Capitolul 2

SPAŢII METRICE

2.1 Definiţia spaţiilor metrice

Definiţia 1. O aplicaţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se numeşte **distanţă** (sau **metrică)** pe mulţimea nevidă X, dacă satisface următoarele axiome:
$\mathbf{D}_1$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
$\mathbf{D}_2$ $(\forall)\ x, y \in X \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$, (**simetria**)
$\mathbf{D}_3$ $(\forall)\ x, y, z \in X \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, (**inegalitatea triunghiulară**)

Perechea (X,d) se numeşte **spaţiu metric.** Elementele lui X le vom numi **puncte.**

Consecinţa 1. $0 \overset{\mathbf{D}_1}{=} d(x,x) \overset{\mathbf{D}_3}{\leq} d(x,y) + d(y,x) \overset{\mathbf{D}_2}{=} d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y) \Rightarrow$

$$d(x,y) \geq 0,\ (\forall)\ x, y \in X.$$

Consecinţa 2. Dacă (X,d) este spaţiu metric şi $Y \subset X$, atunci $Y \times Y \subset X \times X$ şi restricţia d_{o} a lui d la $Y \times Y$ este o metrică pe Y (numită **metrica indusă** de metrica din X), în raport cu care perechea (Y, d_{o}) devine spaţiu metric (numit **subspaţiu metric** al lui (X,d)).

Exemplul 1. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R} \to d(x,y) = \mid x - y \mid$. Din proprietăţile modulului rezultă că d satisface $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$ şi deci perechea $(\mathbb{R},d)$ este spaţiu metric.

Exemplul 2. Fie $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $(\forall)\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, ..., y^n)$,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}.$$

Prin calcule elementare, se verifică uşor că d satisface $\mathbf{D}_1$ şi $\mathbf{D}_2$. $\mathbf{D}_3$ rezultă din inegalitatea lui Minkowski pentru $p = 2$, deci d este o metrică pe $\mathbb{R}^n$, numită **metrica euclidiană.**

Pentru $n = 2$ avem $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x^1, x^2)$, $\vec{y} = (y^1, y^2)$ şi $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}$.

Observaţia 1. Dacă X este o mulţime nevidă, atunci $d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$ definită prin $(\forall)\ x, y \in \mathbb{X} \to d_0(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \neq y \\ 0, \text{ pentru } x = y \end{cases}$ este o metrică pe X. Rezultă că mulţimea metricelor D_X, pe X, este nevidă.

Considerăm relaţia binară $\mathfrak{R} = \{G, \mathsf{D}_X\}$, unde

$$G = \{(d_1, d_2) \diagup d_1, d_2 \in \mathsf{D}_X,\ (\exists)\ \alpha, \beta \in (0, \infty) \text{ a.î. } \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y),\ (\forall)\ x, y \in X\}.$$

Teorema 1. Relaţia binară $\mathfrak{R} = \{G, \mathsf{D}_X\}$ este o relaţie de echivalenţă (**echivalenţa algebrică a metricelor**).

Demonstraţie. Verificăm axiomele relaţiei de echivalenţă.

E$_1$. $(\forall)\, d \in \mathsf{D}_X \Rightarrow \frac{1}{2}d(x, y) \leq d(x, y) \leq 2d(x, y)$, $(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2)$, pentru $(\forall)\, x,\, y \in X$. Rezultă că $(d, d) \in G$.

E$_2$. $(\forall)\ (d_1, d_2) \in G \Rightarrow (\exists)\ \alpha, \beta \in (0, \infty)$, a.î. $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$, $(\forall)\, x, y \in X$. Rezultă că $\frac{1}{\beta}d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha}d_2(x, y)$, $(\forall)\, x, y \in X$ şi deci $(d_2, d_1) \in G$.

E$_3$. $(\forall)\ (d_1, d_2), (d_2, d_3) \in G \Rightarrow (\exists)\ \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in (0, \infty)$, a.î.

$\alpha_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta_1 d_1(x, y)$, $\alpha_2 d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \leq \beta_2 d_2(x, y)$, $(\forall)\ x, y \in X$, ceea ce implică

$\alpha_1 \alpha_2 d_1(x,y) \leq \alpha_2 d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq \beta_2 d_2(x,y) \leq \beta_1 \beta_2 d_1(x,y)$, $(\forall)$ $x, y \in X$ şi deci $(d_1, d_3) \in G$.

2.1.1 Probleme

Problema 1. Să se arate că aplicaţia $d_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d_m(\vec{x}, \vec{y}) = \max\left\{| x^i - y^i | \diagup i = \overline{1, n}\right\},$$

unde $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, ..., y^n)$, este o metrică pe $\mathbb{R}^n$.

Indicaţie. Se verifică uşor primele două axiome ale distanţei. Axioma D_3 rezultă din

$$| x^i - y^i | \leq | x^i - z^i | + | z^i - y^i | \leq \max\left\{| x^k - z^k | \diagup k = \overline{1, n}\right\} + \max\left\{| z^k - y^k | \diagup k = \overline{1, n}\right\},\ (\forall)\, \overline{1, n}.$$

Problema 2. Să se arate că aplicaţia $d_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d_s(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} | x^i - y^i |,\ (\forall)\, \vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n), \vec{y} = (y^1, y^2, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$.

Problema 3. Să se arate că metricele d, d_m, d_s, unde d este metrica euclidiană, sunt metrici echivalente.

Indicaţii. $d_m(\vec{x},\vec{y}) = \max\{| x^i - y^i | \,/\, i = \overline{1,n}\} \overset{\text{notaţie}}{=} | x^{i_0} - y^{i_0} |$. Avem

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} \leq \sqrt{n \mid x^{i_0} - y^{i_0} \mid^2} = \sqrt{n} d_m(\vec{x},\vec{y}),$$

$$d_m(\vec{x},\vec{y}) = \mid x^{i_0} - y^{i_0} \mid = \sqrt{(x^{i_0} - y^{i_0})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} = d(\vec{x},\vec{y}),$$

de unde rezultă

$$d_m(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{y}) \leq \sqrt{n} d_m(\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow d \sim d_m.$$

Din

$$d_m(\vec{x},\vec{y}) = \mid x^{i_0} - y^{i_0} \mid \leq \sum_{i=1}^{n} \mid x^i - y^i \mid = d_s(\vec{x},\vec{y}),$$

$$d_s(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \mid x^i - y^i \mid \leq n \mid x^{i_0} - y^{i_0} \mid = n d_m(\vec{x},\vec{y}),$$

obţinem

$$d_m(\vec{x},\vec{y}) \leq d_s(\vec{x},\vec{y}) \leq n d_m(\vec{x},\vec{y}) \Rightarrow d_m \sim d_s.$$

$$d \sim d_m \text{ şi } d_m \sim d_s \Rightarrow d \sim d_s.$$

Avem

$$\tfrac{1}{n} d_s(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{y}) \leq \sqrt{n} d_s(\vec{x},\vec{y}).$$

Problema 4. Să se arate că aplicaţiile $d_3, d_4 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite prin

$$d_3(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x^i - y^i \mid^p\right)^{\frac{1}{p}},\ d_4(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2^i} \tfrac{|x^i - y^i|}{1+|x^i - y^i|},$$

$(\forall)$ $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, ..., y^n)$, sunt metrici pe $\mathbb{R}^n$.

Indicaţii. Primele două axiome ale metricii se verifică imediat. Utilizând inegalitatea lui Minkowski se arată că d_3 verifică inegalitatea triunghiulară.

Pentru a verifica inegalitatea triunghiulară pentru d_4 se arată mai întâi că funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ este strict crescătoare.

Considerând $x_1 = \mid a - c \mid \leq \mid a - b \mid + \mid b - c \mid = x_2$, rezultă că $f(x_1) \leq f(x_2)$, de unde obţinem

$$\tfrac{|a-c|}{1+|a-c|} \leq \tfrac{|a-b|+|b-c|}{1+|a-b|+|b-c|} \leq \tfrac{|a-b|}{1+|a-b|} + \tfrac{|b-c|}{1+|b-c|}.$$

Efectuând calculele rezultă că d_4 satisface inegalitatea triunghiulară.

Problema 5. Fie A o mulţime nevidă şi

$$\mathcal{M}(A) = \{f/f : A \to \mathbb{R},\ f \text{ mărginită pe } A\}.$$

Să se arate că aplicaţia $d : \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d(f,g) = \sup\{|\ f(x) - g(x)\ | / x \in A\}$$

este o metrică pe $\mathcal{M}(A)$ (**metrica uniformă**).

Indicaţie. $|\ f(x) - h(x)\ | \leq |\ f(x) - g(x)\ | + |\ g(x) - h(x)\ | \leq$

$\sup\{|\ f(x) - g(x)\ | / x \in A\} + \sup\{|\ g(x) - h(x) / x \in A\ |\}.$

Problema 6. Fie $f,\ g,\ h \in \mathcal{M}(I),\ I = [0,4],\ f(x) = x,\ g(x) = 2x+1,\ h(x) = x^2$. Să se calculeze $d(f,h),\ d(f,g),\ d(g,h)$ şi să se verifice inegalitatea triunghiulară, d fiind metrica uniformă.

Indicaţie. $d(f,h) = \sup\{|\ x - x^2\ | / x \in [0,4]\}$. Din graficul funcţiei $u(x) = |\ x - x^2\ |$ rezultă că $d(f,h) = 12$.

Problema 7. Fie $f,\ g, \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, unde $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$. Să se calculeze $d(f,g)$, d fiind metrica uniformă.

Problema 8. Fie $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, \text{ pentru } x \in \mathbb{R} \\ 1, \text{ pentru } x = \infty \\ -1, \text{ pentru } x = -\infty \end{cases}$$

(numită **funcţia limitativă** sau **funcţia lui Baire**) şi $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |\ f(x) - f(y)\ |$. Să se arate că d este o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$ şi să se calculeze $d(1,\infty)$.

Indicaţie. Se arată că f este bijectivă şi că d satisface axiomele distanţei.

2.2 Topologia spaţiilor metrice

In spaţiu metric (X,d) considerăm mulţimile:

$$\mathcal{S}(x_0,r) = \{x/x \in X, d(x,x_0) = r\},$$
$$\mathcal{B}(x_0,r) = \{x/x \in X, d(x,x_0) < r\},$$
$$\overline{\mathcal{B}}(x_0,r) = \{x/x \in X, d(x,x_0) \leq r\},$$

unde $x_0 \in X$ şi $r \in (0,\infty)$.

Definiţia 1. $\mathcal{S}(x_0,r)$ se numeşte **suprafaţa sferei** de centru x_0 şi de rază r, $\mathcal{B}(x_0,r)$ se numeşte **sfera deschisă** de centru x_0 şi de rază r, iar $\overline{\mathcal{B}}(x_0,r)$ se numeşte **sfera închisă** de centru x_0 şi de rază r.

Observaţia 1. $\overline{\mathcal{B}}(x_0,r)=\mathcal{B}(x_0,r)\cup\mathcal{S}(x_0,r)$.

Exemplul 1. In spaţiul metric $(\mathbb{R},d)$, cu d metrica euclidiană, avem:

$$\mathcal{S}(x_0,r)=\{x/x\in\mathbb{R},d(x,x_0)=\mid x-x_0\mid=r\}=\{x_0-r,x_0+r\},$$
$$\mathcal{B}(x_0,r)=\{x/x\in\mathbb{R},d(x,x_0)=\mid x-x_0\mid<r\}=(x_0-r,x_0+r),$$
$$\overline{\mathcal{B}}(x_0,r)=\{x/x\in\mathbb{R},d(x,x_0)=\mid x-x_0\mid\le r\}=[x_0-r,x_0+r]\}.$$

Exemplul 2. In spaţiul metric $(\mathbb{R}^2,d)$, cu d metrica euclidiană ($d(\vec{x},\vec{x}_0)$ $=\sqrt{(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2}$, $\vec{x}=(x^1,x^2)$, $\vec{x}_0=(x_0^1,x_0^2)$), avem:

$$\mathcal{S}(\vec{x}_0,r)=\left\{\vec{x}/\vec{x}\in\mathbb{R}^2,d(\vec{x},\vec{x}_0)=\sqrt{(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2}=r\right\},$$
$$\mathcal{B}(\vec{x}_0,r)=\left\{\vec{x}/\vec{x}\in\mathbb{R}^2,d(\vec{x},\vec{x}_0)=\sqrt{(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2}<r\right\},$$
$$\overline{\mathcal{B}}(\vec{x}_0,r)=\left\{\vec{x}/\vec{x}\in\mathbb{R}^2,d(\vec{x},\vec{x}_0)=\sqrt{(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2}\le r\right\}.$$

Definiţia 2. Se numeşte **vecinătate** a punctului x din spaţiul metric (X,d), orice submulţime $\mathcal{V}\subset X$ care include o sferă deschisă cu centrul în x.

Mulţimea vecinătăţilor lui x o vom nota cu $\mathcal{V}_x$ şi o vom numi **sistemul vecinătăţilor** lui x;

$$\mathcal{V}_x=\{\mathcal{V}/\mathcal{V}\subset X,\ (\exists)\ \mathcal{B}(x,r)\subset\mathcal{V}\}.$$

Teorema 1. (**Proprietăţile vecinătăţilor**). In orice spaţiu metric (X,d) următoarele afirmaţii sunt adevărate:

$\mathbf{V}_1$. $(\forall)\ \mathcal{V}\in\mathcal{V}_x\Rightarrow x\in\mathcal{V}$,

$\mathbf{V}_2$. $(\forall)\ \mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2\in\mathcal{V}_x\Rightarrow\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2\in\mathcal{V}_x$,

$\mathbf{V}_3$. Dacă $\mathcal{U}\subset X$ şi $\mathcal{V}\in\mathcal{V}_x$ a.î. $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, atunci $\mathcal{U}\in\mathcal{V}_x$,

$\mathbf{V}_4$. $(\forall)\ \mathcal{V}\in\mathcal{V}_x$, $(\exists)\ \mathcal{W}\in\mathcal{V}_x$ a.î. $\mathcal{V}\in\mathcal{V}_y$, $(\forall)\ y\in\mathcal{W}$.

Demonstraţie. $\mathbf{V}_1$. $\mathcal{V}\in\mathcal{V}_x\Rightarrow(\exists)\,\mathcal{B}(x,r)\subset\mathcal{V}$. Deoarece $x\in\mathcal{B}(x,r)\Rightarrow x\in\mathcal{V}$.

$\mathbf{V}_2$. $\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2\in\mathcal{V}_x\Rightarrow(\exists)\ \mathcal{B}(x,r_1)$ şi $\mathcal{B}(x,r_2)$ a.î. $\mathcal{B}(x,r_1)\subset\mathcal{V}_1$ şi $\mathcal{B}(x,r_2)\subset\mathcal{V}_2$. Rezultă că $\mathcal{B}(x,r_1)\cap\mathcal{B}(x,r_2)\subset\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2$. Pentru $r=\min\{r_1,r_2\}$ obţinem $\mathcal{B}(x,r)\subset\mathcal{B}(x,r_1)\cap\mathcal{B}(x,r_2)\subset\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2$ şi deci $\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2\in\mathcal{V}_x$.

$\mathbf{V}_3$. $\mathcal{V}\in\mathcal{V}_x\Rightarrow(\exists)\ \mathcal{B}(x,r)\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{U}\Rightarrow\mathcal{U}\in\mathcal{V}_x$.

$\mathbf{V}_4$. Fie $\mathcal{W}=\{y/y\in\mathcal{V},(\exists)\ r_y\in(0,\infty)$ a.î. $\mathcal{B}(y,r_y)\subset\mathcal{V}\}$.Deoarece $\mathcal{V}\in\mathcal{V}_x$ rezultă că $(\exists)\ \mathcal{B}(x,r)\subset\mathcal{V}$ şi deci $x\in\mathcal{W}$. Rezultă că $\mathcal{W}\neq\emptyset$. Obţinem că $(\forall)\ y\in\mathcal{W}$, $(\exists)\ r_y\in(0,\infty)$ a.î. $\mathcal{B}(y,r_y)\subset\mathcal{V}$ şi deci $\mathcal{V}\in\mathcal{V}_y$.

Definiţia 3. O submulţime $D\subset(X,d)$ se numeşte **deschisă,** dacă

a). $D=\emptyset$ sau **b).** $D\in\mathcal{V}_x$, $(\forall)\ x\in D$.

O submulţime $B\subset(X,d)$ se numeşte **închisă,** dacă $\mathcal{C}_XB=X-B$ este mulţime deschisă.

Notăm cu $\mathfrak{D}_X$ (sau cu $\mathfrak{D}$, dacă nu există pericol de confuzie) mulţimea tuturor submulţimilor deschise ale lui X; $\mathfrak{D}_X = \{D/D \subset X,\ D = \text{deschisă}\}$. Deasemenea, notăm cu $\mathfrak{B}_X$ (sau cu $\mathfrak{B}$, dacă nu există pericol de confuzie) mulţimea tuturor submulţimilor închise ale lui X; $\mathfrak{B}_X = \{D/D \subset X,\ D = \text{închisă}\}$.

Teorema 2. In orice spaţiu metric (X, d) următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1) Orice sferă deschisă este mulţime deschisă.
2) Orice sferă închisă este mulţime închisă.
3) Orice reuniune de mulţimi deschise din X este mulţime deschisă.
4) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise din X este mulţime deschisă.
5) Orice intersecţie de mulţimi închise din X este mulţime închisă.
6) Orice reuniune finită de mulţimi închise din X este mulţime închisă.

Demonstraţie. **1)** Fie $\mathcal{B}(x,r) \subset X \Rightarrow (\forall)\ y \in \mathcal{B}(x,r)$, $(\exists)\ \mathcal{B}(y,r_1)$ cu $r_1 = r - d(x,y)$ a.î. $\mathcal{B}(y,r_1) \subset \mathcal{B}(x,r)$. Intr-adevăr $(\forall)\ z \in \mathcal{B}(y,r_1) \Rightarrow d(y,z) < r_1 \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = r - r_1 + d(y,z) < r - r_1 + r_1 = r \Rightarrow d(x,z) < r \Rightarrow z \in \mathcal{B}(x,r) \Rightarrow \mathcal{B}(y,r_1) \subset \mathcal{B}(x,r)$. Vezi (*Fig.1*).

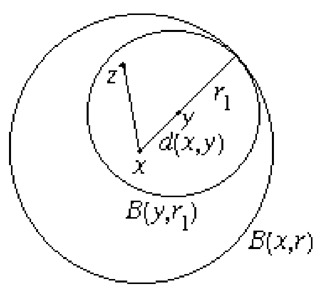


Fig. 1

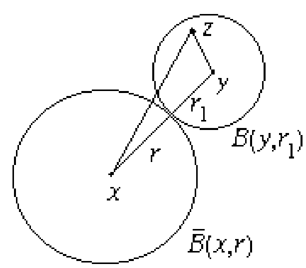


Fig. 2

2) Fie $\overline{\mathcal{B}}(x,r) \subset X$. Să arătăm că $\mathcal{C}_X\overline{\mathcal{B}}(x,r)$ este deschisă. $(\forall)\ y \in \mathcal{C}_X\overline{\mathcal{B}}(x,r)$ fie $\mathcal{B}(y,r_1)$ cu $r_1 = d(x,y) - r$. Rezultă că $(\forall)\ z \in \mathcal{B}(y,r_1)$ avem $d(y,z) < r_1$, deci $d(x,z) \geq d(x,y) - d(z,y) > d(x,z) - r_1 = d(x,y) - d(x,y) + r_1 = r$. Rezultă că $z \notin \overline{\mathcal{B}}(x,r)$ şi deci $z \in \mathcal{C}_X\overline{\mathcal{B}}(x,r)$. Am obţinut incluziunea $\mathcal{B}(y,r_1) \subset \mathcal{C}_X\overline{\mathcal{B}}(x,r)$, deci $\mathcal{C}_X\overline{\mathcal{B}}(x,r)$ este mulţime deschisă şi deci $\overline{\mathcal{B}}(x,r)$ este mulţime închisă. (Vezi *Fig.2.*).

3) Fie I o familie arbitrară de indici şi $\{D_\alpha/\alpha \in I,\ D_\alpha \in \mathfrak{D}_X\}$. Să arătăm că $D = \bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha \in \mathfrak{D}_X$.

$$(\forall)\ x \in D \Rightarrow (\exists)\ \alpha_0 \in I \text{ a.î. } x \in D_{\alpha_0} \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow$$
$$(\exists)\ \mathcal{B}(x,r) \subset D_{\alpha_0} \Rightarrow \mathcal{B}(x,r) \subset D \Rightarrow D \in \mathfrak{D}_X.$$

4) Apartenenţa $i \in \{1, 2, ..., n\}$ o vom nota prin $i = \overline{1,n}$. Fie $\{D_i / i = \overline{1,n},\ D_i \in \mathfrak{D}_X\}$ şi $D = \bigcap_{i=1}^{n} D_i$. Să arătăm că $D = \bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathfrak{D}_X$.

$(\forall)\ x \in D \Rightarrow x \in D_i,\ (\forall)\ i = \overline{1,n}, \Rightarrow (\exists)\ \mathcal{B}(x, r_i) \subset D_i,\ (\forall)\ i = \overline{1,n}$.

Considerând $r = \min\left\{r_i / i = \overline{1,n}\right\}$ onţinem

$\mathcal{B}(x, r) \subseteq \mathcal{B}(x, r_i),\ (\forall)\ i = \overline{1,n}, \Rightarrow \mathcal{B}(x, r) \subset D_i,\ (\forall)\ i = \overline{1,n},$

$\Rightarrow \mathcal{B}(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} D_i = D \Rightarrow D \in \mathfrak{D}_X.$

5) Fie I o familie arbitrară de indici şi $\{B_\alpha / \alpha \in I,\ B_\alpha \in \mathfrak{B}_X\}$. Avem $\mathcal{C}_X B_\alpha \in \mathfrak{D}_X,\ (\forall)\ \alpha \in I$. Să arătăm că $B = \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \in \mathfrak{B}_X$. Avem $\mathcal{C}_X B = \mathcal{C}_X\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_X B_\alpha \overset{\mathbf{3)}}{\Rightarrow} \mathcal{C}_X B \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow B \in \mathfrak{B}_X$.

6) Fie $\left\{B_i / i = \overline{1,n}, B_i \in \mathfrak{B}_X\right\}$. Rezultă că $(\forall)\ i = \overline{1,n},\ \mathcal{C}_X B_i \in \mathfrak{D}_X$. Să arătăm că $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathfrak{B}_X$. Avem $\mathcal{C}_X B = \mathcal{C}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{C}_X B_i \overset{\mathbf{3)}}{\Rightarrow} \mathcal{C}_X B \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow B \in \mathfrak{B}_X$.

Observaţia 2. Dacă $D \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow \mathcal{C}_X(\mathcal{C}_X D) = D \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow \mathcal{C}_X D \in \mathfrak{B}_X$.

Definiţia 4. Se numeşte **topologie** pe o mulţime M, o familie $\mathfrak{T}$ de părţi ale lui M (adică o submulţime $\mathfrak{T} \subset \mathcal{P}_M$) care satisface axiomele:

$\mathbf{T}_1$. $M, \emptyset \in \mathfrak{T}$.
$\mathbf{T}_2$. Orice reuniune de mulţimi din $\mathfrak{T}$ este o mulţime din $\mathfrak{T}$.
$\mathbf{T}_3$. Orice intersecţie finită de mulţimi din $\mathfrak{T}$ este o mulţime din $\mathfrak{T}$.

Perechea $(M, \mathfrak{T})$, unde $\mathfrak{T}$ este o topologie pe M, se numeşte **spaţiu topologic**; orice mulţime din $\mathfrak{T}$ se numeşte **mulţime deschisă**. O submulţime $B \subset M$ se numeşte **închisă** dacă $\mathcal{C}_M B \in \mathfrak{T}$.

Exemplul 3. În $\bar{\mathbb{R}}$ se introduce o topologie $\mathfrak{T}$ astfel: $\bar{\mathbb{R}}$, $\emptyset \in \mathfrak{T}$ şi

$$D \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow (\forall)\, x \in D \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x \neq \pm\infty,\ (\exists)\ \varepsilon \in (0, \infty)\ \text{a.î.}\ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset D \\ x = -\infty,\ (\exists)\ a \in \mathbb{R}\ \text{a.î.}\ [-\infty, a) \subset D \\ x = +\infty,\ (\exists)\ a \in \mathbb{R}\ \text{a.î.}\ (a, +\infty] \subset D \end{cases}$$

Teorema 3. Dacă $(M_i, \mathfrak{T}_i)$, $i = \overline{1,n}$, sunt spaţii topologice atunci, $(M, \mathfrak{T})$ este spaţiu topologic, unde $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ şi $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \times ... \times \mathfrak{T}_n$.

Demonstraţie. $\mathbf{T}_1$) Presupunem că $\mathfrak{T}_i$, $i = \overline{1,n}$, satisfac $\mathbf{T}_1$,$\mathbf{T}_2$ şi $\mathbf{T}_3$. Rezultă că $M_i, \emptyset \in \mathfrak{T}_i$, $i = \overline{1,n}$, deci $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \in \mathfrak{T}$ şi $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \times ... \times \emptyset \in \mathfrak{T}$.

$\mathbf{T}_2$) Oricare ar fi $D_\alpha \in \mathfrak{T}$, $\alpha \in I$, există $D_\alpha^i \in \mathfrak{T}_i$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât $D_\alpha = D_\alpha^1 \times D_\alpha^2 \times ... \times D_\alpha^n$. Deoarece $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha^i \in \mathfrak{T}_i$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$, rezultă că $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha = \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha^1\right) \times \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha^2\right) \times ... \times \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha^n\right) \in \mathfrak{T}$.

$\mathbf{T}_3$) Oricare ar fi $D_\alpha \in \mathfrak{T}$, $\alpha \in \{1, 2, ..., p\}$, există $D_\alpha^i \in \mathfrak{T}_i$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât $D_\alpha = D_\alpha^1 \times D_\alpha^2 \times ... \times D_\alpha^n$. Deoarece $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{p} D_\alpha^i \in \mathfrak{T}_i$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$, rezultă că $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{p} D_\alpha = \left(\bigcap\limits_{\alpha=1}^{p} D_\alpha^1\right) \times \left(\bigcap\limits_{\alpha=1}^{p} D_\alpha^2\right) \times ... \times \left(\bigcap\limits_{\alpha=1}^{p} D_\alpha^n\right) \in \mathfrak{T}$.

Topologia $\mathfrak{T}$ introdusă în **Teorema 3** se numeşte **topologia produs**.

Exemplul 4. În $\overline{\mathbb{R}}^k$ se poate considera topologia produs $\underbrace{\mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \times ... \times \mathfrak{T}}_{de\ k\ ori}$ unde $\mathfrak{T}$ este topologia din **Exemplul 1**.

Teorema 4. Orice spaţiu metric (X, d) este spaţiu topologic, cu topologia $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_X$, (numită **topologia indusă de metrica** d).

Demonstraţie. Din **Teorema 2**, rezultă că $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_X$ satisface $\mathbf{T}_2$ şi $\mathbf{T}_3$ din **Definiţia 4**. Axioma $\mathbf{T}_1$ este evident satisfăcută.

Teorema 5. Fie d_1 şi d_2 două metrici algebric echivalente în X. O mulţime $A \subset X$ este deschisă în raport cu metrica d_1, dacă şi numai dacă ea este deschisă în raport cu metrica d_2.

Demonstraţie. Necesitatea. Deoarece d_1 şi d_2 sunt metrici algebric echivalente, rezultă că $(\exists)$ $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ a.î. $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$, $(\forall)$ $x, y \in X$.

Fie $A \subset X$ deschisă în raport cu metrica d_1. Rezultă că $(\forall)$ $x \in A$, $(\exists)$ $\mathcal{B}(x, r_1) = \{y / y \in X,\ d_1(x, y) < r_1\}$. Obţinem că $d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) < \beta r_1 \overset{notat}{=} r$ şi deci $\mathcal{B}(x, r) = \{y / y \in X,\ d_2(x, y) < r\} \subset \mathcal{B}(x, r_1) \subset A$. Rezultă că A este deschisă şi în raport cu d_2.

Suficienţa. Se repetă raţionamentul precedent schimbând rolurile lui d_1 şi d_2.

Observaţia 4. Topologiile induse de două metrici algebric echivalente coincid.

Observaţia 5. Fie relaţia binară $\mathfrak{R}_1 = \{G_1, \mathsf{D}_X\}$, unde $G_1 = \{(d_1, d_2) / d_1, d_2 \in \mathsf{D}_X, d_1$ şi d_2 induc aceeaşi topologie pe $X\}$. $\mathfrak{R}_1$ este o relaţie de echivalenţă în mulţimea metricelor D_X, numită **echivalenţa topologică a metricelor.** Dacă $\mathcal{R} = \{G, \mathsf{D}_X\}$ este relaţia de **echivalenţa algebrică a metricelor**, atunci **Observaţia 4** spune că avem $G \subset G_1$. Incluziunea inversă nu are loc întotdeauna.

Teorema 6. Dacă M_o este o submulţime a spaţiului topologic $(M, \mathfrak{T})$ şi $\mathfrak{T}_o = \{U_o \diagup (\exists)\ U \in \mathfrak{T}, U_o = U \cap M_o\}$, atunci perechea $(M_o, \mathfrak{T}_o)$ este un spaţiu topologic (numit **subspaţiu topologic** al lui $(M, \mathfrak{T})$).

Demonstraţie. Arătăm că $\mathfrak{T}_o$ satisface axiomele din **Definiţia 4.**

$\mathbf{T}_1$. Deoarece $\emptyset \in \mathfrak{T}$ şi $M_o \cap \emptyset = \emptyset$, rezultă că $\emptyset \in \mathfrak{T}_o$.

$\mathbf{T}_2$. Fie $U_{oi} \in \mathfrak{T}_o$, $i \in I$ şi $U_o = \bigcup_{i \in I} U_{oi}$. Rezultă că $(\exists)\ U_i \in \mathfrak{T}$ astfel încât $U_{oi} = U_i \cap M_o$. Deoarece $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ avem $U_o = \bigcup_{i \in I} U_{oi} = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap M_o) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap M_o = U \cap M_o \in \mathfrak{T}_o$.

$\mathbf{T}_3$.Fie $U_{oi} \in \mathfrak{T}_o$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ şi $U_o = \bigcap_{i=1}^{n} U_{oi}$. Rezultă că $(\exists)\ U_i \in \mathfrak{T}$ astfel încât $U_{oi} = U_i \cap M_o$. Deoarece $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ avem $U_o = \bigcap_{i=1}^{n} U_{oi} = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap M_o) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap M_o = U \cap M_o \in \mathfrak{T}_o$.

2.2.1 Probleme

Problema 1. Să se arate că $\mathbb{R}$ este subspaţiu topologic al lui $\overline{\mathbb{R}}$ şi $\mathbb{R}^k$ este subspaţiu topologic al lui $\overline{\mathbb{R}}^k$.

Problema 2. Să se arate că dacă (Y, d_o) este subspaţiu metric al lui (X, d) şi $\mathfrak{T}_o$, respectiv $\mathfrak{T}$ sunt topologiile induse de metricele d_o şi respectiv d, atunci $(Y, \mathfrak{T}_o)$ este un subspaţiu topologic al lui $(X, \mathfrak{T})$.

Indicaţie. Se arată mai întâi că $(\forall)\ a \in Y$,

$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \diagup x \in X, d(x, a) < r\} \text{ satisface}$$

$$\mathcal{B}(a, r) \cap Y = \{y \diagup y \in Y, d_o(y, a) < r\} = \mathcal{B}_o(a, r).$$

Problema 3. Să se arate că o dreaptă (δ) din plan nu este deschisă în raport cu metrica euclidiană. Este ea închisă ?

Indicaţii. Se arată uşor că $(\forall)\ P \in \delta$, nu există un disc cu centrul în P conţinut în δ, deci δ nu este deschisă.

Fie $Q \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}\delta = \mathbb{R}^2 \backslash \delta$ şi $\alpha = \frac{1}{2} d(Q, \delta)$, unde $d(Q, \delta) = \inf\{d(Q, P) \diagup P \in \delta\}$. Rezultă că $\mathcal{B}(Q, \alpha) \cap \delta = \Phi$, adică $\mathcal{B}(Q, \alpha) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}\delta$, $(\forall)\ Q \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}\delta$, deci $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}\delta$ este deschisă şi deci δ este închisă.

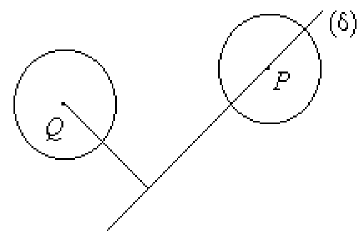


Fig.1.

Problema 4. Să se reprezinte grafic $S\left(\vec{0},1\right)$, $S_m\left(\vec{0},1\right)$, $S_s\left(\vec{0},1\right)$ în raport cu metricele d, d_m, d_s din $\mathbb{R}^2$.

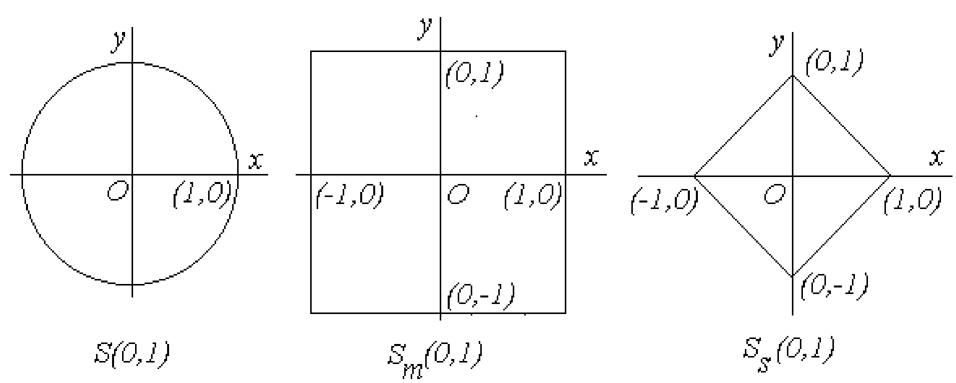
Indicaţii. $S\left(\vec{0},1\right)=\left\{\vec{x}\diagup\vec{x}=(x,y)\,,\sqrt{x^2+y^2}=1\right\}.$

$$S_m\left(\vec{0},1\right)=\{\vec{x}\diagup\vec{x}=(x,y)\,,\max\{|\,x\,|,|\,y\,|\}=1\}\,,$$

$$\max\{|\,x\,|,|\,y\,|\}=1\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1, \text{ pentru } y\in[-1,1]\,,\\ y=\pm1, \text{ pentru } x\in[-1,1]\,.\end{cases}$$

$$S_s\left(\vec{0},1\right)=\{\vec{x}\diagup\vec{x}=(x,y)\,,|\,x\,|+|\,y\,|=1\}\,,$$

$$|\,x\,|+|\,y\,|=1\Rightarrow\begin{cases}x+y=1,x\geq0,y\geq0,\\ -x+y=1,x\leq0,y\geq0,\\ -x-y=1,x\leq0,y\leq0,\\ x-y=1,x\geq0,y\leq0.\end{cases}$$



2.3 Submulţimi remarcabile într-un spaţiu metric

Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A\subset X$.

Definiţia 1. Un punct $x \in X$ se numeşte **punct interior** al mulţimii A dacă există o vecinătate a sa inclusă în A. Mulţimea punctelor interioare mulţimii A se notează cu $\overset{\circ}{A}$ şi se numeşte **interiorul** mulţimii A.

$$\overset{\circ}{A} = \{x \diagup x \in X, (\exists)\ \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x,\ \text{a.î. } \mathcal{V} \subset A\}.$$

Definiţia 2. Un punct $x \in \mathbb{R}$ se numeşte **punct interior la stânga,** respectiv **la dreapta** al mulţimii $A \subset \mathbb{R}$ dacă $(\exists)\, \varepsilon \in (0,\infty)$ astfel încât $(x-\varepsilon, x] \subset A$, respectiv $[x, x+\varepsilon) \subset A$.

Mulţimile:

$$\overset{\circ}{A}_s = \{x \diagup x \in \mathbb{R},\ (\exists)\, \varepsilon \in (0,\infty)\ \text{a.î. } (x-\varepsilon, x] \subset A\},$$
$$\overset{\circ}{A}_d = \{x \diagup x \in \mathbb{R}, (\exists)\, \varepsilon \in (0,\infty)\ \text{a.î. } [x, x+\varepsilon) \subset A\},$$

se numesc **interiorul la stânga** şi respectiv la **dreapta** ale lui A.

Observaţia 1. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ şi $x \in \overset{\circ}{A}$, atunci $(\exists)\ \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$, a.î. $\mathcal{V} \subset A$. Deoarece $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$, rezultă că $(\exists)\, \varepsilon \in (0,\infty)$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathcal{V} \subset A$. Obţinem că $(x-\varepsilon, x] \subset A$ şi $[x, x+\varepsilon) \subset A$, deci $x \in \overset{\circ}{A}_s$, respectiv $x \in \overset{\circ}{A}_d$. Rezultă că $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}_s$, respectiv $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}_d$ şi $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}_s \cap \overset{\circ}{A}_d$. Incluziunile inverse nu au loc întotdeauna. Într-adevăr, dacă $A = [a,b]$, atunci

$$\overset{\circ}{A}_s = (a,b], \qquad \overset{\circ}{A}_d = [a,b), \qquad \overset{\circ}{A} = (a,b) = \overset{\circ}{A}_s \cap \overset{\circ}{A}_d.$$

Definiţia 3. Un punct $x \in X$ se numeşte **punct aderent** al mulţimii A dacă orice vecinătate a sa intersectează mulţimea A. Mulţimea punctelor aderente mulţimii A se notează cu $\overline{A}$ şi se numeşte **aderenţa**(sau **închiderea**) mulţimii A.

$$\overline{A} = \{x \diagup x \in X, (\forall)\ \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x,\ \mathcal{V} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definiţia 4. Un punct $x \in X$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii A dacă orice vecinătate a sa intersectează mulţimea A în puncte diferite de x. Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează cu A' şi se numeşte **mulţimea derivată** a mulţimii A.

$$A' = \{x \diagup x \in X, (\forall)\ \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x,\ \mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}.$$

Definiţia 5. Un punct $x \in \mathbb{R}$ se numeşte **punct de acumulare la stânga, respectiv la dreapta,** al mulţimii $A \subset \mathbb{R}$ dacă

$$(\forall)\ \varepsilon \in (0,\infty) \text{ avem } (x-\varepsilon, x) \cap A \neq \emptyset, \text{ respectiv } (x, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Mulţimea punctelor de acumulare la stânga (dreapta) a mulţimii $A \subset \mathbb{R}$ se notează cu A'_s, (respectiv A'_d) şi se numeşte **mulţimea derivată la stânga (dreapta)**. Avem:

$$A'_s = \{x \diagup x \in \mathbb{R}, (\forall)\, \varepsilon \in (0,\infty)\ \text{avem } (x-\varepsilon, x) \cap A \neq \emptyset\},$$
$$A'_d = \{x \diagup x \in \mathbb{R}, (\forall)\, \varepsilon \in (0,\infty)\ \text{avem } (x, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Observaţia 2. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ şi $x \in A'_s$ (respectiv $x \in A'_s$), atunci $(\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\, \varepsilon \in (0,\infty)$ astfel încât $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathcal{V}$.

Deoarece $(x-\varepsilon, x) \cap A \neq \emptyset$, respectiv $(x, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, rezultă că $\mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, deci $A'_s \subset A'$, respectiv $A'_d \subset A'$.

Incluziunile inverse, în general, nu au loc. Într-adevăr, dacă $A = (a,b]$ atunci $a \in A'$ şi $(\forall)$ $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_a$, $\mathcal{V} \cap A \setminus [a,\infty) = \emptyset$, deci $a \notin A'_s$.

Definiţia 6. Un punct $x \in X$ se numeşte **punct frontieră** al mulţimii A dacă $x \in \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_X A}$. Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A se notează cu $Fr.A$ şi se numeşte **frontiera** mulţimii A.

$$Fr.A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_X A}.$$

Definiţia 7. Un punct $x \in A$ se numeşte **punct izolat** al mulţimii A dacă x nu este punct de acumulare al mulţimii A. Mulţimea punctelor izolate ale mulţimii A se notează cu $Iz.A$.

$$Iz.A = A \setminus A'.$$

Definiţia 8. Mulţimea A se numeşte **discretă** dacă $A = Iz.A$.

Definiţia 9. Mulţimea A se numeşte **mărginită** dacă este inclusă într-o sferă (închisă sau deschisă).

Observaţia 3. Noţiunile introduse în **Definiţiile 1,3,4,6,7,8** pot fi date într-un spaţiu topologic arbitrar.

Observaţia 4. Din **Definiţiile 1-7** rezultă:

$1^\circ.\ \overset{\circ}{A} \subset A,\quad 2^\circ.\ A' \subset \overline{A},\quad 3^\circ.\ A \subset \overline{A},\quad 4^\circ.\ Iz.A \subset A,\quad 5^\circ.\ \overset{\circ}{A} \subset A'.$

În plus, dacă $A \subset \mathbb{R}$, atunci au loc **şi**

$$6^\circ.\ \overset{\circ}{A}_s \subset A'_s,\quad 7^\circ.\ \overset{\circ}{A}_d \subset A'_d.$$

Teorema 1. Dacă $x \in A'$, atunci $(\forall)$ $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ mulţimea $\mathcal{V} \cap A$ conţine o infinitate de puncte.

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, presupunem că există $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ a.î. $\mathcal{V} \cap A$ să conţină un număr finit de puncte diferite de x; $\mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Deoarece $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ rezultă că $(\exists)$ $\mathcal{B}(x, r_0) \subset \mathcal{V}$. Luând $r = \min\{r_0, d(x,x_1), d(x,x_2), ..., d(x,x_n)\}$, rezultă că $\mathcal{B}(x,r) \subseteq \mathcal{B}(x,r_0)$ şi în plus $x_1, x_2, ..., x_n \notin \mathcal{B}(x,r)$. Obţinem că $A \cap \mathcal{B}(x,r) \setminus \{x\} = \emptyset$ ceea ce contrazice **Definiţia 4** a punctului de acumulare. Rezultă că $\mathcal{V} \cap A$ conţine o infinitate de puncte.

Observaţia 5. Mulţimile discrete nu au puncte de acumulare.

Teorema 2. O submulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este deschisă dacă şi numai dacă coincide cu interiorul ei;

$$A \in \mathfrak{D}_X \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}.$$

Demonstraţie. Necesitatea. $A \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow (\forall)\, x \in A, (\exists)\, \mathcal{V} = \mathcal{B}(x,r) \subset A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \subset \overset{\circ}{A}$. Incluziunea inversă rezultă din 1°, **Observaţia 4** şi deci $A = \overset{\circ}{A}$.

Suficienţa. $A = \overset{\circ}{A} \Rightarrow (\forall)\, x \in A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow (\exists)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ a.î.$\mathcal{V} \subset A \Rightarrow A \in \mathfrak{D}_X$.

Teorema 3. O submulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este închisă dacă şi numai dacă coincide cu aderenţa ei; $A \in \mathfrak{B}_X \Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Demonstraţie. Necesitatea. $A \in \mathfrak{B}_X \Rightarrow \mathcal{C}_X A \in \mathfrak{D}_X$. Prin reducere la absurd, presupunem că $\overline{A} \nsubseteq A$. Rezultă că există x astfel încât

$$\left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \notin A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \in \mathcal{C}_X A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ (\exists)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \text{ a.î. } \mathcal{V} \subset \mathcal{C}_X A \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ \mathcal{V} \cap A = \emptyset \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \notin \overline{A} \end{array}\right. \text{ ceea ce este absurd şi deci } \overline{A} \subseteq A.$$

Incluziunea inversă rezultă din 3°, **Observaţia 4** şi deci $A = \overline{A}$.

Suficienţa. $A = \overline{A} \Rightarrow \mathcal{C}_X A = \mathcal{C}_X \overline{A} \Rightarrow (\forall)\ x \in \mathcal{C}_X A = \mathcal{C}_X \overline{A} = X \setminus A \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow (\exists)\ \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ a.î. $\mathcal{V} \cap A = \emptyset$ (x nu satisface **Definiţia 3** a punctului aderent) $\Rightarrow \mathcal{V} \subset \mathcal{C}_X A \Rightarrow \mathcal{C}_X A \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow \mathcal{C}_X(\mathcal{C}_X A) = A \in \mathfrak{B}_X$.

Teorema 4. Dacă A este o submulţime dintr-un spaţiu metric (X,d), atunci are loc $A \cup A' = \overline{A}$.

Demonstraţie. Din **Observaţia 4** avem $A \subset \overline{A}$ şi $A' \subset \overline{A}$. Rezultă că $A \cup A' \subset \overline{A}$. Incluziunea inversă, $\overline{A} \subset A \cup A'$, rezultă din

$$(\forall)\, x \in \overline{A} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in A \\ \text{sau} \\ x \in \overline{A} \backslash A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in A \\ \text{sau} \\ (\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \mathcal{V} \cap A = \mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in A \\ \text{sau} \\ x \in A' \end{array}\right. \Rightarrow x \in A \cup A'.$$

Din dubla incluziune, $A \cup A' \subset \overline{A}$ şi $\overline{A} \subset A \cup A'$, rezultă $A \cup A' = \overline{A}$.

Teorema 5. O submulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este închisă dacă şi numai dacă $A' \subset A$.

Demonstraţie. $A \in \mathfrak{B}_X \Leftrightarrow A = \overline{A} = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subset A$.

Definiţia 10. Un spaţiu topologic $(M,\mathfrak{T})$ se numeşte **spaţiu Hausdorff** dacă

$$(\forall)\ x,y\in M,\ x\neq y,\ (\exists)\ \mathcal{V}\in\mathcal{V}_x \text{ şi } \mathcal{W}\in\mathcal{V}_y \text{ a.î. } \mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\emptyset.$$

Teorema 6. Orice spaţiu metric este spaţiu Hausdorff.

Demonstraţie. Fie spaţiul metric (X,d) şi $x,y\in X$ cu $x\neq y$. Rezultă că $d(x,y)>0$ şi deci $r=\frac{d(x,y)}{3}\in(0,\infty)$. Obţinem că $\mathcal{V}=\mathcal{B}(x,r)\in\mathcal{V}_x$, $\mathcal{W}=\mathcal{B}(y,r)\in\mathcal{V}_y$ şi în plus dacă, prin reducere la absurd, presupunem că $(\exists)\,z\in\mathcal{B}(x,r)\cap\mathcal{B}(y,r)$, atunci $z\in\mathcal{B}(x,r)$ şi $z\in\mathcal{B}(y,r)$. Rezultă că $d(x,z)<r$ şi $d(y,z)<r$. Avem $3r=d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)<r+r=2r$, ceea ce este absurd şi deci $\mathcal{B}(x,r)\cap\mathcal{B}(y,r)=\emptyset$.

2.3.1 Probleme

Problema 1. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A,B\subset X$. Să se arate că:

a) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}=\overset{\circ}{A}$, **b)** $A\subset B\Rightarrow\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}$,

c) $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$, **d)** $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$.

Soluţie. **a)** Deoarece $A\in\mathfrak{D}\Leftrightarrow A=\overset{\circ}{A}\Rightarrow\overset{\circ}{A}\in\mathfrak{D}\Rightarrow\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}=\overset{\circ}{A}$.

b) $(\forall)\,x\in\overset{\circ}{A}\subset A\subset B\Rightarrow(\exists)\,\mathcal{B}(x,r)\subset A\subset B\Rightarrow x\in\overset{\circ}{B}\Rightarrow\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}$.

c) $(\forall)\,x\in\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset A\cap B\Rightarrow(\exists)\,\mathcal{B}(x,r)\subset A\cap B\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c}\mathcal{B}(x,r)\subset A\\ \text{şi}\\ \mathcal{B}(x,r)\subset B\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x\in\overset{\circ}{A}\\ \text{şi}\\ x\in\overset{\circ}{B}\end{array}\right.\Rightarrow$$

(1) $$x\in\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}\Rightarrow\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}.$$

$(\forall)\,x\in\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x\in\overset{\circ}{A}\\ \text{şi}\\ x\in\overset{\circ}{B}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}(\exists)\,\mathcal{B}(x,r_1)\subset A\\ \text{şi}\\ (\exists)\,\mathcal{B}(x,r_2)\subset B\end{array}\right.\Rightarrow(\exists)\,\mathcal{B}(x,r)\subset$ $A\cap B$ (unde $r=\min\{r_1,r_2\}$)$\Rightarrow x\in\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\Rightarrow$

(2) $$\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}.$$

Din (**1**) şi (**2**) rezultă **c).**

d) $(\forall)\, x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overset{\circ}{A} \\ \text{sau} \\ x \in \overset{\circ}{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\exists)\, \mathcal{B}(x, r_1) \subset A \\ \text{sau} \\ (\exists)\, \mathcal{B}(x, r_2) \subset B \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\exists)\, \mathcal{B}(x, r_1) \subset A \cup B \\ \text{sau} \\ (\exists)\, \mathcal{B}(x, r_2) \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}.$$

Problema 2. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, **b)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, **d)** $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Caz particular: $A = \{0\} \cup (1, 2) \cup [4, 9]$, $B\, [1, 5] \cup \{6, 10\}$ în $\mathbb{R}$ cu metrica euclidiană.

Soluţie. **d)** Arătăm că $\mathcal{C}_X\overline{A} \in \mathfrak{D}_X$. $\forall x \in \mathcal{C}_X\overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ astfel încât $\mathcal{V} \cap A = \emptyset \Rightarrow \exists \mathfrak{B}(x, r) \subset \mathcal{V}$ astfel încât $(\mathbf{1})$ $\mathfrak{B}(x, r) \cap A = \emptyset$. Prin reducere la absurd, presupunem că $\mathfrak{B}(x, r) \nsubseteq \mathcal{C}_X\overline{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(x, r) \cap \overline{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \mathfrak{B}(x, r)$ şi $y \in \overline{A} \Rightarrow \exists \mathcal{V}_1 = \mathfrak{B}(x, r) \in \mathcal{V}_y$ şi $y \in \overline{A} \Rightarrow \mathcal{V}_1 \cap A = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{B}(x, r) \cap A = \emptyset$ ceea ce contrazice $(\mathbf{1})$. Rezultă că $\mathfrak{B}(x, r) \subset \mathcal{C}_X\overline{A}$ deci $\mathcal{C}_X\overline{A} \in \mathfrak{D}_X$. Obţinem că $\overline{A} \in \mathfrak{B}_X$ deci $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (vezi **Teorema 3).**

Problema 3. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $Fr.A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = Iz.\overline{A} \cup \left(A' \setminus \overset{\circ}{A} \right)$, **b)** $\overline{Fr.A} = Fr.A$,

c) $Fr.(Fr.A) = Fr.A \setminus \overset{\circ}{\widehat{Fr.A}}$, **d)** $Fr.(A \cup B) \subset Fr.A \cup Fr.B$.

Caz particular: $X = \mathbb{R}$ (cu metrica euclidiană), $A = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \cup [3, 4]$, $B = [2, 3]$.

Soluţie. **a)** $(\forall)\, x \in Fr.A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_X A} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \in \overline{\mathcal{C}_X A} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ (\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{C}_X A \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ (\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \mathcal{V} \nsubseteq A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \notin \overset{\circ}{A} \end{cases} \Rightarrow$$

(**1**) $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \Rightarrow Fr.A \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$

$$(\forall)\, x \in \overline{A} \setminus \overset{o}{A} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \notin \overset{\circ}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ (\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \mathcal{V} \nsubseteq A \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ (\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{C}_X A \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{şi} \\ x \in \overline{\mathcal{C}_X A} \end{cases} \Rightarrow$$

(**2**) $x \in \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_X A} = Fr.A \Rightarrow \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \subset Fr.A.$

Din (**1**) şi (**2**) rezultă $Fr.A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

$$Iz.\overline{A} \cup \left(A' \setminus \overset{\circ}{A} \right) = \left(\overline{A} \setminus A' \right) \cup \left(A' \setminus \overset{\circ}{A} \right) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = Fr.A.$$

b) $(\forall)\, x \in \overline{Fr.A}$, $(\exists)\, \mathcal{B}(x,r)$ a.î $\mathcal{B}(x,r) \cap Fr.A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$.

Dacă $\mathcal{B}(x,r) \cap \mathcal{C}_X A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{B}(x,r) \subset A \Rightarrow \mathcal{B}(x,r) \cap Fr.A = \emptyset$ (absurd), deci $\mathcal{B}(x,r) \cap \mathcal{C}_X A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{C}_X A}$. Obţinem că $x \in \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_X A} = Fr.A$, deci $\overline{Fr.A} \subset Fr.A$. Din proprietăţile aderenţei rezultă că are loc şi incluziunea inversă, deci $\overline{Fr.A} = Fr.A$.

c) Din **a)** şi **b)** avem $Fr.(Fr.A) = \overline{Fr.A} \setminus \overset{o}{\widehat{Fr.A}} = Fr.A \setminus \overset{o}{\widehat{Fr.A}}$.

d) Rezultă din definiţii.

Cazul particular: $Fr.A = [0,1] \cup \{3,4\}$, $\overline{A} = A' = [0,1] \cup [3,4]$, $\overline{\mathcal{C}_X A} = [-\infty, 3] \cup [4, \infty)$, $Iz.A = \emptyset$, $\overset{\circ}{A} = (3,4)$, $Fr.B = \{2,3\}$.

Problema 4. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A, B \subset X$. Să se arate că:

a) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$, **b)** $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$,
c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$, **d)** $(A')' \subset A'$,
e) $A' \in \mathfrak{B}_X$.

Indicaţii. **a)** $(\forall)\, x \in A' \Rightarrow (\forall)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x, \mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Din $A \subset B \Rightarrow \emptyset \neq \mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} \subset \mathcal{V} \cap B \setminus \{x\} \Rightarrow \mathcal{V} \cap B \setminus \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in B' \Rightarrow A' \subset B'$.

d) Prin reducere la absurd, presupunem că $(A')' \nsubseteq A'$, deci $(\exists)\, x \in (A')'$ şi $x \notin A'$. Din $x \notin A' \Rightarrow$

(**1**) $(\exists)\, \mathcal{V} \in \mathcal{V}_x$ a.î. $\mathcal{V} \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$.

Deoarece $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_x \Rightarrow (\exists)\, \mathcal{B}(x,r) \subset \mathcal{V} \overset{(\mathbf{1})}{\Rightarrow}$

(**2**) $\mathcal{B}(x,r) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$.

$x \in (A')' \Rightarrow \mathcal{B}(x,r) \cap A' \setminus \{x\} \neq \emptyset$ şi $x \notin \mathcal{B}(x,r) \cap A' \setminus \{x\} \Rightarrow (\exists)\, y \in \mathcal{B}(x,r) \cap A' \setminus \{x\}$, $(y \neq x) \Rightarrow y \in W \cap A'$, unde $W = \mathcal{B}(x,r) \setminus \{x\}$, $\Rightarrow$

(3) $y \in W$ şi $y \in A'$.

$W = \mathcal{B}(x,r) \setminus \{x\} \in \mathfrak{D}_X$, deoarece $(\forall)\, z \in W \Rightarrow \mathcal{B}(z,\lambda) \subset W$ cu $\lambda = \min\{d(x,z), r - d(x,z)\}$. Din $y \in W$ şi $W \in \mathfrak{D}_X \Rightarrow W \in \mathcal{V}_y \overset{(3)}{\Rightarrow}$ $y \in A' \Rightarrow W \cap A \setminus \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow$

(4) $\quad (\mathcal{B}(x,r) \setminus \{x\}) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset.$

$(\mathcal{B}(x,r) \setminus \{x\}) \cap (A \setminus \{y\}) \subset \mathcal{B}(x,r) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset \Rightarrow$

(5) $\quad (\mathcal{B}(x,r) \setminus \{x\}) \cap (A \setminus \{y\}) = \emptyset.$

(4) şi (5) conduc la o absurditate, deci $(A')' \subset A'$.

e) Rezultă din **d)** şi din $C \in \mathfrak{B}_X \Leftrightarrow C' \subset C$. Se va lua $C = A'$.

Problema 5. Fie spaţiul metric $(\mathbb{R}, d)$ unde d este metrica euclidiană şi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. O submulţime $\mathcal{V} \subset \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte vecinătate a lui $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă există un interval $(a, +\infty] \subset \mathcal{V}$, (respectiv $[-\infty, a) \subset \mathcal{V}$). Definim mulţimile deschise din $\overline{\mathbb{R}}$, ca fiind acele submulţimi ale lui $\overline{\mathbb{R}}$ care sunt vecinătăţi pentru fiecare punct al lor. Să se arate că mulţimile deschise din $\overline{\mathbb{R}}$ formează o topologie.