*19. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^3 - a^3}$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 3x}$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 8}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3}$

26. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2 - x + 1)^2}$

*27. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{(t + 1)(t^2 + 1)^2}$

*28. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t - 1)(t^2 - 1)^2}$

*29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(3 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

*30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x} - 4e^x + 4}$

*31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1 + x^2)^{3/2}}$

*32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1 - x^2)^{3/2}}$

*33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)^{3/2}}$

*34. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}$

*35. Suponga que P y Q son polinomios tales que el grado de P es menor que el grado de Q. Si

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

siendo $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$, de forma que $P(x)/Q(x)$ tiene la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

demuestre que

$$A_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Esto proporciona otro método para calcular las constantes de la descomposición en fracciones simples si los factores del denominador son lineales y distintos.

6.4 Integración mediante programas de computador o tablas

Aunque toda persona que utilice el cálculo debe estar familiarizada con las técnicas básicas de integración, de la misma forma que cualquiera que use la aritmética debe estar familiarizado con las técnicas de multiplicación y división, la tecnología evoluciona rápidamente y, en muchos casos, evita la necesidad de calcular integrales largas y complicadas mediante dichas técnicas. De hecho, hoy en día existen varios programas de computador que pueden manejar expresiones matemáticas simbólicas (en vez de numéricas), y que pueden realizar, con poca o ninguna intervención por nuestra parte, los diversos pasos y cálculos de límites que se requieren para obtener y simplificar tanto derivadas como integrales. Se puede ahorrar mucho esfuerzo y tiempo haciendo que el computador calcule una integral complicada como

$$\int \frac{1 + x + x^2}{(x^4 - 1)(x^4 - 16)^2}\,dx$$

en vez de hacerla a mano utilizando descomposición en fracciones simples. Incluso sin la ayuda del computador, se pueden utilizar tablas de integrales estándar como las que aparecen al final de este libro como ayuda en el cálculo de integrales complicadas. No obstante, el uso de computadores o de tablas puede requerir que realicemos algunas simplificaciones previas a mano, y por supuesto puede requerir que seamos capaces de interpretar las respuestas que se obtienen. Presentaremos a continuación algunos ejemplos.

Uso de Maple para integración

Los programas matemáticos de computador son capaces de calcular simbólicamente integrales tanto indefinidas como definidas, y también proporcionar aproximaciones numéricas de aquellas integrales definidas que tengan valores numéricos. Los ejemplos que siguen muestran cómo utilizar Maple para calcular integrales.

Empezaremos calculando $\displaystyle\int 2^x\sqrt{1 + 4^x}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^{\pi} 2^x\sqrt{1 + 4^x}\,dx$.

Utilizaremos el comando de Maple «int», especificando la función y la variable de integración:

```
> int(2^x*sqrt (1+4^x), x) ;
```

$$\frac{e^{(x\ln(2))}\sqrt{1+(e^{(x\ln(2))})^2}}{2\ln(2)}+\frac{\operatorname{arcsenh}(e^{(x\ln(2))})}{2\ln(2)}$$

Si no nos gusta el seno hiperbólico inverso, se puede transformar en un logaritmo:

```
> convert(%, ln) ;
```

$$\frac{e^{(x\ln(2))}\sqrt{1+(e^{(x\ln(2))})^2}\,2\ln(2)+\ln(e^{(x\ln(2))}+\sqrt{1+(e^{(x\ln(2))})^2})}{2\ln(2)}$$

El símbolo «%» se refiere al resultado del cálculo previo. Nótese cómo Maple prefiere utilizar $e^{x\ln 2}$ en vez de 2^x.

Para la integral definida, se especifica el intervalo de valores de la variable de integración utilizando dos puntos entre los extremos, como sigue:

```
> int(2^x*sqrt(1+4^x), x=0..Pi) ;
```

$$\frac{-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})+2^{\pi}\sqrt{1+4^{\pi}}+\ln(2^{\pi}+\sqrt{1+4^{\pi}})}{2\ln(2)}$$

Si se desea una aproximación decimal a esta respuesta exacta, se puede pedir a Maple que evalúe el último resultado como un número en punto flotante:

```
> evalf(%) ;
```

$$56.955\,421\,55$$

Observación Maple proporciona por defecto una precisión de 10 dígitos significativos para sus números en punto flotante a menos que se solicite una precisión diferente declarando otro valor de la variable «Digits»:

```
> Digits := 20; evalf(Pi) ;
```

$$3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,5$$

Supongamos que le pedimos a Maple que calcule una integral que no podemos resolver:

```
> int(exp(-x^2) ,x) ;
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x)$$

Maple expresa la respuesta en términos de la **función de error** definida como

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Pero obsérvese que:

```
> Int(exp(-x^2), x=-infinity..infinity) = int(exp(-x^2), x=-inf
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)}\,dx=\sqrt{\pi}$$

Nótese el uso del comando *inerte* de Maple «Int» en el miembro izquierdo para presentar en pantalla simplemente el integrando sin realizar ningún tipo de evaluación. El comando activo «int» realiza la evaluación.

Los programas de matemática por computador se pueden utilizar para integrar simbólicamente muchas funciones, pero se pueden recibir algunas sorpresas cuando se utilizan, y es posible que haya que realizar parte del trabajo para obtener una respuesta útil en el contexto del problema sobre el que se está trabajando. Estos programas, y algunas de las calculadoras científicas más sofisticadas, son capaces de evaluar numéricamente integrales definidas con cualquier grado de precisión deseada, aun cuando no se puedan obtener primitivas simbólicamente. En las Secciones 6.6-6.8 presentaremos técnicas de integración numérica, pero debe notarse aquí que se puede utilizar siempre el comando de Maple `evalf(Int())` para obtener valores numéricos:

```
> evalf(Int(sin(cos(x)),x=0..1));
```

$$.738\,642\,998\,0$$

Uso de tablas de integrales

Las tablas de integrales, como las que aparecen al final de este libro, pueden servir de ayuda en el cálculo de algunas integrales. Además de dar los valores de las integrales elementales más comunes que es conveniente recordar al estudiar cálculo, proporcionan también integrales mucho más complicadas, especialmente aquellas que representan tipos estándar que surgen a menudo en las aplicaciones. Es conveniente familiarizarse con los tipos principales en los que se clasifican las integrales. Utilizar las tablas muchas veces requiere modificar la integral haciendo cambios simples hasta que se llega a la forma de una de las integrales de la tabla.

Ejemplo 1 Utilice la tabla para calcular $I = \int \frac{t^5}{\sqrt{3 - 2t^4}}\, dt$.

Solución Esta integral no se parece a ninguna de las tablas, pero hay muchas integrales en dichas tablas en las que aparece $\sqrt{a^2 - x^2}$. Podemos empezar por expresar la integral de esta forma con el cambio $t^2 = u$, de forma que $2t\,dt = du$. Entonces,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{u^2}{\sqrt{3 - 2u^2}}\, du$$

Esto no es todavía lo que queremos; hay que quitar el 2 que multiplica u^2 bajo la raíz cuadrada. Una forma de hacer esto es mediante el cambio de variable $\sqrt{2}u = x$, de forma que $du = dx/\sqrt{2}$:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{x^2}{\sqrt{3 - x^2}}\, dx$$

Ahora el denominador tiene la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ con $a = \sqrt{3}$. Observando la parte de la tabla (al final del libro) donde aparecen integrales con $\sqrt{a^2 - x^2}$, encontramos la tercera, que dice que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{x}{2}\sqrt{3 - x^2} + \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_1 \\ &= -\frac{t^2}{8}\sqrt{3 - 2t^4} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}t^2}{\sqrt{3}} + C_1 \end{aligned}$$

Muchas integrales de la tabla son fórmulas de reducción (la integral aparece en ambos miembros de la ecuación). Se pueden usar en forma iterativa para simplificar integrales, como se hizo en los ejemplos y ejercicios de la Sección 6.1.

Ejemplo 2 Calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$.

Solución La cuarta integral en la tabla de Miscelánea de Integrales Algebraicas dice que si $n \neq 1$, entonces

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}}\right)$$

utilizando $a = 1$ y los signos $+$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{1}{2(n-1)}\left(\left.\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right|_0^1 + (2n-3)\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\right)\\ &= \frac{1}{2^n(n-1)} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{8}\tan^{-1}x\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}\end{aligned}$$

Ejercicios 6.4

1. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para comprobar algunas de las integrales realizadas en los ejercicios de las Secciones 5.6 y 6.1-6.3, así como algunas de las integrales que no haya podido resolver.

2. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para calcular la integral que aparece en el párrafo de apertura de esta sección.

3. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para volver a calcular la integral del Ejemplo 1.

4. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para volver a calcular la integral del Ejemplo 2.

Utilice las tablas de integrales como ayuda para calcular las integrales de los Ejercicios 5-14.

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$

6. $\int \sqrt{(x^2+4)^3}\,dx$

7. $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{3t^2+5}}$

8. $\int \frac{dt}{t\sqrt{3t-5}}$

9. $\int x^4(\ln x)^4\,dx$

10. $\int x^7 e^{x^2}\,dx$

11. $\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$

12. $\int \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x^2}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{(\sqrt{4x-x^2})^3}$

14. $\int \frac{dx}{(\sqrt{4x-x^2})^4}$

15. Utilice Maple u otro programa de matemáticas por computador para calcular las integrales de los Ejercicios 5-14.

6.5 Integrales impropias

Hasta este momento hemos considerado integrales definidas de la forma

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

donde el integrando f es *continuo* en el intervalo *cerrado* y *finito* $[a, b]$. Como esa función está necesariamente *acotada*, la integral I es necesariamente un número finito. Si f es positiva, la integral corresponde al área de una **región acotada** del plano, una región contenida dentro de algún disco de radio finito centrado en el origen. Este tipo de integrales se denominan **integrales propias**. Ahora vamos a generalizar el concepto de integral definida para permitir dos posibilidades excluidas en la situación descrita anteriormente:

(i) Podemos tener $a = -\infty$ o $b = \infty$ o ambas cosas.
(ii) f puede ser no acotada cuando x tiende a a, a b o a ambos.

Las integrales que cumplen (i) se denominan **integrales impropias de tipo I**. Las integrales que cumplen (ii) se denominan **integrales impropias de tipo II**. Ambos tipos de integrales impropias corresponden (para f positiva) al área de una región del plano que «se extiende hasta el infinito» en alguna dirección y, por tanto, es *no acotada*. Como veremos, estas integrales pueden tener valores finitos o no tenerlos. Las ideas necesarias se presentan mejor con algunos ejemplos.

Integrales impropias de tipo I

Ejemplo 1 Calcule el área de la región A que está por debajo de la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$ (*véase* la Figura 6.8(a)).

Solución Calcularemos el área mediante la integral

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

que es una integral impropia de tipo I, ya que su intervalo de integración es infinito. No es inmediatamente obvio que el área sea finita. La región tiene una cola infinitamente larga a lo largo del eje x, pero el valor de la función en la cola se hace infinitamente pequeño a medida que x tiende a ∞. Para calcular esta integral impropia, la interpretaremos como un límite de integrales propias en intervalos $[1, R]$ cuando $R \to \infty$ (*véase* la Figura 6.8(b)).

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} + 1\right) = 1$$

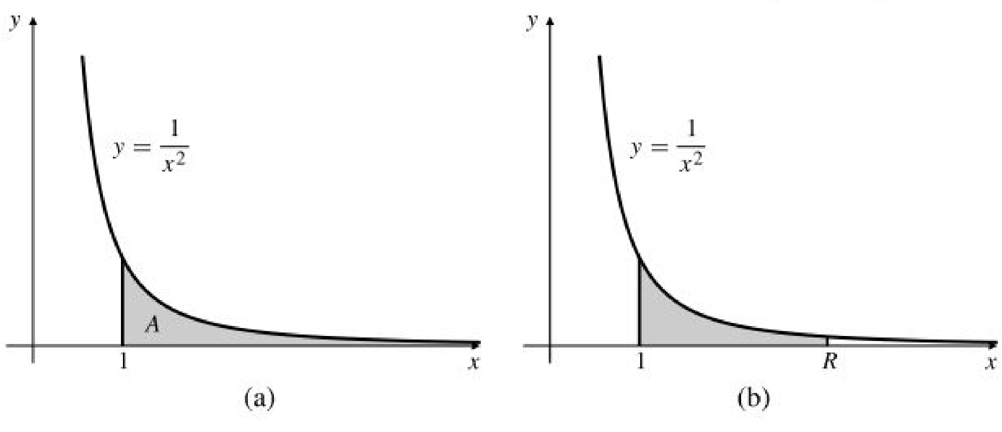

Figura 6.8
(a) $A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.
(b) $A = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$.

Como en el límite existe (es finito), se dice que la integral impropia *converge*. La región tiene un área finita de $A = 1$ unidades al cuadrado.

Ejemplo 2 Calcule el área de la región por debajo de $y = 1/x$, por encima de $y = 0$ y a la derecha de la recta $x = 1$ (*véase* la Figura 6.9).

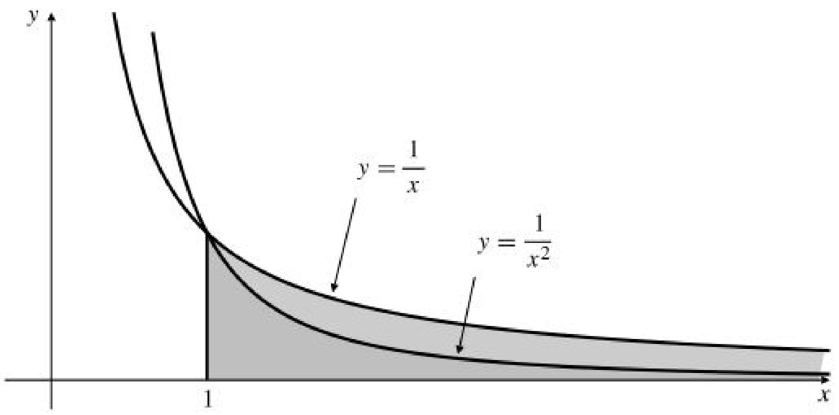

Figura 6.9 El área sombreada en claro es infinita.

Solución El área se expresa mediante la integral impropia

$$A = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty$$

Se dice que esta integral impropia *diverge a infinito*. Obsérvese que la región tiene una forma similar a la región bajo $y = 1/x^2$, considerada en el ejemplo anterior, pero está ligeramente por encima de ésta para todos los valores de $x > 1$. Evidentemente, esto marca una gran diferencia, ya que en este ejemplo la región tiene área *infinita*.

DEFINICIÓN 1 Integrales impropias de tipo I

Si f es una función continua en el intervalo $[a, \infty)$, se define la integral impropia de f en el intervalo $[a, \infty)$ como el límite de las integrales propias:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

De forma similar, si f es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$

En cualquier caso, si el límite existe (es un número finito), se dice que la integral impropia **converge**. Si el límite no existe se dice que la integral impropia **diverge**. Si el límite es ∞ (o $-\infty$) se dice que la integral impropia **diverge a infinito** (o que **diverge a menos infinito**).

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es, para f continua en la recta real, impropia de tipo I en ambos extremos. La dividimos en dos integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

La integral de la izquierda converge si y sólo si *ambas* integrales de la derecha convergen.

Ejemplo 3 Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

Solución Por la simetría (par) del integrando (*véase* la Figura 6.10), tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\\ &= 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2}\\ &= 2 \lim_{R\to\infty} \tan^{-1} R = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\end{aligned}$$

el uso de la simetría en este caso requiere alguna justificación. En el momento en que la utilizamos ya sabíamos si cada una de las dos integrales resultantes era finita o infinita. Sin embargo, como ambas son positivas, incluso si son infinitas, su suma seguirá siendo el doble de una de ellas. Si una hubiera sido positiva y la otra negativa, no podríamos haber justificado que se cancelaran mutuamente sin demostrar previamente que su valor es finito ($\infty + \infty = \infty$, pero $\infty - \infty$ no está definido). En cualquier caso, la integral dada converge a π.

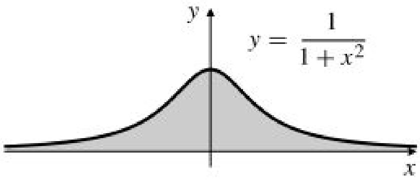

Figura 6.10

Ejemplo 4 $\int_0^{\infty} \cos x\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x\, dx = \lim_{R\to\infty} \operatorname{sen} R.$

Este límite no existe (y no es ni ∞ ni $-\infty$), de forma que lo único que podemos decir es que la integral dada diverge (*véase* la Figura 6.11). Cuando R aumenta, la integral suma y resta alternativamente las áreas de las colinas y los valles, pero no tiende a ningún límite único.

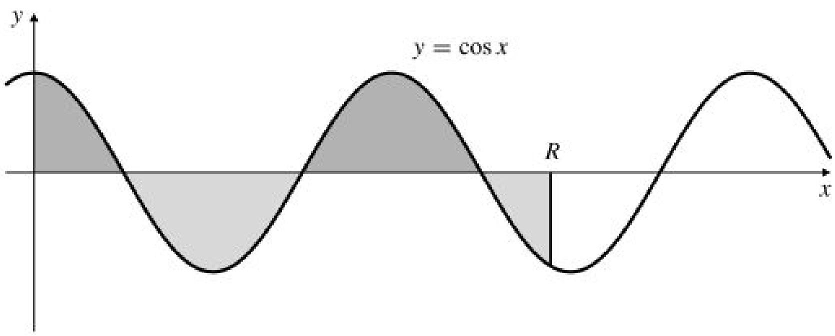

Figura 6.11 No todas las integrales impropias divergentes divergen hacia ∞ o $-\infty$.

Integrales impropias de tipo II

DEFINICIÓN 2 Integrales impropias de tipo II

Si f es continua en el intervalo $(a, b]$, y posiblemente no acotada cerca de a, se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\, dx$$

De forma similar, si f es continua en el intervalo $[a, b)$, y posiblemente no acotada cerca de b, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Estas integrales impropias pueden converger, divergir, divergir a infinito o divergir a menos infinito.

Ejemplo 5 Calcule el área de la región S que está por debajo de $y = 1/\sqrt{x}$, por encima del eje x y entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución El área A se expresa como

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

que es una integral impropia de tipo II, ya que el integrando no está acotado a medida que nos acercamos a $x = 0$. La región S tiene una «cola» que tiende a infinito a lo largo del eje y, una asíntota vertical del integrando, como se muestra en la Figura 6.12. Como hicimos en el caso de integrales impropias de tipo I, expresaremos estas integrales como límites de integrales propias:

$$A = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{c\to 0+} 2x^{1/2}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

La integral converge, y S tiene un área finita de 2 unidades al cuadrado.

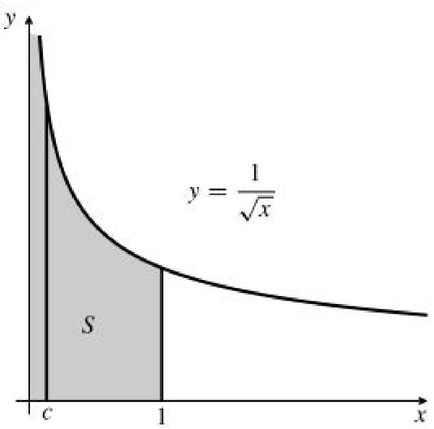

Figura 6.12 El área sombreada es finita.

Aunque las integrales impropias de tipo I se reconocen siempre fácilmente debido a los límites de integración infinitos, a veces no es tan sencillo reconocer las integrales impropias de tipo II. Hay que estar atentos por si existen singularidades de los integrandos y especialmente puntos donde haya asíntotas verticales. Puede ser necesario descomponer una integral impropia en varias integrales impropias si la integral original es impropia en los dos extremos del intervalo de integración, o en puntos del interior del intervalo de integración. Por ejemplo,

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int_{-1}^0 \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}} + \int_0^{1/2} \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}} + \int_{1/2}^1 \frac{\ln|x|\,dx}{\sqrt{1-x}}$$

Todas las integrales del miembro derecho son impropias con una singularidad en uno de los extremos del intervalo de integración.

Ejemplo 6 Calcule las siguientes integrales o demuestre que divergen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$, y (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

Solución

(a) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} (\ln 1 - \ln c) = \infty.$$

Esta integral diverge a infinito.

(b) $$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x}}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx \qquad \begin{array}{l}\text{Sea } u = x-1\\ du = dx\end{array}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \qquad \text{(por simetría)}$$

$$= 2\lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= 2\lim_{c\to 1-} \operatorname{sen}^{-1} u\Big|_0^c = 2\lim_{c\to 1-} \operatorname{sen}^{-1} c = \pi$$

Esta integral converge a π. Obsérvese cómo se puede realizar un cambio de variable incluso antes de expresar una integral impropia como límite de integrales propias.

(c) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \ln x\,dx \qquad \text{(\textit{Véase} el Ejemplo 2(a) de la Sección 6.1 donde se calcula la integral indefinida).}$$

$$= \lim_{c\to 0+} (x\ln x - x)\Big|_c^1$$

$$= \lim_{c\to 0+} (0 - 1 - c\ln c + c)$$

$$= -1 + 0 - \lim_{c\to 0+} \frac{\ln c}{1/c} \qquad \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

$$= -1 - \lim_{c\to 0+} \frac{1/c}{-(1/c^2)} \qquad \text{(por la Regla de L'Hôpital)}$$

$$= -1 - \lim_{c\to 0+} (-c) = -1 + 0 = -1$$

La integral converge al valor -1. ■

El siguiente teorema resume el comportamiento de las integrales impropias de los tipos I y II para el caso de potencias de x.

TEOREMA 2 **Integrales *p***

Si $0 < a < \infty$, entonces

(a) $\displaystyle\int_a^{\infty} x^{-p}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } \; p > 1 \\ \text{diverge a } \infty & \text{si } \; p \leqslant 1 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_0^{a} x^{-p}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{si } \; p < 1 \\ \text{diverge a } \infty & \text{si } \; p \geqslant 1 \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos el apartado (b). La demostración del apartado (a) es similar y se deja como ejercicio. Además, el caso de $p = 1$ del apartado (b) es similar al Ejemplo 6(a) visto anteriormente, por lo que sólo es necesario considerar los casos $p < 1$ y $p > 1$. Si $p < 1$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_0^a x^{-p}\,dx &= \lim_{c\to 0+} \int_c^a x^{-p}\,dx \\ &= \lim_{c\to 0+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^a \\ &= \lim_{c\to 0+} \frac{a^{1-p} - c^{1-p}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

ya que $1 - p > 0$. Si $p > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^a x^{-p}\,dx &= \lim_{c\to 0+} \int_c^a x^{-p}\,dx \\ &= \lim_{c\to 0+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^a \\ &= \lim_{c\to 0+} \frac{c^{-(p-1)} - a^{-(p-1)}}{p-1} = \infty\end{aligned}$$

Las integrales del Teorema 2 se denominan **integrales *p***. Es muy útil saber cuándo convergen o divergen, cuando hay que decidir si una determinada integral impropia converge o no, y no es posible calcular la correspondiente primitiva (*véase* la presentación posterior sobre convergencia). Nótese que $\int_0^{\infty} x^{-p}\,dx$ no converge para ningún valor de p.

Observación Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, de forma que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral propia definida, entonces al tratar la integral como impropia se obtiene el mismo valor:

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Esto justifica la definición de integral definida de una función continua por tramos, que se presentó en la Sección 5.4. Para integrar una función definida en forma de funciones continuas distintas en intervalos distintos, simplemente se suman las integrales de las funciones constituyentes en sus intervalos respectivos. Cualquiera de esas integrales puede ser propia o impropia. Todas las que sean impropias deberán converger, o en caso contrario la integral completa divergirá.

Ejemplo 7 Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$, siendo $f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

Solución La Figura 6.13 muestra la gráfica de f. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 = 2 + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

La primera integral del miembro derecho es impropia pero convergente (*véase* el Ejemplo 5 anterior), y la segunda integral es propia.

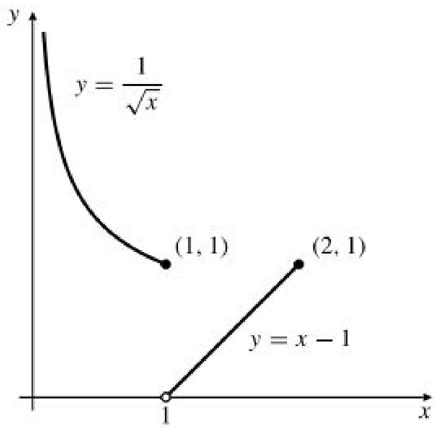

Figura 6.13

Estimación de la convergencia y la divergencia

Cuando una integral impropia no se puede calcular utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, debido a que no es posible obtener una primitiva, todavía es posible determinar si la integral converge comparándola con integrales más simples. El siguiente teorema es fundamental para ver cómo.

TEOREMA 3 **Un teorema para comparación de integrales**

Sea $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, y supongamos que las funciones f y g son continuas en el intervalo (a, b) y cumplen que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces también converge $\int_a^b f(x)\,dx$, y

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

De forma equivalente, si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge a ∞, también lo hace $\int_a^b g(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN Como los dos integrandos son no negativos, sólo existen dos posibilidades para cada integral: puede converger a un número no negativo o divergir a ∞. Como $f(x) \leqslant g(x)$ en el intervalo (a, b), aplicando el Teorema 3(e) de la Sección 5.4, se deduce que si $a < r < s < b$, entonces

$$\int_r^s f(x)\,dx \leqslant \int_r^s g(x)\,dx$$

El teorema se demuestra ahora fácilmente tomando límites cuando $r \to a+$ y $s \to b-$.

Ejemplo 8 Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge, y calcule una cota superior de su valor de convergencia.

Solución No sabemos integrar e^{-x^2}, pero sí sabemos integrar e^{-x}. Podríamos pensar en utilizar la inecuación $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, pero sólo es válida para $x \geqslant 1$ (*véase* la Figura 6.14). Por tanto, dividiremos la integral en dos partes.

En el intervalo $[0, 1]$, tenemos que $0 < e^{-x^2} \leqslant 1$, por lo que

$$0 < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 dx = 1$$

En el intervalo $[1, \infty)$ tenemos que $x^2 \geqslant x$, por lo que $-x^2 \leqslant -x$ y $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_1^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \left.\frac{e^{-x}}{-1}\right|_1^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^R}\right) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Por tanto, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge a un valor no mayor que $1 + (1/e)$.

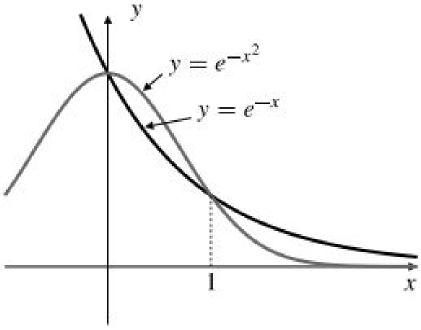

Figura 6.14 Comparación de e^{-x^2} y e^{-x}.

No hay que olvidar que la integral anterior es, de hecho, igual a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, aunque no podemos demostrarlo por ahora (*véase* la Sección 14.4).

Para valores grandes y pequeños de x, muchos integrandos se comportan aproximadamente como potencias de x. En ese caso, se pueden comparar con integrales p.

Ejemplo 9 Determine si $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$ converge.

Solución La integral es impropia de los dos tipos, por lo que escribimos

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = I_1 + I_2$$

En el intervalo $(0, 1]$, tenemos que $\sqrt{x + x^3} > \sqrt{x}$, por lo que

$$I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \qquad \text{(por el Teorema 2)}$$

En el intervalo $[1, \infty)$, tenemos que $\sqrt{x + x^3} > \sqrt{x^3}$, por lo que

$$I_2 < \int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = 2 \qquad \text{(por el Teorema 2)}$$

Por consiguiente, la integral dada converge, y su valor es menor que 4.

Ejercicios 6.5

En los Ejercicios 1-22, calcule las integrales dadas o demuestre que divergen.

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

2. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^{2/3}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$

6. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{a^2-x^2}$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1-\operatorname{sen} x)^{2/3}}$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+2x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}}$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

16. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

17. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

18. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

23. Calcule el área por debajo de $y=0$, por encima de $y=\ln x$ y a la derecha de la recta $x=0$.

24. Calcule el área por debajo de $y=e^{-x}$, por encima de $y=e^{-2x}$ y a la derecha de la recta $x=0$.

25. Calcule el área de la región que está por encima de la recta $y=0$, a la derecha de la recta $x=1$ y bajo la curva $y=\dfrac{4}{2x+1}-\dfrac{2}{x+2}$.

26. Calcule el área de la región plana que está por debajo de la gráfica de $y=x^{-2}e^{-1/x}$, por encima del eje x y a la derecha del eje y.

27. Demuestre el Teorema 2(a) calculando directamente las integrales que aparecen.

28. Calcule $\int_{-1}^{1} (x\operatorname{sgn} x)/(x+2)\,dx$. Recuerde que $\operatorname{sgn} x = x/|x|$.

29. Calcule $\int_0^2 x^2 \operatorname{sgn}(x-1)\,dx$.

En los Ejercicios 30-41, indique si las integrales dadas convergen o divergen, y justifique sus respuestas.

30. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

32. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x}\,dx}{x^2-1}$

33. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^3}\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$

35. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

***37.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,dx$

***38.** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$

***39.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \csc x\,dx$

***40.** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$

***41.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{xe^x}$

***42.** Sabiendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, calcule

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx$

***43.** Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, demuestre que

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sugerencia: Una función continua en un intervalo cerrado y finito está *acotada*; existe una constante positiva K tal que $|f(x)| \leqslant K$ para todo x perteneciente al intervalo $[a, b]$. Utilice ese hecho, junto con los apartados (d) y (f) del Teorema 3 de la Sección 5.4, para demostrar que

$$\lim_{c\to a+} \left(\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx\right) = 0$$

De forma similar, demuestre que

$$\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

***44.** **(La función gamma)** La función gamma $\Gamma(x)$ se define mediante la integral impropia

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

(Γ es la letra griega gamma mayúscula).

(a) Demuestre que la integral converge para $x>0$.

(b) Utilice integración por partes para demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x>0$.

(c) Demuestre que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

(d) Sabiendo que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, demuestre que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

En vista del apartado (c), $\Gamma(x+1)$ se representa a menudo por $x!$, vista como una extensión a valores reales de la función factorial. Algunas calculadoras científicas (en particular, las calculadoras HP), para obtener $n!$, utilizan realmente la función gamma, en vez del factorial para enteros. Podemos probar si nuestra calculadora hace esto introduciendo $0.5!$. Si se obtiene un mensaje de error, entonces es que nuestra calculadora no utiliza la función gamma.

6.6 La Regla del Trapecio y la Regla del Punto Medio

En la mayoría de las aplicaciones de integración, dentro y fuera del campo de las matemáticas, aparece la integral definida

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, se pueden calcular esas integrales definidas obteniendo primero una primitiva de f. Por eso hemos empleado un tiempo considerable en presentar diversas técnicas de integración. Sin embargo, hay dos obstáculos que pueden impedir el cálculo de una primitiva de f:

(i) El cálculo de una primitiva expresada por medio de funciones familiares puede ser imposible, o al menos muy difícil.

(ii) A veces no se dispone de una fórmula de $f(x)$ en función de x. Por ejemplo, $f(x)$ puede ser una función desconocida cuyos valores en diversos puntos del intervalo $[a, b]$ se han determinado mediante medidas experimentales.

En las dos secciones que siguen vamos a considerar el problema de aproximar el valor de una integral definida I conociendo sólo valores de $f(x)$ en un número finito de puntos de intervalo $[a, b]$. La obtención de esta aproximación se denomina **integración numérica**. Se pueden utilizar para ello sumas superiores e inferiores (o, de hecho, cualquier suma de Riemann), pero en general, esto requiere realizar muchos cálculos para obtener la misma precisión que los métodos que se van a presentar. Desarrollaremos tres métodos para la evaluación numérica de integrales: la Regla del Trapecio, la Regla del Punto Medio y la Regla de Simpson (*véase* la Sección 6.7). Los tres métodos se pueden realizar de forma muy simple utilizando un pequeño computador o calculadora científica. La amplia disponibilidad actual de esos dispositivos hace que la integración numérica sea una herramienta importante para el estudiante de matemáticas. Algunas calculadoras avanzadas incorporan rutinas de integración numérica.

Todas las técnicas que vamos a considerar requieren calcular los valores de $f(x)$ en un conjunto de puntos equiespaciados del intervalo $[a, b]$. El «coste» computacional requerido para determinar el valor aproximado de una integral I será aproximadamente proporcional al número de valores de la función que haya que calcular. Es decir, cuantas menos veces haya que evaluar la función para calcular la integral deseada con un cierto grado de precisión, mejor será la técnica. El tiempo es oro, incluso en el mundo de los computadores.

La Regla del Trapecio

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y subdividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud $h = (b - a)/n$ utilizando $n + 1$ puntos.

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_n = a + nh = b$$

Supongamos que el valor de $f(x)$ en cada uno de los puntos es conocido:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n)$$

La Regla del Trapecio aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizando segmentos de rectas entre los puntos (x_{j-1}, y_{j-1}) y (x_j, y_j), $(1 \leqslant j \leqslant n)$, para formar una aproximación a la gráfica de f, como se muestra en la Figura 6.15, y suma las áreas de los *n trapecios* resultantes. Un **trapecio** es un polígono de cuatro lados parecido a un rectángulo pero con uno de sus lados inclinado. En nuestra presentación, supondremos que f es positiva de forma que podamos hablar de «áreas» sin problemas, pero las fórmulas resultantes se pueden aplicar a cualquier función continua f.

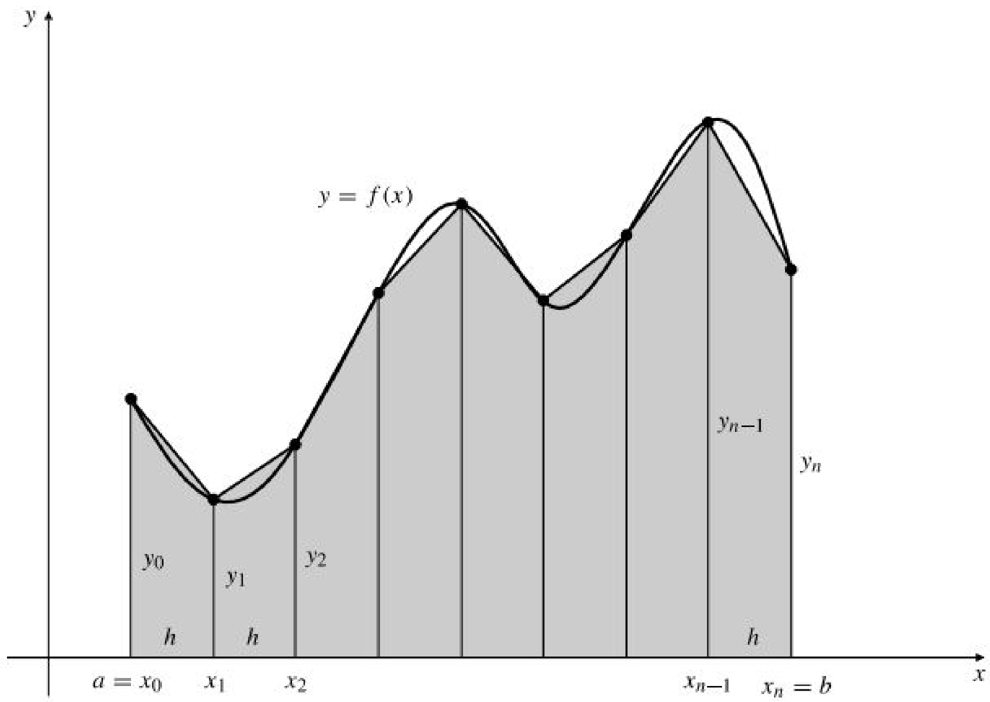

Figura 6.15 El área por debajo de $y = f(x)$ se aproxima mediante la suma de las áreas de n trapecios.

Los vértices del primer trapecio son $(x_0, 0)$, (x_0, y_0), (x_1, y_1) y $(x_1, 0)$. Los dos lados paralelos son verticales y sus longitudes son y_0 y y_1. La distancia perpendicular entre dichos lados es $h = x_1 - x_0$. El área de ese trapecio es h veces el promedio de las longitudes de los lados paralelos:

$$h\,\frac{y_0 + y_1}{2} \text{ unidades al cuadrado}$$

Esto se puede ver geométricamente considerando que el trapecio es una unión sin solapamiento de un rectángulo y un triángulo; *véase* la Figura 6.16. Utilizaremos el trapecio para aproximar la integral de f en el primer subintervalo $[x_0, x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h\,\frac{y_0 + y_1}{2}$$

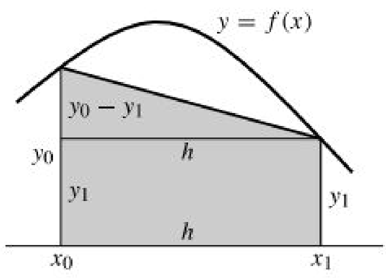

Figura 6.16 El área del trapecio es $y_1 h + \frac{1}{2}(y_0 - y_1)\,h = \frac{1}{2}\,h(y_0 + y_1)$.

La integral de f en cualquier otro subintervalo se puede aproximar de la misma forma:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \approx h\,\frac{y_{j-1} + y_j}{2}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Se deduce entonces que la integral original I se puede aproximar mediante la suma de esas áreas de trapecios:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$
$$= h\left(\frac{1}{2}\,y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}\,y_n\right)$$

DEFINICIÓN 3 La Regla del Trapecio

La aproximación $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la **Regla del Trapecio** con n subintervalos, que denominaremos T_n, es

$$T_n = h\left(\frac{1}{2}\,y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}\,y_n\right)$$

Ilustraremos ahora la Regla del Trapecio utilizándola para aproximar una integral cuyo valor ya es conocido:

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 = 0.693\,147\,18\ldots$$

Este valor, y los de todas las aproximaciones que se verán en esta sección, se han calculado utilizando una calculadora científica. Utilizaremos la misma integral para ilustrar otros métodos de aproximación de integrales definidas que veremos posteriormente.

Ejemplo 1 Calcule las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio T_4, T_8 y T_{16} a la integral

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

Solución Para $n=4$ tenemos que $h=(2-1)/4=1/4$; para $n=8$ tenemos que $h=1/8$ y para $n=16$ tenemos que $h=1/16$. Por tanto,

$$T_4=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\,(1)+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=0.697\,023\,81\ldots$$
$$T_8=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\,(1)+\frac{8}{9}+\frac{4}{5}+\frac{8}{11}+\frac{2}{3}+\frac{8}{13}+\frac{4}{7}+\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[4T_4+\frac{8}{9}+\frac{8}{11}+\frac{8}{13}+\frac{8}{15}\right]=0.694\,121\,85\ldots$$
$$T_{16}=\frac{1}{16}\left[8T_8+\frac{16}{17}+\frac{16}{19}+\frac{16}{21}+\frac{16}{23}+\frac{16}{25}+\frac{16}{27}+\frac{16}{29}+\frac{16}{31}\right]$$
$$=0.693\,391\,20\ldots$$

Nótese cómo los valores de la función utilizados para calcular T_4 se reutilizan en el cálculo de T_8, y de forma similar los valores calculados en T_8 se reutilizan en T_{16}. Cuando se necesitan varias aproximaciones, es muy útil doblar el número de subintervalos en cada nuevo cálculo, de forma que se puedan reutilizar los valores de f calculados previamente.

Todas las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio a $I=\int_1^2 (1/x)\,dx$ son mayores que el verdadero valor de I. Esto es porque la gráfica de $y=1/x$ es convexa en el intervalo [1, 2] y, por tanto, las partes superiores de los trapecios de la aproximación están por encima de la curva (*véase* la Figura 6.17).

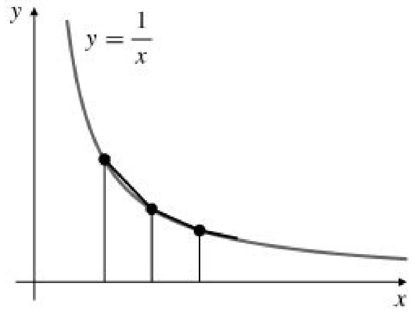

Figura 6.17 Si la curva es convexa, las áreas de los trapecios son mayores que las áreas por debajo de la curva.

Se pueden calcular los errores exactos en las tres aproximaciones ya que sabemos que $I = \ln 2 = 0.69314718...$ (definiremos siempre el error de aproximación como el valor verdadero menos el valor aproximado).

$$I - T_4 = 0.693\,147\,18... - 0.697\,023\,81... = -0.003\,876\,63...$$

$$I - T_8 = 0.693\,147\,18... - 0.694\,121\,85... = -0.000\,974\,67...$$

$$I - T_{16} = 0.693\,147\,18... - 0.694\,391\,20... = -0.000\,244\,02...$$

Obsérvese que el tamaño del error disminuye aproximadamente a la cuarta parte de su valor anterior cada vez que n se dobla. Posteriormente demostraremos que esto es lo que cabe esperar para funciones «bien comportadas» como $1/x$.

El Ejemplo 1 es algo artificial, en el sentido de que conocemos el valor real de la integral, por lo que realmente no necesitamos la aproximación. En las aplicaciones prácticas de la integración numérica no conoceremos el valor real. Una cosa que podemos hacer es calcular varias aproximaciones para valores de n crecientes hasta que las dos aproximaciones más recientes se diferencien menos que una tolerancia de error preestablecida. Por ejemplo, podríamos decir que $\ln 2 \approx 0.69...$ a partir de una comparación de T_4 y T_8, y una posterior comparación de T_{16} y T_8 sugiere que el tercer decimal es probablemente 3: $I \approx 0.693...$ Aunque en general esta forma de proceder no se puede justificar formalmente, se utiliza frecuentemente en la práctica.

La Regla del Punto Medio

Una aproximación algo más simple $\int_a^b f(x)\,dx$, basada en la partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, forma una suma de Riemann de las áreas de rectángulos cuyas alturas se toman en los puntos medios de los n subintervalos (*véase* la Figura 6.18).

DEFINICIÓN 4 La Regla del Punto Medio

Si $h = (b - a)/n$, sea $m_j = a + (j - \frac{1}{2})\,h$ para $1 \leqslant j \leqslant n$. La aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la **Regla del Punto Medio**, que se expresará como M_n, es

$$M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)) = h\sum_{j=1}^{n} f(m_j)$$

Ejemplo 2 Mediante la Regla del Punto Medio, calcule las aproximaciones M_4 y M_8 a la integral $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, y compare los errores reales con los obtenidos aplicando la Regla del Trapecio presentada anteriormente.

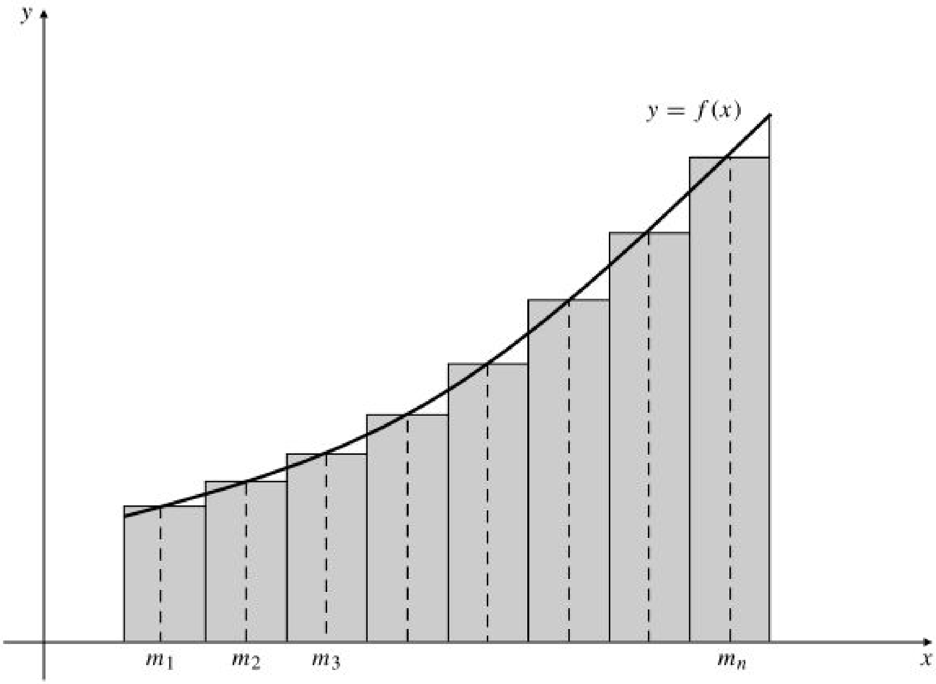

Figura 6.18 La aproximación M_n a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la Regla del Punto Medio es la suma de Riemann basada en las alturas de la gráfica de la función f en los puntos medios de los subintervalos de la partición.

Solución Para calcular M_4, el intervalo $[1, 2]$ se divide en cuatro subintervalos iguales:

$$\left[1, \frac{5}{4}\right], \quad \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{7}{4}, 2\right]$$

Los puntos medios de estos intervalos son 9/8, 11/8, 13/8 y 15/8, respectivamente. Los puntos medios de los intervalos para M_8 se obtienen de forma similar. Las aproximaciones mediante la Regla del Punto Medio son

$$M_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right] = 0.691\ 219\ 89\ldots$$

$$M_8 = \frac{1}{8}\left[\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \frac{16}{23} + \frac{16}{25} + \frac{16}{27} + \frac{16}{29} + \frac{16}{31}\right] = 0.692\ 660\ 55\ldots$$

Los errores de esas aproximaciones son

$$I - M_4 = 0.693\ 147\ 18\ldots - 0.691\ 219\ 89\ldots = 0.001\ 927\ 29\ldots$$

$$I - M_8 = 0.693\ 147\ 18\ldots - 0.692\ 660\ 55\ldots = 0.000\ 486\ 63\ldots$$

Estos errores son de signo contrario y aproximadamente de la mitad de tamaño que los errores correspondientes de la Regla del Trapecio $I - T_4$ e $I - T_8$. La Figura 6.19 sugiere la razón de esto. El área rectangular $hf(m_j)$ es igual al área del trapecio formado por la recta tangente a $y = f(x)$ en $(m_j, f(m_j))$. La región sombreada por encima de la curva es la parte del error de la Regla del Trapecio debida al j-ésimo subintervalo. El área sombreada por debajo de la curva es el error correspondiente a la Regla del Punto Medio.

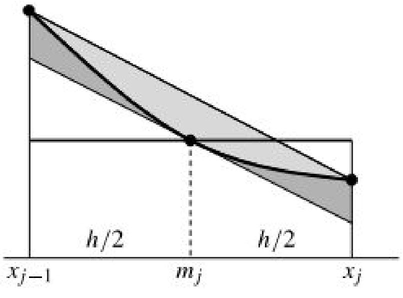

Figura 6.19 El error de la Regla del Punto Medio, correspondiente al área sombreada en oscuro, tiene signo opuesto y aproximadamente la mitad del tamaño del error de la Regla del Trapecio, correspondiente al área sombreada en claro.

Un problema de la Regla del Punto Medio es que no podemos reutilizar los valores de f calculados para M_n cuando calculamos M_{2n}. Sin embargo, para calcular T_{2n} se pueden utilizar los valores de datos calculados para T_n y M_n. Concretamente,

$$T_{2n} = \tfrac{1}{2}\,(T_n + M_n)$$

Una buena estrategia para estos métodos, en la obtención del valor de una integral I con un grado de precisión deseado, es calcular sucesivamente:

$$T_n, \quad M_n, \quad T_{2n} = \frac{T_n + M_n}{2}, \quad M_{2n}, \quad T_{4n} = \frac{T_{2n} + M_{2n}}{2}, \quad M_{4n}, \ldots$$

hasta que dos términos consecutivos se parezcan suficientemente. Si sólo se desea una única aproximación rápida, M_n es una opción mejor que T_n.

Estimaciones del error

El teorema que sigue proporciona una cota del error en las aproximaciones mediante las Reglas del Trapecio y del Punto Medio en función de la segunda derivada del integrando.

TEOREMA 4 **Estimaciones del error en las Reglas del Trapecio y del Punto Medio**

Si f es una función con segunda derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y cumple que $|f''(x)| \leqslant K$ en dicho intervalo, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \leqslant \frac{K(b-a)}{12}\,h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - M_n \right| \leqslant \frac{K(b-a)}{24}\,h^2 = \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

siendo $h = (b - a)/n$. Nótese que estas cotas de error decrecen cuando n crece en función del cuadrado de la longitud de los subintervalos.

DEMOSTRACIÓN Sólo demostraremos la estimación del error de la Regla del Trapecio (la demostración para el caso de la Regla del Punto Medio es más sencilla, y el método se sugiere en el Ejercicio 14 posterior). La recta que aproxima a $y = f(x)$ en el primer subintervalo $[x_0, x_1] = [a, a + h]$ pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Su ecuación es $y = A + B(x - x_0)$, siendo

$$A = y_0 \quad \text{y} \quad B = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Sea la función $g(x)$ la distancia vertical entre la gráfica de f y esta recta:

$$g(x) = f(x) - A - B(x - x_0)$$

Como la integral de $A + B(x - x_0)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es el área del primer trapecio, que es $h(y_0 + y_1)/2$ (*véase* la Figura 6.20), la integral de $g(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es el error en la aproximación de $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ mediante el área del trapecio:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - h\frac{y_0 + y_1}{2} = \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx$$

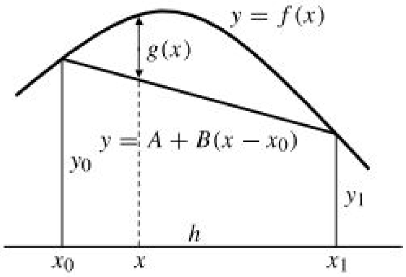

Figura 6.20

g es dos veces diferenciable, y $g''(x) = f''(x)$. Además, $g(x_0) = g(x_1) = 0$. Dos integraciones por partes (*véase* el Ejrcicio 36 de la Sección 6.1) permiten demostrar que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x)\, f''(x)\, dx &= \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x) g''(x)\, dx \\ &= -2 \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad del triángulo para integrales definidas (Teorema 3(f) de la Sección 5.4),

$$\begin{aligned}\left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx - h\frac{y_0 + y_1}{2} \right| &\leqslant \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x_1 - x)\, |f''(x)|\, dx \\ &\leqslant \frac{K}{2} \int_{x_0}^{x_1} (-x^2 + (x_0 + x_1)x - x_0 x_1)\, dx \\ &= \frac{K}{12}(x_1 - x_0)^3 = \frac{K}{12} h^3\end{aligned}$$

Se puede aplicar una estimación similar en cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x)\, dx - T_n \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, dx - h\frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right) \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\, dx - h\frac{y_{j-1} + y_j}{2} \right| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{K}{12} h^3 = \frac{K}{12} nh^3 = \frac{K(b - a)}{12} h^2\end{aligned}$$

ya que $nh = b - a$.

Ilustraremos esta estimación del error para las aproximaciones de los Ejemplos 1 y 2 anteriores.

Ejemplo 3 Obtenga cotas de los errores de T_4, T_8, T_{16}, M_4 y M_8 para $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$.

Solución Si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. En el intervalo $[1, 2]$ tenemos que $|f''(x)| \leqslant 2$, por lo que podemos tomar $K = 2$ en la estimación. Entonces,

$$|I - T_4| \leqslant \frac{2(2 - 1)}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.010\,4\ldots$$

$$|I - M_4| \leqslant \frac{2(2 - 1)}{24} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.005\,2\ldots$$

$$|I - T_8| \leqslant \frac{2(2-1)}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.002\,6...$$

$$|I - M_8| \leqslant \frac{2(2-1)}{24}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0.001\,3...$$

$$|I - T_{16}| \leqslant \frac{2(2-1)}{12}\left(\frac{1}{16}\right)^2 = 0.000\,65...$$

Los errores reales calculados anteriormente son considerablemente menores que estas cotas, porque $|f''(x)|$ es más pequeño de $K = 2$ en la mayor parte del intervalo [1, 2].

Observación Las cotas de error generalmente no son tan sencillas de obtener como en el Ejemplo 3. En particular, si no se conoce una fórmula exacta de $f(x)$ (como suele suceder si los valores de f se obtienen de medidas experimentales), entonces no hay forma de calcular $f''(x)$, por lo que no se puede determinar K. El Teorema 4 es de importancia más teórica que práctica. Demuestra que, dada una función f «bien comportada», el error de la Regla del Punto Medio es aproximadamente la mitad que el error de la Regla del Trapecio y que tanto el error de la Regla del Trapecio como el de la Regla del Punto Medio decrecerán como $1/n^2$ cuando n crece. Utilizando la notación O,

$$I = T_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{e} \quad I = M_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por supuesto, los errores reales no son iguales a las cotas del error, por lo que no disminuirán exactamente a la cuarta parte cuando se dobla n.

Ejercicios 6.6

En los Ejercicios 1-4, calcule las aproximaciones T_4, M_4, T_8, M_8 y T_{16} de las integrales dadas (utilice una calculadora científica o una hoja de cálculo). Calcule también el valor exacto de cada integral, y determine por tanto el error exacto de cada aproximación. Compare estos errores exactos con las cotas del tamaño del error que proporciona el Teorema 4.

1. $I = \int_0^2 (1 + x^2)\, dx$

2. $I = \int_0^1 e^{-x}\, dx$

3. $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

4. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

5. La Figura 6.21 muestra la gráfica de una función f en el intervalo [1, 9]. Utilizando los valores de la gráfica, calcule las estimaciones T_4 y T_8 de la integral $\int_1^9 f(x)\, dx$ mediante la Regla del Trapecio.

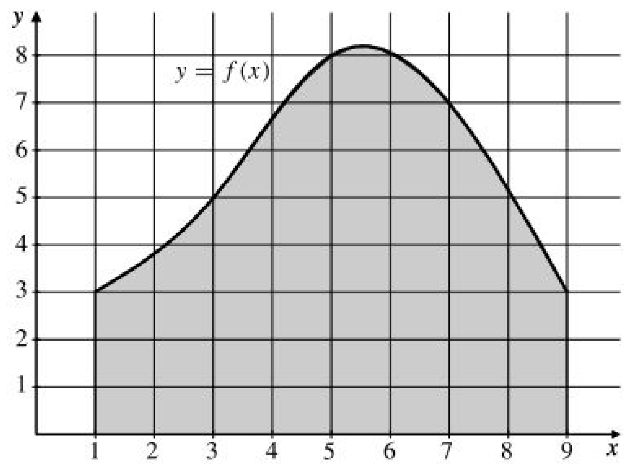

Figura 6.21

6. Obtenga la mejor aproximación que pueda mediante la Regla del Punto Medio a la integral $\int_1^9 f(x)\, dx$ a partir de los datos de la Figura 6.21.

7. El mapa de una región se dibuja en la rejilla que muestra la Figura 6.22, donde una unidad en dirección vertical u horizontal representa una distancia de 10 km.

Utilice la Regla del Trapecio para obtener dos estimaciones del área de la región.

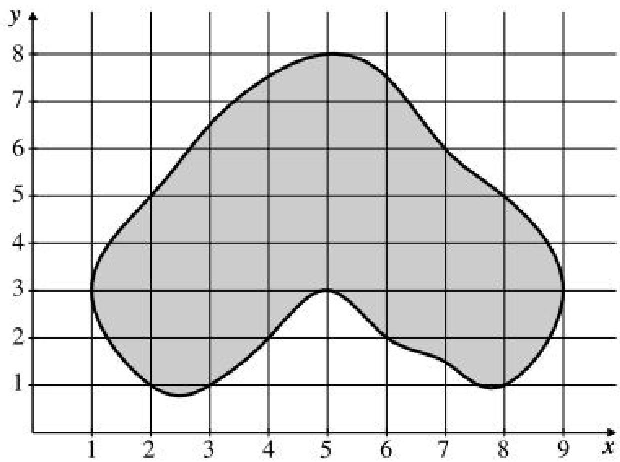

Figura 6.22

8. Calcule una estimación mediante la Regla del Punto Medio de la región del Ejercicio 7.

9. Calcule T_4, M_4, T_8, M_8 y T_{16} para $\int_0^{1.6} f(x)\,dx$, dada la función f cuyos valores se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	1.4142	0.1	1.4124
0.2	1.4071	0.3	1.3983
0.4	1.3860	0.5	1.3702
0.6	1.3510	0.7	1.3285
0.8	1.3026	0.9	1.2734
1.0	1.2411	1.1	1.2057
1.2	1.1772	1.3	1.1258
1.4	1.0817	1.5	1.0348
1.6	0.9853		

10. Calcule las aproximaciones M_8 y T_{16} para $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Obtenga un valor de la integral con tantos decimales como crea que están justificados.

11. Repita el Ejercicio 10 para $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ (suponga que el integrando es 1 en $x = 0$).

12. Calcule el error real en la aproximación $\int_0^1 x^2\,dx \approx T_1$ y utilícelo para demostrar que la constante 12 en la estimación del Teorema 4 no se puede mejorar. Es decir, demuestre que el valor absoluto del error real es tan grande como el permitido por esa estimación.

13. Repita el Ejercicio 12 para M_1.

***14.** Demuestre la estimación del error de la Regla del Punto Medio en el Teorema 4 de la siguiente forma: si $x_1 - x_0 = h$ y m_1 es el punto medio de $[x_0, x_1]$, utilice la estimación del error mediante la aproximación por la tangente (Teorema 4 de la Sección 3.5) para demostrar que

$$|f(x) - f(m_1) - f'(m_1)(x - m_1)| \leqslant \frac{K}{2}(x - m_1)^2$$

Utilice esta inecuación para demostrar que

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - f(m_1)\,h\right|$$
$$= \left|\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x) - f(m_1) - f'(m_1)(x - m_1)\big)\,dx\right|$$
$$\leqslant \frac{K}{24}h^3$$

Complete la demostración de la misma forma que la de la estimación de la Regla del Trapecio en el Teorema 4.

6.7 La Regla de Simpson

La aproximación mediante la Regla del Trapecio a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ surge de aproximar la gráfica de la función f mediante segmentos de rectas entre parejas de puntos adyacentes de la gráfica. Intuitivamente, podemos pensar que el resultado de la aproximación será mejor si aproximamos la gráfica mediante curvas más generales. Como las rectas son las gráficas de las funciones lineales, la siguiente generalización en la que podemos pensar es utilizar la clase de las funciones cuadráticas, es decir, aproximarnos a la gráfica mediante segmentos de parábolas. Esta es la idea básica de la Regla de Simpson.

Supongamos que tenemos tres puntos del plano, cada uno de ellos perteneciente a una de tres rectas equiespaciadas horizontalmente, por ejemplo, h unidades. Si escogemos la recta central como eje y, entonces las coordenadas de los tres puntos podrían ser, por ejemplo, $(-h, y_L)$, $(0, y_M)$ y (h, y_R), como se muestra en la Figura 6.23.

Las constantes A, B y C se escogen de forma que la parábola $y = A + Bx + Cx^2$ pase por esos puntos. Sustituyendo las coordenadas de los tres puntos en la ecuación de la parábola resulta

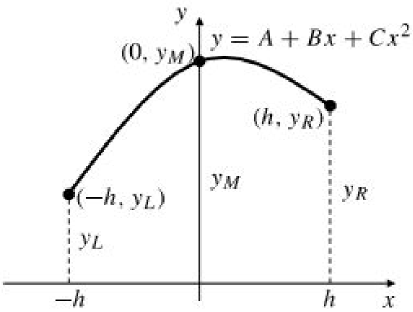

Figura 6.23 Ajuste de una gráfica cuadrática a tres puntos equiespaciados horizontalmente.

$$\left.\begin{array}{l} y_L = A - Bh + Ch^2 \\ y_M = A \\ y_R = A + Bh + Ch^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = y_M \quad \text{y} \quad 2Ch^2 = y_L - 2y_M + y_R$$

Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} (A + Bx + Cx^2)\, dx &= \left(Ax + \frac{B}{2}x^2 + \frac{C}{3}x^3\right)\Bigg|_{-h}^{h} = 2Ah + \frac{2}{3}Ch^3 \\ &= h\left(2y_M + \frac{1}{3}(y_L - 2y_M + y_R)\right) \\ &= \frac{h}{3}(y_L + 4y_M + y_R) \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la región plana limitada por el arco de parábola, el intervalo de longitud $2h$ en el eje x, y las rectas verticales izquierda y derecha es igual a $(h/3)$ veces la suma de las alturas de la región en sus extremos izquierdo y derecho más cuatro veces su altura en el centro (esto es independiente de la posición del eje y).

Supongamos ahora que tenemos los mismos datos sobre f que los que son necesarios para aplicar la Regla del Trapecio, es decir, que conocemos los valores $y_j = f(x_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ en $n + 1$ puntos equiespaciados

$$x_0 = a, \qquad x_1 = a + h, \qquad x_2 = a + 2h, \qquad \dots, \qquad x_n = a + nh = b$$

siendo $h = (b - a)/n$. Podemos aproximar la gráfica de f utilizando *parejas* de subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, mediante segmentos parabólicos, y utilizar las integrales de los correspondientes segmentos cuadráticos para aproximar la integral de f en esos subintervalos. Como necesitamos utilizar dos intervalos a la vez, hay que suponer que n es *par*. Utilizando la integral del segmento parabólico calculada anteriormente, tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Sumando las $n/2$ aproximaciones, se obtiene la aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ mediante la Regla de Simpson.

DEFINICIÓN 5 La Regla de Simpson

La aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la **Regla de Simpson** basada en una subdivisión del intervalo $[a, b]$ en un número par n de subintervalos de la misma longitud $h = (b - a)/n$ se denomina S_n y es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$$

$$= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{``extremos''}} + 4\sum y_{\text{``impares''}} + 2\sum y_{\text{``pares''}}\right)$$

Nótese que la aproximación S_n mediante la Regla de Simpson no requiere más datos que la aproximación mediante la Regla del Trapecio T_n, pero requiere el cálculo de los valores de $f(x)$ en $n + 1$ puntos equiespaciados. Sin embargo, la Regla de Simpson trata los datos de forma diferente, ponderando los valores sucesivos con 1/3, 2/3 o 4/3. Como veremos, esto puede producir aproximaciones mucho mejores al valor de la integral de f.

Ejemplo 1 Calcule las aproximaciones S_4, S_8 y S_{16} a la integral $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, y compárelas con el valor real $I = \ln 2 = 0{,}693\,147\,18\ldots$, y con los valores de T_4, T_8 y T_{16}, obtenidos en el Ejemplo 1 de la Sección 6.6.

Solución Se calcula

$$S_4 = \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0{,}693\,253\,97\ldots$$

$$S_8 = \frac{1}{24}\left[1 + \frac{1}{2} + 4\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right)\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right)\right] = 0{,}693\,154\,53\ldots$$

$$S_{16} = \frac{1}{48}\left[1 + \frac{1}{2}\right.$$
$$+ 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \frac{16}{23} + \frac{16}{25} + \frac{16}{27} + \frac{16}{29} + \frac{16}{31}\right)$$
$$\left. + 2\left(\frac{8}{9} + \frac{4}{5} + \frac{8}{11} + \frac{2}{3} + \frac{8}{13} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15}\right)\right] = 0{,}693\,147\,65\ldots$$

Los errores son

$$I - S_4 = 0{,}693\,147\,18\ldots - 0{,}693\,253\,97\ldots = -0{,}000\,106\,79$$

$$I - S_8 = 0{,}693\,147\,18\ldots - 0{,}693\,154\,53\ldots = -0{,}000\,007\,35$$

$$I - S_{16} = 0{,}693\,147\,18\ldots - 0{,}693\,147\,65\ldots = -0{,}000\,000\,47$$

Estos errores evidentemente son menores que los correspondientes errores para las Reglas del Trapecio y del Punto Medio.

Observación La Regla de Simpson S_{2n} hace uso de los mismos $2n + 1$ valores de datos que usan conjuntamente T_n y M_n. No es difícil verificar que

$$S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3}, \qquad S_{2n} = \frac{2T_{2n} + M_n}{3} \qquad \text{y} \qquad S_{2n} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

La Figura 6.19 y el Teorema 4 de la Sección 6.6 sugieren por qué la primera de esas fórmulas tendría que producir una aproximación particularmente buena a I.

La obtención de una estimación del error en la Regla de Simpson es más difícil que en la Regla del Trapecio. El teorema que sigue plantea dicha estimación del error, pero no lo demostraremos. Se puede buscar una demostración en los textos de análisis numérico.

TEOREMA 5 **Estimación del error en la Regla de Simpson**

Si f es una función cuya cuarta derivada es continua en el intervalo $[a, b]$, y que cumple $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ en dicho intervalo, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n \right| \leqslant \frac{K(b-a)}{180}\,h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

siendo $h = (b - a)/n$.

Obsérvese que, cuando n crece, el error disminuye como la cuarta potencia de h y, por tanto, como $1/n^4$. Utilizando la notación O, tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_n + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Esto da cuenta del hecho de que S_n es una aproximación mucho mejor que T_n, siempre que h sea pequeño y $|f^{(4)}(x)|$ no sea excesivamente grande comparado con $|f''(x)|$. Nótese también que para cualquier n (par), S_n da el valor exacto de la integral de cualquier función *cúbica* $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$; $f^{(4)}(x) = 0$, idénticamente para f, por lo que podemos tomar $K = 0$ en la estimación del error.

Ejemplo 2 Obtenga cotas para los valores absolutos de los errores en las aproximaciones del Ejemplo 1.

Solución Si $f(x) = 1/x$, entonces

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

Claramente, $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$ en el intervalo $[1, 2]$, de forma que en la estimación del Teorema 5 podemos hacer $K = 24$. Tenemos que

$$|I - S_4| \leqslant \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0{,}000\,520\,83$$

$$|I - S_8| \leqslant \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0{,}000\,032\,55$$

$$|I - S_{16}| \leqslant \frac{24(2-1)}{180}\left(\frac{1}{16}\right)^4 \approx 0{,}000\,002\,03$$

Observe de nuevo que los errores reales están perfectamente dentro de esos límites.

Ejemplo 3 Una función f satisface $|f^{(4)}(x)| \leqslant 7$ en el intervalo $[1, 3]$, y toma los valores $f(1.0) = 0.1860$, $f(1.5) = 0.9411$, $f(2.0) = 1.1550$, $f(2.5) = 1.4511$ y $f(3.0) = 1.2144$. Calcule la mejor aproximación posible basada en la Regla de Simpson a la integral $I = \int_1^3 f(x)\,dx$ basada en esos datos. Obtenga una cota del tamaño del error, y especifique el mínimo intervalo que pueda asegurar que contiene el valor de I.

Solución Tomamos $n = 4$, de forma que $h = (3 - 1)/4 = 0.5$, y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 f(x)\,dx \\ &\approx S_4 = \frac{0.5}{3}\,(0.1860 + 4(0.9411 + 1.4511) + 2(1.1550) + 1.2144) \\ &= 2.2132 \end{aligned}$$

Como $|f^{(4)}(x)| \leqslant 7$ en el intervalo $[1, 3]$, tenemos que

$$|I - S_4| \leqslant \frac{7(3-1)}{180}\,(0.5)^4 < 0.0049$$

Por tanto, I debe cumplir

$$2.2132 - 0.0049 < I < 2.2132 + 0.0049 \quad \text{o} \quad 2.2083 < I < 2.2181$$

Ejercicios 6.7

En los Ejercicios 1-4, mediante la Regla de Simpson, calcule las aproximaciones S_4 y S_8 a las integrales dadas. Compare sus resultados con las correspondientes aproximaciones basadas en la Regla del Trapecio obtenidas en los Ejercicios 1-4 de la Sección 6.6.

1. $I = \displaystyle\int_0^2 (1 + x^2)\,dx$

2. $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$

3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

4. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

5. Calcule, mediante la Regla de Simpson, la aproximación S_8 a la integral del Ejercicio 5 de la Sección 6.6.

6. Calcule la mejor aproximación que pueda mediante la Regla de Simpson al área de la región del Ejercicio 7 de la Sección 6.6.

7. Utilice el Teorema 5 para obtener cotas de los errores de las aproximaciones realizadas en los Ejercicios 2 y 3 anteriores.

8. Verifique que $S_{2n} = \dfrac{T_n + 2M_n}{3} = \dfrac{2T_{2n} + M_n}{3}$, siendo T_n y M_n las correspondientes aproximaciones de las Reglas del Trapecio y del Punto Medio. Deduzca que

$$S_{2n} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

9. Calcule S_4, S_8 y S_{16} para la integral $\int_0^{1.6} f(x)\,dx$ de la función f cuyos valores están tabulados en el Ejercicio 9 de la Sección 6.6.

10. Calcule, mediante la Regla de Simpson, las aproximaciones S_8 y S_{16} a la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Obtenga el valor de la integral con el número de decimales que encuentre justificado tras comparar las dos aproximaciones.

***11.** Calcule el error real en la aproximación $\int_0^1 x^4\,dx \approx S_2$ y utilícelo para demostrar que la constante 180 de la estimación del Teorema 5 no se puede mejorar.

***12.** Como la Regla de Simpson se basa en una aproximación cuadrática, no resulta raro que proporcione un valor exacto en el caso de la integral de $A + Bx + Cx^2$. Resulta más raro que también sea exacta para una función cúbica. Verifique por cálculo directo que $\int_0^1 x^3\,dx = S_2$.

6.8 Otros aspectos de la integración aproximada

Los métodos numéricos descritos en las Secciones 6.6 y 6.7 son adecuados para calcular valores aproximados de integrales de la forma

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

siendo $[a, b]$ un intervalo finito y el integrando f una función «bien comportada» en el intervalo $[a, b]$. En particular, I debe ser una integral *propia*. Existen muchos otros métodos para tratar este tipo de integrales, algunos de los cuales mencionaremos más adelante en esta sección. Sin embargo, vamos a considerar en primer lugar qué se puede hacer si la función f no es «bien comportada» en el intervalo $[a, b]$. Con esto queremos decir que, o bien la integral es impropia, o bien f no tiene las suficientes derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ para justificar los métodos numéricos que deseamos utilizar.

Las ideas de esta sección se presentan mejor utilizando ejemplos concretos.

Ejemplo 1 ¿Cómo se puede calcular numéricamente la integral $I = \int_0^1 \sqrt{x}\, e^x\, dx$?

Solución Aunque I es una integral propia, cuyo integrando $f(x) = \sqrt{x}\, e^x$ cumple que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0+$, los métodos numéricos no se comportan bien en este caso porque las derivadas de f no están acotadas cerca de 0. Este problema se puede remediar fácilmente; basta con hacer el cambio de variable $x = t^2$ y escribir I en la forma

$$I = 2\int_0^1 t^2 e^{t^2}\, dt$$

cuyo integrando $g(t) = t^2 e^{t^2}$ tiene derivadas acotadas cerca de 0. Esta última integral se puede aproximar eficientemente mediante los métodos de las Secciones 6.6 y 6.7.

Aproximación de integrales impropias

Ejemplo 2 Indique cómo calcular numéricamente $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución La integral es impropia pero convergente, porque en el intervalo $[0, 1]$,

$$0 < \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Sin embargo, como $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = \infty$, no podemos aplicar directamente ninguna de las técnicas desarrolladas en las Secciones 6.6 y 6.7 (y_0 es infinito). El cambio $x = t^2$ elimina esta dificultad:

$$I = \int_0^1 \frac{\cos t^2}{t}\, 2t\, dt = 2\int_0^1 \cos t^2\, dt$$

La última integral no es impropia y es bien comportada. Se pueden aplicar las técnicas numéricas que conocemos para calcularla.

Ejemplo 3 Indique cómo calcular por métodos numéricos la integral $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2 + x^4}}$.

Solución En este caso la integral es impropia de tipo I. El intervalo de integración es infinito. Aunque no hay singularidad en $x = 0$, resulta de utilidad dividir la integral en dos partes:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2 + 4^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2 + x^4}} = I_1 + I_2$$

I_1 es propia. En I_2 se hace el cambio de variable $x = 1/t$:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^4 + t^2 + 1}}$$

Este integral también es propia. Si se desea, se pueden volver a combinar I_1 y I_2 en una sola integral antes de aplicar los métodos numéricos:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^4}} + \frac{1}{\sqrt{2x^4 + x^2 + 1}} \right) dx$$

El Ejemplo 3 sugiere que cuando una integral se toma en un intervalo infinito, se puede hacer un cambio de variable para transformar la integral a un intervalo finito.

Uso de la fórmula de Taylor

La Fórmula de Taylor (*véase* la Sección 4.8) puede ser algunas veces de utilidad en el cálculo de integrales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4 Utilice la Fórmula de Taylor de $f(x) = e^x$, obtenida en la Sección 4.8, para calcular la integral $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ con un error menor que 10^{-4}.

Solución En el Ejemplo 4 de la Sección 4.8 demostramos que

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

siendo

$$E_n(x) = \frac{e^X}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algún X entre 0 y x. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $0 \leqslant X \leqslant 1$, por lo que $e^X \leqslant e \leqslant 3$. Por tanto,

$$|E_n(x)| \leqslant \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Sustituyamos ahora x por x^2 en la fórmula de e^x e integremos desde 0 hasta 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2}\, dx &= \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right) dx + \int_0^1 E_n(x^2)\, dx \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)n!} + \int_0^1 E_n(x^2)\, dx \end{aligned}$$

Se desea que el error sea menor de 10^{-4}, por lo que estimaremos el término de resto:

$$\left| \int_0^1 E_n(x^2)\, dx \right| \leqslant \frac{3}{(n+1)!} \int_0^1 x^{2(n+1)}\, dx = \frac{3}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-4}$$

suponiendo que $(2n+3)(n+1)! > 30\,000$. Como $13 \times 6! = 9360$ y $15 \times 7! = 75\,600$, se necesita que $n = 6$. Por tanto,

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 2!} + \frac{1}{7\times 3!} + \frac{1}{9\times 4!} + \frac{1}{11\times 5!} + \frac{1}{13\times 6!}$$
$$\approx 1.462\,64$$

con error menor que 10^{-4}.

Integración de Romberg

Utilizando la Fórmula de Taylor, es posible verificar que para una función f con derivadas continuas hasta de orden $2m+2$ en el intervalo $[a, b]$, el error $E_n = I - T_n$ en la aproximación de la Regla del Trapecio T_n a la integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ cumple

$$E_n = I - T_n = \frac{C_1}{n^2} + \frac{C_2}{n^4} + \frac{C_3}{n^6} + \cdots + \frac{C_m}{n^{2m}} + O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$$

donde la constante C_j depende de la derivada de orden $2j$ de f. Es posible utilizar esta fórmula para obtener aproximaciones de orden superior a la integral I, a partir de las aproximaciones de la Regla del Trapecio. Esta técnica se conoce por el nombre de **integración de Romberg** o **extrapolación de Richardson**.

Para empezar, supongamos que hemos calculado aproximaciones mediante la Regla del Trapecio para valores de n que son potencias de 2: $n = 1, 2, 4, 8, \ldots$ De acuerdo con esto, definamos

$$T_k^0 = T_{2^k}. \quad \text{Por tanto,} \quad T_0^0 = T_1, \quad T_1^0 = T_2, \quad T_2^0 = T_4, \ldots$$

Utilizando la fórmula para $T_{2^k} = I - E_{2^k}$ presentada anteriormente, podemos escribir

$$T_k^0 = I - \frac{C_1}{4^k} - \frac{C_2}{4^{2k}} - \cdots - \frac{C_m}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right) \quad (\text{cuando } k \to \infty)$$

De forma similar, sustituyendo k por $k+1$, se obtiene

$$T_{k+1}^0 = I - \frac{C_1}{4^{k+1}} - \frac{C_2}{4^{2(k+1)}} - \cdots - \frac{C_m}{4^{m(k+1)}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)(k+1)}}\right)$$

Si multiplicamos la fórmula de T_{k+1}^0 por 4 y restamos la fórmula de T_k^0, los términos donde aparece C_1 se anulan. El primer término de la derecha será $4I - I = 3I$, y por tanto podemos dividir por 3 y definir T_{k+1}^1 como el resultado. Entonces, cuando $k \to \infty$, tenemos

$$T_{k+1}^1 = \frac{4T_{k+1}^0 - T_k^0}{3} = I - \frac{C_2^1}{4^{2k}} - \frac{C_3^1}{4^{3k}} - \cdots - \frac{C_m^1}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right)$$

Los C_j^1 son nuevas constantes. A menos que estas constantes sean mucho mayores que las anteriores, T_{k+1}^1 debe ser una mejor aproximación de I que T_{k+1}^0, ya que hemos eliminado el término de error de menor orden (y, por tanto, el mayor), $C_1/4^{k+1}$. De hecho, el Ejercicio 8 de la Sección 6.7 demuestra que $T_{k+1}^1 = S_{2^{k+1}}$, en la aproximación de la Regla de Simpson basada en 2^{k+1} subintervalos.

Podemos continuar el proceso de eliminar términos de error que hemos comenzado. Sustituyendo $k+1$ por $k+2$ en la expresión de T_{k+1}^1, se obtiene

$$T_{k+2}^1 = I - \frac{C_2^1}{4^{2(k+1)}} - \frac{C_3^1}{4^{3(k+1)}} - \cdots - \frac{C_m^1}{4^{m(k+1)}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)(k+1)}}\right)$$

Para eliminar C_2^1 se puede multiplicar la segunda fórmula por 16, restar la primera fórmula y dividir por 15. Denominando el resultado T_{k+2}^2, tenemos, cuando $k \to \infty$,

$$T_{k+2}^2 = \frac{16\,T_{k+2}^1 - T_{k+1}^1}{15} = I - \frac{C_3^2}{4^{3k}} - \cdots - \frac{C_m^2}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right)$$

Podemos seguir procediendo de esta forma, eliminando un término de error tras otro. En general, para $j < m$ y $k \geqslant 0$:

$$T_{k+j}^j = \frac{4^j\,T_{k+j}^{j-1} - T_{k+j-1}^{j-1}}{4^j - 1} = I - \frac{C_{j+1}^j}{4^{(j+1)k}} - \cdots - \frac{C_m^j}{4^{mk}} + O\left(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\right)$$

La notación O se refiere a $k \to \infty$ para j fijo. Todo esto parece muy complicado, pero no es difícil de realizar en la práctica, especialmente con la ayuda de una hoja de cálculo. Sea $R_j = T_j^j$, denominada **aproximación de Romberg** a I. Se calculan los valores del esquema siguiente en orden de izquierda a derecha y de arriba abajo en cada columna:

Esquema para calcular aproximaciones de Romberg

$$\begin{array}{ccccccc}
T_0^0 = T_1 = R_0 & \longrightarrow & T_1^0 = T_2 & \longrightarrow & T_2^0 = T_4 & \longrightarrow & T_3^0 = T_8 \quad \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & T_1^1 = S_2 = R_1 & & T_2^1 = S_4 & & T_3^1 = S_8 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & T_2^2 = R_2 & & T_3^2 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & T_3^3 = R_3
\end{array}$$

El proceso se detiene cuando T_j^{j-1} y R_j se diferencian menos que un error aceptable, y R_j se denomina la aproximación de Romberg a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

La fila superior del esquema está compuesta por las aproximaciones de la Regla del Trapecio T_1, T_2, T_4, T_8, ... Los elementos de las filas siguientes se calculan mediante las fórmulas:

Fórmulas para calcular las aproximaciones de Romberg

$$T_1^1 = \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3} \qquad T_2^1 = \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3} \qquad T_3^1 = \frac{4T_3^0 - T_2^0}{3}\cdots$$

$$T_2^2 = \frac{16T_2^1 - T_1^1}{15} \qquad T_3^2 = \frac{16T_3^1 - T_2^1}{15}\cdots$$

$$T_3^3 = \frac{64T_3^2 - T_2^2}{63}\cdots$$

En general, si $1 \leqslant j \leqslant k$, entonces $T_k^j = \dfrac{4^j\,T_k^{j-1} - T_{k-1}^{j-1}}{4^j - 1}$.

Cada nuevo elemento se puede calcular a partir de los elementos que están encima y a la izquierda de aquél.

Ejemplo 5 Calcule las aproximaciones de Romberg R_0, R_1, R_2, R_3 y R_4 a la integral $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solución Realizaremos todos los cálculos con ocho cifras decimales. Como tenemos que calcular R_4, necesitamos obtener todos los elementos de las cinco primeras columnas del esquema. En primer lugar calcularemos las dos primeras aproximaciones mediante la Regla del Trapecio:

$$R_0 = T_0^0 = T_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.750\,000\,00$$

$$T_1^0 = T_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1) + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 0.708\,333\,33$$

Las restantes aproximaciones mediante la Regla de Trapecio requeridas se calcularon en el Ejemplo 1 de la Sección 6.6, por lo que sólo las recordaremos a continuación:

$$T_2^0 = T_4 = 0.697\,023\,81$$

$$T_3^0 = T_8 = 0.694\,121\,85$$

$$T_4^0 = T_{16} = 0.693\,391\,20$$

Calcularemos ahora las columnas hacia abajo y de izquierda a derecha. Para la segunda columna:

$$R_1 = S_2 = T_1^1 = \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3} = 0.694\,444\,44$$

la tercera columna:

$$S_4 = T_2^1 = \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3} = 0.693\,253\,97$$

$$R_2 = T_2^2 = \frac{16T_2^1 - T_1^1}{15} = 0.693\,174\,60$$

la cuarta columna:

$$S_8 = T_3^1 = \frac{4T_3^0 - T_2^0}{3} = 0.693\,154\,53$$

$$T_3^2 = \frac{16T_3^1 - T_2^1}{15} = 0.693\,147\,90$$

$$R_3 = T_3^3 = \frac{64T_3^2 - T_2^2}{63} = 0.693\,147\,48$$

y la quinta columna:

$$S_{16} = T_4^1 = \frac{4T_4^0 - T_3^0}{3} = 0.693\,147\,65$$

$$T_4^2 = \frac{16T_4^1 - T_3^1}{15} = 0.693\,147\,19$$

$$T_4^3 = \frac{64T_4^2 - T_3^2}{63} = 0.693\,147\,18$$

$$R_4 = T_4^4 = \frac{256T_4^3 - T_3^3}{255} = 0.693\,147\,18$$

Como T_4^3 y R_4 coinciden hasta el octavo decimal que estamos calculando, podemos decir que

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0.693\,147\,18\ldots$$

■

Las diversas aproximaciones calculadas anteriormente sugieren que para cualquier valor dado de $n = 2^k$, la aproximación de Romberg R_n debería producir el mejor valor posible para la integral basándose en los $n + 1$ valores de datos $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Esto sólo es cierto si las derivadas $f^{(n)}(x)$ no crecen demasiado rápido cuando n aumenta.

Otros métodos

Como hemos descrito, los métodos del Trapecio, del Punto Medio, de Simpson y de Romberg se basan en utilizar subdivisiones iguales del intervalo $[a, b]$. Existen otros métodos que no requieren esta restricción. En particular, las **aproximaciones gaussianas** seleccionan los puntos de evaluación y sus ponderaciones de forma óptima, de manera que proporcionan los resultados más precisos para funciones «bien comportadas». *Véanse* los Ejercicios 11-13 posteriores. Para aprender más sobre este método se pueden consultar los textos de análisis numérico.

Finalmente, hay que indicar que incluso cuando se aplica uno de los métodos de las Secciones 6.6 y 6.7, puede ser de utilidad dividir la integral en dos o más integrales en intervalos más pequeños, y utilizar diferentes longitudes h de subintervalos en cada una de las diferentes integrales. Por ejemplo, se pueden evaluar más puntos del integrando en aquellos intervalos donde su gráfica cambie de dirección erráticamente y menos puntos en aquellos intervalos donde la gráfica tenga un comportamiento mejor.

Ejercicios 6.8

Exprese las integrales de los Ejercicios 1-6 de forma que se puedan aplicar adecuadamente métodos numéricos para aproximar su valor.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}(1+x)}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}+1}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

7. Calcule T_2, T_4, T_8 y T_{16} para la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ y obtenga los errores reales en estas aproximaciones. ¿Disminuyen los errores como $1/n^2$ cuando n crece? ¿Por qué?

8. Transforme la integral $I = \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ utilizando el cambio $x = 1/t$ y calcule las aproximaciones mediante la Regla de Simpson S_2, S_4 y S_8 para la integral resultante (cuyo integrando tiene como límite 0 cuando $t \to 0+$). Obtenga el valor de I con la precisión que piense que está justificada. ¿Convergen las aproximaciones tan rápido como podría esperarse? ¿Podría pensar en una razón para que no lo hagan?

9. Calcule $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ por el método de la Fórmula de Taylor del Ejemplo 4, con una cota de error de 10^{-4}.

10. Recuerde que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Combine este hecho con el resultado del Ejercicio 9 para calcular $I = \displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ con una precisión de tres decimales.

11. **(Aproximación gaussiana)** Calcule las constantes A y u, con u entre 0 y 1, tales que

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = A\,f(-u) + A\,f(u)$$

se cumpla para todo polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para una función general $f(x)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$, la aproximación

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx A\,f(-u) + A\,f(u)$$

se denomina *aproximación gaussiana*.

12. Utilice el método del Ejercicio 11 para aproximar las integrales de (a) x^4, (b) $\cos x$ y (c) e^x, en el intervalo $[-1, 1]$ y calcule el error de cada aproximación.

13. **(Otra aproximación gaussiana)** Calcule las constantes A, B y u entre 0 y 1 tales que

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = A\,f(-u) + B\,f(0) + A\,f(u)$$

se cumpla para todo polinomio de quinto grado

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

14. Utilice la aproximación gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-u) + Bf(0) + Af(u)$$

donde A, B y u se determinan como en el Ejercicio 13, para obtener aproximaciones a las integrales de (a) x^6, (b) $\cos x$ y (c) e^x en el intervalo $[-1, 1]$ y calcule el error de cada aproximación.

15. Calcule las suficientes aproximaciones de Romberg R_1, R_2, R_3, ... de la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

para confiar razonablemente en que se ha obtenido la integral correctamente con una precisión de seis cifras decimales.

16. Utilice los valores de $f(x)$ dados en la tabla que acompaña al Ejercicio 9 de la Sección 6.6 para calcular las aproximaciones de Romberg R_1, R_2 y R_3 a la integral

$$\int_0^{1{,}6} f(x)\,dx$$

de ese ejercicio.

***17.** La aproximación de Romberg R_2 a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ requiere cinco valores de f, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(a+h)$, ..., $y_4 = f(x+4h) = f(b)$, siendo $h = (b-a)/4$. Escriba la fórmula de R_2 en función de esos cinco valores.

***18.** Explique por qué el cambio de variable $x = 1/t$ no es adecuado para transformar la integral $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ en una forma en la que se puedan aplicar métodos numéricos. Intente desarrollar un método mediante el cual esta integral se pueda aproximar con cualquier grado deseado de exactitud.

***19.** Si $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, demuestre que $f''(x)$ tiene el límite finito cuando $x \to 0$. Por tanto, f'' está acotada en intervalos finitos $[0, a]$ y las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio T_n a la integral $\int_0^a \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ convergen con la adecuada rapidez cuando n crece. Las derivadas de orden superior también están acotadas (la Fórmula de Taylor es útil para demostrar esto), por lo que la Regla de Simpson y otras aproximaciones de orden superior también se pueden utilizar de forma efectiva.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos y frases?**
  - ◇ Integración por partes
  - ◇ Fórmula de reducción
  - ◇ Sustitución inversa
  - ◇ Función racional
  - ◇ Método de descomposición en fracciones simples
  - ◇ Programa de matemáticas por computador
  - ◇ Integral impropia de tipo I
  - ◇ Integral impropia de tipo II
  - ◇ Integral p
  - ◇ Regla del Trapecio
  - ◇ Regla del Punto Medio
  - ◇ Regla de Simpson
- **Explique las sustituciones inversas del seno y la tangente.**
- **¿Cuál es el significado del teorema de comparación de integrales impropias?**
- **¿Cuándo es necesario aplicar integración numérica?**

Resumen de las técnicas de integración

Algunas veces los estudiantes tienen dificultades para decidir qué método hay que utilizar para calcular una integral dada. Muchas veces no existe un único método que sea suficiente para obtener la solución completa, pero al usar un determinado método se puede llegar a una integral diferente, y posiblemente más simple, que se puede tratar a su vez con otros métodos. Presentamos a continuación algunos consejos:

1. Primero, y siempre, hay que estar atentos a los cambios que pueden simplificar la integral. Aun cuando dichos cambios no resuelvan la integral completa, pueden llevarnos a otras integrales a las que se puede aplicar otro método.
2. Si en la integral aparece una expresión cuadrática $Ax^2 + Bx + C$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, debe completarse el cuadrado. Un cambio simple reduce a continuación la expresión cuadrática a una suma o diferencia de cuadrados.

3. Las integrales de productos de funciones trigonométricas algunas veces se pueden calcular o simplificar mediante el uso de las identidades trigonométricas adecuadas, tales como:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$
$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)$$

4. Las integrales en las que aparece $(a^2 - x^2)^{1/2}$ se pueden transformar utilizando $x = a \operatorname{sen} \theta$. Las integrales en las que aparecen $(a^2 + x^2)^{1/2}$ o $1/(a^2 + x^2)$ se pueden transformar utilizando $x = a \tan \theta$. Las integrales en las que aparece $(x^2 - a^2)^{1/2}$ se pueden transformar utilizando $x = a \sec \theta$ o $x = a \cosh \theta$.
5. Utilice integración por partes para funciones con la forma de productos de polinomios y funciones trascendentes, y para funciones trigonométricas inversas y logaritmos. Esté atento para descubrir formas de utilizar la integración por partes para obtener fórmulas que transformen integrales complicadas en función de integrales más simples.
6. Utilice descomposición en fracciones simples para integrar funciones racionales cuyos denominadores se puedan descomponer en productos de factores reales lineales y cuadráticos. Divida primero los polinomios, si es necesario, para reducir la fracción a una cuyo numerador sea de grado inferior al del denominador.
7. Hay una tabla de integrales al final de este libro. Si no puede resolver una integral directamente, intente utilizar los métodos anteriores para transformarla en una de las integrales de la tabla.
8. Si no se puede encontrar ninguna forma de calcular una integral definida de la que se requiere un valor numérico, considere utilizar un computador o una calculadora, y aplicar uno de los métodos numéricos presentados en las Secciones 6.6-6.8.

Ejercicios de repaso sobre técnicas de integración

He aquí una oportunidad de adquirir más práctica en el cálculo de integrales. A diferencia de los ejercicios de las Secciones 5.6 y 6.1-6.3, en los que se utiliza sólo la técnica presentada en la sección, estos ejercicios están ordenados aleatoriamente de forma que hay que averiguar que técnicas utilizar.

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2 + 5x + 2}$ **2.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$ **4.** $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{4x^2 - 1}$ **6.** $\displaystyle\int (x^2 + x - 2) \operatorname{sen} 3x\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int x^3 \cos(x^2)\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(5x^3 - 2)^{2/3}}$ **10.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 15}$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2}$ **12.** $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx$

13. $\displaystyle\int 2^x \sqrt{1 + 4^x}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^7 x}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(3 + 5x^2)^{3/2}}$

17. $\displaystyle\int e^{-x} \operatorname{sen}(2x)\,dx$ **18.** $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 4x - 3}{x^2 + 5x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \cos(3 \ln x)\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^3 + x}$

21. $\displaystyle\int \frac{x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \tan^4 x \sec x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4x + 1)^{10}}$ **26.** $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 (4x)\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - 2x^3 + x}$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + e^x}$ **30.** $\displaystyle\int x^3 3^x\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{2 - \operatorname{sen} x}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$ **34.** $\displaystyle\int x^3 (\ln x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$

37. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int e^{(x^{4/3})}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3}{x^3 - 9x}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{10^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x + 2}}\,dx$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^9 x\,dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

43. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x - 1}$ **44.** $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{\sqrt{4 - 3x + x^2}}\,dx$

45. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(2x)\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$

48. $\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$

50. $\displaystyle\int x\tan^{-1}\frac{x}{3}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^3+2x^2}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

53. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2\ln x)}{x}\,dx$

54. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^2}\,dx$

55. $\displaystyle\int \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$

56. $\displaystyle\int \frac{x^3+x-2}{x^2-7}\,dx$

57. $\displaystyle\int \frac{\ln(3+x^2)}{3+x^2}\,x\,dx$

58. $\displaystyle\int \cos^7 x\,dx$

59. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/2)}{(4-x^2)^{1/2}}\,dx$

60. $\displaystyle\int \tan^4(\pi x)\,dx$

61. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

62. $\displaystyle\int e^x(1-e^{2x})^{5/2}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+2)^{7/2}}$

64. $\displaystyle\int \frac{x^2}{2x^2-3}\,dx$

65. $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,dx$

66. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^{1/2}}$

67. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4x^4+4x^2+5}$

69. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-4)^2}$

70. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

71. $\displaystyle\int x^2\tan^{-1}x\,dx$

72. $\displaystyle\int e^x\sec(e^x)\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\operatorname{sen}x-3\cos x}$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/3}-1}$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x+\operatorname{sen}x}$

76. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$

77. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

78. $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

79. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^3-8}$

80. $\displaystyle\int xe^x\cos x\,dx$

Otros ejercicios de repaso

1. Calcule $I=\int xe^x\cos x\,dx$ y $J=\int xe^x\operatorname{sen}x\,dx$ diferenciando $e^x((ax+b)\cos x+(cx+d)\operatorname{sen}x)$ y examinando los coeficientes.

2. ¿Para qué números reales r es válida la siguiente fórmula de reducción (obtenida utilizando integración por partes)?

$$\int_0^\infty x^r e^{-x}\,dx = r\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}\,dx$$

Calcule las integrales de los Ejercicios 3-6 o demuestre que divergen.

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\csc x\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+x^3}\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

7. Demuestre que la integral $I=\int_0^\infty (1/(\sqrt{x}\,e^x))\,dx$ converge y que su valor satisface $I<(2e+1)/e$.

8. Midiendo las áreas encerradas por los contornos de un mapa topográfico, un geólogo determina las áreas de sección cruzada A (m^2) de una colina de 60 m de altura en varias alturas h (m). Los resultados se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2.

h	0	10	20	30	40	50	60
A	10 200	9200	8000	7100	4500	2400	100

Si se utiliza la Regla del Trapecio para estimar el volumen de la colina (que es $V=\int_0^{60}A(h)\,dh$), ¿cuál será el valor de la estimación con una precisión de 1000 m^3?

9. ¿Cuál será la estimación del geólogo del volumen de la colina del Ejercicio 8 si se utiliza la Regla de Simpson en vez de la Regla del Trapecio?

10. Calcule las aproximaciones mediante la Regla del Trapecio y la Regla del Punto Medio, T_4 y M_4, a la integral $I=\int_0^1\sqrt{2+\operatorname{sen}(\pi x)}\,dx$. Calcule sus resultados con una precisión de 5 cifras decimales. Calcule a continuación el valor de I con tantas cifras decimales como piense que estén justificadas por estas aproximaciones.

11. Utilice los resultados del Ejercicio 10 para calcular la aproximación mediante la Regla del Trapecio T_8 y la aproximación mediante la Regla de Simpson S_8 a la integral I de ese ejercicio. Obtenga el valor de I con tantas cifras decimales como piense que estén justificadas por estas aproximaciones.

12. Desarrolle un método para calcular numéricamente $I=\int_{1/2}^\infty x^2/(x^5+x^3+1)\,dx$, y utilícelo para calcular I con una precisión de 3 cifras decimales.

13. Se desea aproximar la integral $I = \int_0^4 f(x)\,dx$ de una función desconocida $f(x)$ y se miden los siguientes valores de f:

Tabla 3.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.730	1.001	1.332	1.729	2.198

(a) ¿Qué son las aproximaciones T_4 y S_4 a la integral I que se calculan utilizando estos datos?

(b) Se decide entonces tomar más medidas para calcular T_8 y S_8. Se obtiene $T_8 = 5.5095$. ¿Qué valor se obtendría para S_8?

(c) Suponga que existen razones teóricas para pensar que $f(x)$ es un polinomio de grado 3. ¿Son sus cálculos coherentes con esta teoría? ¿Por qué o por qué no?

Problemas avanzados

***1.** (a) Algunas personas creen que $\pi = 22/7$. Demuestre que esto no es así probando que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$$

(b) Si $I = \int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$, demuestre que

$$\frac{22}{7} - I < \pi < \frac{22}{7} - \frac{I}{2}$$

(c) Calcule I y determine un intervalo explícito de pequeño tamaño que contenga a π.

2. (a) Obtenga una fórmula de reducción para la integral $\int (1-x^2)^n\,dx$.

(b) Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$\int_0^1 (1-x)^{2n}\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(c) Utilice la fórmula de reducción para calcular $\int (1-x^2)^{-3/2}\,dx$

3. (a) Demuestre que $x^4 + x^2 + 1$ se puede descomponer en un producto de dos factores reales cuadráticos, y calcule $\int (x^2+1)/(x^4+x^2+1)\,dx$. *Sugerencia*: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2$.

(b) Utilice el mismo método para calcular $\int (x^2+1)/(x^4+1)\,dx$.

4. Sea $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx$.

(a) Demuestre que $I_{m,n} = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-(m+1)x}\,dx$.

(b) Demuestre que $I_{m,n} = \dfrac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$.

***5.** Sea $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

(a) Demuestre que $0 < I_n < \dfrac{1}{n+1}$ y a partir de aquí que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

(b) Demuestre que $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{e}$ para $n \geqslant 1$ e $I_0 = 1 - \dfrac{1}{e}$.

(c) Verifique por inducción que $I_n = n!\left(1 - \dfrac{1}{e}\sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!}\right)$.

(d) Deduzca a partir de los apartados (a) y (c) que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!} = e$.

***6.** Si K es muy grande, ¿cuál de las aproximaciones T_{100} (Regla del Trapecio), M_{100} (Regla del Punto Medio) y S_{100} (Regla de Simpson) estará más cerca del verdadero valor de $\int_0^1 e^{-Kx}\,dx$? ¿Cuál estará más lejos? Justifique sus respuestas. (*Cuidado*: No es tan fácil como parece).

7. La Regla de Simpson produce el valor exacto de la integral definida en el caso de una función f cúbica. Suponga que desea obtener una regla de integración numérica que proporcione el valor exacto para un polinomio de grado 5. Podría aproximar la integral en el subintervalo $[m-h, m+h]$ con algo de la forma

$$2h\left(af(m-h) + bf\left(m - \frac{h}{2}\right) + f(m) + bf\left(m + \frac{h}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + af(m+h)\right)$$

para algunas constantes a, b y c.

(a) Determine los valores de a, b y c para que esto funcione. (*Sugerencia*: Tome $m = 0$ para simplificar los cálculos).

(b) Utilice este método para aproximar la integral $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ utilizando en primer lugar uno y después dos de sus intervalos (y, por tanto, evaluando el integrando en nueve puntos).

***8.** La convergencia de integrales impropias puede ser un asunto más delicado cuando el integrando cambia de signo. Presentamos aquí un método que se puede utilizar para demostrar la convergencia en algunos casos en los que el teorema de comparación falla.

(a) Suponga que $f(x)$ es diferenciable en $[1, \infty)$, $f'(x)$ es continua en dicho intervalo, $f'(x) < 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Demuestre que $\int_1^\infty f'(x)\cos(x)\,dx$ converge. *Sugerencia*: ¿Qué es $\int_1^\infty |f'(x)|\,dx$?

(b) Partiendo de las mismas hipótesis, demuestre que $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ converge. *Sugerencia*: Integre por partes y utilice (a).

(c) Demuestre que $\int_1^\infty \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx$ converge pero $\int_1^\infty \dfrac{|\mathrm{sen}\,x|}{x}\,dx$ diverge. *Sugerencia*: $|\mathrm{sen}\,x| \geqslant \mathrm{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Nótese que (b) funcionaría también sustituyendo sen x por $\cos(2x)$.