: \quad h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

Indicație. Viteza la momentul *t* este dată de legea:

$$v = v_0 - gt$$



14. Un punct material situat pe axa Ox oscilează armonic în jurul originii cu viteza *v*, dată de legea:

$$v = v_0 \cos \omega t$$

unde t – este timpul, v_0 – viteza inițială şi ω – viteza unghiulară (v_0 şi ω sunt date). Să se determine poziția punctului la momentul *t* şi mărimea vitezei medii a punctului după ce parcurge o oscilație completă:

$R: \quad x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \, , \; v_m = \frac{2}{\pi} v_0$

15. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0. Se ştie că viteza la momentul *t* variază după legea:

$$v = c \cdot \mathrm{tg}\left(-\frac{g}{c} t + \mathrm{arctg} \frac{v_0}{c} \right)$$

unde *c*, este o constantă, iar g şi v_0 au semnificațiile de la *problema 13*. Determinați înălțimea până la care se ridică corpul.

$R: \quad \frac{C^2}{2g} \ln \left[1 + \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right]$

16. Viteza de mişcare a unui punct material variază după legea:

$$v = te^{-0,01t} \text{ m/s}.$$

Să se calculeze spațiul parcurs de punct până la oprire.

$R: \quad s = 10^4 \text{ m}$

Indicație. Se evaluează $\lim\limits_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} v(t) dt$

17. Un corp este ridicat vertical cu accelerația:

$$f = \frac{A}{a-bt}, \qquad (A,\ a,\ b \text{ constante pozitive, } a-bt>0).$$

Să se determine viteza la momentul t, dacă viteza inițială este nulă. Determinați înălțimea la care se ridică corpul la momentul $t = t_1$.

R: $v = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a-bt}\right),\ h = \frac{A}{b^2}\left[bt_1 - (a-bt_1)\ln\frac{a}{a-bt_1}\right]$

Indicație. $v = \int_0^t f(t)\,dt$

18. Două sarcini electrice $q_0 = 100$ C şi $q_1 = 200$ C sunt situate pe axa Ox în punctele $x_0 = 0$, şi, respectiv $x_1 = 1$ cm. Să se determine lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa a doua sarcină în punctul de abscisă 10 cm..

R: $1{,}8 \cdot 10^4$ J.

19. Ce lucru mecanic este necesar pentru a opri o sferă de oțel cu raza $R = 2\,\text{m}$ care se roteşte cu viteză unghiulară $\omega = 1000\,\text{rot/m}$ în jurul axei sale? (Se ştie că *greutatea specifică* a oțelului $\gamma_{\text{oțel}} = 7{,}8\ \text{g/cm}^3$)

R: $K = \frac{M}{5}R^2\omega^2 = 2{,}3 \cdot 10^8\,\text{kg m}$

Indicație. Se aplică *problema 10.*

20. Un triunghi de bază b şi înălțime h este scufundat în apă cu vârful în jos a.î. baza sa să rămână la suprafața liberă a apei. Determinați presiunea apei asupra triunghiului.

R: $P = \frac{bh^2}{6}$

21. Un cilindru cu piston mobil având diametrul $D = 20$ cm şi lungimea $l = 80\,\text{cm}$ este umplut cu abur la o presiune $p = 10\ \text{kgf/cm}^2$. Ce lucru mecanic este necesar pentru a menține volumul aburului la temperatură constantă (*proces izoterm*) ?

R: $L = 800\pi\ln 2\ (\text{kg} \cdot \text{m})$

Indicație. Pentru un proces izoterm ecuația de stare se scrie $pV = \text{constant}$ i.e. $pV = p_0V_0$. Lucrul mecanic efectuat pentru destinderea gazului de la volumul v_0 la volumul v este:

$$L = \int_{v_0}^{v} p\,dv$$

22. Determinați lucrul mecanic efectuat într-un proces adiabatic de destindere al aerului având volumul inițial $v_0 = 1\ \text{m}^3$ şi presiunea $p_0 = 1\ \text{kgf/cm}^2$ la volumul $v_1 = 10\ \text{m}^3$.

R: $L \approx 15{,}000\ \text{kg} \cdot \text{m}$

Indicație. Într-un proces adiabatic, *legea lui Poisson* se scrie $pV^\gamma =$ const. sau $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$, unde $\gamma_{\text{aer}} = 1{,}4.$ Se evaluează L ca la problema anterioară.

4.2. Calculul momentelor statice şi al momentelor de inerție. Centre de greutate. Teoremele lui Guldin – Pappus

IV.2.1 Generalități. Relații de calcul

(i) *Momentul static*

Momentul static relativ la o axă Δ al unui punct material A având masa m şi situat la distanța d față de axă este cantitativ egal cu:

$$M_\Delta = md$$

Momentul static relativ la o axă l a unui sistem de n – puncte materiale cu masele $m_1, m_2, ..., m_n$ situate în planul axei Δ şi la distanțele $d_1, d_2, ..., d_n$ față de axă este suma:

$$M_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

unde distanțele punctelor situate de-o parte a dreptei au semnul plus, iar cele de pe cealaltă parte a dreptei au semnul minus.

În mod similar se defineşte momentul static al unui sistem de puncte relativ la un plan.

Pentru un sistem material continuu (curbă materială sau domeniu plan mărginit) momentele statice M_x şi M_y relativ la axele Ox şi, respectiv, Oy au expresiile integrale:

$a)$ Pentru o curbă (C) regulată:

$$M_x = \int_{(C)} x\,dm \qquad M_y = \int_{(C)} y\,dm$$

unde dm – reprezintă elementul de masă. Ținând cont că:

$$dm = \rho\,dl$$

cu ρ – densitatea şi dl – elementul de arc pe curbă.

Vom scrie, în ipoteza $\rho \equiv 1$:

$$M_x = \int_{(C)} x dl, \quad M_y = \int_{(C)} y dl \tag{1}$$

unde:

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \quad \text{şi} \quad dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

adică:

$$\boxed{M_x = \int_\alpha^\beta x\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}, \quad \boxed{M_y = \int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt} \tag{2}$$

Pentru un domeniu plan (D) mărginit de curba $y = y(x)$, axa Ox şi dreptele $x = a$ şi $x = b$,

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y|y|\,dy}, \quad \boxed{M_y = \frac{1}{2}\int_a^b x|y|\,dx} \tag{2'}$$

$b)$ Pentru un domeniu plan (D) mărginit de curbele $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $(y_1(x) \le y_2(x))$, dreptele $x = a$, $x = b$, $(a \le x \le b)$ momentele statice au expresiile:

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx}, \quad \boxed{M_y = \int_a^b x\left(y_2 - y_1\right) dx} \tag{3}$$

(ii) *Momente de inerţie*

Momentul de inerţie, în raport cu axa Δ, a unui punct material de masă m situat la distanţa d faţă de dreaptă, este numărul:

$$I_\Delta = m d^2$$

Momentul de inerţie relativ la axa Δ al unui sistem de n puncte materiale de mase $m_1, m_2, ..., m_n$ situate, respectiv, la distaţele d_i faţă de dreapta Δ este prin definiţie:

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$$

unde $d_1, d_2, ..., d_n$ sunt distanţele punctelor faţă de axă.

În cazul sistemelor continue de masă se defineşte momentul de inerţie I_Δ înlocuind suma printr-o expresie integrabilă, şi anume:

$a)$ Pentru curbă materială (C) definim momentele de inerţie în raport cu axele Ox şi Oy:

$$\boxed{I_x = \int_{(C)} x^2 dm}, \quad \boxed{I_y = \int_{(C)} y^2 dm}$$

şi ținând cont că pentru o curbă omogenă (facem convenția $\rho = 1$) avem $dm = dl$, rezultă că momentele de inerție în raport cu axele Ox şi Oy au respectiv, expresiile:

$$\boxed{I_x = \int_{(C)} x^2 dl}, \quad \boxed{I_y = \int_{(C)} y^2 dl} \tag{4}$$

De aici putem introduce momentul de inerție în raport cu originea sistemului de coordonate O:

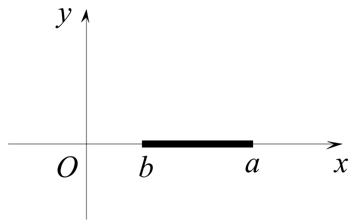
$$I_O = \int_{(C)} \left(x^2 + y^2\right) dl \tag{5}$$

În expresiile integrale de mai sus se consideră curba (C) definită prin ecuațiile parametrice (2).
Analog, se pot defini momentele de inerție ale domeniilor plane mărginite de curba $y = y(x)$ sau mărginit de curbele $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ şi dreptele $x = a$ şi $x = b$.

(iii) *Momentul de inerție al unei plăci omogene având forma unui trapez curbiliniu în raport cu axa absciselor*

Pentru o bară omogenă AB situată pe axa Ox, între punctele $x = a$ şi $x = b$ $(a < b)$ definim momentul de inerție al barei față de punctul O numărul pozitiv I definit prin:

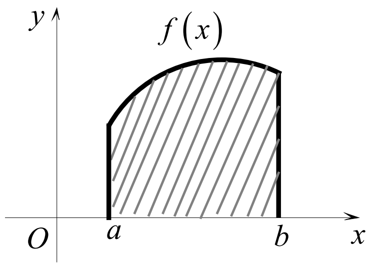
$$I = \int_a^b x^2 f(x) dx$$



unde $f(x)$ este densitatea barei.
În cazul în care se consideră placa omogenă având forma din figură atunci definim prin analogie momentul de inerție în raport cu axa Ox, numărul:

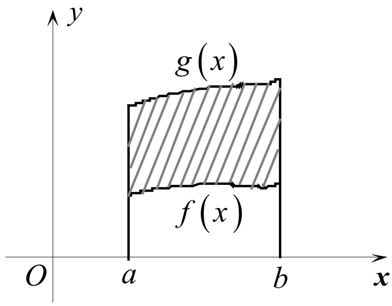
$$\boxed{I = \frac{\rho_0}{3} \int_a^b f^3(x) dx}$$

unde ρ_0 este densitatea plăcii. Vom presupune în continuare $\rho_0 \equiv 1$.



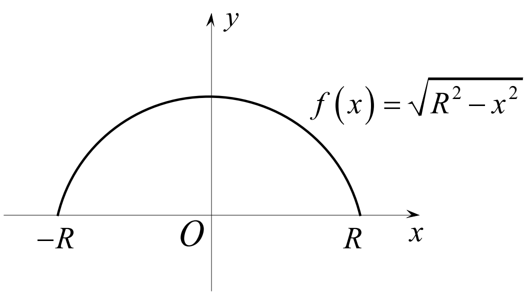
În mod asemănător se defineşte momentul de inerţie al plăcii omogene limitată de curbele $y = f(x)$ şi $y = g(x)$ $\left(x \in [a,b]\right)$ în raport cu axa Ox prin (*vezi figura alăturată*):

$$I = \frac{1}{3}\int_a^b \left[g^3(x) - f^3(x)\right]dx$$



Aplicaţie.

Să se determine momentul de inerţie al semidiscului circular de rază R având originea în originea axelor de coordonate şi cu diametrul pe axa Ox , în raport cu această axă.
Soluţie. Avem:



$$I=\frac{1}{3}\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3dx$$

Schimbarea de variabilă:

$$x\to t\therefore x=R\sin t\,,\ dx=R\cos t\,dt$$

x	$-R$		R
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

conduce la integrala:

$$I=\frac{R^4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{2}{3}H_4$$

unde $H_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,dt.$ Pentru m par avem:

$$H_m=\frac{(m-1)!!}{m!}\frac{\pi}{2}$$

iar pentru $m=4$:

$$H_4=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{3\pi}{8}$$

Astfel în final, se găseşte: $I=\frac{\pi R^4}{8}$. Dacă notăm masa plăcii circulare cu m şi presupunem densitatea $\rho_0\equiv 1$ atunci $m=\frac{\pi R^2}{2}$, astfel că mai putem scrie:

$$I=\frac{mR^2}{4}$$

(iv) *Momentul de inerție al unui corp de revoluție în raport cu axa de rotație*

Un corp tridimensional omogen are momentul de inerție I relativ la axa Ox numărul:

$$I=\frac{\pi}{2}\rho_0\int_a^b f^4(x)\,dx$$

Putem presupune $\rho_0\equiv 1$

Aplicație

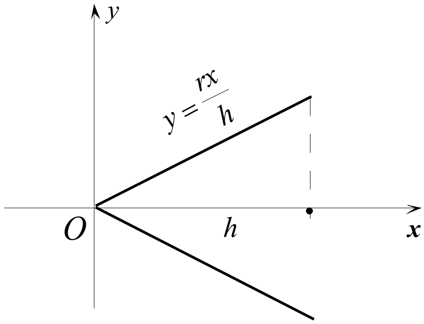
Să se determine momentul de inerție al unui con circular drept având raza bazei r şi înălțimea h

Soluție. Fie $y=\frac{rx}{h}$ $x\in[0,h]$ ecuația segmentului-generatoare. Atunci:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^h y^4 dx = \frac{\pi}{2}\frac{r^4}{h^4}\int_0^h x^4 dx = \frac{\pi}{10}r^4 h$$

Notând m – masa conului, se obțin:

$$m = \rho_0 V = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad \text{şi} \qquad I = \frac{3mr^2}{10}$$



(v) *Centre de greutate*

Pentru un sistem de n puncte materiale $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ masele m_i şi vectorii de poziție $\vec{r_i}$, în raport cu originea O a unui sistem de coordonate, definim centrul de masă prin punctul C de vector de poziție:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Pentru un mediu continuu (curbă materială γ sau domeniu plan mărginit D) definim *centrul de masă* prin

$$\vec{r_C} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

unde integralele se evaluează pe domeniul D.
În cazul unei curbe materiale elementul de masă se exprimă prin rotația

$$dm = \rho\, dl$$

iar pentru un domeniu plan mărginit

$$dm = \rho\, dS$$

Vom presupune că mediul este omogen aşa încât putem considera $\rho =$ constant. Prin urmare

$a)$ pentru o curbă materială

$$\overrightarrow{r_C}=\frac{\int\limits_{(\gamma)}\vec{r}dl}{\int\limits_{(\gamma)}dl}$$

sau, pe componente

$$x_C=\frac{\int\limits_{(\gamma)}x\,dl}{\int\limits_{(\gamma)}dl},\ y_C=\frac{\int\limits_{(\gamma)}y\,dl}{\int\limits_{(\gamma)}dl} \tag{6}$$

unde $\vec{r}=(x_c,y_c)$ şi $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$. Trecând la integrala Riemann obținem relațiile de calcul ale centrului de greutate corespunzătoare unei curbe:

$$\begin{cases}x_C=\dfrac{\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}{\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}dt}\\ \\ y_C=\dfrac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}{\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}dt}\end{cases}$$

Uneori, notăm ξ şi η în loc de x_c şi y_c

b) Pentru un mediu continuu din planul (D) mărginit vom scrie

$$\overrightarrow{r_C}=\frac{\int\limits_{(D)}\vec{r}dS}{\int\limits_{(D)}dS}\Leftrightarrow\xi=\frac{\int\limits_{(D)}x\,dS}{\int\limits_{(D)}dS},\ \eta=\frac{\int\limits_{(D)}y\,dS}{\int\limits_{(D)}dS} \tag{7}$$

unde $\overrightarrow{r_C}=(\xi,\eta)$

iar, pentru un corp (T) din spațiu:

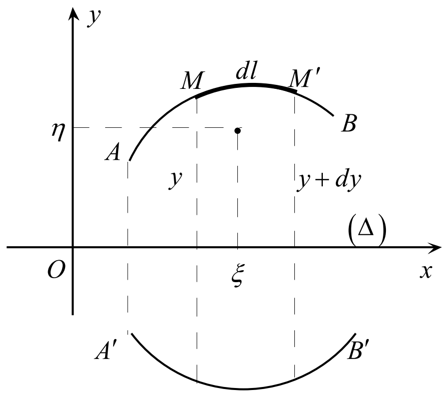
$$\overrightarrow{r_C}=\frac{\int\limits_{(T)}\vec{r}\,dV}{\int\limits_{(T)}dV}\Leftrightarrow\xi=\frac{\int\limits_{(T)}x\,dV}{\int\limits_{(T)}dV},\eta=\frac{\int\limits_{(T)}y\,dV}{\int\limits_{(T)}dV}\ \zeta=\frac{\int\limits_{(T)}z\,dV}{\int\limits_{(T)}dV}$$

(8)

unde, $\overrightarrow{r_C}=(\xi,\eta,\zeta)$.

(vi) *Teoremele lui Guldin – Pappus*

Teorema I. Aria suprafeței generate de un arc de curbă plană care se roteşte în jurul unei axe (D) din planul curbei (arcul fiind situat în întregime de aceeaşi parte a axei) este egală cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei date, presupuse omogene.



Un arc de curbă $\widehat{MN} = dl$ generează prin rotația sa în jurul axei (Δ), luată ca axa Ox (*vezi figura*), un trunchi de con. Ținând seama că aria laterală a unui trunchi de con este $A = \pi(R + r)G$, rezultă că elementul de arie este:

$$dS = \pi\left[(y + dy) + y\right]dl$$

Neglijând termenii infinitezimali de ordin superior deducem că:

$$dS = 2\pi y\, dl$$

de unde:

$$\boxed{S = 2\pi\int y dl}$$

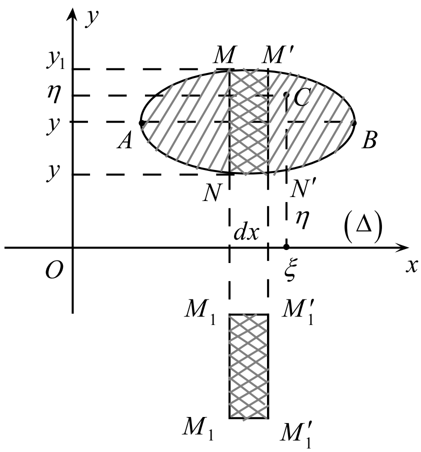
Notând l – lungimea arcului $\widehat{AB}$, iar η – ordonata centrului de greutate, scriem, mai departe:

$$\int y\, dl = l \cdot \eta$$

Aşadar:

$$\boxed{S = 2\pi\ \eta \cdot l}$$

Teorema II. Volumul corpului generat prin rotația unei suprafețe plane închise în jurul unei axe (Δ) din planul ei (suprafața fiind situată în întregime de aceeaşi parte a axei) este egal cu produsul dintre aria acestei surprafețe şi lungimea cercului descris de centrul ei de greutate.



Presupunem că axa de rotație (Δ) este chiar axa Ox (*vezi figura*) notăm y_1 ordonata unui punct de pe arcul superior $\overset{\frown}{AMB}$ şi y_2 ordonata unui punct situat pe arcul inferior $\overset{\frown}{ANB}$ corespunzător aceleiaşi abscise *x*. Volumul generat de elementul de suprafață $MM'N'N$ poate fi exprimat ca diferența volumelor a doi cilindri de aceeaşi înălțime *dx* şi cu razele bazelor y_1 şi y_2. Rezultă:

$$dV = \pi y_1^2 dx - \pi y_2^2 dx = 2\pi \frac{y_1 + y_2}{2}\left(y_1 - y_2\right)dx = 2\pi y dS$$

unde s-a notat $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ordonata centrului maselor pentru elementul de arie $MM'N'N$ presupus dreptunghiular. De aici, obținem:

$$V = 2\pi \int y\, dS$$

Notând S – aria suprafeței plane $AMBNA$ şi η – ordonata centrului maselor, putem scrie mai departe:

$$\boxed{V = 2\pi\ \eta \cdot S}$$

(v) *Proprietățile centrelor de greutate*

Vom enunța câteva dintre proprietățile mai importante ale centrelor de greutate utile în aplicații.

(1) Dacă un sistem material admite un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de greutate se află în acel plan, pe acea axă sau în acel centru.

(2) Dacă un sistem material (*S*) se compune din n subsisteme $(S_1),(S_2),...,(S_n)$ având fiecare masele $M_1, M_2, ..., M_n$ şi centrele de greutate

$C_1, C_2, ..., C_n$, atunci centrul de masă al sistemului (S) se poate obține considerând că masele sistemelor componente M_i sunt concentrate în centrele lor de masă i.e.

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \overrightarrow{R_i}}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

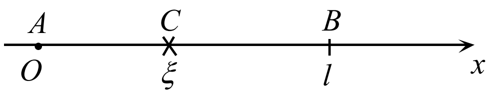
unde prin $\overrightarrow{R_i}$ s-au notat vectorii de poziție ai centrelor de masă C_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$

(3) Dacă un sistem material (S) poate fi considerat ca provenind dintr-un sistem (S_1) din care a fost îndepărtat un sistem (S_2) şi dacă se cunosc centrele de greutate C_1 şi C_2 ale celor două sisteme, atunci centrul de greutate al sistemului (S) se poate obține considerând că în punctele C_1 şi C_2 s-ar concentra masele M_1 şi M_2, i.e.

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{M_1 \overrightarrow{R_1} - M_2 \overrightarrow{R_2}}{M_1 - M_2}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine centrul de greutate al unei bare omogene de lungime *l*.
Soluție. Fie bara *AB* de lungime *l* situată în lungul axei Ox (*vezi figura*).

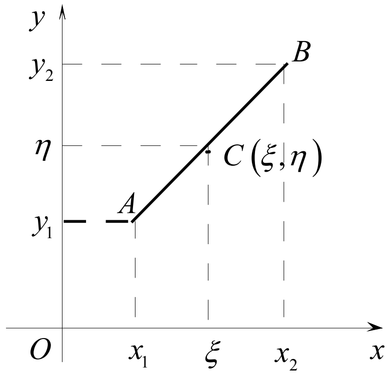


Notăm C – centrul de greutate iar, ξ – abscisa punctului *C*.
Avem:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_{\widehat{AB}} \vec{r}\, dl}{\int_{\widehat{AB}} \vec{r}\, dl} \Leftrightarrow \xi = \frac{\int_0^l x\, dx}{\int_0^l dx} = \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^l}{l} = \frac{l}{2}$$

Prin urmare, o bară omogenă va avea centrul de greutate situat în mijlocul barei.
Observație. Dacă se cunosc, în particular, coordonatele extremităților segmentului *AB*, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, atunci (*vezi figura alăturată*).

$$\xi = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx_2} = \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

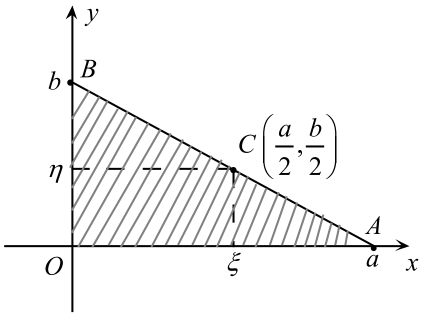


Analog, se obține:

$$\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene având forma unui triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor *a* şi *b*.

Soluție. Fie un sistem de axe xOy ales ca în figură.



Ecuația segmentului $[AB]$ este:

$$[AB]:\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x \in [O,a], \quad y \in [O,b].$$

Atunci figura plană mărginită de arcul $[AB]$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = a$ are coordonatele centrelor de greutate, respectiv:

$$\xi = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y|y|\,dx}{\frac{ab}{2}}, \quad \eta = \frac{\int_0^a x|y|\,dx}{\frac{ab}{2}}$$

Din ecuația arcului $[AB]$ obținem:

$$y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

de unde rezultă că:

$$\int_0^a y|y|dx = b\int_o^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = -\frac{b}{a}\frac{(a-x)^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^2 b}{3}$$

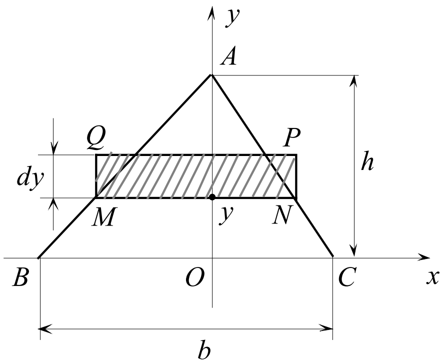
iar

$$\int_0^a xy\,dx = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{a^2 b}{6}$$

înlocuind mai sus obținem, în final:

$$\xi = \frac{a}{2},\quad \eta = \frac{b}{2}$$

3. Să se determine momentul de inerție al plăcii omogene plane triunghiulare având lungimea bazei *b* şi înălțimea *h* în raport cu baza sa.
Soluție. Alegem un sistem de axe xOy ca în figura de mai jos şi delimităm cu o bandă parabola cu axa Oy de lățime dy.



Elementul de arie al dreptunghiului *MNPQ* va fi:

$$dS = MN \cdot dy$$

unde *MN* rezultă din asemănarea triunghiurilor *AMN* şi *ABC*, i.e.

$$\frac{MN}{b} = \frac{h-y}{h} \Leftrightarrow MN = \frac{b}{h}(h-y)$$

Aşadar:

$$dS = \frac{b}{h}(h-y)$$

Placa fiind omogenă (putem alege $\rho = 1$) rezultă că elementul de masă corespunzător benzii *MNPQ* este:

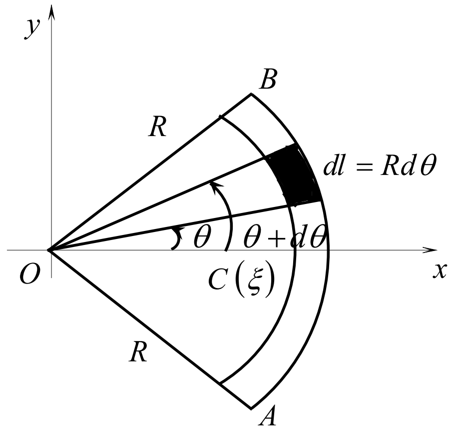
$$dm = dS$$

de unde reiese imediat că:

$$I_n = \int_{[ABC]} y^2 dm = \int_{[ABC]} y^2 dS = \frac{b}{h}\int_D^h y^2 \left(h - y\right) dy = \frac{bh^3}{12}$$

4. Să se determine centrul de greutate al unei bare omogene în formă de arc având unghiul la centru de măsură 2α şi raza R.

Soluție. Fie un sistem de axe ales, astfel încât axa Ox este bisectoarea unghiului AOB, iar axa Oy în planul arcului.



Bara fiind plană, deducem că $\varsigma = 0$, iar cum Ox este axă de simetrie rezultă că $\eta = 0$. Pentru determinarea abscisei ξ vom considera un element de arc:

$$dl = MM' = Rd\theta$$

iar $x = R\cos\theta$; în acest caz:

$$\xi = \frac{\int_{\widehat{AB}} x\,dl}{\int_{\widehat{AB}} dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\, d\theta} = \frac{2R^2 \int_0^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{2R\theta\big|_o^{\alpha}} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

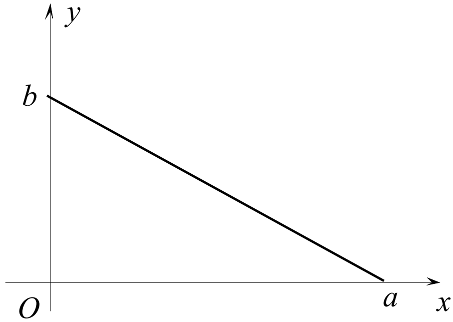
În particular, dacă bara este un semicerc, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, iar:

$$\xi = \frac{R\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

5. Să se determine momentele statice, în raport cu axele Ox şi Oy, ale triunghiului mărginit de dreptele:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad x=0, \quad y=0.$$

Soluție. Aplicăm relațiile $(2')$ pentru $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad x\in[0,a]$. Astfel:



$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a y|y|dx=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx=\frac{ab^2}{6}$$

$$M_y=\int_0^a x|y|dx=b\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)=\frac{a^2b}{6}$$

6. Să se determine momentele statice, în raport cu axele Ox şi Oy, ale unui arc al semicercului:

$$x^2+y^2=a^2, \qquad y\geq 0$$

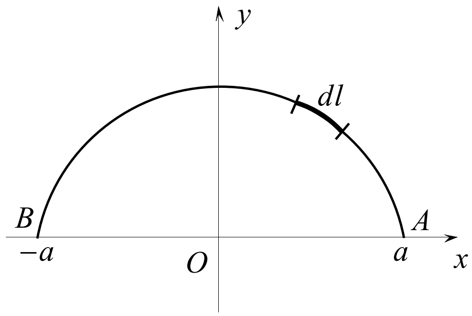
Să se deducă de aici centrul de greutate corespunzăor semicercului.
Soluție. Avem:

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

De aici rezultă că:

$$M_x=\int_{AB} x\,dl=\int_{-a}^{a}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=0.$$



iar

$$M_y = \int_{-a}^{a} y\,dl = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a^2$$

Observație. Din definiția centrului de greutate deducem că în cazul unei curbe situate în plan sau a unui domeniu plan mărginit având masa:

$$M = \int dm$$

rezultă că:

$$\xi = \frac{M_y}{M}, \quad \eta = \frac{M_x}{M}$$

Cu această observație rezultă că:

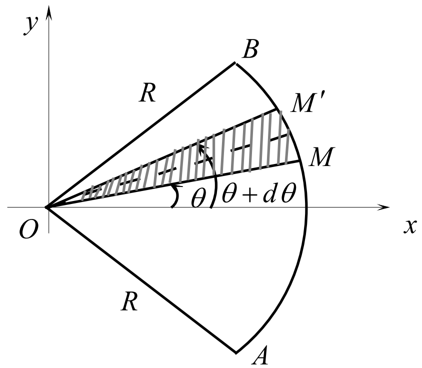
$$M = \int_{-a}^{a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \arcsin \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = \pi a$$

Iar apoi:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{2}{\pi} a.$$

7. Să se determine centrul de greutate al plăcii plane în formă de sector circular având unghiul la centru 2α şi de rază *R*.

Soluție. Se alege sistemul de axe ca în figura alăturată. Întrucât axa Ox este axă de simetrie rezultă că $\eta = 0$.



Pentru a determina abscisa centrului de greutate, ξ aplicăm formula:

$$\xi = \frac{\int\limits_{[AOB]} x\,dS}{\int dS}$$

Elementul de arie dS se calculează considerând un sector circular infinitezimal OMM'. Aria sa va fi:

$$dS = \frac{1}{2}MM' \cdot OM = \frac{1}{2}dl \cdot R$$

Însă $dl = R\,d\theta,$ astfel că:

$$dS = \frac{1}{2}R^2 d\theta$$

Asimilând sectorul OMM' cu un triunghi isoscel, centrul său de greutate va fi situat pe mediana ce pleacă din vârful O la distanța $\frac{2}{3}R$ de origine. Rezultă, prin neglijarea termenilor infinitezimali de ordin superior, că:

$$x = \frac{2}{3}R\cos\theta$$

Atunci:

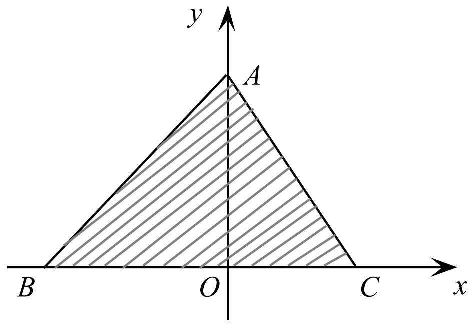
$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3}R\cos\theta \cdot \frac{R^2}{2}d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{2}d\theta} = \frac{\left.\frac{R^3}{3}\sin\theta\right|_{-\alpha}^{\alpha}}{\alpha R^2} = \frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

În particular, pentru o placă omogenă semicirculară, unghiul la centru este $2\alpha = \pi,$ iar:

$$\xi = \frac{2R\sin\frac{\pi}{2}}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

8. Să se determine centrul de greutate al unei plăci triunghiulare omogene.
Soluție. Pentru simplitate, vom alege un sistem de axe xOy a.î. punctele B și C să fie pe axa $Ox,$ de-o parte și de alta a axei Oy (*vezi figura*). Așadar, scriem:

$$A(0,a),\ B(b,0),\quad C(c,0),\quad (b<0<c).$$



Placa plană $[AOC]$ este mărginită de dreptele:

$$y=0,\ (AB),\ (AC)$$

Unde:

$$(AB):\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$$

$$(AC):\ \frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$$

Notăm $f:[b,\ c]\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(1-\dfrac{x}{b}\right) & x\in[b,0] \\ a\left(1-\dfrac{x}{c}\right) & x\in[0,c] \end{cases}$$

Astfel:

$$\xi=\frac{\int\limits_{(D)} x\,dS}{\int\limits_{(D)} dS},\quad \eta=\frac{\int\limits_{(D)} y\,dS}{\int\limits_{(D)} dS}$$

Însă $dS=f(x)dx$. De aici obținem:

$$S=\int\limits_{(D)} dS=\int\limits_{(D)} f(x)dx=a\int_b^0\left(1-\frac{x}{b}\right)dx+a\int_0^c\left(1-\frac{x}{c}\right)dx=$$

$$=-\frac{a}{b}\frac{(b-x)^2}{2}\Bigg|_b^0-\frac{a}{c}(c-x)^2\Big|_0^c=-\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2}=\frac{a(c-b)}{2}$$

iar apoi:

$$\int\limits_{(D)} x\,dS=\int\limits_{(D)} x\,f(x)dx=a\int_b^0 x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx+a\int_0^c x\left(1-\frac{x}{c}\right)dx=$$

$$=\frac{a}{b}\left(\frac{bx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_b^0+\frac{a}{c}\left(\frac{cx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^c=-\frac{ab^2}{6}+\frac{ac^2}{6}=\frac{a\left(c^2-b^2\right)}{6}$$

Înlocuind în expresia lui ξ găsim:

$$\xi=\frac{\frac{a\left(c^2-b^2\right)}{6}}{\frac{a(c-b)}{2}}=\frac{b+c}{3}$$

Evaluăm acum integrala de la numărătorul lui η:

$$\int\limits_{(D)} y\,dS=\frac{1}{2}\int\limits_{D} f^2(x)dx=\frac{a^2}{2b^2}\int_b^0(a-x)^2dx+\frac{a^2}{2a^2}\int_0^c(c-x)^2dx=$$

$$=-\frac{a^2}{6b^2}(b-x)^3\Big|_b^0-\frac{a^2}{6c^2}(c-x)^3\Big|_0^c=-\frac{a^2b}{6}+\frac{a^2c}{6}=\frac{a^2(c-b)}{6}$$

Astfel:

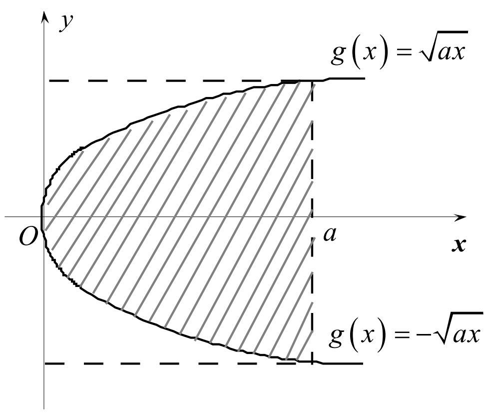
$$\eta=\frac{\frac{a^2(c-b)}{6}}{\frac{a(c-b)}{2}}=\frac{a}{3}$$

9. Să se determine momentele statice în raport cu axele Ox şi Oy, momentul de inerție în raport cu originea şi centrul de greutate al plăcii plane definită de mulțimea:

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le a,\ y^2\le ax,\ a>0\right\}$$

Soluție. Pe figura de mai jos notăm

$$g(x)=\sqrt{ax},\ f(x)=-\sqrt{ax},\ (0\le x\le a).$$



Momentul static în raport cu axa Ox este:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a \left[g^2(x) - f^2(x)\right]dx = 0$$

Apoi momentul static în raport cu axa Oy va fi:

$$M_y = \int_0^a x\left[g(x) - f(x)\right]dx = 2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx = 2a\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\Big|_0^a = \frac{4a^3\sqrt{a}}{5}$$

Pentru a determina coordonatele ξ, η ale centrelor de greutate vom ține seama de observația de la *exercițiul 5*. Astfel aria plăcii plane (D) este:

$$S = \int_{(D)} dS = 2\int_0^a g(x)dx = 2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = \frac{4a^2}{3}$$

Iar mai departe vom scrie:

$$\xi = \frac{M_y}{S}, \quad \eta = \frac{M_x}{S}$$

Înlocuind expresiile lui Mx şi My obținem în final:

$$\xi = \frac{3}{5}a, \quad \eta = 0.$$

Momentul de inerție I_0 se evaluează astfel:

$$I_0 = \int_{(D)} \left(x^2 + y^2\right)dS = 2\int_0^a \left[x^2 + g^2(x)\right]g(x)\,dx = 2\int_0^a \left(x^2 + ax\right)\sqrt{ax}\,dx =$$

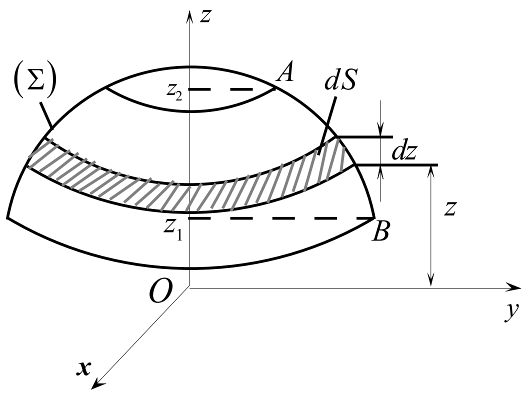
$$= 2\left(\frac{2}{7}\sqrt{a}x^3\sqrt{x} + \frac{2}{5}a\sqrt{a}\,x^2\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^a = \frac{48}{35}a^4$$

10. Să se calculeze momentul static în raport cu axa Oz, momentul de inerție în raport cu planul xOy şi centrul de greutate al plăcii omogene în formă de zonă sferică (*vezi figura alăturată*).

Soluție. Se alege un sistem de referință xOz, a.î. axa Oz să fie axă de simetrie.

Fie planele $z = z_1$ şi $z = z_2$ planele celor două cercuri paralele care limitează zona. Din motive de simetrie $\xi = 0$ şi $\eta = 0$. Determinăm cota ζ, astfel în relația:

$$\zeta = \frac{\int_\Sigma z\,dS}{\int_\Sigma dS}$$



Elementul de arie dS se calculează alegând aria unei zone infinitezimale secționate prin planele de cota z şi $z + dz$. Aria unei asemenea zone, în baza unei binecunoscute relații din geometria clasică este:

$$dS = 2\pi R\, dz$$

În acest caz,

$$\int_{\Sigma} dS = \int_{z_1}^{z_2} 2\pi R\, dz = 2\pi R\left(z_2 - z_1\right)$$

iar

$$\int_{\Sigma} z\, dS = \int_{z_1}^{z_2} 2\pi R z\, dz = 2\pi R \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z_1}^{z_2} = \pi R\left(z_2^2 - z_1^2\right)$$

De aici rezultă că:

$$\zeta = \frac{\pi R\left(z_2^2 - z_1^2\right)}{2\pi R\left(z_2 - z_1\right)} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Momentul static în raport cu axa Oz se determină direct din relația:

$$\zeta = \frac{M_x}{S}$$

i.e.

$$M_z = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot 2\pi R\left(z_2 - z_1\right) = \pi R\left(z_2^2 - z_1^2\right)$$

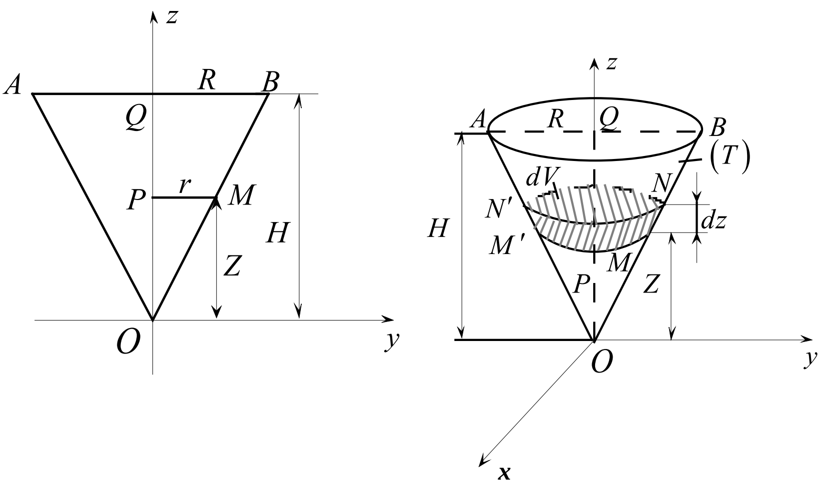
Momentul de inerție în raport cu planul xOy va fi:

$$I_{xOy} = \int_{\Sigma} z^2 dS$$

adică:

$$I_{xOy} = \int_{z_1}^{z_2} 2\pi R\left(z_2 - z_1\right) z^2 dz = \frac{2\pi R}{3}\left(z_2 - z_1\right)^3 .$$

11. Să se determine momentul static în raport cu axa Oz, momentul de inerție în raport cu planul xOy şi centrul de greutate al corpului omogen în formă de con având raza bazei R şi înălțimea H (*vezi figura* a).
Soluție.



a *b*

Se alege un sistem de referință $Oxyz$, a.î. originea O să fie în vârful conului iar axa $Oz-$axă de simetrie având orientarea spre amonte. Din motive de simetrie $\xi = 0$ şi $\eta = 0$. Pentru determinarea cotei ζ vom aplica formula:

$$\zeta = \frac{\int\limits_{(T)} z\,dV}{\int\limits_{(T)} dV}$$

Ca element de volum dV vom considera un trunchi de con infinitezimal obținut prin secționarea conului cu planele de cote z şi $z + dz$. Acest trunchi de con se va asimila cu un cilindru circular drept, având raza bazei r şi înălțimea dz. Rezultă că:

$$dV = \pi r^2\, dz$$

unde r se obține din asimilarea triunghiurilor MOP şi QBO (*vezi figura b*).

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{H} \Leftrightarrow r = \frac{R}{H} z$$

deci:

$$dV = \pi \frac{R^2}{H^2} z^2\, dz$$

de unde rezultă imediat:

$$V = \int_{(T)} dV = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H z^2 dz = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

rezultat deja obținut în *capitolul* ***3.*** Apoi:

$$\int_{(T)} z\,dV = \int_0^H \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 z^3 dz = \frac{\pi R^2 H^2}{4}$$

iar mai departe, dacă înlocuim ultimele două rezultate în relația de calcul a cotei centrului de greutate, găsim:

$$\zeta = \frac{\dfrac{\pi R^2 H^2}{4}}{\dfrac{\pi R^2 H}{3}} = \frac{3H}{4}$$

Momentul static în raport cu axa Oz rezultă imediat din:

$$\zeta = \frac{M_z}{V} \Rightarrow M_z = \zeta \cdot V = \frac{3H}{4} \cdot \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi R^2 H^2}{4}$$

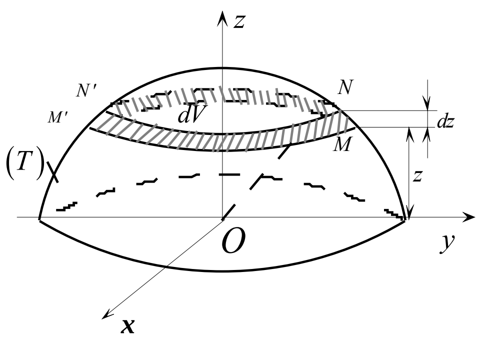
Momentul de inerție planar I_{xOy} se determină din relația:

$$I_{xOy} = \int_{(T)} z^2 dV$$

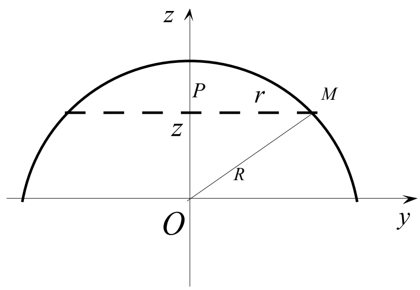
care conduce la

$$I_{xOy} = \int_0^H \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 z^4 dz = \frac{\pi R^2 H^3}{5}$$

12. Aceleaşi cerințe pentru un corp omogen în formă de emisferă (*figura a*)
Soluție. Se alege sistemul de referință ca în figură, originea fiind în centrul sferei din care a fost tăiată emisfera, iar axa Oz să fie axa de simetrie a emisferei (*vezi figura de mai jos*).



a



b

Rezultă $\xi = 0$ şi $\eta = 0$. La fel ca şi la exercițiul anterior, pentru a găsi cota centrului de greutate vom alege o calotă infinitezimală obținută prin secționarea emisferei cu planele de cotă z şi $z + dz$. Elementul obținut se asimilează (neglijând termenii infinitezimali de ordin superior) cu un cilindru cu raza bazei r şi înălțimea dz şi având volumul:

$$dV = \pi r^2 dz$$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul MPO drepunghic în P (*figura b*) rezultă că

$$r^2 = R^2 - Z^2$$

Astfel, elementul de volum va fi:

$$dV = \pi\left(R^2 - Z^2\right)dz$$

De aici rezultă imediat că, volumul emisferei (T) va fi:

$$V = \int_{(T)} dV = \pi\int_0^R \left(R^2 - Z^2\right)dz = \frac{2\pi R^3}{3}$$

un rezultat, de asemenea, obținut în *capitolul* ***3***.
Mai departe,

$$\int_{(T)} z\,dV = \int_0^R z\pi\left(R^2 - Z^2\right)dz = \frac{\pi R^4}{4}$$

iar dacă se înlocuiesc ultimele două rezultate în formula (9) obținem:

$$\zeta = \frac{\int_{(T)} z\,dV}{\int_{(T)} dV} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{3R}{8}$$

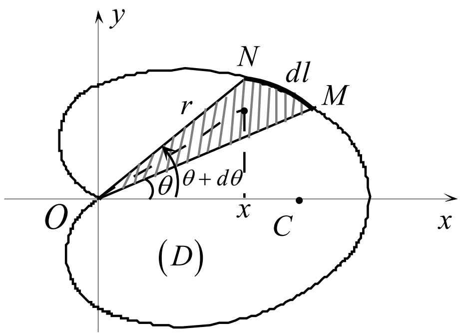
Momentul static M_z se obține din relația:

$$\zeta = \frac{M_z}{V} \Leftrightarrow M_z = \zeta \cdot V = \frac{3R}{8}\cdot\frac{2\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^4}{4}$$

iar momentul planar I_{xOy} va fi:

$$I_{x\,O\,y} = \int_{(T)} Z^2 dV = \int_0^R Z^2 \cdot \pi\left(R^2 - Z^2\right)dz = \frac{2\pi R^5}{15}$$

13. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii plane în formă de cardioidă (*vezi figura*).
Soluție.



Ecuația curbei care mărgineşte placa omogenă este în coordonate polare:

$$r = a(1+\cos\theta)$$

Din considerente geometrice, centrul de greutate se află pe axa Ox şi are abscisa dată de relația:

$$\xi = \frac{\int_{(D)} x\,dS}{\int_{(D)} dS}$$

unde, dS este aria unui element infinitezimal asimilat ca un triunghi isoscel OMN având aria aproximativ egală cu:

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot MN = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Raționând ca la *exercițiul 6* vom scrie:

$$x = \frac{2}{3} r\cos\theta$$

iar dacă se înlocuiesc ultimele două rezultate în expresia lui ξ se obține

$$\xi = \frac{\int_{(D)} \frac{2}{3} r\cos\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int_{(D)} \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int_{(D)} r^3 \cos\theta\, d\theta}{\int_{(D)} r^2 d\theta}$$

Evaluăm separat fiecare integrală:

$$\int_D r^3 \cos\theta\, d\theta = a^3 \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \cos\theta\, d\theta =$$

$$= a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta\right) d\theta$$

Notăm

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n x\, dx$$

Ținând seama de rezultatul obținut în *paragraful 1.4* rezultă:

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\theta\sin\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

iar de aici:

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\,d\theta = \sin\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\theta\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\cos^2\theta\sin\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{3}A_1 = 0$$

$$A_4 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\cos^3\theta\sin\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}A_2 = \frac{3\pi}{4}$$

Astfel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^3\cos\theta\,d\theta = a^3\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{15\pi a^3}{4}$$

Evaluăm integrala de la numitor:

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^2 d\theta = a^2\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta =$$

$$= a^2\left(\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2A_1 + A_2\right) = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$$

Înlocuind în expresia lui ξ ultimele două rezultate obținem, în final:

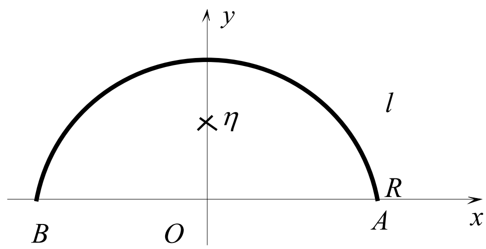
$$\xi = \frac{2}{3}a\cdot\frac{\frac{15\pi}{4}a^3}{3\pi a^2} = \frac{5}{6}a$$

14. Să se determine poziția centrului de greutate a semicercului omogen de rază R folosind teorema I a lui Guldin-Pappus.

Soluție. Fie xOy un sistem de referință ales ca în *figură.* Notăm S aria sferei de rază R, atunci $S = 4\pi R^2$ iar, din *teorema I* a lui Guldin-Pappus rezultă că

$$S = 2\pi\eta\, l$$

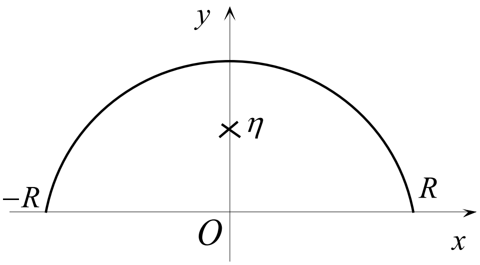
unde, η este ordonata centrului de greutate, iar l – lungimea arcului de cerc $\overset{\frown}{AB}$.



Urmează că:

$$\eta = \frac{S}{2\pi l} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

15. Să se determine poziția centrului de greutate al semidiscului omogen de rază R folosind *teorema a II-a a lui Guldin-Pappus.*
Soluție. Alegem un sistem de axe ca în figura alăturată.



Notăm V – volumul corpului de rotație în jurul axei Ox, atunci:

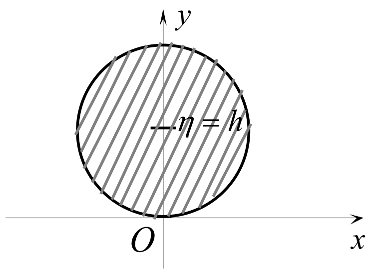
$V = \frac{4\pi R^3}{3}$, iar din *teorema a II-a a lui Guldin*: $V = 2\pi\eta S$, unde S este aria semidiscului de rază R, iar η este ordonata centrului da masă. Deducem că:

$$\eta = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

16. Să se determine volumul torului generat prin rotația discului limitat de cercul de ecuație:

$$x^2 + (y-b)^2 = R^2$$

în jurul axei Ox.



Soluție. Centrul de greutate al discului omogen este evident în centrul său, i.e.

$$\eta = h$$

Apoi conform teoremei a II-a lui Guldin-Pappus:

$$V = 2\pi\eta S$$

unde $V =$ volumul corpului de rotație (torul), iar $S = \pi R^2$ este aria discului, astfel:

$$V = 2\pi h \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 h R^2$$

17. Să se stabilească poziția centrului arcului de parabolă

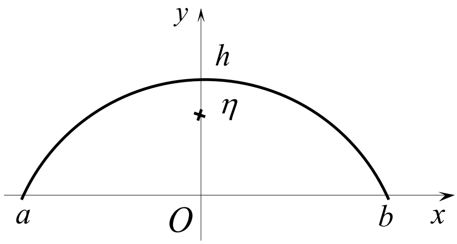
$$(C):\quad y = h - kx^2, \qquad (h,\ k > 0)$$

limitat de semiplanul $y \geq 0$.

Soluție. Abscisele punctelor de intersecție ale parabolei cu axa Ox sunt (*vezi figura*)

$$a = -\sqrt{\frac{h}{k}},\quad b = \sqrt{\frac{h}{k}},$$

unde h defineşte *săgeata* segmentului de parabolă.



Din motive de simetrie $\xi = 0$. Valoarea lui η este dată de:

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b y|y|\,dx}{\int_a^b y\,dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b \left(h - kx^2\right)^2 dx}{\int_a^b \left(h - kx^2\right) dx}$$

unde

$$\int_a^b \left(h - kx^2\right)^2 dx = \frac{16}{15} h^2 \sqrt{\frac{h}{k}}$$

şi

$$\int_a^b \left(h - kx^2\right) dx = \frac{4}{3} h \sqrt{\frac{h}{k}}$$

Înlocuind mai sus expresile integrale deducem că $\eta = \frac{2}{5}h$. Deci, centrul de greutate al arcului de parabolă considerat că se află pe axa de simetrie la o distanță egală cu $\frac{2}{5}$ din săgeată.

18. Să se determine centrul de greutate al unui segment de elipsă.

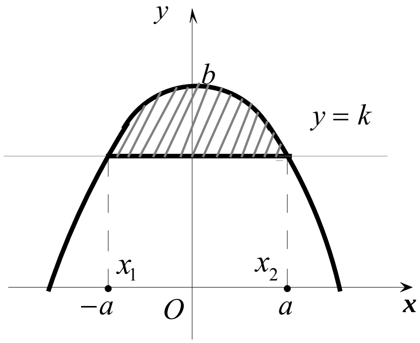
Soluție. Să considerăm placa eliptică omogenă limitată de arcul de curbă:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>0,\ b>0)$$

şi dreapta:

$$y=k, \qquad (0<k<b)$$

(*vezi figura*)



Notăm $y_1=k,\quad y_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad x\in[-a,a]$. Fie x_1, x_2 abscisele punctelor de intersecție ale dreptei $y=k$ cu arcul eliptic. Atunci:

$$x_1=-a\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}\ ,\quad x_2=a\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}$$

Din motive de simetrie, $\xi=0$, iar ordonata centrului de greutate are valoarea dată de:

$$\eta=\frac{1}{2}\frac{\int_0^{x_2}\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)-k^2\right]dx}{\int_0^{x_2}\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-k\right]dx}$$

Se constată uşor că:

$$\int_0^{x_2}\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)-k^2\right]dx=\frac{2}{3}\left(b^2-k^2\right)x_2$$

iar

$$K_0=\int_0^{x_2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_0^{x_2}$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^k}{b}$$

Prin urmare:

$$\eta=\frac{2}{3}b\frac{1-\frac{k^2}{b^2}}{\frac{\arcsin\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}}{\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}}-\frac{k}{b}}$$

Observație. Ne propunem să evaluăm raportul dintre $\eta-b$ şi săgeata plăcii, $h=b-k,$ notat $\varepsilon=\frac{\eta-k}{b-k}$ şi apoi $\lim\limits_{b\to k}\varepsilon.$

Pentru aceasta, fie:

$$u=\sqrt{1-\frac{k^2}{b^2}}\Leftrightarrow\frac{k}{b}=\sqrt{1-u^2}$$

astfel:

$$\varepsilon=\frac{n-k}{h}=\frac{1-\frac{1}{3}u^2-\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{\arcsin u}{u}}{\left(\frac{\arcsin}{u}-\sqrt{1-u^2}\right)\left(1-\sqrt{1-u^2}\right)}$$

Se constată că limitele expresiilor:

$$\frac{\sqrt{1-u^2}-1+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{8}u^4}{u^6},\quad\frac{\frac{\arcsin u}{u}-1-\frac{u^2}{6}-\frac{3}{40}u^4}{u^6},$$

$$\frac{\frac{\arcsin u}{u}-\sqrt{1-u^2}-\frac{2}{3}u^2-\frac{1}{5}u^4-\frac{3}{28}u^6}{u^8}$$

sunt finite pentru $u\to 0.$

Au loc dezvoltările în jurul lui $u=0.$

$$\sqrt{1-u^2}=1-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{8}u^4+O_1\left(u^6\right)$$

$$\frac{\arcsin u}{u}=1+\frac{u^2}{6}+\frac{3}{40}u^4+O_2\left(u^6\right)$$

$$\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{\arcsin u}{u}=1-\frac{1}{3}u^2-\frac{2}{15}u^4+O_3\left(u^6\right)$$

$$\frac{\arcsin u}{u}-\sqrt{1-u^2}=\frac{2}{3}u^2+\frac{1}{5}u^4+\frac{3}{28}u^6+O_4\left(u^8\right)$$

$$1-\sqrt{1-u^2}=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{8}u^4+O_5\left(u_6\right)$$

Unde $\lim\limits_{u\to 0}\frac{O_k\left(u^6\right)}{u^6}<\infty, \qquad h=\overline{1,\ 5}$

Înlocuind aceste dezvoltări în expresia lui ξ vom scrie, în final

$$\xi=\frac{\eta-k}{b-k}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1+O_6\left(u^2\right)}{1+O_7\left(u^2\right)}$$

iar dacă se trece la limită după $u\to 0$ i.e. pentru $k\to b$ obținem:

$$\lim_{k\to b}\varepsilon=\frac{2}{5}$$

Aşadar, pentru *k* apropiat de *b*, raportul dintre distanța la baza segmentului a centrului de greutate şi săgeata plăcii, este foarte apropiat de $\frac{2}{5}$, rezultat obținut riguros în cazul segmentului parabolic.

În cazul particular $k=0,$ obținem centrul ce greutate al semielipsei, i.e.

$$\eta=\frac{4}{3\pi}b$$

19. Determinați poziția centrului de greutate al unui corp omogen de forma unui con circular drept având raza bazei *r* şi înălțimea *h*.

Soluție. Alegem un sistem de axe xOy ca în *figura alăturată*. După cum ştim abscisa ξ a centrului de greutate a unui corp omogen care admite axa $Ox,$ ca axă de simetrie este:

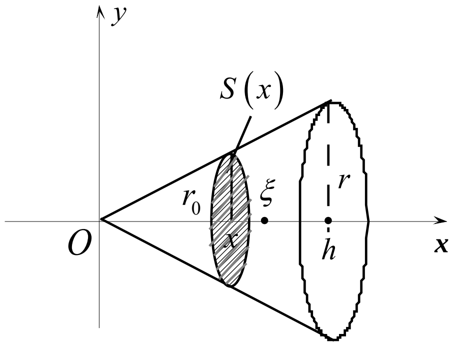
$$\xi=\frac{\int_a^b xS(x)dx}{\int_a^b S(x)dx}$$

unde $S(x)$ este aria secțiunii transversale duse printr-un plan perpendicular pe axa de simetrie. Aşadar, din egalitatea de rapoarte:

$$\frac{r_0}{r}=\frac{x}{h}\Leftrightarrow r_0=\frac{r}{h}x$$

deducem că $S(x)=\pi r_0^2=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2,$ astfel că:

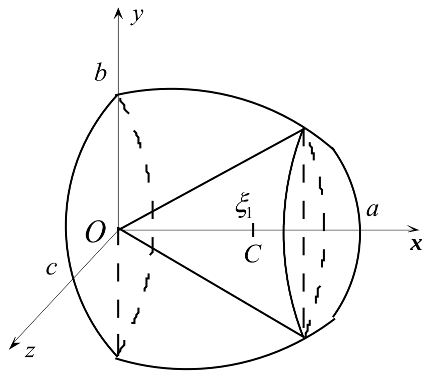
$$\xi=\frac{\pi\int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx}{\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx}=\frac{3}{4}h$$



Deci, centrul de greutate se află la o distanță de bază egală cu $\frac{1}{4}$ din înălțimea conului.

20. Determinați centrul de greutate al solidului omogen obținut îndepărtând dintr-un semielipsoid de rotație un solid limitat de un con circular cu aceeaşi axă de simetrie şi de deschidere dată α, $\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$ (*vezi figura*).

Soluție.



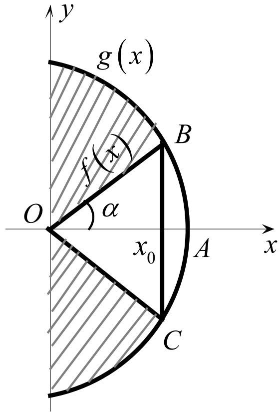
Fie semielipsa de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x \ge 0$$

care generează semielipsoidul prin rotația ei în jurul axei Ox (*vezi figura*)

a) În acest caz, notăm:

$$f(x)=x\operatorname{tg}\alpha, \quad g(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad x\in[0,x_0]$$



unde $x_0 = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ este abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor *f* şi *g* (*vezi figura*). Prin urmare, centrul de greutate C va avea abscisa:

$$\xi_1 = \frac{\int_a^b x\left[g^2(x) - f^2(x)\right]dx}{\int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x)\right]dx} = \frac{\int_0^{x_0}\left[\dfrac{b^2}{a^2}x\left(a^2 - x^2\right) - x^3 \operatorname{tg}^2 \alpha\right]dx}{\int_0^{x_0}\left[\dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\right]dx}$$

Un calcul simplu (care îl lăsăm pe seama cititorului !) relevă rezultatul:

$$\xi_1 = \frac{3}{8}x_0 = \frac{3ab}{8\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

În particular, pentru $\alpha = 0$ găsim abscisa centrului de greutate a semielipsoidului de rotație în jurul axei *Ox*,

$$\xi_0 = \frac{3a}{8}$$

a fiind înălțimea (săgeata) semielipsoidului.

Observații.

i) Masa solidului specificat este:

$$M_1 = 2\pi\rho \frac{ab^3}{3\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

unde ρ este masa specifică constantă.

ii) Masa semielipsoidului este:

$$M_0 = \frac{2\pi\rho ab^2}{3}$$

21. Determinați centrul de greutate al solidului de rotație limitat de conul circular cu vârful pe suprafața semielipsoidului (*vezi figura a*) .
Soluție.

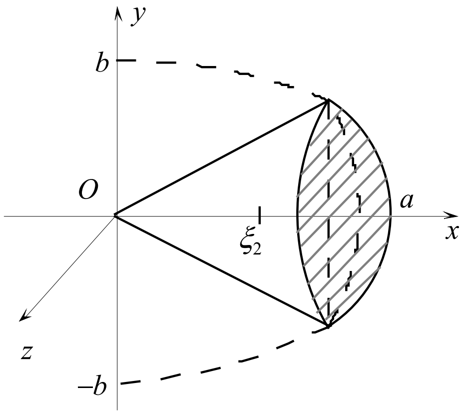


Fig. *a*

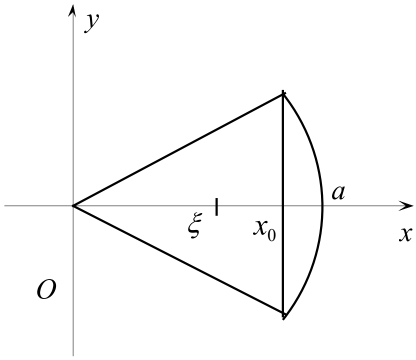


Fig. *b*

Raționând ca la problema anterioară notăm:

$$f(x)=0\,,\ g(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{tg}\,\alpha & x\in[0,x_0) \\ \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} & x\in[x_0,a] \end{cases}$$

Nu vom proceda la calculul integralelor din expresia generală a abscisei centrului de greutate ci vom folosi rezultatele de la *problema 19*. Aşadar, masa solidului considerat este

$$M_2=M_0-M_1=\frac{2\pi\rho ab^2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha}}\right)$$

Mai departe, utilizând *proprietatea (2)* de la centrele de masă, vom scrie:

$$\xi_0=\frac{M_1\xi_1+M_2\xi_2}{M_1+M_2}$$

De aici, se obține uşor:

$$\xi_2=\frac{3}{8}\frac{a^3}{b^3}\mathrm{tg}^2\,\alpha\frac{1}{1+\dfrac{a^2}{b^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha-\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$$

În cazul particular, $a=b,$ se obține sectorul sferic limitat de un con circular drept şi de o suprafață sferică, centrul sferei fiind chiar în vârful conului. Între raza a a sferei, înălțimea lui h a conului şi semideschiderea α există relația:

$$a\cos\alpha = h$$

În acest caz:

$$\xi_2 = \frac{3}{8}(a+h),\ M_2 = \frac{2\pi\rho a^3}{3}(1-\cos\alpha)$$

De asemenea, mai avem:

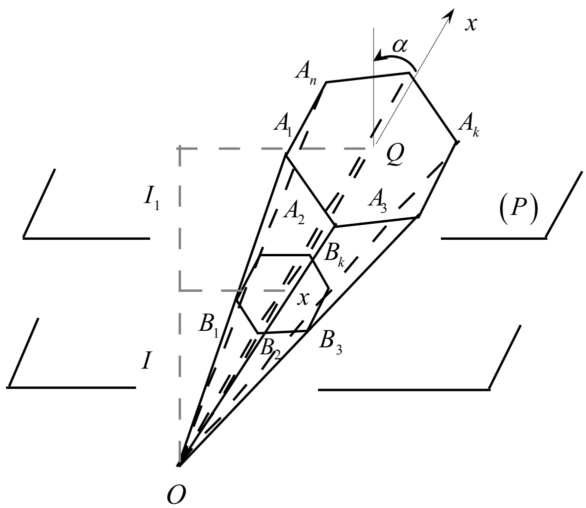
$$\xi_1 = \frac{3}{8}a\cos\alpha\ ,\ M_1 = \frac{2\pi\rho a^3}{3}\cos\alpha$$

şi

$$\xi_0 = \frac{3}{8}a,\ M_0 = \frac{2\pi\rho a^3}{3}$$

22. Să se afle poziția centrului de greutate al piramidei care admite axa Ox ca axă de simetrie oblică în raport cu planul bazei (P).

Soluție. Fie piramida având ca rază un poligon regulat $[A_1, A_2, ..., A_n]$ şi vârful în punctul O (*vezi figura*). Fie Q centrul de simetrie al bazei, situat în planul (P). Axa Ox este axa de simetrie oblică ce uneşte punctele O şi Q. O secțiune printr-un plan paralel cu planul (P) taie piramida după un poligon asemenea cu cel de bază având aria $S(x)$, unde x este abscisa punctului de intersecție al planului cu axa Ox. Acest punct este centrul de simetrie al secțiunii. Avem:



Din asemănarea celor două secțiuni rezultă

$$\frac{S(x)}{S_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^2$$

unde S_1 – este aria bazei, h – înălțimea piramidei de bază $[B_1, B_2, ..., B_n]$, iar h_1 – înălțimea piramidei cu baza $[A_1, A_2, ..., A_n]$. Evident:

$$h = x\cos\alpha \Rightarrow S(x) = \frac{S_1}{h^2}x^2\cos^2\alpha$$

Prin urmare, abscisa centrului de greutate:

$$\xi = \frac{\int_a^b xS(x)dx}{\int_a^b S(x)dx} = \frac{\int_a^h x^3dx}{\int_0^h x^2dx} = \frac{3}{4}\frac{h_1}{\cos\alpha}$$

În particular, masa piramidei este:

$$M = \rho\frac{S_1h_1}{3}$$

Deci, centrul de greutate se află pe axa de simetrie la intersecția ei cu planul paralel cu baza, dus la o distanță de bază egală cu $\frac{1}{4}$ din înălțimea piramidei.

23. Determinați momentul static al arcului de elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y \geq 0$$

în raport cu axa Ox (*vezi figura*).

Soluție. Avem $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, apoi:

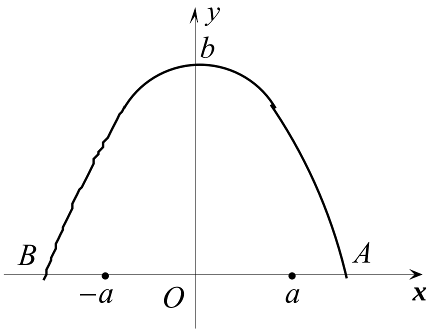
$$y\,dl = y\sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{y^2 + (yy')^2}dx = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2}$$

sau

$$y\,dl = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2dx}$$

unde ε este extremitatea elipsei, definită prin:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$



Integrând de la $-a$ la a în ultima egalitate, găsim:

$$M_x = \int_{\widehat{AB}} y\,dl = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) = b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

În particular, pentru cerc ($a=b$) avem:

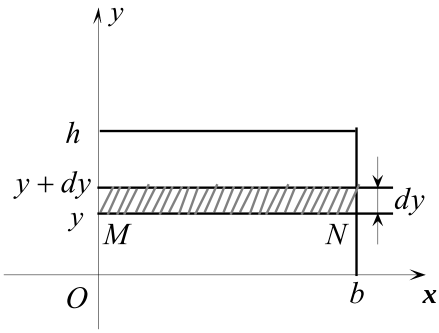
$$M_x = 2a^2$$

întrucât, $\varepsilon = 0,$ iar $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$

24. Determinați momentul de inerție al drepunghiului cu baza b şi înălțimea h în raport cu axa bazei (*vezi figura*).

Soluție. Considerăm o bandă elementară de grosime dy care intersectează drepunghiul şi este paralelă cu baza. Masa elementului considerat este:

$$dS = MN\,dy = b\,dy$$



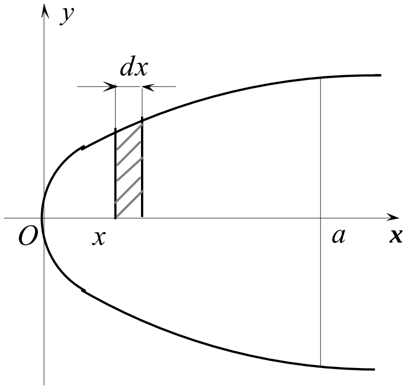
Mai departe: $dI_x = by^2dy$, iar de aici se obține: $I_x = \int_0^h by^2dy = \dfrac{bh^3}{3}$

25. Determinați momentul de inerție în jurul axei Oy a domeniului plan mărginit de parabola $y^2 = 4ax$ şi de dreapta $x = a, \quad a > 0.$

Soluție. Avem

$$dI_x = x^2 dS$$

unde dS este aria elementului bandă de grosime dx, paralel cu axa Oy dus prin punctul de abscisă x (*vezi figura alăturată*).



Apoi:

$$dS = 2|y|dx = 2\sqrt{4ax}\,dx$$

de aici urmează:

$$I_x = \int_a^b x^2\,dS = \int_0^a 4x^2\sqrt{ax}\,dx = 4\sqrt{a}\,\frac{2}{7}a^{\frac{7}{2}} = \frac{8}{7}a^4$$

26. La proiectarea podurilor de lemn avem de-a face cu buşteni aplatizați pe ambele fețe. Figura alăturată descrie secțiunea transversală a unui asemenea buştean. Determinați momentul de inerție a secțiunii transversale în raport cu axa de simetrie.

Soluție. Alegem un sistem de coordonate xOy ca în figură. Astfel:

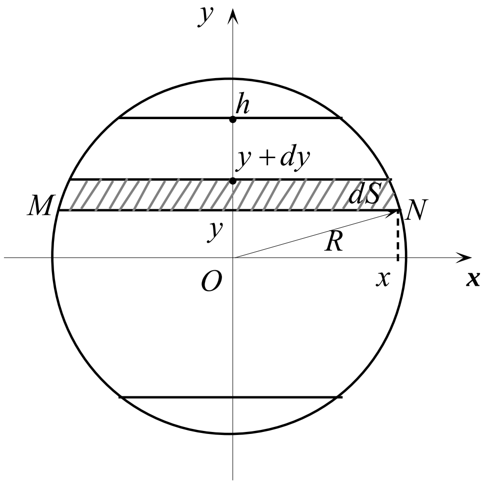
$$dI_x = y^2 dS$$

unde:

$$dS = MNdy = 2x\,dy = 2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$

De-aici urmează

$$I_x = 2\int_{-h}^{h} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = 4\int_0^h y^2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$



Efectuăm transformarea:

$$y \to t \therefore y = R\sin t,\quad dy = R\cos t\,dt$$

y	0	h
t	0	λ

unde am notat $\lambda = \arcsin\left(\dfrac{h}{r}\right)$. Aşadar:

$$I_x = 4\int_0^h y^2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = 4\int_0^\lambda R^2\sin^t t \cdot R^2\cos^2 t\,dt$$

$$= 4R^4\int_0^\lambda \sin^2 t\cos^2 t\,dt = R^4\int_0^\lambda \sin^2 2t\,dt = R^4\int_0^\lambda \frac{1-\cos 4t}{2} =$$

$$= \frac{R^4}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^\lambda = \frac{R^4}{2}\arcsin\frac{h}{R} + \frac{h}{R}\left(2h^2 - R^2\right)\sqrt{R^2 - h^2}$$

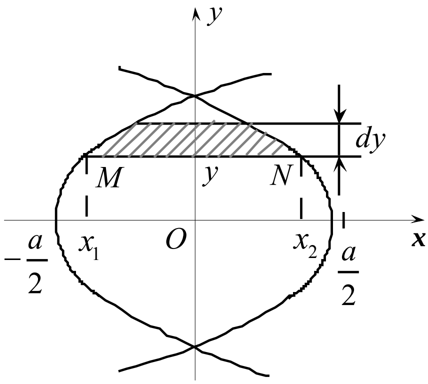
În particular, pentru $h = R,$ se obține momentul de inerție al discului de rază *R*, în raport cu unul dintre diametre:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

27. Determinați momentul de inerție, în raport cu axa Ox, al domeniului plan mărginit de parabolele:

$$y^2 = \frac{b^2}{2a}\left(x \pm \frac{a}{2}\right), \qquad (a > 0)$$

Soluție. Considerăm elementul bandă de grosime dy dus prin punctul de ordonată y paralel cu axa Ox (*vezi figura*):



Atunci:

$$dS = |MN|\,dy = x_2 - x_1 = 2\left(\frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2}y^2\right) = a - \frac{4a}{b^2}y^2$$

unde x_1, x_2 sunt abscisele punctelor M şi N.
Apoi scriem,

$$dI_x = y^2 dS$$

iar dacă se integrează între $-\frac{b}{2}$ şi $\frac{b}{2}$ ultima egalitate se obţine:

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\left(a - \frac{4a}{b^2}y^2\right)dy = 2\int_0^{\frac{b}{2}} y^2\left(a - \frac{4a}{b^2}y^2\right)dy = \frac{ab^3}{30}$$

28. Să se determine coordonatele centrului de masă al lănţişorului

$$(C):\ y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \equiv \operatorname{ch} x$$

cuprins între punctele $A(0,1)$ şi $B(a, \operatorname{ch} a)$.

Soluţie. Avem:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx = \operatorname{ch} x\,dx$$

iar de aici:

$$l = \int_{(C)} dl = \int_0^a \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} a$$

Apoi:

$$M_y = \int_{(C)} x\,dl = \int_0^a x \operatorname{ch} x\,dx = x \operatorname{sh} x\Big|_0^a - \int_0^a \operatorname{sh} x\,dx = a \operatorname{sh} a - \operatorname{ch} a + 1$$

iar

$$M_x = \int_{(C)} y\,dl = \int_0^a \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1+\operatorname{ch} 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right)\Bigg|_0^a$$

aau în final:

$$M_x = \frac{a}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2a}{4}$$

Mai departe vom scrie:

$$\xi = \frac{M_y}{l}\,,\ \eta = \frac{M_x}{l}$$

iar dacă se înlocuiesc M_x şi M_y se obține:

$$\xi = \frac{a\operatorname{sh} a - (\operatorname{ch} a - 1)}{\operatorname{sh} a} = a - \frac{\operatorname{ch} a - 1}{\operatorname{sh} a} = a - \operatorname{th}\frac{a}{2}$$

şi

$$\eta = \frac{\frac{a}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2a}{4}}{\operatorname{sh} a} = \frac{a}{2\operatorname{sh} a} + \frac{\cos a}{2}$$

29. Determinați centrul de masă al primului arc al cicloidei

$$(C):\ \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

Soluție. Primul arc de cicloidă este simetric în raport cu dreapta $x = \pi a$, astfel că centrul de masă al arcului de curbă este situat pe această dreaptă i.e.

$$\xi = \pi a$$

Întrucât, lungimea arcului de cicloidă este:

$$l = 8a$$

urmează că ordonata centrului de masă are expresia:

$$\eta = \frac{1}{l}\int_{(C)} y\,dl = \frac{1}{8a}\cdot 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}dt$$

sau în final:

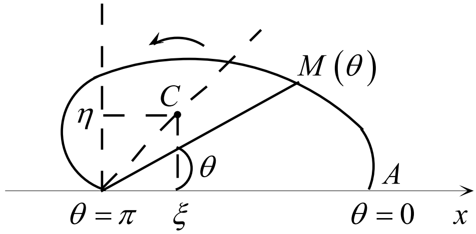
$$\eta = \frac{4}{3}a$$

30. Determinați coordonatele carteziene ale centrului de masă corespunzător arcului de cardioidă:

$$(C):\ \rho = a(1 + \cos\theta)$$

cuprinse între punctele de parametrii $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 = \pi$.

Soluție. Reprezentăm ecuațiile cardioidei sub formă parametrică (*vezi figura*).



$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0\le\theta\le\pi)$$

Întrucât lungimea cardioidei este $8a$, iar

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

avem:

$$\xi=\frac{1}{l}\int_{(C)}y\,dl=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=-\frac{4}{5}a\cos^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{5}a$$

Analog:

$$\eta=\frac{1}{l}\int_{(C)}x\,dl=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=$$

$$=a\int_0^{\pi}\cos\theta\cos^3\frac{\theta}{2}d\theta=a\int_0^{\pi}\left(2\cos^5\frac{\theta}{2}-\cos^3\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

Notăm: $\frac{\theta}{2}=t$, astfel că:

$$\eta=2a(2H_5-H_3)$$

unde H_n este definit prin:

$$H_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta=\frac{(m-1)!!}{m!!}$$

pentru m număr natural impar.

Ținând seama de valorile H_5 şi H_3 obținute din relația anterioară, se găseşte în final:

$$\eta=2a\left(2\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{5}a.$$

Astfel centrul de masă C va avea coordonatele carteziene:

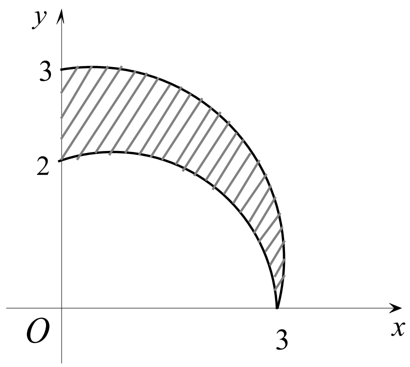
$$(C):\ \begin{cases} \xi = \frac{4}{5}a \\ \eta = \frac{4}{5}a \end{cases}$$

Interpretare geometrică: centrul de masă al arcului superior de cardioidă este situat pe bisectoarea întâi, deşi, arcul însuşi nu este simetric față de prima bisectoare.

31. Determinați centrul de greutate al domeniului plan mărginit de elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$ şi cercul $x^2 + y^2 = 9$ şi situate în primul cadran (*vezi figura*).

Soluție. Mai întâi, vom calcula momentele statice:

Notăm: $y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ şi $y_2 = \sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$ respectiv ecuațiile explicite ale arcelor de elipsă şi cerc situate în primul cadran.



Scriem mai departe:

$$M_y = \int_0^3 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

Evaluând ultima integrala, se obține:

$$M_y = 3$$

unde am ținut seama de integrala:

$$I_n = \int_0^a x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

Apoi:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^3 (y_2^2 - y_1^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[(9-x^2) - \frac{4}{9}(9-x^2)\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9}x^2\right)dx$$

sau în final:

$$M_x = 5$$

Aria sfertului de cerc de rază 3 este egală cu $\frac{9\pi}{4}$, iar aria sfertului de elipsă de semiaxe $a=3$ şi $b=2$ este egală cu $\frac{3\pi}{2}$. Prin urmare, aria domeniului plan haşurat va fi:

$$S=\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

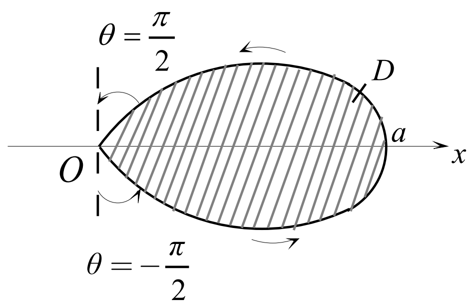
Aşadar:

$$\begin{cases} \xi=\dfrac{M_y}{S}=\dfrac{4}{\pi} \\ \eta=\dfrac{M_x}{S}=\dfrac{20}{3\pi} \end{cases}$$

32. Determinați coordonatele carteziene ale centrului de greutate al domeniului plan mărginit de curba:

$$(C):\ \rho=a\cos^3\theta, \qquad (a>0)$$

Soluție. Întrucât $\rho>0$ în toate cazurile, curba dată se parcurge după sensul indicat în figură.



când θ variază între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$. În virtutea parității funcției $\cos\theta$ curba este simetrică în raport cu axa polară şi trece prin originea axelor când $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$.

Calculăm mai întâi aria domeniului *D* mărginit de curba *C*.

$$S=\text{aria}(D)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^6\theta\, d\theta=a^2$$

unde H_6 a fost definit în *capitolul* ***1.***

Cum

$$H_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{32}\pi$$

rezultă că:

$$S=\frac{5}{32}\pi a^2$$

Vom alege sensul axei polare ca în figură. În acest caz, ecuațiile parametrice ale curbei vor fi:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=a\cos^4\theta\\ y=\rho\sin\theta=a\sin\theta\cos^3\theta\end{cases}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

Ordonata centrului de greutate este $\eta=0$, iar abscisa:

$$\xi=\frac{2\int_0^a xy\,dx}{S}=\frac{8a^3}{S}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\theta\sin^2\theta\,d\theta==\frac{8a^3}{S}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^{10}\theta-\cos^{12}\theta\right)d\theta$$

sau, cu notațiile de mai sus:

$$\xi=\frac{8a^3}{S}\left(H_{10}-H_{12}\right)$$

Unde:

$$H_{10}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{\pi}{2}$$

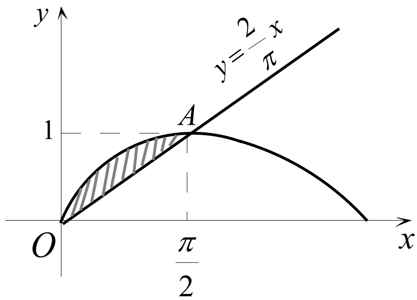
$$H_{11}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Înlocuind mai sus obținem, în final:

$$\xi=\frac{21}{40}a.$$

33. Determinați coordonatele centrului de greutate ale domeniului plan mărginit de dreapta $y=\frac{2}{\pi}x$ și de sinusoida $y=\sin x$, $(x\ge0)$ (*vezi figura*).

Soluție. Dreapta $y=\frac{2}{\pi}x$ și curba $y=\sin x$ se intersectează în punctele O și $A\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)$.



Aria domeniului haşurat este:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=\frac{4-\pi}{4}$$

De aici, rezultă:

$$\xi=\frac{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx}{\frac{4-\pi}{4}}=\frac{2}{4-\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\frac{4}{\pi^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{4-\pi}\left(\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6(4-x)}$$

Apoi:

$$\eta=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx}{\frac{4-\pi}{4}}=\frac{4}{4-\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx-\frac{x^2}{\pi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

Cum:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=1$$

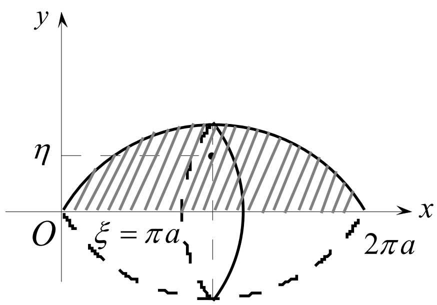
obţinem, în final:

$$\eta=\frac{4}{4-\pi}-\frac{\pi^2}{3(4-\pi)}=\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$$

34. Folosind eventual teorema a doua a lui Guldin-Pappus să se determine poziția centrului de greutate al domeniului mărginit de axa Ox şi unul din arcele cicloidei:

$$(C):\ \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Soluție. Din simetria în raport cu axa $x = \pi a$ (*vezi figura*) rezultă că abscisa centrului de greutate este $\xi = \pi a$.



Pentru a găsi ordonata η să observăm că volumul generat prin rotația arcului în jurul axei Ox este:

$$V = 5\pi^2 a^3$$

iar aria domeniului plan mărginit de arcul de cicloidă şi axa Ox este

$$S = 3\pi a^2$$

Mai departe, utilizând *teorema a II-a* a lui Guldin-Pappus, obținem:

$$V = 2\pi\eta S$$

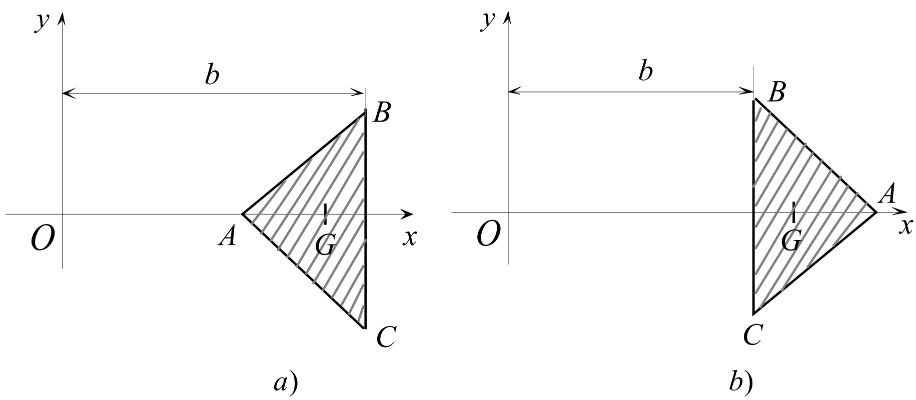
de unde:

$$\eta = \frac{V}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}$$

35. Un triunghi echilateral având lungimea laturii egală cu a se roteşte în jurul unei axe paralele cu baza şi situată la distanța $b > a$ de bază. Determinați volumul solidului de revoluție.

Soluție. În funcție de poziția triunghiului relativ la axa de revoluție distingem două cazuri (*vezi figura*). Vom aplica teorema a II-a a lui Guldin-Pappus pentru:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Centrul de greutate G este situat la intersecția medianelor triunghiului la două treimi de vârful A i.e. la o distanță

$$\eta = OG = b - \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = b - \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

în primul caz a) şi respectiv:

$$\eta = OG = b + \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

în cel de-al doilea caz. Prin urmare, volumul corpului de revoluție va fi în cazul a)

$$V = 2\pi\eta S = 2\pi\left(b - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi a^2}{4}\left(2b\sqrt{3} - a\right)$$

respectiv:

$$V = \frac{\pi a^2}{4}\left(2b\sqrt{3} + a\right)$$

în cazul b)

Exerciții propuse

1. Determinați centrul de greutate al plăcii omogene plane mărginite de parabola $y = x^2$ şi prima bisectoare.

R: $C\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

Indicație. Notăm $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $x \in [0,1]$, iar apoi, se evaluează:

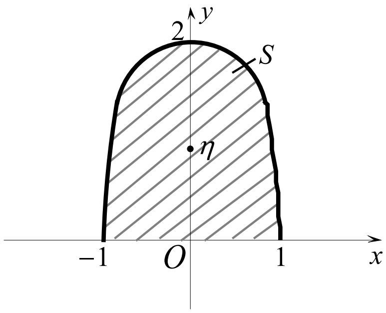
$$\xi = \frac{\int_a^b x\left[g(x) - f(x)\right]dx}{\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x)\right]dx}{\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx}$$

2. Determinați centrul de greutate al plăcii omogene mărginite de elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ şi situată în semiplanul $y \geq 0$.

R: $\xi = 0$, $\eta = \frac{8}{3\pi}$.

Indicație.



Se poate folosi teorema a doua a lui Guldin sau relațiile:

$$\xi = \frac{M_y}{S}, \ \eta = \frac{M_x}{S}$$

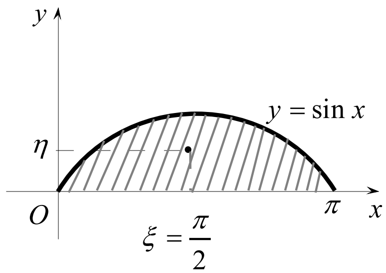
unde M_x şi M_y sunt momentele de inerție în raport cu axele Ox şi, respectiv, Oy (*vezi* $(2')$).

3. Să se determine centrul de greutate al plăcii plane omogene:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le \sin x,\ 0\le x\le \pi\}$$

$R:\quad \xi=\dfrac{\pi}{2},\ \eta=\dfrac{\pi}{8}$

Indicație. (*Vezi figura*)

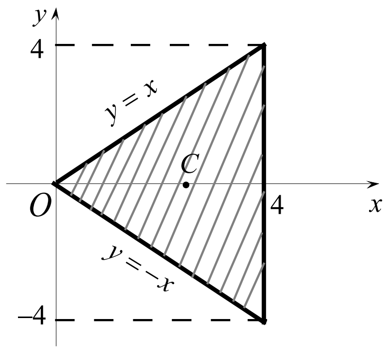


4. Să se determine centrul de greutate al plăcii plane omogene mărginite de curbele:

$$D:\ \begin{cases} y=x \\ y=-x \\ x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$R:\quad (C):\ \begin{cases} \xi=\dfrac{8}{3} \\ \eta=0 \end{cases}$$

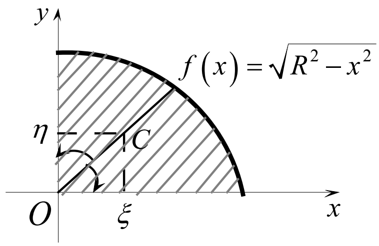
Indicație. (*Vezi figura*)



5. Să se determine centrul de greutate al sfertului de disc de rază R.

$R:\quad \xi=\dfrac{4R}{3\pi},\ \eta=\dfrac{4R}{3\pi}$

Indicație. Se aplică relațiile de la *exercițiul 1* pentru $f(x) \to g(x)$ şi $g(x) \equiv 0$.

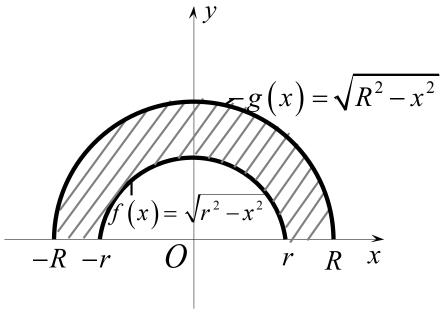


6. Să se determine centrul de greutate al semicoroanei circulare omogene:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid r^2 \le x^2+y^2 \le \mathbb{R}^2\right\}.$$

$R:\quad \xi=0,\ \eta=\frac{4\pi}{3}\frac{r^2+rR+R^2}{r+R}$

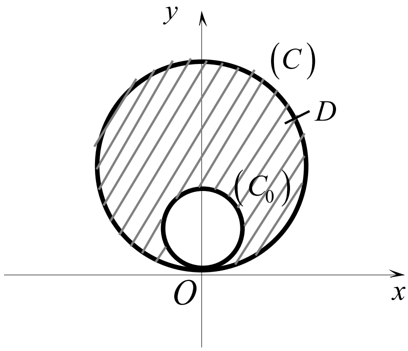
Indicație. A se vedea *exercițiul 1*.



7. Se dă un cerc (C) de rază *R*. Se împarte raza în trei părți egale şi se trasează cercul (C_0) de rază $\frac{R}{3}$ tangent interior primului cerc. Să se afle centrul de greutate al discului mărginit de cercurile (C) şi (C_0) (*vezi figura alăturată*).

$R:\quad \xi=0,\ \eta=\frac{13}{12}R$

Indicație.



Se aplică *teorema a doua a lui Guldin* luând ca axă de rotație tangenta comună Ox la cele două cercuri (C) şi (C_0).

Volumul corpului de rotație în jurul axei Ox este $V = \dfrac{52\pi^2 R^2}{27}$, iar aria domeniului D este $S = \pi R^2 - \dfrac{\pi R^2}{9}$.

8. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene limitată de semielipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; y \ge 0$$

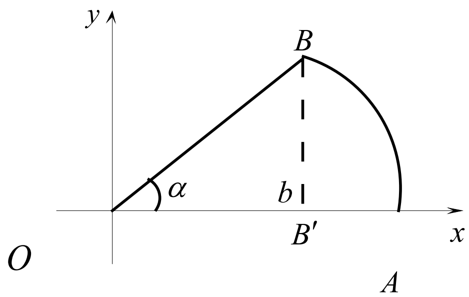
$R: \quad \xi = 0, \; \eta = \dfrac{4b}{3\pi}$

Indicație. Se procedează ca la *exercițiul 5* sau se poate aplica teorema a doua a lui Guldin.

9. Să se determine centrul de greutate al sectorului circular de rază R şi de deschidere α având o latură pe axa Ox (*vezi figura*).

$$R: \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{2}{3} \dfrac{R \sin \alpha}{\alpha} \\[2ex] \eta = \dfrac{4}{3} \dfrac{R \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\alpha} \end{cases}$$

Indicație. Notăm $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha & 0 \le x \le b \\ \sqrt{R^2 - x^2} & b \le x \le R \end{cases}$



Aria sectorului circular este:

$$S=\int_0^b x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx+\int_b^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

iar

$$S\cdot\xi=\int_0^b x^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx+\int_b^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

Se obține: $S=R^2\dfrac{\alpha}{2}$, iar $S\xi=\dfrac{1}{3}R^2\sin\alpha.$

Pentru evalurea lui η se poate observa că dreapta $y=x\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ este axă de simetrie, astfel că $\eta=\xi\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ ş.a.m.d.

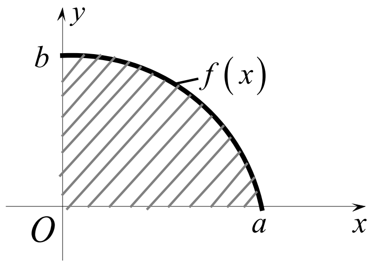
Observație. Pentru $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ se obține rezultatul de la *exercițiul 5.*

10. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene plane mărginite de sfertul de elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x=0,\quad y=0.$$

$R:\quad \xi=\dfrac{4a}{3\pi},\ \eta=\dfrac{4b}{3\pi}$

Indicație. Notăm $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Se aplică teorema a doua a lui Guldin unde $S=\dfrac{\pi ab}{4},$ iar $V=\pi\int_0^a f^2(x)dx$



11. Să se determine momentul de inerție al unei plăci semieliptice de seminaxe *a* și *b* având diametrul pe axa Ox, față de această axă:

$R:\quad I=\dfrac{mb^2}{4}$, unde $m=\rho\cdot\pi ab.$

Indicație. Notăm $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[-a,a]$. Se evaluează:

$$I=\frac{\rho_0}{3}\int_{-a}^{a}f^3(x)\,dx.$$

12. Să se determine momentul de inerție al sfertului de disc de rază *R* în raport cu axa Ox.

$R:\quad I=\dfrac{mR^2}{4}$, unde $m=\rho_0\dfrac{\pi R^2}{4}.$

Indicație. Notăm $f(x)=\sqrt{R^2-x^2},\quad x\in[0,R]$ și se procedează ca la exercițiul anterior

13. Să se determine momentul de inerție al unui cilindru circular față de axa sa de simetrie Ox.

$R:\quad I=m\dfrac{r^2}{2}$, unde $m=\rho_0\cdot\pi r^2h$

Indicație. Se notează *r*, raza bazei și *h*, înălțimea cilindrului, iar $f(x)=r$, $(b-a=h)$, se evaluează $I=\dfrac{\pi}{2}\rho_0\int_0^h f^4(x)\,dx.$

14. Să se determine momentul de inerție față de axa Ox al elipsoidului generat de rotirea elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

în jurul acestei axe.

$R: \quad I = \dfrac{2mb^2}{5}$ unde $m = \rho_0 \dfrac{4\pi}{3} ab^2$

Indicație. Notăm $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a]$ şi se evaluează

$$I = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \rho_0 \int_{-a}^{a} f^4(x) dx$$

15. Să se determine momentul de inerție al unei sfere omogene pline de rază R față de un diametru al ei Ox.

$R: \quad I = \dfrac{2mR^2}{5}$, unde $m = \rho_0 \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Indicație. Notăm $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$ şi se procedează ca la *exercițiul 14*.

16. Să se determine momentul de inerție față de axa Ox al plăcii omogene:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\right\} \quad (a, b, c, d > 0)$$

$R: \quad I = m\left(c^2 + cd + d^2\right), \; m = \rho_0 (b - a)(d - c)$

Indicație. Notăm $f(x) = c, \; g(x) = d, \; x \in [a, b]$ şi se evaluează unde

$$I_x = \rho_0 \int_a^b \left[g^3(x) - f^3(x)\right] dS, \; dS = (b - a)(d - c) dx.$$

17. Să se determine momentul de inerție al arcului de cerc $x^2 + y^2 = R^2$ situat în primul cadran în raport cu axa Oy.

$R: \quad \dfrac{mR^2}{4}$, unde $m = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Indicație. Notăm $f(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$, apoi evaluăm $I_y = \int_0^R \rho_0 f^3(y) dy$.

18. Determinați momentele statice în raport cu axele Ox şi Oy ale arcului de parabolă $y^2 = 2x$ cuprins între punctele de abscise $x = 0$ şi $x = 2$, $(y > 0)$.

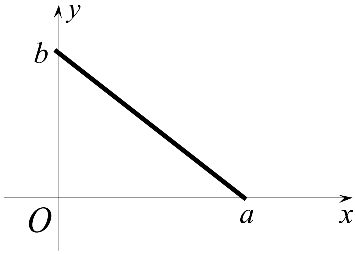
$R: \quad M_x = \dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right), \; M_y = \dfrac{9}{8}\sqrt{5} + \dfrac{1}{16}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$

Indicație. Se ține seama de relațiile stabilite în prezentul paragraf.

19. Determinați momentele statice în raport cu axele de coordonate ale segmentului $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ având extremitățile situate pe axele de coordonate $(a,b>0)$.

$R:\quad M_x=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,,\ M_y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

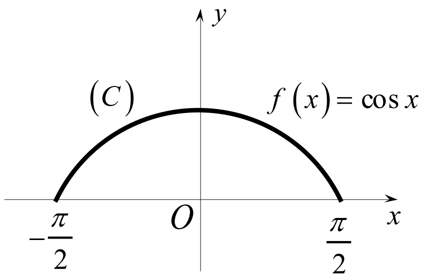
Indicație. Notăm $y_2=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$, $y_1=0$ şi se aplică relațiile stabilite pentru calcul momentelor statice.



20. Să se determine momentul static în raport cu axa Ox a arcului de curbă $y=\cos x$ cuprins între dreptele $x=-\frac{\pi}{2}$ şi $x=\frac{\pi}{2}$.

$R:\quad \sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

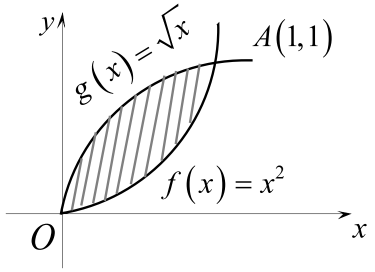
Indicație. Notăm $f(x)=\cos x$ şi apoi evaluăm $M_x=\int\limits_{(C)} y\,dl$.



21. Determinați momentul static în raport cu axa Ox a figurii plane mărginite de curbele $y=x^2$ şi $y=\sqrt{x}$.

$R:\quad \frac{3}{20}$

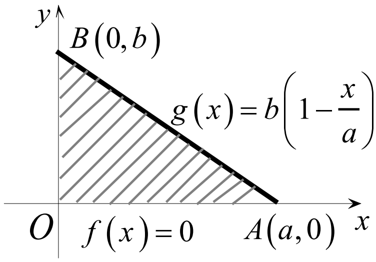
Indicație. Cu notațiile din figură se ține seama de relațiile stabilite în prezentul paragraf.



22. Să se determine momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale triunghiului mărginit de dreptele $x=0,\ \ y=0$ şi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \ (a>0,b>0)$.

$R:\quad I_x=\frac{ab^3}{12},\quad I_y=\frac{a^3b}{12}.$

Indicație. Se ține seama de relațiile de calcul stabilite la începutul acestui paragraf.



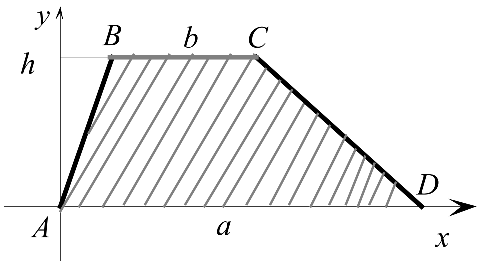
Cum masa plăcii este $m=\rho_0=\frac{ab}{2}$ putem scrie echivalent:

$$I_x=\frac{mb^2}{6},\ \ I_y=\frac{ma^2}{6}$$

23. Să se determine momentul de inerție al trapezului $ABCD$ în jurul bazei AD, dacă $AD=a$, $BC=b$ iar înălțimea sa este *h*.

$R:\quad I=\frac{(a+3b)h^3}{12}=\frac{m(a+3b)}{3(a+b)}$

Indicație. Alegem axele de coordonate ca în figura de mai jos şi ținem seama de relațiile de calcul stabilite la începutul acestui paragraf.

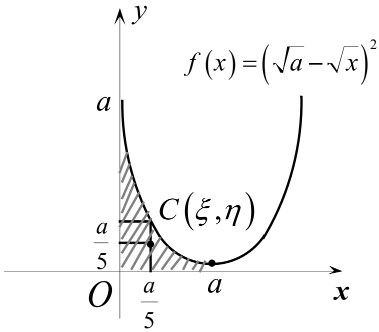


24. Determinați centrul de greutate al figurii plane mărginite de parabola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ şi axele de coordonate.

$R: \quad \xi = \eta = \dfrac{a}{5}$

Indicație. Se aplică relațiile de calcul corespunzuătoare pentru:

$$f(x) = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2, \quad x \in [0, a].$$



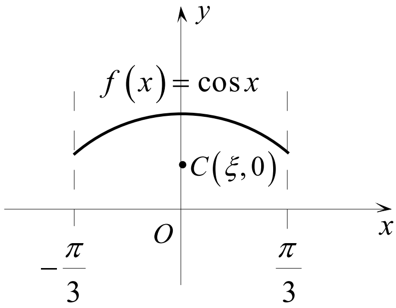
25. Determinați centrul de greutate al arcului de curbă $y = \cos x$ cuprins între $x = -\dfrac{\pi}{3}$ şi $x = \dfrac{\pi}{3}$.

$R: \quad \xi = \dfrac{1}{8} + \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}, \qquad \eta = 0$

Indicație. Se evaluează ξ şi η după relațiile:

$$\xi = \frac{\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx}{S}$$

$$\eta = \frac{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,dx}{S} = 0$$



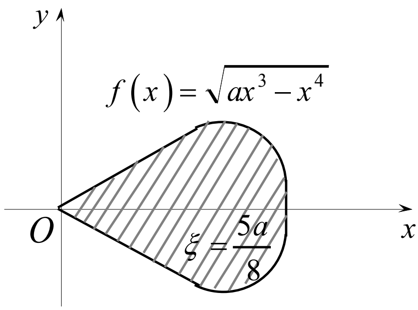
unde: $S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$

26. Determinați coordonatele centrului de greutate ale domeniului plan mărginit de curba:

$$(C): y^2 = ax^3 - x^4$$

$R: \quad \xi = \frac{5a}{8}, \quad \eta = 0$

Indicație. Din simetria curbei în raport cu axa Ox rezultă $\eta = 0$. Evaluăm separat $S = 2\int_0^1 \sqrt{ax^3 - x^4}\, dx$ şi $M_x = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \left(ax^3 - x^4\right) dx,$ iar apoi, rezultă $\xi = \frac{M_x}{S}.$



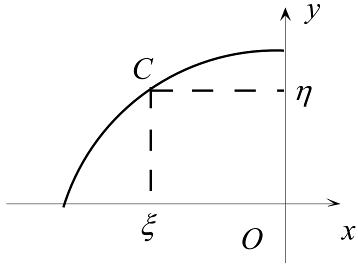
27. Determinați coordonatele carteziene ale centrului de greutate al arcului de spirală logaritmică:

$$(C): \quad \rho = ae^{\theta}, \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

$R: \quad \xi = -\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi} - e'^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}}, \qquad \eta = \frac{a}{5}\frac{e^{2\pi} - 2e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}}$

Indicație. Se trece la coordonate parametrice luând $x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$ şi se înlocuieşte în relațiile:

$$\xi = \frac{\frac{1}{2} \int\limits_{(C)} x|y| dl}{l}, \quad \eta = \frac{\int\limits_{(C)} y^2 \, dl}{l}, \quad l = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \, d\theta.$$



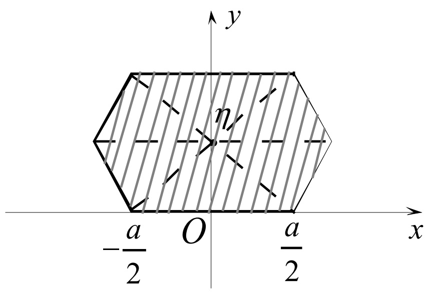
28. Un hexagon regulat având latura de lungime a se roteşte în jurul unei laturi. Determinați volumul solidului de revoluție astfel obținut:

$R: \quad V = \dfrac{9\pi a^3}{2}$

Indicație. Se aleg axele de coordonate ca în figura alăturată şi se aplică teorema a doua a lui Guldin.

$$V = 2\pi \eta S$$

Evident, $\eta = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, iar $S = 3a^2\sqrt{3}$.



29. Să se determine centrul de greutate al arcului omogen de curbă:

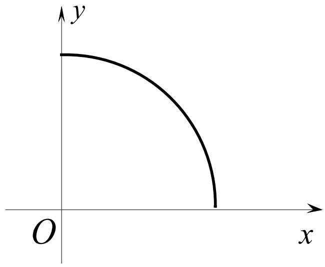
$$(C): \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(3\cos t - \cos 3t) \\ y = \dfrac{a}{2}(3\sin t - \sin 3t) \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$R: \quad \xi = a, \quad \eta = \frac{3\pi a}{8}$

Indicație. Se evaluează $l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, apoi:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{(C)} x|y|\, dl, \quad M_y = \int_{(C)} y^2\, dl$$

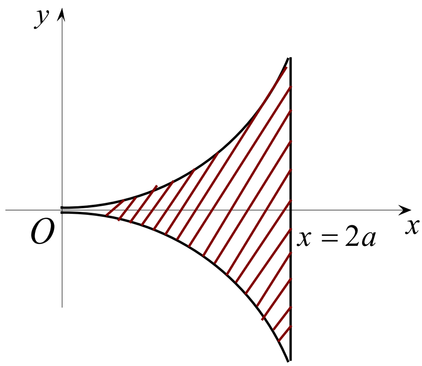
iar mai departe, $\xi = \frac{M_x}{l}$, $\eta = \frac{M_y}{\eta}$.



30. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene mărginite de cicloida $y^2(2a - x) = x^3$ şi asimptota sa (*vezi figura*).

$R: \quad \xi = \frac{5a}{3}, \quad \eta = 0$

Indicație.



Notăm $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}, \qquad x \in [0, 2a)$

Evaluăm:

$$\xi = \frac{\int_0^{2a} xf(x)\,dx}{\int_0^{2a} f(x)\,dx}$$

Pentru calculul integralelor se recomandă schimbarea:

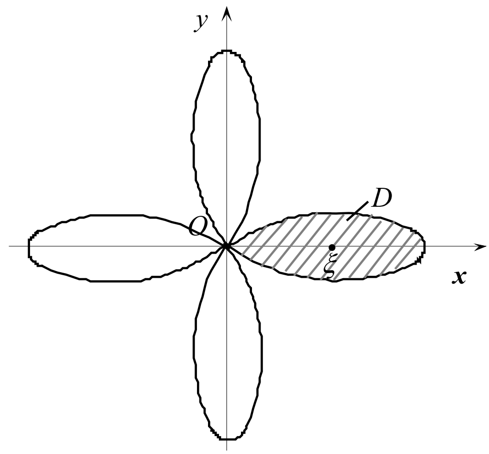
$$x \to t \therefore \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = t \Leftrightarrow x = \frac{2at^2}{1+t^2}$$

31. Determinați centrul de greutate de forma unei bucle a curbei:

$$(C): \quad r = a\cos 2\theta$$

Indicație. Alegem bucla haşurată pe care o rotim în jurul axei Oy (*vezi figura*). Apoi, se aplică teorema a doua a lui Guldin:

$$V = 2\pi\xi S$$



unde $S = \text{aria}(D) = \dfrac{\pi a^2}{8}$ (*am văzut mai sus*), iar

$$V_{Oy} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\,dy = \frac{32\pi a^2\sqrt{2}}{105}.$$

4.3. Probleme diverse

1. Determinați aria porțiunii plane mărginite de curbele: $y^m = x^n$ şi $y^n = x^m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ situate în primul cadran.

2. a) Demonstrați că aria trapezului curbiliniu mărginit de axa Ox, dreptele $x = a$, $x = b$ şi de parabola $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ se poate calcula utilizând *formula lui Cebâşev*:

$$S = \frac{b-a}{3}\left[y\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right) + y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

b) Demonstrați că aria trapezului curbiliniu mărginit de axa Ox, dreptele $x = a$, $x = b$ şi de parabola de gradul 5:

$$y = f(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

se poate calcula folosind *formula lui Gauss*:

$$S = \frac{b-a}{9}\left[5f\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{b-a}{2}\right) + 8f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 5f\left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

R: $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$ dacă m şi n au parități diferite

$4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$ dacă m şi n sunt ambele pare

$2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$ dacă m şi n sunt ambele impare

Indicație. Curbele $y^m = x^n$ şi $y^n = x^m$ se intersectează în punctele $(0,0)$ şi $(1, 1)$ din primul cadran. Aria domeniului plan mărginit de aceste curbe şi situate în primul cadran este:

$$\left|\int_0^1 \left(x^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{m}{n}}\right) dx\right|$$

În funcție de paritatea sau imparitatea lui m şi n, figura este fie simetrică în raport cu axele de coordonate (dacă m şi n sunt pare), fie în raport cu originea (dacă m şi n sunt impare). Dacă m şi n au parități diferite, atunci curbele mărginesc suprafața situată în primul cadran.

3. Demonstrați că aria figurii mărginite de oricare două raze vectoare ale spiralei logaritmice $\rho = ae^{m\theta}$ şi arcul cuprins între ele este proporțional cu diferența pătratelor lungimilor acestor raze.
Indicație. Se recomandă calculul ariei trecând la coordonate polare.

4. Demonstrați că dacă două solide conținute între planele paralele (P) şi (Q) au proprietatea că, tăindu-le cu orice plan (R) paralel cu (P) şi (Q), se obțin corpuri echivalente, atunci volumele acestor solide sunt egale (*Principiul lui Cavalieri*).

Indicație. Întrucât corpurile echivalente au arii egale, funcția $S(x)$ ce intervine în formula de calcul al volumului $V=\int_a^b S(x)dx$ este aceeaşi şi corespunzător valorile integrale sunt egale.

5. Determinați dacă funcția $S(x),\ (0\le x\le h)$ reprezentând aria secțiunii unui solid cu un plan perpendicular pe axa Ox este un polinom de grad cel mult egal cu trei, atunci volumul solidului este egal cu:

$$V=\frac{h}{6}\left[S(0)+4S\left(\frac{h}{2}\right)+S(h)\right]$$

Utilizând acest rezultat, să se deducă relațiile de calcul pentru volumul sferei, conului şi paraboloidului de revoluție.

Indicație. Relația din enunț se deduce direct din *formula lui Simpson*:

$$\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(h)\right]$$

Iar pentru sferă $S(x)=\pi\left(r^2-x^2\right)$, pentru con $S(x)=\dfrac{\pi r^2x^2}{h^2}$ şi pentru paraboloidul de revoluție $S(x)=2\pi px$

6. Demonstrați că volumul solidului generat prin rotația în jurul axei Oy a domeniului plan:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le y(x),\ \ a\le x\le b\right\}$$

cu $y(x)$ o funcție continuă, este egal cu:

$$V=2\pi\int_a^b x\,y(x)dx.$$

Indicație. Se împarte trapezul curbiliniu în benzi paralele Δx şi se scrie elementul de volum corespunzător unei benzi: $\Delta V=2\pi xy\,\Delta x.$

7. Demonstrați că volumul solidului format prin rotația în jurul axei polare, a domeniului plan:

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le\rho\le\rho(\theta),\ \ 0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi\right\}$$

este egal cu:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{3}(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

8. Demonstrați că lungimea arcului de curbă dat de ecuațiile parametrice:

$$(C):\ \begin{cases}x=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t\\ y=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t\end{cases}\quad (t_1\le t\le t_2)$$

este egal cu:

$$\left[f(t_2)-f(t_1)\right]+\left[f''(t_2)-f''(t_1)\right]$$

Indicație. Se utilizează formula de calcul a lungimii unui arc de curbă reprezentat parametric.

9. Determinați lungimea arcului de curbă reprezetat parametric de ecuațiile:

$$x=\int_1^t\frac{\cos\tau}{\tau}d\tau,\quad y=\int_1^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$$

cuprins între origine şi cel mai apropiat punct de pe tangenta verticală la această curbă:

$R:\quad \ln\frac{\pi}{2}$

Indicație. Punctul $(t=1)$ cel mai apropiat față de origine cu o tangentă verticală corespunde lui $t=\frac{\pi}{2}$.

10. Să se deducă formula pentru lungimea arcului în coordonate polare plecând de la definiție fără a trece de la coordonate carteziene la cele polare.

11. Să se arate că lungimea $l(x)$ a arcului de lănțişor cuprins între punctul $(0,1)$ se exprimă prin:

$$l(x)=\operatorname{sh}x$$

şi să se găsească ecuațiile parametrice ale acestei curbe utilizând lungimea arcului ca parametru.

12. Un fir flexibil este suspendat în punctele A şi B situate la aceeaşi înălțime. Distanța dintre extremități este $AB=2b$, iar săgeata este *f*. Presupunând că forma firului este o parabolă, să se arate că lungimea lui este:

$$l=2b\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{f}{b}\right)^{2}\right]$$

unde raportul $\frac{f}{b}$ este suficient de mic.

13. Să se determine aria domeniului plan mărginit de bucla curbei:

$$y^2 = \left(\frac{1}{3} - x\right)^2 x$$

şi aria cercului a cărui circumferinţă este egală cu lungimea curbei.

$R: \quad \frac{2\pi\sqrt{3}}{15}$

14. Să se determine lungimea arcului de curbă format prin intersecţia cilindrului parabolic:

$$(y+z)^2 = 4ax$$

cu conul eliptic:

$$\frac{4}{3}x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

cuprins între origine şi punctul $M(x, y, z)$.

$R: \quad \sqrt{2}z$

15. Să se arate că aria elipsei:

$$Ax^2 + 2By + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \left(AC - B^2 > 0\right)$$

este egală cu:

$$S = \frac{-\pi\Delta}{\left(AC - B^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

16. (a) Să se determine aria S a domeniului plan mărginit de arcul hiperbolic $x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0$ şi raza vectoare corespunzătoare unui punct $M(x, y)$ arbitrar pe hiperbolă.

(b) Să se determine aria sectorului circular Q mărginit de axa Ox şi raza vectoare a unui punct $N(x, y)$ situat pe cercul $x^2 + y^2 = 1$. Să se arate că punctele M şi N au coordonatele respectiv egale cu:

$$\begin{cases} x_M = \operatorname{ch} 2S \\ y_M = \operatorname{sh} 2S \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x_N = \cos 2Q \\ y_N = \sin 2Q \end{cases}$$

$R: \quad$ a) $\frac{1}{2}\ln(x+y)$, $\qquad$ b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin x$

17. Utilizând *teorema I a lui Guldin*, să se arate că centrul de greutate al unui triunghi este situat la o treime de bază.

18. Fie ξ abscisa centrului de greutate a trapezului curbiliniu mărginit de curba $y=f(x)$ cu $x=b$. Atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b (ax+b)f(x)dx=(a\xi+b)\int_a^b f(x)dx$$

(*Regula lui Vereşciaghin*)

19. Fie un sector curbiliniu mărginit de două raze vectoare şi o curbă $\rho=f(\theta)$ cu $f(\theta)$ funcţie continuă. Să se arate că centrul de greutate corespunzător acestui sector are coordonatele:

$$\xi=\frac{2}{3}\frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\cos\theta\,d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\,d\theta},\quad \eta=\frac{2}{3}\frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\sin\theta\,d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\,d\theta}$$

unde θ_1 şi θ_2 sunt unghiurile făcute de cele două raze vectoare cu axa polară.

20. Să se arate că centrul de greutate al arcului de curbă $\rho=f(\theta)$ cu $f(\theta)$ continuă este dat de:

$$\xi=\frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\cos\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta},\quad \eta=\frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta}{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta}$$

Bibliografie

1. Aramă, I., Morozan, T., *Probleme de calcul diferențial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
2. Demidovici, B., *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscova, 1976.
3. Flondor, D., Donciu, N., *Algebră şi analiză matematică*. *Culegere de probleme*, vol. I - II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.
4. Flondor, P., Stănăşilă, O., *Analiză matematică*, Editura All, Bucureşti, 1993.
5. Iacob, Caius, *Curs de matematici superioare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.
6. Maron, I., A., *Problems in Calculus of One Variable*, Mir Publishers, Moscova, 1973.
7. Sirețchi, Gh., *Calculul diferențial şi integral*, vol. I - II Editura Ştiințifică Enciclopedică, Bucureşti, 1985.