UNIVERSITATEA “TRANSILVANIA” DIN BRAŞOV
FACULTATEA DE CONSTRUCTII
SPECIALIZARI : CCIA , INST, DPCF

FACULTATEA INGINERIE ELECTRICA SI STIINTA CALCULATOARELOR
SPECIALIZAREA : AUTOMATICA

PROF.UNIV.DR. ATANASIU GHEORGHE

ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

2007

PARTEA I: GEOMETRIE ANALITICĂ

Cuprins

Capitolul 1

NOȚIUNI PRELIMINARE

În acest capitol se reamintesc noțiuni de bază ca: mulțimi, relații binare, funcții, precum şi elemente fundamentale ale algebrei liniare: matrice, determinanți, sisteme liniare de ecuații, predate în liceu.

Obiective operaționale:

1.1. Să stăpânească operațiile şi relațiile binare pe acestea
1.2. Să-şi reamintească noțiunea de funcție şi funcțiile elementare studiate
1.3. Să cunoască noțiunea de matrice şi operațiile cu acestea
1.4. Să rețină proprietățile determinanților şi calculul lor
1.5. Să fie capabil să rezolve sisteme liniare de ecuații cu două şi trei necunoscute

Conținutul capitolului:

§1.1 Mulțimi, relații binare şi funcții

Mulțimi

Prin mulțime se înțelege o colecție de obiecte care vor fi numite *elemente.* Noțiunea de mulțime, ca orice noțiune primară, nu se defineşte ca alte noțiuni prin genul proxim şi diferența specifică ci se caracterizează numind individual elementele sau specificând o proprietate pe care o au elementele sale şi nu o au alte obiecte.

Vom nota cu majuscule A , B, C,...X, Y iar elementele mulțimilor cu litere mici a, b, c,...x, y.

Pentru unele mulțimi care vor fi des utilizate se folosesc notații consacrate. Se notează cu **N** mulțimea numerelor naturale, cu **Z** mulțimea numerelor întregi, cu **Q** mulțimea numerelor raționale, cu **R** mulțimea numerelor reale iar cu **C** mulțimea numerelor complexe.

Legătura dintre un element şi mulțimea din care face parte este dată de relația "$\in$ "numită relația de apartenență. Dacă A este o mulțime şi x un element al său vom scrie $x \in A$ şi vom citi "x aparține lui A".

Dacă A şi B sunt două mulțimi, vom spune că A este o submulțime a lui B şi vom scrie $A \subset B$ (A este inclusă în B) dacă orice element al mulțimii A este şi element al mulțimii B.

Simbolic scriem $A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$.

În teoria mulțimilor admitem existența mulțimii care nu are nici un element, notată cu $\varnothing$ şi numită mulțimea vidă. Mulțimea vidă este o submulțime a oricărei mulțimi.

Două mulțimi sunt egale, A şi B, dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

Relația de incluziune "$\subset$ " ne permite să definim clasa părților unei mulțimi X, notată cu $P(X)$ şi care are ca obiecte toate submulțimile mulțimii X.

Definim în clasa părților $P(X)$, ale unei mulțimi X, operațiile:

reuniunea a două mulțimi A şi B reprezintă mulțimea

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

intersecția a două mulțimi A şi B reprezintă mulțimea

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

Două mulțimi se numesc disjuncte dacă $A \cap B = \varnothing$

diferența mulțimilor B şi A înseamnă mulțimea

$$B \setminus A = \{x \,/\, x \in B \text{ sau } x \notin A\}$$

Dacă $A \subset B$ atunci $B \setminus A$ se numeşşte ***complementara*** lui A în raport cu B şi se notează cu $C_B A$. În clasa părților $P(X)$ ale mulțimii X, notăm cu $\overline{A} = C_X A$, complementara lui A în raport cu X, şi o vom numi simplu complementara lui A.

Este simplu de dovedit că dacă $A, B \in P(X)$ atunci $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.

produsul cartezian al mulțimilor A şi B înseamnă mulțimea

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

Un element *(a,b)* $\in A\times B$ se numeşte *pereche ordonată.*
Două perechi ordonate (a_1,a_2) şi (b_1,b_2) sunt egale dacă şi numai dacă $a_1 = b_1$ şi $a_2 = b_2$.

În mod analog se pot defini operațiile de reuniune, intersecție şi produs scalar pentru trei sau mai multe mulțimi.

Prin produsul cartezian al mulțimilor $X_1, X_2, \ldots, X_n$, înțelegem mulțimea sistemelor ordonate $(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ cu $x_1 \in X_1, \forall i = \overline{1,n}$, adică

$$X_1\times X_2\times \ldots\times X_n= \{(x_1,x_2,\ldots, x_n) / x_i \in X_I, , \forall i = \overline{1,n}, \}$$

Un element al acestui produs cartezian îl vom numi *n - uplă.* Două n – uple $(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ şi $(y_1,y_2,\ldots, y_n)$ sunt egale dacă şi numai dacă $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Dacă $X_1 = X, , \forall i = \overline{1,n}$ atunci vom folosi notația

$X \times X \times \ldots \times X = X''$.

Numim *partiție* pe mulțimea *X* o familie da părți ale lui *X*, disjuncte două câte două şi a căror reuniune este egală cu *X*.

Relații

Fie *A* şi *B* două mulțimi nevide.

O corespondență între elementele celor două mulțimi se numeşte *relație binară.* Dacă $a\in A$ şi $b\in B$ şi notăm cu R relația între *A* şi *B*, atunci vom citi "*a* este în relația R cu *b*" şi vom nota cu *a*R*b.* Mulțimea *A* se numeşte mulțime de plecare iar *B* mulțimea de sosire. Cele două mulțimi nu au un rol simetric, motiv pentru care vom gândi elementele ce sunt în relația R ca pe nişte perechi ordonate. Astfel, o relație binară o putem defini ca o submulțime *G* a produsului cartezian $A\times B$. O relație R între elementele mulțimilor *A* şi *B* va fi dată prin tripletul R = *(G:A,B),* unde $G\subset A\times B$ va fi numit *graful* relației R iar *A* şi *B* sunt mulțimea de plecare respectiv mulțimea de sosire.

Dacă $B = A$, relația binară R se numeşte simplu relație binară pe mulțimea *A.* O relație binară pe o mulțime se notează de regulă cu R, ~,ρ,etc.

1.1.1 Definiție. *O relație binară "~" pe A se numeşte relație de echivalență dacă* $\forall a, b, c\in A$*, următoarele condiții sunt verificate:*

1) $a \sim a$ - *reflexivitatea*

2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ - *simetria*

3) $a \sim b$ şi $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ - *tranzitivitatea.*

Dacă o relație de echivalență "~" *pe A,* atunci pentru orice $a\in A$ definim mulțimea

$\hat{a} =\{b\in A / b \sim a \}$
numită *clasa de echivalență* în raport cu relația "~" a elementului *a.* Un element al unei clase de echivalențe va fi numit *reprezentant* al acestei clase.

1.1.2 Teoremă. *Dacă A este o mulțime nevidă şi "~" este o relație de echivalență pe mulțimea A, atunci:*

1) $\forall a \in A \Rightarrow \hat{a} \neq \emptyset$ $(a \in \hat{a})$

2) $\hat{a} = \overline{b}$, $a \sim b$

3) *dacă* $\hat{a}$ *şi* $\hat{b}$ *sunt două clase de echivalență atunci*

$\hat{a} = \hat{b}$ *sau* $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

4) *reuniunea claselor de echivalență este egală cu A.*

Mulțimea claselor de echivalență determinate de relația "~" pe *A* se notează cu $A_{/\sim}$ şi se numeşte *mulțimea cât* a lui *A* în raport cu relația "~".

În baza teoremei 1.2 rezultă că o relație de echivalență determină o partiție pe *A* şi reciproc. O partiție pe mulțimea *A* este definită de clasele de echivalență. Reciproc, o partiție a mulțimii *A* determină o relație de echivalență pe *A*; două elemente din *A* se găsesc în relație dacă ele aparțin la aceeaşi submulțime a partiției.

Exemple

1° Relația de paralelism în mulțimea dreptelor din spațiu este o relație de echivalență. Două drepte d_1 şi d_2 din spațiu spunem că sunt paralele dacă există un plan ce le conține şi care satisfac una din proprietățile:
$d_1 \cap d_2 = \emptyset$ sau $d_1 = d_2$. Putem constata uşor că relația de paralelism astfel definită este o relație de echivalență.

Clasa de echivalență a unei drepte *d* este formată din mulțimea tuturor dreptelor paralele cu *d.* Această clasă de echivalență se numeşte *direcția* determinată de dreapta *d* în spațiul considerat.

2° *Numere cardinale.* Două mulțimi *A* şi *B* se zic cardinal echivalente sau echivalente dacă există o bijecție de la *A* la *B.* Această relație este o relație de echivalență în clasa tuturor mulțimilor. Clasele de echivalență se numesc *numere cardinale.* Vom nota cardinalul mulțimii *A* cu *cardA.* Dacă **N** este mulțimea numerelor naturale vom nota cardinalul acesteia cu $\aleph_0$ (alef zero). Orice mulțime cardinal echivalentă cu **N** se numeşte *numărabilă.*

Dacă *A* şi *B* sunt două mulțimi, *card A = m* şi card *B = n*, atunci $card\,(A \times B) = m \cdot n$.

1.1.3 Teoremă. *O relație binară pe mulțimea A, notată cu "≤", se numeşte relație de* ***ordine*** *dacă*

¬a,b,5 A, sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1) $a \leq a$ - *reflexivitatea*

2) $a \leq b$ şi $b \leq a \Rightarrow a = b$ - *antisimetria*

3) $a \leq b$ şi $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ - *tranzitivitatea.*

O mulțime *A* pe care s-a definit o relație de ordine " ≤ " se numeşte *mulțime ordonată* şi o vom nota prin $(A, \leq)$.

Dacă pentru orice *a,b* 5 *A* avem $a \leq b$ sau $b \leq a$, atunci mulțimea

$(A, \leq)$ se numeşte *total ordonată* sau *lanț*.

Într-o mulțime ordonată $(A, \leq)$ un element a 5 A se numeşte *prim element (*respectiv *ultim element)* al lui A dacă $a \leq x$ (respectiv $x \leq a$) oricare ar fi x 5 A.

Elementul a 5 A se zice *maximal* (respectiv *minimal)* dacă din $a \leq x$ (respectiv $x \leq a$) rezultă $x = a$.

Dacă $B \subset A$, un element a 5 A se zice *majorant (*respectiv *minorant)* al lui B dacă $x \leq a$ (respectiv $a \leq x$) oricare ar fi x 5 B.

Un element a 5 A se numeşte *supremum* (respectiv *infimum*) pentru mulțimea B, dacă $x \leq a$ pentru $\forall x \in B$ şi dacă $x \leq a'$, $\forall x \in B$ atunci $a \leq a'$ (dacă $a \leq x$ pentru $\forall x \in B$ şi dacă $a' \leq x$, $\forall x \in B$ atunci $a' \leq a$). Elementul a 5 A (dacă există) se notează cu *sup* (B) (respectiv *inf* (B)).

O mulțime total ordonată $(A, \leq)$ se zice *inductivă* dacă orice submulțime a sa are un majorant.

În teoria mulțimilor se demonstrează că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° *Axioma alegerii.* Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este o familie de mulțimi nevide atunci $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \neq \emptyset$.

2° *Lema lui Zorn.* O mulțime inductivă nevidă are cel puțin un majorant.

O mulțime ordonată $(A, \leq)$ se zice *bine ordonată,* dacă orice submulțime nevidă a sa are un prim element.

3° *Teorema lui Zermelo.* Dacă A este o mulțime nevidă, atunci există o relație de ordine ", $\leq$" astfel încât $(A, \leq)$ este o mulțime bine ordonată.

Funcții

O relație binară particulară o reprezintă noțiunea de funcție.

Fie două mulțimi oarecare E şi F.

1.1.4 Teoremă. *Se numeşte* ***funcție*** *sau aplicație definită pe E cu valori în F, o corespondență f prin care fiecărui element* $x \in E$ *i se asociază* ***un singur element*** $y \in F$.

Proprietatea relației binare f, ce defineşte o funcție pe E cu valori în F, se numeşte *univocitate,* adică $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Prin funcție se înțelege deci, ansamblul format din mulțimea de plecare F numită *domeniu de definiție,* mulțimea de sosire F numită *mulțimea în care funcția ia valori* şi *legea de corespondență f.* Elementul $y \in F$ care corespunde prin f elementului $x \in E$ se notează prin

$$y = f(x) \text{ sau } x \subset y$$

Elementul $x \in E$ va fi numit *variabilă independentă* sau *argument* iar $y = f(x) \in F$ se numeşte *imaginea* lui x prin f.

Vom folosi notația $f : E \div F,\ y = f(x)$.

Notăm cu F: $(E: F)$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe E cu valori în F. Dacă $E = F$, vom nota mulțimea funcțiilor de la E la F prin

F *(E)*.

Două funcții $f_1, f_2 \in$ **F** *(E, F)* sunt egale, $f_1 = f_2$, dacă şi numai dacă $f_1(x) = f_2(x),\ \forall x \in E$.

Graful corespondenței univoce f, notat cu

$G_f = \{(x, f(x)) / x \in E\} \subset E \div F$.

Două funcții f_1 şi f_2 sunt egale dacă submulțimile produsului cartezian $E\times F$, G_{f_1} şi G_{f_2} sunt egale.

O funcție $f : E \div F$ se numeşte *injectivă* dacă

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Funcția $f : E \div F$ se numeşte *surjectivă* dacă

$$\forall\ y \in F,\ 0\ x \in E \text{ astfel încât } y = f(x)$$

Mulțimea $f(E)$ se numeşte *imaginea* funcției f şi se notează cu

$$\mathrm{Im} f = \{y \in F / 0\ x \in E \text{ astfel încât } y = f(x)\}$$

Funcția $f : E \div F$ este surjectivă dacă şi numai dacă $f(E) = F$. Oricărei aplicații $f : E \div F$ i se poate asocia aplicația surjectivă $f : E \div f(E)$ având acelaşi grafic.

Funcția $f : E \div F$ se numeşte *bijectivă* dacă f este injectivă şi surjectivă.

Două mulțimi sunt în corespondență biunivocă dacă există o aplicație bijectivă $f : E \div F$.

Să considerăm funcțiile $f : E \div F$ şi $g : F \div G$. Funcția $(g \circ f)$:E$\div F$ definită prin relația $(g \circ f)(x) = : g(f(x))$ se numeşte *compunerea* funcțiilor f şi g.

Funcția $1_E \in \mathbf{F}(E)$ definită prin relația $1_E(x) = x$, $\forall x \in E$ se numeşte *funcția identică* a mulțimii E. Graficul acestei funcții reprezintă diagonala produsului cartezian $E\times E$.

O funcție $f{:}E\to F$ se numeşte *inversabilă* dacă există o funcție $f^{-1}{:}F\to E$ numită *inversa* funcției f, care satisface condițiile $f^{-1} \circ f = 1_E$ şi $f \circ f^{-1} = 1_E$.

O funcție $f : E \div F$ este inversabilă dacă şi numai dacă f este bijectivă.

Dacă $y = f(x) \in F$, atunci $x = f^{-1}(y) \in E$ este numit imaginea inversă sau contraimaginea lui y.

O funcție punctuală $f : E \div F$ nu admite întotdeauna inversă, dar gândită ca o aplicație de mulțime are sens să vorbim de imaginea inversă (reciprocă) a unei submulțimi $F' \subset F$ în raport cu f, adică

$$f^{-1}(F') = \{x \in E / f(x) = y \in F'\}$$

O funcție $f : E \div F$ este injectivă dacă şi numai dacă $\forall y \in$F, mulțimea $f^{-1}(\{y\})$ conține cel mult un element.

§1.2 Matrice şi determinanți

Fie $M = \{1,2,...,m\}$ şi $N = \{1,2,...,n\}$ două mulţimi finite şi X un inel cu unitate.

1.2.1 Definiţie. *O aplicaţie* $A : M \times N \to X$, $A(i,j) = a_{ij} \in X$ *se numeşte* ***matrice*** *de tipul* $m \times n$ *cu elemente din inelul X.*

Valorile $A(i,j) = a_{ij}$ se numesc elementele matricei $A : M \times N \to X$ şi în mod tradiţional mulţimea $Im\ A$,organizată într-un tabel dreptunghiular cu m linii şi n coloane, notat cu A, va fi numită matrice dreptunghiulară.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pe scurt, matricea A va fi notată cu $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

O matrice cu o singură linie sau coloană se va numi *matrice linie* respectiv *matrice coloană* sau *vector.*

Schimbarea liniilor în coloane în matricea A se numeşte *transpunerea* lui A, iar matricea care se obţine se notează cu ${}^{t}A$ şi se numeşte *transpusa* matricei A.

Dacă $m = n$, matricea A va fi numită *matrice pătratică,* iar n va fi numit ordinul matricei.

În cele ce urmează, elementele matricelor folosite vor fi considerate din corpul numerelor reale ***R*** sau complexe ***C,*** notat cu ***K.*** Mulţimea matricelor de tipul $m\times n$ cu elemente din ***K*** va fi notată cu $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$.

Definim pe mulţimea $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ operaţiile de adunare a două matrice şi produsul unei matrice cu un scalar.

Dacă $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ sunt două matrice de tipul $m\times n$ atunci matricea $A+B =: (a_{ij} + b_{ij})$ este numită *suma* matricelor A şi B. Proprietăţile operaţiei de adunare a două matrice rezultă din proprietăţile pe care le are suma din corpul ***K.*** Matricea cu toate elementele nule va fi notată cu O şi o vom numi *matricea zero,* iar matricea $-A =: (-a_{ij})$ va fi *opusă* lui A.

Dacă $\lambda \in \boldsymbol{K}$ şi $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$,atunci matricea

$$\lambda A =: (\lambda\, a_{ij})$$

defineşte produsul matricei A cu scalarul λ.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\boldsymbol{K})$ atunci matricea de tipul $m\times p$ dată de

$$AB =: \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)$$

Va fi numită *produsul* matricei A cu matricea B.

Să considerăm mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, notată cu

$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$. În mulțimea $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ produsul a două matrice nu este comutativ. Dacă matricele $A,B\in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ satisfac proprietatea $A\ B = B\ A$ acestea vor fi numite *comutabile.*

O matrice pătratică A cu proprietatea $'A = A('A = -A)$ se numeşte *simetrică* (*antisimetrică*). Orice matrice pătratică poate fi scrisă în mod unic ca suma dintre o matrice simetrică şi o matrice antisimetrică.

O matrice pătratică cu toate elementele situate dedesubtul sau deasupra diagonalei principale nule se numeşte *matrice triunghiulară.*

O matrice pătratică $A = (a_{ij})$ pentru care : $\exists\ k$ astfel încât $a_{kk} \neq 0$ şi

$\forall\ i \neq j,\ a_{ij}\ = 0,$ se numeşte *matrice diagonală.*

Matricea diagonală în care $a_{ij}\ = 1,\ i = \overline{1,n}$ se numeşte *matrice unitate* de ordinul n şi se notează cu I_n.

O matrice pătratică cu proprietatea $'AA = A'A = I$ se numeşte *matrice ortogonală.*

Dacă A este o matrice pătratică, atunci pot fi definite inductiv puterile lui A:

$$A^{\circ} = 1,\ A^n = A{\cdot}A^{n-1},\ \ \forall n\ \in N^*$$

Fie polinomul $f(x)=a_o x^{\ p}+\ a_1 x^{\ p-1}+\ldots+\ a_{p-1}x\ +a_p$ cu coeficienții din câmpul $\boldsymbol{K}$.

Numim *polinom de matrice,* matricea

$$f(A) = a_o A^p+a_1 A^{p-1}+\ldots+a_{p-1}A+a_p I_n$$

unde $A\in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ şi I_n este matricea unitate de ordinul n.

1.2.2 Definiție. *Se numeşte* ***determinantul*** *matricei pătratice* $A\in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$

elementul $\det A\in \boldsymbol{K}$ *dat de*

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma_{(1)}}, a_{2\sigma_{(2)}},\ldots, a_{n\sigma_p}$$

unde S_n *este grupul permutărilor de ordinul n, iar* $\varepsilon_\sigma = \pm 1$

reprezintă signatura permutării $\sigma \in S_n$.

De cum este definit determinantul unei matrice pătratice A rezultă că $\det({}^tA) = \det A$, motiv pentru care orice proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată şi pentru coloane. Să enunțăm principalele proprietăți ale determinanților:

-dacă elementele unei linii sunt reprezentate ca sume de câte doi termeni, atunci determinantul se descompune într-o sumă de doi determinanți.

-dacă elementele unei linii se multiplică cu un număr t , atunci determinantul se multiplică cu t. În general $\det(tA) = t^n \det A$.

-dacă într-un determinant se schimbă două linii între ele, atunci se schimbă şi semnul determinantului.

-valoarea unui determinant nu se schimbă dacă la elementele unei linii adăugăm o combinație liniară formată cu elementele celorlalte linii.

Dacă a_{ij} este un element al matricei A, notăm cu Δ_{ij} determinantul obținut prin suprimarea liniei i şi a coloanei j, numit *minorul* elementului a_{ij}, iar cu $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$ *complementul algebric* al acestui element.

Calculul determinantului matricei A, folosind teorema de dezvoltare după linia i, $\forall\ i = \overline{1,n}$, este dat de formula

$$\mathrm{Det}A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Gamma_{ik}\,,$$

Matricele pătratice $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ pentru care $\det A \neq 0$ se numesc matrice *nesingulare.*

Matricea A^{-1} cu proprietățile $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ se numeşte inversa matricei A. Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă A este nesingulară. Inversa matricei A se poate determina astfel: se calculează $\det A \neq 0$, se află reciproca A^* prin înlocuirea elementelor matricei ${}^tA$ cu complemenții algebrici corespunzători după care obținem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Întrucât, în general, produsul a două matrice nu este comutativ, avem $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Mulțimea matricelor de ordinul n nesingulare împreună cu operația de înmulțire a două matrice formează un grup numit *grupul liniar general de ordinul n,* notat cu $GL\,(n;\boldsymbol{K})$.

Grupul liniar general $GL\,(n;\boldsymbol{K})$ conține câteva subgrupuri remarcabile:

$$GO\,(n;\boldsymbol{K}) = \{A \in GL(n;\boldsymbol{K}) / {}^tA = A^{-1}\}$$

numit *grupul ortogonal* de ordinul n

$$SO\,(n;\boldsymbol{K}) = \{A \in GL(n;\boldsymbol{K}) / {}^tA = A^{-1} \text{ şi } \det A = 1\}$$

numit *grupul ortogonal special* de ordinul n.

§1.3 Sisteme de ecuații liniare

Fie sistemul de *m* ecuații cu *n* necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

Sistemul (3.1) poate fi scris condensat sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad 1 \le j \le m \qquad (3.1)'$$

Dacă notăm cu $A = (a_{ij})$, matricea de tipul $m \times n$, matricea coeficienților necunoscutelor sistemului $X = {}'(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ și $B = {}'(b_1,b_2,\ldots,b_m)$, sistemul (3.1) se scrie în mod echivalent sub forma matriceală:

$$AX = B \qquad (3.1)''$$

Prin *soluție* a sistemului (3.1) înțelegem *n-upla* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ care satisface simultan toate ecuațiile sistemului.

Ordinul maxim al deteminanților cu elemente din A , nenuli este numit *rangul* matricei A, iar un astfel de determinant este numit *determinant principal.* Ecuațiile ce conțin elemente din determinantul principal se numesc ecuații principale iar celelalte se numesc ecuații secundare. Analog vom numi necunoscute principale, respectiv necunoscute secundare.

Se numește *determinant caracteristic,* determinantul obținut prin bordarea determinantului principal cu coeficienții corespunzători dintr-o ecuație secundară și coloana termenilor liberi, respectiv necunoscute secundare.

1.3.1 Teoremă. *(Rouche) Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții sunt nuli.*

În cazul în care rangul matricei A, $r = rang\ A$, este egal cu numărul ecuațiilor, convenim că teorema lui Rouche este satisfăcută.

Un sistem compatibil admite soluțiile unică (este determinat) dacă toate necunoscutele sunt principale, $r = n$. În caz contrar sistemul admite o infinitate de soluții (este nedeterminat), $r < n$.

Dacă $r = m = n$ sistemul (3.1) este numit sistem Cramer, caz în care componentele soluției sunt date de $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} =, i = \overline{1,n}$.

Sistemul (3.1) în care $b_i=0$, $i = \overline{1,n}$ se numește *sistem omogen.* Un sistem omogen este întotdeauna compatibil, admițând cel puțin soluția banală

(0,0,..,0). Pentru ca un sistem de ecuații liniare şi omogene să admită şi soluții diferite de soluția banală impunem condiția $r < n$.

§1.4 Legi de compoziție

Fie X o mulțime nevidă.

1.4.1 Definiție *Se numeşte* ***lege de compoziție internă*** *pe X (sau operație algebrică) o aplicație " * "a produsului cartezian* $X \times X$ *cu valori în X.*

Legea de compoziție internă " * "asociază oricărei perechi $(x,y) \in X \times X$ un element $z = x * y \in X$,numit compusul lui x cu y.

Exemple

1° Pe mulțimea numerelor complexe ***C*** şi pe orice submulțime a sa se defineşte legea de compoziție internă " + " : $C \times C \rightarrow C$, $(z_1,z_2) \mapsto z = z_1 + z_2$ numită suma a două numere complexe.

2° În clasa ***P(X)*** a părților unei mulțimi X operația de intersecție " $\cap$ " a două mulțimi defineşte pe ***P(X)*** o lege de compoziție internă.

Fie $Y \subset X$ o submulțime nevidă şi " * " o lege de compoziție internă pe X, atunci mulțimea Y se numeşte *parte stabilă* în raport cu operația " * " dacă $\forall\, x, y \in Y$ avem $x * y \in Y$. Dacă $Y \subset X$ este parte stabilă în raport cu operația " * " definită pe X, atunci restricția aplicației " * " la mulțimea $Y \times Y$ se numeşte *lege de compoziție indusă* de " * " pe Y.

În cele ce urmează vom prezenta câteva proprietăți, notate cu " ***I*** ", ale operațiiilor algebrice cu ajutorul cărora se definesc structurile algebrice fundamentale.

I_a) *asociativitatea*

$$\forall\, x, y, z \in X,\ x * (y * z) = (x * y) * z$$

I_b) *elementul neutru*

$$\forall\, x \in X,\ \exists\, e \in X \text{ astfel încât } x * e = e * x = x$$

Dacă legea de compoziție este de tip aditiv, elementul neutru e se numeşte *elementul nul* şi va fi notat cu 0 (zero) , iar în cazul unei legi de tip multiplicativ e este numit *element unitate* şi va fi notat cu 1 (unu).

I_c) *elementul simetric*

$$\text{dacă } x \in X,\ \exists\, x' \in X \text{ astfel încât } x * x' = x' * x = e$$

Dacă legea de compoziție este de tip aditiv, elementul simetric x' va fi numit *opusul* lui x şi va fi notat cu $-x$, iar dacă legea de compoziție este de tip multiplicativ atunci x' va fi numit *inversul* lui x şi va fi notat cu x^{-1}.

Dacă o lege de compoziție internă pe X este asociativă şi admite element neutru, atunci orice element are cel mult un simetric. În adevăr, dacă x ar admite două elemente simetrice x' şi x'' atunci

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

I_d) *comutativitatea*

$$\forall x, y \in X \text{ avem } x * y = y * x$$

Dacă pe mulțimea X sunt definite două legi de compoziție notate cu " * " şi respectiv " $\circ$ " proprietatea

(D) $\forall x, y, z \in X,\ x*(y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

va fi numită *distributivitatea* legii " * " față de legea " $\circ$ ".

1.4.2 Definiție. *O submulțime $X \neq \emptyset$ împreună cu o lege de compoziție internă asociativă se numeşte **monoid** sau **semigrup**.*

Dacă în plus operația algebrică " * " are element neutru (este comutativă) se spune că $(X,*)$ este un *monoid* cu *unitate* sau *unitar* (monoid comutativ sau abelian).

1.4.3 Definiție. *O mulțime $G \neq \emptyset$ împreună cu o lege de compoziție internă " * " asociativă cu element neutru şi care are proprietatea că orice element din G este inversabil se numeşte **grup**.*

În plus dacă legea de compoziție internă este comutativă atunci (G,*) se numeşte *grup abelian.*

Vom spune că operația " * " definită pe mulțimea G cu proprietățile enunțate determină pe G o structură de grup, iar proprietățile I_a, I_b, I_c (I_c satisfăcută pentru $\forall x \in X$) vor fi numite axiomele structurii de grup. Dacă operația " * " este adunarea (înmulțirea) atunci grupul se numeşte *grup aditiv (multiplicativ).*

Într-un grup (G,*) ecuațiile: $a * x = b$ şi $x * a = b$ au soluții unice.

Exemple

1° Mulțimea numerelor întregi ***Z*** împreună cu operația de adunare este un grup abelian. În schimb mulțimea Z înzestrată cu operația de înmulțire nu este grup, singurele elemente inversabile sunt 1 şi –1.

2° Într-un semigrup cu unitate, submulțimea elementelor inversabile formează împreună cu operația indusă o structură de grup.

1.4.4 Definiție. *Submulțimea $H \subset G$ a grupului (G.*) se numeşte subgrup al grupului G dacă legea de compoziție internă induce pe H o structură de grup, adică (H,*) este grup.*

1.4.5 Propoziţie. *Dacă (G.*) este un grup şi $H \subset G$ o submulţime, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) *H este un subgrup al lui G*
2) $\forall x,y \in H \Rightarrow x * y \in H$ *şi* $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

1.4.6 Definiţie. *Două elemente x, $y \in H$ se zic echivalente la dreapta modulo H, $x \sim y$, dacă $y^{-1}x \in H$.*

Relaţia $"\sim"$ este o relaţie de echivalenţă pe *H*. Mulţimea claselor de echivalenţă la dreapta se numeşte mulţimea factor şi se notează cu *G*/*H*. Analog se pot defini şi clasele de echivalenţă la stânga. Dacă *G* este un grup comutativ atunci o clasă de echivalenţă la stânga este clasă de echivalenţă la dreapta şi reciproc.

1.4.7 Definiţie. *Un subgrup H al grupului (G.*) se numeşte* ***divizor normal*** *(subgrup normal) dacă $x\,h\,x^{-1} \in H$ pentru $\forall x \in G$ şi $h \in H$.*
Într-un grup abelian orice subgrup este un divizor normal.

1.4.8 Propoziţie. *Dacă H este un divizor normal al grupului (G, $\circ$) atunci clasele de echivalenţă la dreapta coincid cu clasele de echivalenţă la stânga şi în plus mulţimea G/H poate fi înzestrată cu o structură de grup numit* ***grupul factor.***

1.4.9 Definiţie. *Fie grupurile (G,*) şi (G',$\circ$). O aplicaţie $f : G \rightarrow G'$ se numeşte morfism (homomorfism sau omomorfism) de grupuri dacă este satisfăcută relaţia:*

$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \ \forall x,y \in G$

Dacă aplicaţia *f* este bijectivă (injectivă, surjectivă) atunci morfismul *f* va fi numit *izomorfism (monomorfism, epimorfism).*

În cazul în care G = G', morfismul (izomorfismul) de grupuri $f : G \rightarrow G'$ este numit *endomorfism (automorfism).*

1.4.10 Definiţie. *O mulţime nevidă A, împreună cu două legi de compoziţie interne, dintre care una se notează de obicei aditiv " +", iar cealaltă multiplicativ " $\cdot$" , se numeşte* ***inel*** *dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1° $(A,+)$ *este grup abelian*

2° $(A, \cdot)$ *este semigrup*

3° *operaţia de înmulţire este distributivă faţă de adunare:*

$$x(y + z) = xy + xz, \ \forall x,y,z \in A.$$

Dacă $(A,+,\circ)$ este un inel pentru care înmulţirea este comutativă atunci $(A,+,\circ)$ va fi numit *inel comutativ.*

Dacă $(A,+,\circ)$ este un inel în care înmulțirea admite element neutru, atunci $(A,+,\circ)$ se va numit *inel cu unitate* sau *inel unitar*.

1.4.11 Definiție. *Un inel unitar* $(K,+,\circ)$ *în care orice element nenul este inversabil se numeşte* ***corp.***

Un corp în care înmulțirea este comutativă va fi numit corp *comutativ* sau *câmp.*

1.4.12 Definiție. *O aplicație $f : K \to L$ unde **K** și **L** sunt două corpuri (inele), se numeşte morfism de corpuri (inele) dacă sunt satisfăcute proprietățile:*

1) $f(x+y) = f(x)+f(y),\ \forall x,y \in K$

2) $f(xy) = f(x)\, f(y),\ \forall x,y \in K$

Dacă în plus, f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de corpuri (inele).

Exemple

1° Mulțimea $(\boldsymbol{Z},+,\circ)$ formează un inel cu unitate numit inelul întregilor.

2° Mulțimea M(m;A), a matricelor pătratice de ordinul *m* cu elemente din inelul *A,* împreună cu operațiile de adunare şi înmulțire a două matrice, formează o structură de inel unitar.

3° Mulțimea numerelor reale **R** dotată cu operațiile de adunare şi înmulțire formează un corp comutativ.

Fie X şi Ω două mulțimi nevide oarecare

1.4.13 Definiție. *Se numeşte lege de **compoziție externă** pe X cu operatori din* Ω *o aplicație* $f : \Omega \times X \to X$ *care asociază oricărei perechi ordonate* $(a,x) \in \Omega \times X$, *un element* $z =: ax \in X$.

De exemplu dacă $A = (a_{ij}) \in \boldsymbol{M}_{n\times m}(\boldsymbol{K})$ este o matrice de tip $n\times m$ cu elemente din corpul ***K,*** iar ca mulțime de operatori scalari considerăm mulțimea numerelor reale ***R,*** atunci produsul unei matrice cu un număr real, $\alpha A =: (\alpha a_{ij})$, defineşte o lege de compoziție externă pe muțimea $\boldsymbol{M}_{n\times m}(\boldsymbol{K})$.

Dacă mulțimile X şi A sunt înzestrate cu operații algebrice interne atunci pe mulțimea X pot fi definite alte tipuri de structuri.

1.4.14 Definiție. *Fie A un inel unitar. Se numeşte A – modul de stânga (sau modul la stânga peste A) o mulțime nevidă X pentru care sunt îndeplinite condițiile:*

I. *(X, +) este o structură de grup abelian*

II. *legea de compoziție externă* $\varphi : A \times X \to X$ *satisface axiomele:*

a) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

b) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

c) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$

d) $1 \cdot x = x, \quad$ *pentru* $\forall \alpha, \beta \in A$ şi $\forall x,y \in X.$

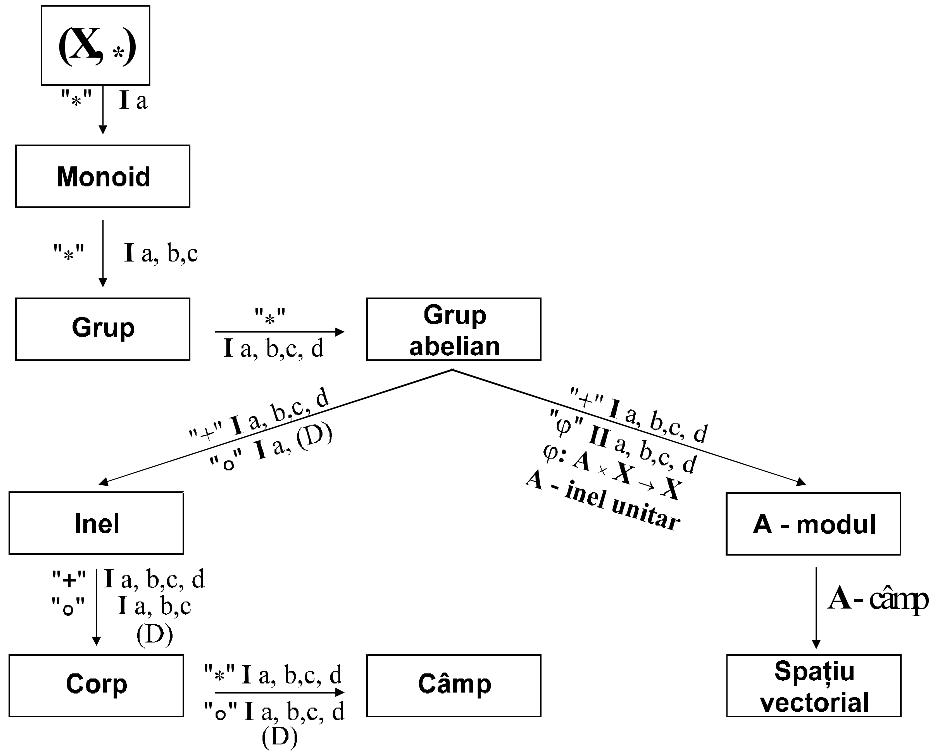
Observații

1° Noțiunea de A modul la dreapta se defineşte în mod similar, considerând aplicația $\varphi : A \times X \to X, (x,a) \to x\, a.$

2° Dacă inelul A este comutativ, atunci orice A – modul la stânga este un A – modul la dreapta, şi reciproc.

3° Dacă A este un corp comutativ (câmp) atunci $(X, +, \varphi)$ se numeşte *spațiu vectorial.* Aceată structură va fi studiată în capitolul următor.

Structurile algebrice definite anterior pot fi prezentate schematic în modelul următor, unde ″ * ″ (+ sau ∘) desemnează o lege de compoziție internă pe X ce satisface una sau mai multe proprietăți din grupa I, iar φ defineşte o lege de compoziție externă ce satisface grupa a II – a de axiome.



Un model similar poate fi construit pentru substructuri.

§ 1.5 BIBLIOGRAFIE

1.5.1 Năstăsescu C. şi colectiv: Exerciții şi probleme de algebră pentru clasele IX-XII,E.D.P., Bucureşti, 1991.

1.5.2 Năstăsescu C., Niță C., Stănescu I., Elemente de algebră superioară, Manual pentru clasa a XI-a, E.D.P., Bucureşti, 1984.

1.5.3 Năstăsescu C., Niță C., Brandiburu M., Joița D., Algebră, Culegere de probleme pentru liceu , clasele IX-XII, Ed. Rotech. Pro 1997.

1.5.4 Petrică I., Lazăr I., Probleme de Algebră pentru liceu, vol.III (clasele XI-XII), Ed. Petrion, 1997.

Capitolul 2

SPAŢII VECTORIALE

Acest capitol este dedicat prezentării noţiunii de spaţiu vectorial şi studierii subspaţiilor sale vectoriale. Submulţimile de vectori liniar independenţi şi liniar dependenţi permit definirea noţiunilor de **bază** şi **dimensiune** ale unui spaţiu vectorial. În final, sunt prezentate spaţiile vectoriale euclidiene, adică acele spaţii vectoriale pe care s-a definit un produs scalar, ceea ce permite concretizarea noţiunilor de lungime a unui vector, unghiul a doi vectori, ortogonalitate, ş.a.

Obiective operaţionale:

2.1. Să prezinte, exemplificând, noţiunea de spaţiu vectorial
2.2. Să fie capabil să decidă când o submulţime nevidă a unui spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial al acestuia
2.3. Să reţină noţiunile de bază şi dimensiune
2.4. Să vizualizeze spaţiile vectoriale n-dimensionale pentru n=1,2,3 şi să exemplifice abstractizarea lor.

Conţinutul capitolului:

§2.1. Spaţiu vectorial: definiţie şi exemple

Noţiunea de spaţiu vectorial constituie obiectul de studiu al algebrei liniare şi reprezintă una dintre cele mai importante structuri algebrice utilizată în diferite ramuri ale matematicii precum şi în disciplinele aplicate.

1.1 Definiţie. *O mulţime nevidă **V** se numeşte **spaţiu vectorial** (liniar) peste câmpul **K** (pe scurt **K**-spaţiu vectorial) dacă sunt indeplinite următoarele condiţii:*

I. (V, +) formează o structură de grup abelian (de tip aditiv), adică

a) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x, y, z \in V$
b) $\exists\ 0 \in V$ astfel încât $\forall x \in V,\ x + 0 = 0 + x$
c) $\forall x \in V,\ \exists -x \in V,\ x + (-x) = (-x) + x = 0$
d) $\forall x, y \in V,\ x + y = y + x$

II. Legea de compoziţie externă $\varphi : \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{V}$, $\varphi(\alpha, x) = \alpha x$, *satisface axiomele:*

a) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
b) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
c) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
d) $1\cdot x = x,\qquad \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{K},\quad \forall x, y \in \boldsymbol{V}.$

Condiţiile I şi II reprezintă axiomele spaţiului vectorial peste câmpul ***K***.

Elementele mulţimii ***V*** se numesc *vectori*, elementele câmpului ***K*** se numesc *scalari*, iar legea de compoziţie externă se numeşte înmulţirea cu scalari.

Dacă corpul comutativ ***K*** este corpul numerelor reale ***R*** sau complexe ***C***, vom vorbi atunci despre un spaţiu vectorial real, respectiv spaţiu vectorial complex.

În majoritatea cazurilor vom întâlni spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale şi le vom numi simplu "spaţii vectoriale", iar în celelalte cazuri vom indica câmpul scalarilor.

Dacă notăm cu 0_V vectorul nul al grupului aditiv ***V*** şi cu 0_K scalarul nul, atunci din axiomele care definesc spaţiul vectorial ***V*** peste câmpul ***K*** avem următoarele proprietăţi:

2.1.2 Corolar *Dacă **V** este un spaţiu vectorial peste câmpul **K**, atunci pentru,* $\forall x \in \boldsymbol{V}$, $\forall \alpha \in \boldsymbol{K}$ *au loc proprietăţile:*
1) $0_K x = 0_V$
2) $\alpha 0_V = 0_V$
3) $(-1)x = -x$.

Demonstrație:

1) Folosind axiomele II_b şi II_d avem $0_K x = (0_K + 0_K)x = = 0_K x + 0_K x$ $\Rightarrow$ $0_K x = 0_V$.

2) Ținând cont de I_b şi II_a, $\alpha 0_V = \alpha(0_V + 0_V) = \alpha 0_V + \alpha 0_V$ din care obținem $\alpha 0_V = 0_V$.

3) din axiomele grupului aditiv ale câmpului $\boldsymbol{K}$, consecința 1) şi axioma I_c avem $x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0_K x = 0_V$ de unde obținem $(-1)x = -x$.

Exemple

1° Fie $\boldsymbol{K}$ un corp comutativ. Ținând cont de structura aditivă abeliană a câmpului $\boldsymbol{K}$, atunci mulțimea $\boldsymbol{K}$ reprezintă un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial. Mai mult dacă $\boldsymbol{K}' \subset \boldsymbol{K}$ este un subcorp, atunci $\boldsymbol{K}$ este un $\boldsymbol{K}'$-spațiu vectorial. Mulțimea numerelor complexe $\boldsymbol{C}$ poate fi privită ca un $\boldsymbol{C}$-spațiu vectorial sau $\boldsymbol{R}$-spațiu vectorial respectiv $\boldsymbol{Q}$-spațiu vectorial.

2° Mulțimea $\boldsymbol{K}^n = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K} \times \ldots \times \boldsymbol{K}$, unde $\boldsymbol{K}$ este un corp comutativ, este un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial, numit *spațiul aritmetic* (*standard*),în raport cu operațiile : $\forall\, x,y \in \boldsymbol{V}$ $,\forall \alpha \in \boldsymbol{K}$, $x = (x_1, x_2,..,x_n)$, $y = (y_1, y_2,..,y_n)$

$$x + y =: (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x =: (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

3° Mulțimea matricelor $\mathrm{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$, este un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial în raport cu operațiile:

$$A + B =: (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\alpha A =: (a_{ij}), \qquad \forall\, A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K}),\ \forall \alpha \in \boldsymbol{K}.$$

4° Mulțimea $\boldsymbol{K}[X]$ a polinoamelor cu coeficienți din câmpul $\boldsymbol{K}$ este un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial în raport cu operațiile:

$$f + g =: (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...), \qquad \alpha f =: (\alpha a_0, \alpha a_1, ...),$$

$$\forall\, f = (a_0, a_1,..),\ g = (b_1, b_2,..) \in \boldsymbol{K}[X],\ \forall \alpha \in \boldsymbol{K}.$$

5° Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare şi omogene formează un spațiu vectorial peste câmpul $\boldsymbol{K}$ al coeficienților acestui sistem. Soluțiile unui sistem de m ecuații cu n necunoscute, privite ca elemente din $\boldsymbol{K}^n$ (*n-uple*), pot fi însumate şi înmulțite cu un scalar respectând adunarea şi produsul cu scalari definite pe $\boldsymbol{K}^n$.

6° Mulțimea vectorilor liberi V_3 din spațiul punctual al geometriei elementare este un $\boldsymbol{R}$-spațiu vectorial

Pentru a construi această mulțime să considerăm spațiul geometric E_3 şi mulțimea $M = E_3 \times E_3 = \{(A, B)/\ A, B \in E_3\}$. Elementele mulțimii M sunt numite *bipuncte* sau *segmente orientate* şi vor fi notate prin $\overrightarrow{AB}$. Punctul A va fi numit originea iar B va fi numit extremitatea segmentului $\overrightarrow{AB}$. În cazul în care originea şi extremitatea coincid se obține segmentul nul (A, A).

Dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte dreapta suport a segmentului $\overrightarrow{AB}$. Două segmente orientate au aceeaşi direcţie dacă dreptele suport sunt paralele sau coincid.

Două segmente orientate nenule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ cu aceeaşi direcţie, au acelaşi sens dacă extremităţile lor se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta ce uneşte originile celor două segmente,

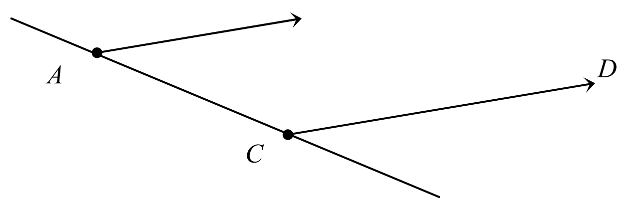


Fig.1

Lungimea (modulul sau norma) unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ se defineşte ca fiind lungimea geometrică a segmentului neorientat [AB], adică distanţa de la punctul A la punctul B şi va fi notată cu $|\overrightarrow{AB}|$ ($\|\overrightarrow{AB}\|$). Segmentul nul are lungimea zero .

Pe mulţimea M introducem relaţia de *echipolenţă* "~".

Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ se zic *echipolente* dacă acestea au aceeaşi direcţie ,acelaşi sens şi aceeaşi lungime, (fig.2) :

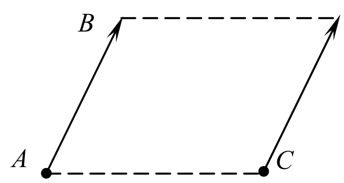


fig.2

Se verifică uşor că relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea M (este reflexivă, simetrică şi tranzitivă).

Mulţimea claselor de echivalenţă, în raport cu această relaţie:

$$M_{/\sim} = \{\widehat{(A,B)} \mid A,B \in E_3\} = V_3$$

defineşte mulţimea vectorilor liberi ai spaţiului geometric E_3. Clasa de echivalenţă a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ va fi notată cu $\overline{AB} = \overline{v}$ şi va fi numită *vector liber* iar segmentul orientat $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$ va fi numit reprezentantul vectorului liber $\overline{v}$ în punctul A. Direcţia, sensul şi lungimea care sunt comune tuturor elementelor unei clase de echivalenţă definesc direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber. Pentru lungimea unui vector liber vom folosi notaţiile $|\overline{v}|$ sau $\|\overline{v}\|$. Vectorul liber de lungimea zero se numeşte *vectorul nul* şi se notează cu $\overline{0}$. Un vector liber de lungime unu se numeşte *vector unitate* sau *versor*.

Doi vectori liber $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt egali $\overline{u} = \overline{v}$ dacă reprezentanţii lor sunt două segmente orientate echipolente.

Doi vectori liberi care au aceeaşi direcţie se numesc vectori *coliniari*. Doi vectori coliniari cu aceeaşi lungime şi de sensuri opuse se numesc *vectori opuşi*.

Trei vectori liberi se numesc *coplanari* dacă segmentele orientate corespunzătoare sunt paralele cu un plan.

Mulţimea V_3 poate fi organizată ca un grup aditiv abelian.

Dacă vectorii liberi $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt reprezentaţi de segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ şi respectiv $\overrightarrow{AC}$, atunci vectorul reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AD}$ defineşte suma vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ şi se notează cu $\overline{w} = \overline{u} + \overline{v}$ (fig. 3)

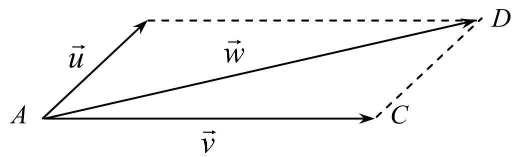


fig.3

Regula ce defineşte suma a doi vectori liberi $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ este numită regula paralelogramelor (sau regula triunghiului).

Suma a doi vectori liberi "+": $V_3 \times V_3 \to V_3$, $(\overline{u}, \overline{v}) \mapsto \overline{u} + \overline{v}$ este o lege de compoziţie internă bine definită (nu depinde de alegerea reprezentanţilor). Axiomele de grup aditiv abelian sunt uşor de verificat.

Legea de compoziţie externă

$$\varphi : \boldsymbol{K} \times V_3 \to V_3, \qquad \varphi(\alpha, \overline{v}) = \alpha\overline{v}$$

unde vectorul $\alpha\overline{v}$ este caracterizat de aceeaşi direcţie cu $\overline{v}$, acelaşi sens dacă $\alpha > 0$, sens opus dacă $\alpha < 0$ şi $\|\alpha\overline{v}\| = |\alpha|\,\|\overline{v}\|$, satisface axiomele grupei a II-a din definiţia unui spaţiu vectorial.

În concluzie,cele două operaţii definite pe V_3, satisfăcând axiomele grupei I şi II, înzestrează mulţimea vectorilor liberi cu o structură de spaţiu vectorial real.

§ 2.2. Subspaţii vectoriale

Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial peste câmpul $\boldsymbol{K}$.

2.1 Definiţie. *O submulţime nevidă* $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$ *se numeşte* ***subspaţiu vectorial*** *al lui* $\boldsymbol{V}$ *dacă operaţiile algebrice de pe* $\boldsymbol{V}$ *induc pe* $\boldsymbol{U}$ *o structură de* $\boldsymbol{K}$*-spaţiu vectorial.*

2.2 Teoremă. *Dacă **U** este o submulțime a **K**-spațiului vectorial **V**, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

*1° **U** este subspațiu vectorial în **V***
2° $\forall x, y \in \boldsymbol{U}$, $\forall \alpha \in \boldsymbol{K}$ avem
a) $x + y \in \boldsymbol{U}$
b) $\alpha x \in \boldsymbol{U}$
3° $\forall x, y \in \boldsymbol{U}$, $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{U} \Rightarrow \forall \alpha x + \beta y \in \boldsymbol{U}$.

Demonstrație

1° → 2°: dacă $U \subset V$ este un subspațiu rezultă că pentru $\forall x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ *și pentru* $\forall x \in U$ și $\forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in U$, întrucât cele două operații induc pe submulțimea U o structură de spațiu vectorial.

2° → 3°: $\forall x, y \in U$, $\alpha, \beta \in K \overset{b}{\Rightarrow} \alpha x \in U$ și $\beta y \in U \overset{a}{\Rightarrow} \alpha x + \beta y \in U$.

3° → 1°: $\forall x, y \in U$ și pentru $\alpha = 1$, $\beta = -1$ rezultă că $x - y \in U$ ceea ce demonstrează că $U \subset V$ este un subgrup abelian. Pe de altă parte pentru $\forall x, y \in U$, $\forall \alpha \in K$ și $\beta = 0 \Rightarrow \alpha x \in U$ iar axiomele II din definiția unui spațiu vectorial se verifică imediat, deci submulțimea $U \subset V$ posedă o structură de spațiu vectorial.

Exemple

1° Mulțimea $\{0\} \subset \boldsymbol{V}$ este subspațiu în $\boldsymbol{V}$, numit *subspațiul nul* al lui $\boldsymbol{V}$. Orice subspațiu diferit de spațiul vectorial $\boldsymbol{V}$ și de subspațiul nul $\{0\}$ se numește *subspațiu propriu*.

2° Mulțimea matricelor simetrice (antisimetrice) de ordinul n este un subspațiu al mulțimii matricelor pătratice de ordinul n.

3° Mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de grad $\leq n$, $\boldsymbol{R}[X] = \{f \in \boldsymbol{R}[X] / \text{grad } f \leq n\}$ reprezintă un subspațiu vectorial al spațiului vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali.

4° Submulțimile

$$R_x = \{(x, 0)/x \in \boldsymbol{R}\} \subset \boldsymbol{R}^2 \quad R_y = \{(0, y)/x \in \boldsymbol{R}\} \subset \boldsymbol{R}^2.$$

sunt subspații vectoriale ale spațiului aritmetic $\boldsymbol{R}^2$. Mai general, mulțimea punctelor de pe orice dreaptă ce trece prin originea spațiului $\boldsymbol{R}^2$, determină un subspațiu vectorial. Aceste subspații vectoriale reprezintă mulțimea soluțiilor unor ecuații liniare și omogene în două necunoscute.

2.2.3 Propoziție. *Fie V_1 și V_2 două subspații în K-spațiul vectorial V. Submulțimile $V_1 \cap V_2 \subset V$ și $V_1 + V_2 = \{v \in V / v = v_1 + v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \subset V$ sunt subspații vectoriale.*

Demonstrație. Pentru $\forall\, x, y \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x, y \in V_1$ și $x, y \in V_2$ cum V_1 și V_2 sunt subspații vectoriale ale lui V rezultă că pentru $\forall\, \alpha, \beta \in K$ avem $\alpha x + \beta y \in V_1$ și $\alpha x + \beta y \in V_2$, deci $\alpha x + \beta y \in V_1 \cap V_2$. Folosind Teorema 2.1 rezultă prima parte a propoziției.

Dacă $u = u_1 + u_2 \in V_1 + V_2$ și $v = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$ atunci pentru $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $au + \beta y = \alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) = (\alpha u_1 + \alpha u_2) + (\beta v_1 + \beta v_2)$. Cum V_1 și V_2 sunt subspații vectoriale, $\Rightarrow$ $\alpha u_1 + \beta v_1 \in V_1$ și $\alpha u_2 + \beta v_2 \in V_2$, c.c.t.d.

Observație. Submulțimea $V_1 \cup V_2 \subset V$ nu este un subspațiu vectorial.

Exemplu. Subspațiile vectoriale R_x și R_y definite în exemplul 4°, verifică relațiile:

$R_x \cap R_y = \{0\}$ și $R_x + R_y = \boldsymbol{R}^2$.

În adevăr, dacă $(x, y) \in R_x \cap R_y \Leftrightarrow (x, y) \in R_x$ și $(x, y) \in R_y \Leftrightarrow y = 0$ și $x = 0$, ceea ce dovedește că subspațiul $R_x \cap R_y$ este format numai din vectorul nul.

Pentru $\forall\, (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, $\exists\, (x, 0) \in R_x$, $\exists\, (0, y) \in R_y$, astfel încât $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ ceea ce demonstrează că $\boldsymbol{R}^2 \subset R_x + R_y$. Incluziunea inversă este evidentă.

2.2.4 Propoziție. *Fie V_1, $V_2 \subset V$ două subspații vectoriale și $v \in V_1 + V_2$. Descompunerea $v = v_1 + v_2$ este unică dacă și numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.*

Demonstrație: Necesitatea condiției o demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ $\exists\, v \neq 0$ ce poate fi scris $v = 0 + v$ sau $v = v + 0$, ceea ce ar contrazice unitatea scrierii, deci $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Pentru a demonstra suficiența condiției admitem că $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$. Deoarece $v_1, v_1' \in V_1$ și $v_2, v_2' \in V_2$, vectorul $u = v_1 - v_1' = v_2' - v_2$ este conținut în $V_1 \cap V_2$. Cum $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ rezultă că $v_1 = v_1'$ și $v_2 = v_2'$, adică unicitatea descompunerii.

Dacă V_1 și V_2 sunt două subspații vectoriale ale subspațiului vectorial V și $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ atunci suma $V_1 + V_2$ se numește *sumă directă* și se notează cu $V_1 \oplus V_2$. În plus, dacă $V_1 \oplus V_2 = V$, atunci V_1 și V_2 se numesc *subspații suplimentare*. În cazul în care $V_1 \subset V$ este un spațiu vectorial dat și există un unic subspațiu $V_2 \subset V$ astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$, atunci V_2 se numește complementul algebric al subspațiului V_1.

Exemplu. Subspațiile vectoriale R_x și R_y, satisfăcând proprietățile $R_x \cap R_y = \{0\}$, $R_x + R_y = \boldsymbol{R}^2$, sunt subspații vectoriale suplimentare, iar spațiul aritmetic $\boldsymbol{R}^2$ poate fi reprezentat sub forma $\boldsymbol{R}^2 = R_x \oplus R_y$. Acest fapt permite ca orice vector $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ să poată fi scris în mod unic ca suma vectorilor $(x, 0) \in \boldsymbol{R}^2$ și $(0, y) \in R^2$, $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.

Observație. Noțiunile de sumă și sumă directă pot fi extinse la un număr finit de termeni.

2.2.5 Definiție. *Fie V un spațiu vectorial peste câmpul $\boldsymbol{K}$ și $\boldsymbol{S}$ o submulțime nevidă a sa. Un vector $v \in V$ de forma*

$$v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p, \quad \lambda_i \in \boldsymbol{K}, \qquad x_i \in \boldsymbol{R} \tag{2.1}$$

*se numește **combinație liniară finită** de elemente din $\boldsymbol{S}$.*

2.2.6 Teoremă. *Dacă $\boldsymbol{S}$ este o submulțime nevidă a lui $\boldsymbol{V}$, atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de elemente din $\boldsymbol{S}$, notată cu $\boldsymbol{L(S)}$ sau $<\boldsymbol{S}>$, este un subspațiu vectorial al lui V, numit **subspațiul generat** de submulțimea $\boldsymbol{S}$ sau **acoperirea liniară** a lui $\boldsymbol{S}$.*

Demonstrație Aplicând rezultatul teoremei 2.1 pentru $\forall x, y \in L(S)$, $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$, $\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \beta \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{p} (\alpha\lambda_i) x_i + \sum_{j=1}^{q} (\beta\mu_j) y_j$ suma reprezintă tot o combinație liniară finită cu elemente din S, deci $\alpha x + \beta y \in L(S)$.

2.2.7 Consecință. *Dacă $\boldsymbol{V_1}$ și $\boldsymbol{V_2}$ sunt două subspații vectoriale ale spațiului vectorial $\boldsymbol{V}$ atunci $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{V_1} \cup \boldsymbol{V_2}) = \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_2}$.*

Demonstrația este imediată.

2.2.8 Definiție. *O submulțime $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ se numește **sistem de generatori** pentru spațiul vectorial $\boldsymbol{V}$ dacă subspațiul generat de submulțimea $\boldsymbol{S}$ coincide cu $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{V}$.*

Dacă submulțimea S este finită, și pentru orice vector $v \in V$, $\exists\ \lambda_i \in K$, $i = \overline{1,n}$ astfel încât $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, atunci spunem că spațiul vectorial $\boldsymbol{V}$ este finit generat.

O generalizare a noțiunii de spațiu vectorial este dată de noțiunea de varietate liniară.

2.2.9 Definiție. *Se numeşte* ***varietate liniară*** *în spațiul vectorial* ***V*** *o submulțime* $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{V}$ *pentru care există un vector* $x_0 \in \boldsymbol{L}$ *astfel încât mulțimea* $V_L = \{v = x - x_0 / x \in \boldsymbol{L}\}$ *este un subspațiu vectorial al lui* ***V***.

Subspațiul $\boldsymbol{V_L}$ se numeşte *subspațiul director* al varietății liniare $\boldsymbol{L}$.

Exemplu . Să considerăm spațiul vectorial standard $\boldsymbol{R}^2$ înzestrat cu sistemul axelor de coordonate $x\,O\,y$ (fig. 4)

Să considerăm o dreaptă L care trece prin punctul $x_0 = (a_0, b_0) \in L$. Punctul $v = x - x_0 = (a - a_0, b - b_0)$, $\forall$ $(a, b) \in L$ este situat pe o dreaptă paralelă cu $L \subset \boldsymbol{R}^2$ ce trece prin origine (demonstrația este imediată).

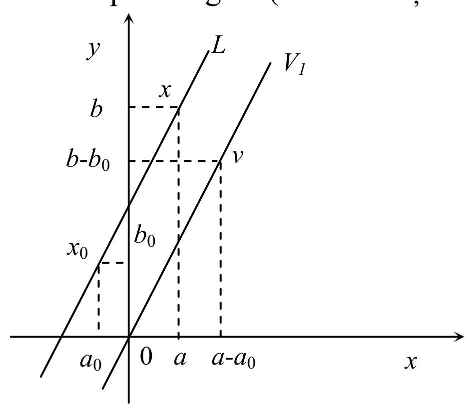


fig.4

În concluzie submulțimea punctelor din spațiul vectorial $\boldsymbol{R^2}$ situate pe orice dreaptă (L) din plan reprezintă o varietate liniară având drept spațiu vectorial director dreapta ce trece prin origine şi care este paralelă cu dreapta (L).

Un subspațiu vectorial reprezintă un caz particular de varietate liniară; este acea varietate liniară a spațiului vectorial $\boldsymbol{V}$ ce conține vectorul nul al spațiului vectorial $\boldsymbol{V}$ ($v_0 = 0$).

Fie $\boldsymbol{V}$ un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial şi submulțimea $\boldsymbol{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset \boldsymbol{V}$.

2.2.10 Definiție. *Submulțimea de vectori* $\boldsymbol{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset \boldsymbol{V}$ *se numeşte* ***liniar independentă*** *(liberă sau vectorii* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sunt liniar independenți) dacă egalitatea* $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p = 0$, $\lambda_i \in \boldsymbol{K}$, $i = \overline{1, p}$, *are loc numai dacă* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

O mulțime (finită sau nu) de vectori dintr-un spațiu vectorial este liniar independentă dacă orice sistem finit de vectori este un sistem de vectori liniar independenți.

2.2.11 Definiție. *Submulțimea de vectori* $\boldsymbol{S} = \{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset \boldsymbol{V}$ *se numeşte* ***liniar dependentă*** *(legată sau vectorii* $x_1, x_2,..,$ x_n *sunt liniar dependenți), dacă* $(\exists)$ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ $\in \boldsymbol{K}$
nu toți nuli pentru care $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p = 0$.

Remarcă: Dacă anularea unei combinații liniare finite, formată cu vectorii $x_1, x_2, ..., x_n \in \boldsymbol{V}$**,** permite exprimarea unui vector în funcție de ceilalți (adică existența măcar a unui coeficient nenul) atunci vectorii $x_1, x_2, ..., x_p$ sunt liniar dependenți, în caz contrar aceştia sunt liniar independenți.

2.2.12 Teoremă. *Dacă* $\boldsymbol{S} = \{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset \boldsymbol{V}$ *este o mulțime liniar independentă şi* $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S})$ *acoperirea liniară a lui* $\boldsymbol{S}$*, atunci orice mulțime de* $p + 1$ *elemente din* $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S})$ *este liniar dependentă.*

Demonstrație. Fie vectorii $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$, i = 1,2,…, $p + 1$ din acoperirea liniară *L(S)*.

Relația $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_{p+1} y_{p+1} = 0$ este echivalentă cu $\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_{ij}\right) x_j = 0$. Ținând cont că vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt liniar independenți obținem pentru $\forall j = \overline{1, p}$ relațiile $\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + ... + \lambda_{p+1} a_{p+1j} = 0$, care reprezintă un sistem de p ecuații liniare cu $p + 1$ necunoscute (λ_i), admite şi soluții diferite de soluția banală, ceea ce înseamnă că vectorii $y_1, y_2, ..., y_{p+1}$ sunt liniar dependenți, c.c.t.d.

§2.3. Bază şi dimensiune

Fie $\boldsymbol{V}$ un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial

2.3.1 Definiție. *O submulțime* B *(finită sau nu) de vectori din* $\boldsymbol{V}$ *se numeşte bază a spațiului vectorial* $\boldsymbol{V}$ *dacă:*
1) B *este liniar independentă*
2) B *reprezintă un sistem de generatori pentru* $\boldsymbol{V}$.

Spațiul vectorial $\boldsymbol{V}$ se zice că este finit generat sau finit dimensional dacă există un sistem finit de generatori.

2.3.2 Teoremă. *(de existență a bazelor) Dacă* $\boldsymbol{V} \neq \{0\}$ *este un spațiu vectorial finit generat şi* $\boldsymbol{S}$ *este un sistem de generatori pentru* $\boldsymbol{V}$*, atunci există o bază* B $\subset \boldsymbol{S}$ *a spațiului vectorial* $\boldsymbol{V}$*. (Din orice sistem finit de generatori al unui spațiu vectorial se poate extrage o bază).*

Demonstrație: Mai întâi să demonstrăm că S conține și vectori nenuli. Presupunem că $S = \{0\}$, atunci $\forall\ x \in V \setminus \{0\}$ poate fi scris sub forma $x = \lambda \circ 0 = 0$ (S – sistem de generatori) absurd ceea ce arată că presupunerea făcută este falsă, deci $S \neq \{0\}$.

Fie acum $x_1 \in S$ un vector nenul. Mulțimea $L = \{x_1\} \subset S$ reprezintă un sistem liniar independent. Continuăm să adăugăm vectori nenuli din S pentru care submulțimea L să reprezinte o mulțime liniar independentă. Să presupunem că S conține n elemente, atunci S are 2^n submulțimi finite. După un număr finit de pași vom găsi $L \subset S$, un sistem de vectori liniar independenți și pentru $\forall\ L' \subset S'$ cu $L \subset L'$, L' reprezintă o submulțime liniar dependentă (L este maximal în sensul relației de ordine).

L este un sistem de generatori pentru $\boldsymbol{V}$. În adevăr, dacă $L = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ pentru $m = n \Rightarrow L = S$ și este un sistem de generatori, iar dacă $m < n$, atunci $L' = L \cup \{x_{m+1}\}$, $\forall\ x_{m+1} \in S \setminus L$, reprezintă un sistem de vectori liniar dependeți (L este maximal) și $\forall x_{m+1} \in S / L,\ x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$,

$x_i \in L,\ i = \overline{1, m}$. Rezultă că $\forall x \in V, x = \sum_{n}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda \in \boldsymbol{K},\ x_i \in L,\ i = \overline{1,m}$.

Mulțimea L satisface condițiile teoremei 4.1 deci formează o bază a spațiului vectorial $\boldsymbol{V}$, c.c.t.d.

2.3.3 Consecință. *Dacă $\boldsymbol{V} \neq \{0\}$ și $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ un sistem finit de generatori și $\boldsymbol{L_1} \subset \boldsymbol{S}$ un sistem liniar independent, atunci există o bază B a spațiului vectorial $\boldsymbol{V}$, așa încât $\boldsymbol{L_1} \subset \mathsf{B} \subset \boldsymbol{S}$.*

Un spațiu vectorial $\boldsymbol{V}$ este finit dimensional dacă are o bază finită sau dacă $\boldsymbol{V} = \{0\}$, în caz contrar se numește infinit dimensional.

Exemple

1° În spațiul aritmetic $\boldsymbol{K^n}$ submulțimea vectorilor $\mathsf{B}=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde $e_1=\{1, 0, \ldots, 0\}$, $e_2=\{0, 1, \ldots, 0\}$,…, $e_n=\{0, 0, \ldots, 0, 1\}$, reprezintă o bază a spațiului vectorial $\boldsymbol{K^n}$, numită baza canonică.

2° În spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali $\boldsymbol{R}[X]$ submulțimea $\mathsf{B} = \{1, x, x^2, .., x^n, ..\}$, constituie o a bază. $\boldsymbol{R}[X]$ este un spațiu infinit dimensional.

2.3.4 Propoziție. *Într-un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial $\boldsymbol{V}$ finit generat, orice două baze au același număr de elemente.*

Demonstrație. Să considerăm în spațiul vectorial $\boldsymbol{V}$ finit generat bazele Bși B', având card $\mathsf{B}= n$, respectiv card $\mathsf{B}'= n'$. Folosind consecența 3.3 obținem pe rând $n \leq n'$ și $n' \leq n$, deci $n' = n$.

Propoziția precedentă permite introducerea noțiunii de dimensiune a unui spațiu vectorial.

2.3.5 Definiție. *Se numeşte **dimensiune** a unui spațiu vectorial finit generat, numărul de vectori dintr-o bază a sa, notat cu* $\dim \boldsymbol{V}$. *Spațiul nul* $\{0\}$ *are dimensiunea* 0.

Observație *Dacă* $\boldsymbol{V}$ *este un spațiu vectorial cu* $\dim \boldsymbol{V} = n$ *atunci:*

a) *un sistem de n vectori este bază* $\Leftrightarrow$ *este liber independent.*
b) *un sistem de n vectori este bază* $\Leftrightarrow$ *este sistem de generatori.*
c) *Orice sistem de* $m > n$ *vectori este liniar dependent.*

Vom nota un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial n-dimensional cu $\boldsymbol{V}_n$, $\dim \boldsymbol{V}_n = n$.

2.3.6 Propoziție. *Dacă* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *este o bază a* $\boldsymbol{K}$*-spațiului vectorial* $\boldsymbol{V}_n$ *atunci orice vector* $x \in \boldsymbol{V}_n$ *admite o exprimare unică* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ \lambda_i \in K$.

Demonstrație Presupunem că $x \in \boldsymbol{V}_n$ ar avea şi o altă exprimare $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$. Egalând cele două exprimări obținem $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\, e_i = 0$, o combinație liniară nulă a vectorilor liniar independenți ai bazei, echivalentă cu $\lambda_i = \mu_i,\ \forall\, i = \overline{1,n}$.

Scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se numesc *coordonatele* vectorului x în baza B, iar bijecțiile $f: V_n \to K,\ x \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ se numeşte *sistem de coordonate* pe $\boldsymbol{V}$.

2.3.7 Teoremă. *(Steinitz–teorema schimbului). Dacă* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *este o bază în spațiul vectorial* $\boldsymbol{V}_n$ *şi* $\boldsymbol{S} = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ *este un sistem de vectori liniar independenți din* $\boldsymbol{V}_n$ *atunci* $p \le n$ *şi după o eventuală renumerotare a vectorilor bazei* B, *sistemul* $B' = \{f_1, f_2, \ldots, f_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ *reprezintă de asemenea o bază pentru* $\boldsymbol{V}$.

Demonstrație: Aplicând rezultatul consecinței 3.3 şi faptul că orice două baze au acelaşi cardinal rezultă că $p \le n$.

Pentru a doua parte a teoremei folosim metoda inducției matematice complete. Pentru $p = 1$, $f_1 \in \boldsymbol{V}$ se scrie în baza B sub forma $f_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ .Cum $f_1 \ne 0$ rezultă că există cel puțin un $\lambda_i \ne 0$. Admițând că $\lambda_1 \ne 0$ avem $e_1 = \frac{1}{\lambda_1} f_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} e_n$, adică $\{f_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este un sistem de vectori generatori ai spațiului $\boldsymbol{V}_n$, deci o bază. Admițând că $\{f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}, e_p, \ldots, e_n\}$ este o bază atunci vectorul $f_p \in S$ se poate exprima sub forma $f_p = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{p-1} f_{p-1} + \mu_p e_p + \ldots + \mu_n e_n$. În această relație cel puțin un coeficient dintre μ_p, $\mu_{p+1}, \ldots$, μ_n este nenul, căci în caz contrar mulțimea S ar fi liniar dependentă. Făcând eventual o renumerotare a vectorilor e_p, e_{p+1}, …, e_n, putem presupune că $\mu_p \neq 0$ şi obținem $e_p = \frac{\mu_1}{\mu_p} f_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} f_2 - \ldots - \frac{\mu_{p-1}}{\mu_p} f_{p-1} + \frac{1}{\mu_p} f_p - \frac{\mu_{p+1}}{\mu_p} e_{p+1} - \ldots - \frac{\mu_n}{\mu_p} e_n$, din care rezultă că $\{f_1, f_2, \ldots, f_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ este un sistem de n vectori generatori ai spațiului n-dimensional $\boldsymbol{V}_n$, deci o bază pentru $\boldsymbol{V}_n$, c.c.t.d.

2.3.8 Consecință. *(teorema completării) Orice sistem de vectori liniar independenți dintr-un spațiu vectorial $\boldsymbol{V}_n$ poate fi completat până la o bază în $\boldsymbol{V}_n$.*

2.3.9 Consecință. *Orice subspațiu V' al unui spațiu vectorial finit generat $\boldsymbol{V}_n$ admite cel puțin un subspațiu suplimentar.*

2.3.10 Teoremă. *(Grassmann - teorema dimensiunii). Dacă $\boldsymbol{V}_1$ şi $\boldsymbol{V}_2$ sunt două subspații vectoriale ale **K**-spațiului vectorial V_n atunci*

$$din\,(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) = dim\boldsymbol{V}_1 + dim\boldsymbol{V}_2 - dim(\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2) \tag{3.1}$$

Demonstrație: Fie $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ o bază a subspațului $(V_1 \cap V_2) \subset V_1$. În virtutea consecinței 3.8 putem completa acest sistem de vectori liniar independenți la o bază în V_1, fie aceasta dată de mulțimea $B_1 = \{f_1, f_2, \ldots, f_r, e_{r+1}, \ldots, e_s\}$. În mod similar considerăm în spațiul vectorial V_2, baza $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_r, g_{r+1}, \ldots, g_p\}$. Se demonstrează uşor că submulțimea $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_r, e_{r+1}, \ldots, e_s, g_{r+1}, \ldots, g_p\}$, este un sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Submulțimea B este liniar independentă. In adevăr ,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i + \sum_{i=r+1}^{s} \beta_i e_i + \sum_{i=r+1}^{p} \gamma_i g_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i + \sum_{i=r+1}^{s} \beta_i e_i = -\sum_{i=r+1}^{p} \gamma_i g_i \,,$$

ceea ce înseamnă că vectorul $v = \sum_{i=r+1}^{p} \gamma_i g_i \in V_1 \cap V_2$, deoarece suma din membrul stâng reprezintă un vector al subspațiului V_1 iar cea din membrul drept un vector din V_2. În spațiul $V_1 \cap V_2$ avem $v = \sum_{i=r+1}^{p} \gamma_i g_i = \sum_{i=1}^{r} \delta_i f_i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=r+1}^{p} \gamma_i g_i - \sum_{i=1}^{r} \delta_i f_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_{r+1} = \gamma_{r+2} = \ldots = \gamma_{r+p} = \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_r = 0.$$

Folosind acest rezultat în prima relație şi ținând cont de faptul că B_1 este o bază în V_1 rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \ldots = 0$, deci B este liniar independentă, adică o bază în $V_1 + V_2$.

În aceste condiții putem scrie $\dim(V_1 + V_2) = r + s + p = (r + s) + (r + p) - r = dim V_1 + dim V_2 - dim(V_1 \cap V_2)$. c.c.t.d.

2.3.11 Consecință. *Dacă spațiul vectorial $\boldsymbol{V}_n$ este reprezentat sub forma $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2$ atunci $dim\boldsymbol{V}_n = dim\boldsymbol{V}_1 + dim\boldsymbol{V}_2$.*

Să considerăm un $\boldsymbol{K}$-spațiu vectorial $\boldsymbol{V}_n$ şi $\mathsf{B} = \{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$ respectiv $\mathsf{B}' = \{e'_1, e'_2,\ldots, e'_n\}$ două baze în $\boldsymbol{V}_n$. Orice vector din B' poate fi exprimat în funcție de elementele celeilalte baze. Aşadar avem relațiile:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{cases} \text{ sau } e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, \quad \forall j = \overline{1,n} \qquad (3.2)$$

Notând cu $\mathbf{B} = {}^t[e_1, e_2,\ldots, e_n]$, $\mathbf{B}' = {}^t[e'_1, e'_2,\ldots, e'_n]$ şi cu $A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12},\ldots,a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},\ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2},\ldots, a_{nn} \end{pmatrix}$ matricea de tip $n \times n$, care are drept coloane coordonatele vectorilor e'_j, $j = \overline{1,n}$, relațiile (4.2) pot fi scrise sub forma

$$\mathbf{B}' = {}^t A\mathbf{B} \qquad (3.2)'$$

Fie acum un vector $x \in \boldsymbol{V}_n$, exprimat în cele două baze ale spațiului vectorial $\boldsymbol{V}_n$ prin relațiile:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{şi respectiv} \quad x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \qquad (3.3)$$

Ținând seama de relațiile (3.2), obținem

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j \right) e_i .$$

Cum B este bază, egalitatea $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ este echivalentă cu

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j , \quad \forall i = \overline{1,n} \qquad (3.4)$$

relații ce caracterizează transformarea de coordonate ale unui vector la o schimbare a bazei spațiului vectorial $\boldsymbol{V}_n$.

Dacă notăm cu $\mathbf{X} = {}^t[x_1, x_2,\ldots,x_n]$ matricea coloană a coordonatelor vectorului $x \in \boldsymbol{V}_n$ în baza B şi respectiv cu $\mathbf{X}' = {}^t[x'_1, x'_2,\ldots,x'_n]$, matricea coordonatelor aceluiaşi vector $x \in \boldsymbol{V}_n$ în baza B', putem scrie

$$\mathbf{X} = A\mathbf{X}' \qquad (3.4)'$$

Matricea $A = (a_{ij})$ se numeşte matricea de trecere de la baza B la baza B′. În concluzie,într-un spațiu vectorial finit dimensional avem *teorema de schimbare a bazei* :

2.3.12 Teoremă. *Dacă în spațiul vectorial V_n, schimbarea bazei B cu baza B′ este dată de relația $\mathbf{B}' = {}^t A\mathbf{B}$, atunci relația între coordonatele unui vector $x \in V_n$, în cele două baze ,este dată de $\mathbf{X} = A\mathbf{X}'$.*

Fie V_n un spațiu vectorial şi B = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a sa. Dacă vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V_n$, $p \le n$ sunt exprimați prin relațiile $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, atunci matricea $A = (a_{ij})$, având drept coloane coordonatele vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_p$, va fi numită <u>*matricea de trecere*</u> de la vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

2.3.13 Teoremă. *Rangul matricei A este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană liniar independenți.*

Demonstrație Să presupunem că rang A = r, adică

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\Delta \neq 0$ implică liniar independența vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Fie coloana v_k, $r \le k \le p$ şi determinanții

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} & a_{1k} \\ \ldots & \\ a_{r1} \ldots a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} \ldots a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1,n}$$

Fiecare din aceşti determinanți este nul deoarece pentru $i \le r$, Δ_i are două linii identice, iar pentru $i > r$, ordinul lui Δ_i este mai mare decât rangul r. Dezvoltând după ultima linie avem

$$a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \ldots + a_{ir}\Gamma_{ir} + a_{il} D = 0 \iff a_{il} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij} \ ; \ \lambda_j = \Gamma_{ij/D}, \ i = \overline{1,n}$$

Aceste relații scalare exprimă faptul că orice coloană v_k, $r \le k \le p$, este o combinație liniară a primelor r coloane ale matricei A, deci orice $r + 1$ vectori sunt liniar dependenți.

2.3.14 Consecinţă. *Dacă* $B = \{e_1, e_2,..., e_n\}$ *este o bază în* $\boldsymbol{V_n}$ *, atunci mulţimea* $B' = \{e'_1, e'_2,..., e'_n\}$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $j = \overline{1,n}$ *este bază a lui* $\boldsymbol{V_n}$ *dacă şi numai dacă matricea de trecere* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *este nesingulară.*

Fie $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ două spaţii vectoriale peste câmpul $\boldsymbol{K}$.

2.3.15 Definiţie. *O aplicaţie* $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *cu proprietăţile:*

$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \boldsymbol{V}$

$T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall x \in \boldsymbol{V}, \ \forall \alpha \in \boldsymbol{V}$

se numeşte ***morfism de spaţii vectoriale*** *sau* ***transformare liniară***.

O transformare liniară bijectivă între două spaţii vectoriale va fi numită *izomorfism* de spaţii vectoriale.

2.3.16 Teoremă. *Două spaţii vectoriale* $\boldsymbol{V}$ *şi* $\boldsymbol{W}$ *peste câmpul* $\boldsymbol{K}$*, de dimensiune finită, sunt izomorfisme dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.*

Un sistem de coordonate pe un spaţiu vectorial finit dimensional $\boldsymbol{V}_n$, $f : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{K}^n$, $x \in V_n \mapsto (x_1, x_2, x_n) \in \boldsymbol{K}^n$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.

§2.4. Spaţii vectoriale euclidiene

Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial real.

Dacă adăugăm, pe lângă structura de spaţiu vectorial, noţiunea de produs scalar, atunci într-un astfel de spaţiu vectorial pot fi definite noţiunile de lungime a unui vector, unghiul a doi vectori, ortogonalitate s.a.

2.4.1 Definiţie. *O aplicaţie* $g: \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{R}$, $g((x, y)) = \langle x,y \rangle$ *cu proprietăţile:*

a) $\langle x,y+z \rangle = \langle y,x \rangle + \langle x,z \rangle \quad , \forall x, y, z \in V$

b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad , \forall x, y \in V, \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}$

c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad , \forall x, y \in V$

d) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad , \forall x \in V$

se numeşte ***produs scalar*** *pe spaţiul vectorial* $\boldsymbol{V}$.

2.4.2 Corolar *Dacă **V** este un spațiu vectorial euclidian atunci au loc relațiile:*

1) $<x + y, z> = <x, z> + <y, z>$
2) $<x, \lambda y> = \lambda <x, y>$, $\forall x, y, z \in \boldsymbol{V}$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$

2.4.3 Definiție. *Un spațiu vectorial **V** pe care s-a definit un produs scalar se numeşte **spațiu vectorial euclidian** (sau **V** posedă o structură euclidiană).*

2.4.4 Teoremă. *Dacă spațiul vectorial **V** este un spațiu vectorial euclidian atunci avem inegalitatea Cauchy-Schwarz:*

$$<x, y>^2 \leq <x, x> \cdot <y, y> \qquad (4.1)$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă vectorii x şi y sunt liniar dependenți.

Demonstrație: Dacă $x = 0$ sau $y = 0$ atunci are loc egalitatea în relația 5.1. Presupunem x şi $y \in \boldsymbol{V}$ nenuli şi considerăm vectorul $z = \lambda x + \mu y$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$. Din proprietățile produsului scalar obținem :
$0 \leq <z, z> = <\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y> = \lambda^2 <x, x> + 2\lambda\mu <x, y> + \mu^2 <y, y>$, egalitatea având loc pentru $z = 0$. Dacă luăm $\lambda = <y, y> > 0$ atunci obținem $<x, x> <y, y> + 2\mu <x, y> + \mu^2 \geq 0$, iar pentru $\mu = - <x, y>$ inegalitatea devine $<x, x> <y, y> - <x, y>^2 \geq 0$. c.c.t.d.

Exemple

1° În spațiul aritmetic $\boldsymbol{R}^n$ pentru orice două elemente $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ şi $y = (y_1, y_2,..., y_n)$, operația

$$<x, y> =: x_1y_1 + x_2y_2 +...+ x_ny_n \qquad (4.2)$$

defineşte un produs scalar. Produsul scalar astfel definit, numit *produsul scalr uzual* ,înzestrează spațiul aritmetic $\boldsymbol{R}^n$ cu o strcutură euclidiană.

2° Mulțimea $\boldsymbol{C}([a, b])$ a funcțiilor continue pe intervalul $[a, b]$ este un spațiu vectorial în raport cu produsul scalar definit de

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\, dx \qquad (4.3)$$

2.4.5 Teoremă. *Într-un spaţiu vectorial euclidian* ***V*** *funcţia* $\|\ \|$*:* $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{R}_+$ *definită prin*

$$\| x \| = \sqrt{< x,x >}\ ,\ \forall\, x \in \boldsymbol{V} \qquad (4.4)$$

este o ***normă*** *pe V, adică satisface axiomele:*

a) $\| x \| > 0,\ \forall x \neq 0$ *şi* $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\| \lambda \| = | \lambda | \cdot \| x \|,\ \forall x \in V,\ \forall \lambda \in \boldsymbol{R}$

c) $\|x+ y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inegalitatea triunghiului).*

Demonstraţie: Condiţiile a) şi b) rezultă imediat din definiţia normei şi proprietăţile produsului scalar.
Axioma c) rezultă folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$\| x + y \|^2 = < x+ y, x + y > = < x, x > + 2 < x, y > + < y, x > \leq$$
$$\leq < x, x > + 2\sqrt{< x, x >< y, y >} + < y, z > = (\| x \| + \| y \|)^2$$

de unde rezultă inegalitatea triunghiului.

Un spaţiu pe care s-a definit o funcţie "normă" se numeşte *spaţiu normat***.**

Norma definită de un produs scalar se numeşte *normă euclidiană***.**

Exemplu: În spaţiul aritmetic $\boldsymbol{R}^n$ norma unui vector $x = (x_1, x_2,\ldots x_n)$ este dată de

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (4.5)$$

Un vector $e \in \boldsymbol{V}$ se numeşte *versor* dacă $\|e\| = 1$. Noţiunea de versor permite ca $\forall\, x \in V$ să fie scris sub forma $x = \|x\|\, e$, $\|e\| = 1$, unde direcţia lui e este aceeaşi cu direcţia lui x.

Inegalitatea Cauchy-Schwarz, $|<x, y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ne permite să definim unghiul dintre doi vectori, ca fiind unghiul $\theta \in [0, \pi]$, dat de

$$\cos\theta = \frac{< x,y >}{\| x \| \cdot \| y \|} \qquad (4.6)$$

2.4.6 Teoremă. *În spaţiul vectorial normat* ***V****, funcţia reală* $d: \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{R}_+$*, definită prin* $d(x, y) = \| x - y \|$ *este o* ***metrică*** *pe* ***V****, adică satisface axiomele:*

a) $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\ ,\quad \forall x, y \in \boldsymbol{V}$

b) $d(x, y) = d(y, x)\ ,\quad \forall x, y \in \boldsymbol{V}$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x)\ ,\quad \forall x, y, z \in \boldsymbol{V}$.

Exemplu: În spaţiul vectorial aritmetic $\boldsymbol{R}^n$ distanţa d este dată de

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{(x_1\text{-}y_1)^2 + (x_2\text{-}y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \qquad (4.7)$$

O mulţime oarecare dotată cu o metrică se numeşte *spaţiu metric*.

Dacă norma definită pe spaţiul vectorial $\boldsymbol{V}$ este euclidiană atunci distanţa definită de aceasta se numeşte *metrică euclidiană*.

În concluzie, orice spaţiu euclidian este un spaţiu metric.

O structură euclidiană pe $\boldsymbol{V}$ induce pe orice subspaţiu $\boldsymbol{V'} \subset \boldsymbol{V}$ o structură euclidiană.

Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial $\boldsymbol{V}$ permite introducerea noţiunii de ortogonalitate.

2.4.7 Definiţie. *In spaţiul vectorial* $\boldsymbol{V}$ *vectorii* $x, y \in \boldsymbol{V}$ *se numesc* ***ortogonali*** *dacă* $\boldsymbol{<x, y>} = 0$.

O mulţime $S \subset \boldsymbol{V}$ se spune că este *ortogonală* dacă vectorii săi sunt ortogonali doi câte doi.

O mulţime ortogonală se numeşte *ortonormată* dacă fiecare element al său are norma egală cu unitatea.

2.4.8 Propoziţie. *Într-un spaţiu vectorial euclidian* $\boldsymbol{V}$ *orice mulţime ortogonală, formată din elemente nenule, este liniar independentă.*

Demonstraţie Fie $S \subset \boldsymbol{V} \setminus \{0\}$ şi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, o combinaţie liniară oarecare finită de elemente din S. Înmulţiind scalar cu $x_j \in S$, relaţia $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ devine $\lambda_1 <x_1, x_j> + \lambda_2 <x_2, x_j> + \ldots + \lambda n <x_n, x_j> = 0$.

Cum S este ortogonală, $<x_i, x_j> = 0$, $\forall\ i \neq j$ şi $\lambda_j(x_j, x_j) = 0$. Pentru $x_j \neq 0$, $\forall\ j = \overline{1, n}$, $<x_j, x_j> > 0$, de unde rezultă că $\lambda_j = 0$, $\forall\ j = \overline{1, n}$, adică S este liniar independentă.

2.4.9 Consecinţă. *Într-un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional* $\boldsymbol{V_n}$, *orice mulţime ortogonală formată din n vectori este o bază în* $\boldsymbol{V_n}$.

Dacă în spaţiul vectorial euclidian $\boldsymbol{V_n}$ considerăm bază ortogonală B = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, atunci orice vector $x \in \boldsymbol{V_n}$ poate fi scris în mod unic sub forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ , \quad \text{unde} \quad \lambda_i = \frac{< x, e_i >}{< e_i, e_i >} \tag{4.8}$$

În adevăr, înmulţiind vectorul $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ cu e_k, obţinem $<x, e_k> =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < e_i, e_k > = \lambda_k < e_k, e_k >$ din care rezultă $\lambda_k = \dfrac{< x, e_k >}{< e_k, e_k >}$, $\forall\ k = \overline{1, n}$.

Dacă B este ortonormată avem $< e_i, e_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases}$, iar $\lambda_i = <x, e_i>$ şi vor fi numite *coordonatele euclidiene* ale vectorului x.

2.4.10 Definiţie. *Fie $x, y \in$ **V**, doi vectori oarecare.*
Vectorul $\overline{pr}_y x = \dfrac{< x, y >}{< y, y >} y$, *cu* $y \neq 0$ *se numeşte* ***proiecţie ortogonală*** *a vectorului x pe vectorul y, iar numărul* $pr_y x = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|}$ *se numeşte* ***mărimea algebrică*** *a proiecţiei ortogonale a lui x pe y .*

2.4.11 Definiţie. *Fie* $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ *o submulţime oarecare a spaţiului euclidian* ***V****. Un element* $y \in \boldsymbol{V}$ *se zice* ***ortogonal*** *lui* ***S*** *dacă este ortogonal pe fiecare element al lui* ***S****, adică* $<y, x> = 0$, $\forall x \in \boldsymbol{S}$ *şi notăm prin* $y \perp \boldsymbol{S}$.

2.4.12 Propoziţie. *Mulţimea tuturor vectorilor* $y \in \boldsymbol{V}$ *ortogonali mulţimii* ***S*** *formează un subspaţiu vectorial notat cu* $\boldsymbol{S}^{\perp}$. *În plus, dacă* ***S*** *este un subspaţiu vectorial atunci subspaţiul* $\boldsymbol{S}^{\perp}$ *se numeşte* ***complementul ortogonal*** *al lui* ***S****.*

Demonstraţie: Dacă $y_1, y_2 \in S^{\perp}$ atunci $(y_1, x) = 0$, $<y_2, x> = 0$, $\forall x \in S$. Pentru $\forall\ \alpha, \beta \in R$, avem $<\alpha y_1 + \beta y_2, x> = \alpha<y_1, x> + \beta<y_2, x> = 0$, c.c.t.d.

2.4.13 Propoziţie. *Dacă subspaţiul* $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ *este de dimensiune finită, atunci* ***S*** *admite un unic supliment ortogonal* $\boldsymbol{S}^{\perp}$.

2.4.14 Consecinţă. *Dacă* $\boldsymbol{V} = S \oplus S^{\perp}$ *şi* $x = y + y^{\perp}$, $y \in S^{\perp}$, $y^{\perp} \in S^{\perp}$, *atunci are loc teorema lui Pitagora,* $\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| y^{\perp} \|^2$.

Observaţie. Un subspaţiu vectorial $S \subset V$, de dimensiune finită sau nu, are cel mult un supliment ortogonal.

Fie V_n un spaţiu vectorial euclidian finit dimensional.

2.4.15 Teoremă. (*Gram - Schmidt*) *Dacă* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *este o bază în spaţiul vectorial euclidian* V_n *atunci există o bază ortonormată* $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$ *astfel încât sistemele de vectori* $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *şi* $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ *generează acelaşi subspaţiu* $U_p \subset V$, *pentru* $\forall\ p = \overline{1, n}$.

Demonstraţie Mai întâi construim o mulţime ortogonală $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ şi apoi normăm fiecare element. Considerăm

$$w_1 = v_1 ,$$

$w_2 = v_2 + kw_1 \neq 0$ şi determinăm k impunând condiția $<w_1, w_2> = 0$.

Obținem $k = -\frac{<v_2, w_1>}{<w_1, w_1>}$, deci $w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{<w_1, w_1>} w_2 = v_2 - \overline{pr}_{w_1} v_2$

$w_3 = v_3 + k_1w_1 + k_2w_2 \neq 0$ şi determinăm scalarii k_1, k_2 impunând condiția w_3 să fie ortogonal pe w_1 şi w_2, adică

$<w_3, w_1> = <v_3, w_1> + k_1 <w_1, w_1> = 0$

$<w_3, w_2> = <v_3, w_2> + k_2 <w_2, w_2> = 0$.

Obținem

$$w_3 = v_3 - \frac{<v_3, w_1>}{<w_1, w_1>} w_1 - \frac{<v_3, w_2>}{<w_2, w_2>} = v_3 - \overline{pr}_{w_1} v_3 - \overline{pr}_{w_2} v_3$$

După n paşi se obțin vectorii $w_1, w_2, ..., w_n$ ortogonali doi câte doi, liniar independenți (prop. 5.1) dați de

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{<v_j, w_i>}{<w_i, w_i>} w_i, \forall j = \overline{1,n} \tag{4.9}$$

Definim $e_i = \frac{w_i}{||w_i||}$, $\forall i = \overline{1,n}$, adică mulțimea B = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, reprezintă o bază ortonormată în $\boldsymbol{V_n}$.

Cum elementele $e_1, e_2, ..., e_p$ se exprimă în funcție de $v_1, v_2, ..., v_p$, iar acestea sunt subsisteme liniar independente avem L $(\{e_1, e_2, ..., e_p\})$ = = L $(\{v_1, v_2, ..., v_p\})$, c.c.t.d.

2.4.16 Consecință. *Orice subspațiu vectorial euclidian admite o bază ortonormată*

Fie B = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi B′ = $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ două baze ortonormate în spațiu vectorial euclidian $\boldsymbol{V_n}$.

Relațiile între elementele celor două baze sunt date de

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \forall j = \overline{1,n}.$$

Cum B′ este ortonormată avem :

$$< f_i, f_j > = \sum_{k, h = 1}^{n} a_{ki} a_{hj} < e_k, e_h > = \sum_{k, h = 1}^{n} a_{ki} a_{hj} \delta_{kh} = \sum_{k = 1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$$

Dacă $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ este matricea de trecere de la baza B la B′ atunci relațiile de mai sus se exprimă matriceal sub forma ${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$, adică $\boldsymbol{A}$ este o matrice ortogonală.

2.4.17 Propoziție. *La o schimbare de bază ortonormată* $\mathbf{B}' = {}^t\!A\mathbf{B}$*, într-un spațiu vectorial euclidian* V_n*,, transformarea de coordonate este dată de* $\mathbf{X} = A\mathbf{X}'$*, unde* A *este o matrice ortogonală.*

§2.5. Probleme rezolvate

2.5.1 Să se arate că mulțimea matricelor cu elemente reale de forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

constituie un spațiu vectorial cu patru dimensiuni peste corpul numerelor reale **R** şi să se determine o bază ăn acest spațiu.

<u>*Soluție:*</u>

Se verifică axiomele spațiului vectorial.

1. Suma a două matrice de forma dată este o matrice de aceeaşi formă.

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -c_2 & d_2 & a_2 & -b_2 \\ -d_2 & -c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ -b_3 & a_3 & -d_3 & c_3 \\ -c_3 & d_3 & a_3 & -b_3 \\ -d_3 & -c_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix}.$$

unde s-a notat

$a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$, $c_3 = c_1 + c_2$, $d_1 = d_1 + d_2$.

I_1) Adunarea de matrice fiind asociativă pe orice mulțime de matrice este asociativă şi în cazul particular ales.

I_2) Elementul neutru (matricea nulă) este de forma indicată:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I_3) Elementul opus lui M este de aceeaşi formă:

$$-M = \begin{pmatrix} -a & -b & -c & -d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

I_4) Adunarea de matrice fiind comutativă pe orice mulțime de matrice, este adevărată în acest caz.

Produsul matricei M cu λ este o matrice de forma

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c & \lambda d \\ -\lambda b & \lambda a & -\lambda d & \lambda c \\ -\lambda c & \lambda d & \lambda a & -\lambda b \\ -\lambda d & -\lambda c & \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}; \gamma \in R.$$

II_1) $\lambda(M_1+M_2) = \lambda M_1+\lambda M_2$.
II_2) $(\lambda+\gamma)M = \lambda M+\gamma M$.
II_3) $\lambda(\gamma M) = (\lambda\gamma)M$.
II_4) $1M = M$; $1\in$ **R**.

Proprietățile II_1, II_2, II_3, II_4 sunt adevărate deoarece sunt valabile în general.

Axiomele fiind verificate, rezultă că mulțimea dată este un spațiu vectorial peste corpul **R**, al numerelor reale.

Se consideră acum matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Rezultă relația:

$$M=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\-b&a&-d&c\\-c&d&a&-b\\-d&-c&b&a\end{pmatrix}=aA+bB+cC+dD$$

de unde rezultă că se obține aA + bB + cC + dD = 0 dacă şi numai dacă a = b = c = d = 0, deci matricele A, B, C, D sunt liniar independente.
Aceeaşi relație arată că orice matrice M este o combinație liniară a matricelor A, B, C, D.
Deci matricele A, B, C, D formează o bază, adică spațiul vectorial al matricelor M de forma dată are patru dimensiuni.
2.5.2. Să se demonstreze că următoarea pereche de operații nu defineşte o structură de spațiu vectorial pe $\mathbf{R}^2$:

$$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (x_1 + y_1,y_2)$$
$$k(x_1,x_2) = (kx_1,kx_2),\quad k\in \mathbf{R}.$$

Soluție:

Se cercetează proprietățile primei operații:

$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) = (y_1,y_2) + (x_1,x_2)$.

$(x_1,x_2) + (y_1,y_2) =^{(1)}(x_1 + y_1,y_2)$
$(y_1,y_2) + (x_1,x_2) =^{(1)}(y_1 + x_1,x_2) \Rightarrow (x_1,x_2) + (y_1,y_2) \neq (y_1,y_2) + (x_1,x_2)$
Deoarece adunarea nu este comutativă se poate trage concluzia că $\mathbf{R}^2$ împreună cu cele două operații nu formează structură de spațiu vectorial.

2.5.3 În $\mathbf{R}^3$ se consideră vectorii
$\overline{x_1} = (1,2,3)$, $\overline{x_2} = (2,3,1)$, $\overline{x_3} = (a+3,\ a+1,\ a+2)$ $a\in\mathbf{R}.$
Să se afle valorile lui *a* pentru care aceşti vectori sunt liniari dependenți şi să se scrie relația de dependență liniară.

Soluție:

Pentru ca vectorii să fie liniari dependenți, trebuie să existe scalarii λ_1, λ_2, λ_3 nu toți nuli astfel încât să avem:

$\lambda_1\overline{x_1} + \lambda_2\overline{x_2} + \lambda_3\overline{x_3} = \overline{0}$, $\overline{0} = (0, 0, 0)$

sau

$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(2,3,1) + \lambda_3\,(a + 3,\ a + 1,\ a + 2) = (0,0,0)$.

Se obține sistemul liniar şi omogen

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + (a+3)\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + (a+1)\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + (a+2)\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

care are soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 2 & 3 & a+1 \\ 3 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = -3(a+6) = 0; a = -6.$$

Deci pentru $a = -6$ vectorii dați sunt liniar dependenți. Pentru a afla relația de dependență liniară se înlocuieşte cu a = -6 în sistemul de mai sus

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Se exprimă λ_1, λ_2 în funcție de λ_3 din primele două ecuații

$\lambda_1 = \lambda_3$; $\lambda_2 = \lambda_3$; $\lambda_3 \neq 0$.
Înlocuind şi simplificând cu λ_3 obținem relația de dependență liniară

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = \overline{0};$$

între vectorii
$\overline{x_1} = (1,2,3), \overline{x_2} = (2,3,1), \overline{x_3} = (-3,-5,-4).$
Observație.
Pentru a ≠ -6 vectorii dați sunt liniari independenți, deci ei formează o bază în $\mathbf{R}^3$.

2.5.4. Să se determine dimensiunile subspațiilor sumei şi intersecției subspațiilor generate de sistemele de vectori:

$$U = \{\overline{u_1} = (2,3,-1), \overline{u_2} = (1,2,2), \overline{u_3} = (1,1,-3)\}$$

$V = \{\overline{v_1} = (1,2,1), \overline{v_2} = (1,1,-1), \overline{v_3} = (1,3,3)\}$ în $\mathbf{R}^3$.

Să se verifice teorema lui Grassmann prin aceste aplicații.

Soluție:

Vectorii $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ sunt liniar dependenți, o bază în $[U]$ poate fi $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}\}$, deci $[U] = \{\alpha_1 \overline{u_1} + \alpha_2 \overline{u_2} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in R\}$, $\dim[U] = 2$. Vectorii, $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ sunt liniari dependenți și $[V] = \{\beta_1 \overline{v_1} + \beta_2 \overline{v_2} \mid \beta_1, \beta_2 \in R\}$, $\dim[V] = 2$.

Subspațiul $[U]+[V]$ este generat de reuniunea sistemelor U și V.

O bază în reuniune este $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{v_1}\}$ și deci dim $([U]+[V])$ = 3, adică $[U]+[V] = R^3$.

Subspațiul $[U]+[V]$ conține vectorii pentru care $\alpha_1 \overline{u_1} + \alpha_2 \overline{u_2} = \beta_1 \overline{v_1} + \beta_2 \overline{v_2}$, adică $2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\beta_1 + \beta_2$, $-\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$, sistem cu trei ecuații și necunoscute principale α_1, α_2, β_1, iar $\beta_2 = \lambda$, necunoscută secundară.

Obținem $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = \lambda$, $\beta_1 = 2\lambda$.

Astfel că vom avea $[U]\cap[V] = \{(3\lambda, 5\lambda, \lambda) / \lambda, \lambda \in R\}$,iar $\dim[U]\cap[V] = 1$.

Se verifică teorema Grassmann: $\dim[U]+\dim[V]=\dim([U]+[V])+\dim([U]\cap[V])$.

2.5.5. Să se arate că în spațiul matricelor $(M_m(K),+,)$ submulțimile definite prin $S = \{A \in M_m(K)/A^t=A\}$(matrice antisimetrice) formează subspații vectoriale și $M_m = S \oplus A$.

Soluție: Dacă $A,B \in S$, atunci $(A+B)^t=A^t+B^t = A+B \Rightarrow A,B \in S$ și $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in S$. Analog pentru A. Dacă $A \in M_m(K)$, atunci matricele

$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \in S$ și $C = \frac{1}{2}(A - A^t) \in A$ verifică $A = B+C$.

În plus $S \cap A = \{0\}$, astfel că $M_n = S \oplus A$.

2.5.6. Să se găsească o bază a sumei și intersecției spațiilor vectoriale W și U generate de vectori

$\overline{a_1} = (2,1,0,1), \overline{a_2}(-2,-1,-1,-1), \overline{a_3} = (3,0,2,3)$

$\overline{b_1} = (1,1,2,-1), \overline{b_2}(0,-1,-1,2), \overline{b_3} = (-1,2,1,-5)$.

Soluție:

Se verifică ușor că vectorii $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, sunt liniar independenți. Verificăm dacă sistemul de vectori $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b_1}\}$ sunt liniari independenți.

Combinația liniară: $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + \lambda_4 \overline{b_1} = 0$, deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ sistemul omogen în $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ admite numai soluția banală deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ fapt care arată că în W+U există 4 vectori liniar independenți.

Cercetăm liniar dependența a 5 vectori $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b_1}, \overline{b_2}\}$ dar deoarece rangul matricei sistemului omogen este maxim 4, rezultă că cei 5 vectori sunt liniar dependenți, deci dim (W+U) = 4, astfel $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b_1},\}$ formează o bază a sumei.

Pentru W∩U presupunem că $(\exists)\,\overline{v} \in W \cap U$ atunci $\overline{v} \in W$ şi $\overline{v} \in U$.

Dacă

$\overline{v} \in W$ atunci $\overline{v} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3}$ iar

$\overline{v} \in U$ deci $\overline{v} = \beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + \beta_3 \overline{b_3}$

fapt care duce la $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} = \beta_1 \overline{b_1} + \beta_2 \overline{b_2} + \beta_3 \overline{b_3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = \beta_1 - \beta_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ -2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 + 2\beta_2 - 5\beta_3 \end{cases}$$

Condiția de compatibilitate a sistemului este:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & \beta_1 - \beta_3 \\ 1 & -1 & 0 & \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ 0 & -1 & 2 & 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \\ 1 & -1 & 3 & -\beta_1 + 2\beta_2 - 5\beta_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ echivalentă cu } \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 = 0$$

$\overline{v} = (\beta_1\text{-}\beta_3,\ \beta_1\text{-}\beta_2\text{+}2\beta_3, 2\beta_1\text{-}\beta_2\text{+}\beta_3, \text{-}\beta_1\text{+}2\beta_2\text{-}2\beta_3)$

$= (\beta_1\text{-}\beta_3, 0, (\beta_1\text{-}\beta_2\text{+}2\beta_3)\text{+}\ \beta_1\text{-}\beta_3, \text{-}2(\beta_1\text{-}\beta_2\text{+}2\beta_3)\text{+}\ \beta_1\text{-}\beta_3)$

$= (\beta_1\text{-}\beta_3, 0,\ \beta_1\text{-}\beta_3,\ \beta_1\text{-}\beta_3) = (1,0,1,1)(\beta_1\text{-}\beta_3)$ deci dim (W∩U) = 1

2.5.7. Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor când se trece de la baza E = $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ la baza E' = $\{\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3}, \overline{e'_4}\}$ unde:

$\overline{e_1} = (1,2,-1,0), \overline{e_2} = (1,-1,1,1), \overline{e_3} = (-1,-1,0,1) \overline{e_4} = (-1,-1,0,1)$

$\overline{e'_1} = (2,1,0,1), \overline{e'_2} = (0,1,2,2), \overline{e'_3} = (-2,1,1,2), \overline{e'_4} = (1,3,1,2)$.

<u>Soluție:</u>
Scriem fiecare din vectorii noii baze ca o combinație liniară a vectorilor din vechea bază, determinând astfel componentele matricei de trecere.

$\overline{e'_1} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} + \alpha_4 \overline{e_4}$ relație care devine:

(2,1,0,1) = (α_1+α_2-α_3-α_4, 2α_1-α_2+2α_3-α_4, -α_1+α_2+α_3, α_2+α_3+α_4).
Astfel se obține sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \end{cases} \quad , \quad \text{cu soluțiile} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

În acest fel am obținut prima coloană a matricei de trecere.
Procedând la fel pentru $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}$ şi $\overline{e'_4}$ obținem coloanele (2), (3) şi (4) ale aceleiaşi matrice.

Prin urmare : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, iar \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} sau \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

Relația de legătură dintre noile coordonate şi cele vechi este:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_3 + x_4 \\ x'_2 = -x_1 + x_2 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{cases}.$$

2.5.8. În spațiul R^3 se consideră următoarele sisteme de vectori:

$$\text{B} = \left\{ \overline{e_1} = (1,1,0), \overline{e_2} = (1,0,0), \overline{e_3} = (1,2,3) \right\}$$
$$\text{B'} = \left\{ \overline{e'_1} = (1,3,3), \overline{e'_2} = (2,2,3), \overline{e'_3} = (6,7,9) \right\}$$

a) Să se arate că B şi B' sunt baze şi să se găseascîă matricea de trecere de la B la B'.
b) Să se găsească expresia vectorului $\overline{x} = 2\overline{e_1} + 5\overline{e_2} + 7\overline{e_3}$ în baza B'.

<u>Soluție:</u>

a) Vectorii din B (respectiv B') sunt liniari independenți şi fiind în număr de trei formează bază.

Pentru a determina matricea schimbării de bază descompunem $\overline{e'_1}$ după B, şi anume

$\overline{e'_1} = s_{11}\overline{e_1} + s_{21}\overline{e_2} + s_{31}\overline{e_3}$ sau

$$\begin{cases} s_{11}+s_{21}+s_{31}=1 \\ s_{11}+2s_{31}=3 \\ 3s_{31}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{11}=1 \\ s_{21}=-1 \\ s_{31}=1 \end{cases}$$

Analog

$\overline{e'_2} = s_{12}\overline{e_1} + s_{22}\overline{e_2} + s_{32}\overline{e_3} \Rightarrow s_{12}=0, s_{22}=1, s_{32}=1$

$\overline{e'_3} = s_{13}\overline{e_1} + s_{23}\overline{e_2} + s_{33}\overline{e_3} \Rightarrow s_{13}=0, s_{23}=2, s_{33}=3$

Astfel că: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Dacă X = (2 5 7)^t (matrice coloană), atunci componentele X' ale lui $\overline{x}$ în baza B' se obțin din ecuația matriceală X = S X'. Calculăm

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

şi deci

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Astfel că $\overline{x} = 0\overline{e'_1} + 1\overline{e'_2} + 2\overline{e'_3}$, în baza B'.

§2.6. TEME DE REZOLVAT PENTRU EVALUARE

2.6.1.. Fie $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ două $\boldsymbol{K}$-spații vectoriale. Să se arate că $V \times \boldsymbol{W}$ = ={(x, y)| $x \in V$, $y \in \boldsymbol{W}$} este un K-spațiu vectorial în raport cu operațiile :

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) =: (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\alpha (x, y) =: (\alpha x, \alpha y)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{V}, y_1, y_2 \in \boldsymbol{W}, \forall \alpha \in \boldsymbol{K}.$

2.6.2. Să se precizeze dacă operațiile definite pe mulțimile indicate determină o structură de spațiu vectorial:

a) $\forall x, y \in \boldsymbol{R}^2$; $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{cases} x+y =: (x_1+y_1, x_2+y_2) \\ \alpha x =: (0, \alpha x_2) \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x+y =: (x_1+y_2, x_2+y_1) \\ \alpha x =: (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{cases}$, $\forall x, y \in \boldsymbol{R}^2, \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$

c) $\begin{cases} x \oplus y =: \sqrt[3]{x^3 + y^3} \\ \alpha \otimes x =: \alpha x \end{cases}$, $\forall\ x, y \in \boldsymbol{R}$, $\forall\ \alpha \in \boldsymbol{R}$

d) $\begin{cases} x + y =: (x_1 + y_1, x_2 + y_3, x_3 - y_2) \\ \alpha x =: (\alpha x_3, \alpha x_2, \alpha x_1) \end{cases}$, $\forall\ x, y \in \boldsymbol{R}^3$, $\forall\ \alpha \in \boldsymbol{R}$

2.6.3 Să se stabilească care dintre submulțimile de mai jos formează subspații vectoriale în spațiile vectoriale indicate

a) $S_1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$
b) $S_2 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 2x - y + 1 = 0\}$
c) $S_3 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 1 = 0\}$
d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$
e) $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$

2.6.4 Fie $v_1, v_2, v_3 \in \boldsymbol{V}$, trei vectori liniar independenți. Să se determine $\alpha \in \boldsymbol{R}$ astfel încât vectorii

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + \alpha v_2 \\ u_2 = v_2 + \alpha v_3 \\ u_3 = v_3 + \alpha v_1 \end{cases}$$

să fie liniar independenți, respectiv liniar dependenți.

2.6.5 Să se arate că vectorii $x, y, z \in \boldsymbol{R}^3$,
$x = (-1,1,1)$, $y = (1,1,1)$, $z = (1,3,3)$,
sunt liniar dependenți şi să se găsească relația de dependență liniară.

2.6.6 Să se determine suma și intersecția subspațiilor generate de sistemele de vectori

$U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 2), u_3 = (0, -1, 2)\}$
$V = \{v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (0, 2, 4)\}$

2.6.7 Să se precizeze care din următoarele sisteme de vectori formează baze în spațiile vectoriale date:

a) $S_1 = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (2, -1)\} \subset \boldsymbol{R}^2$
b) $S_2 = \{u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (2, 1, -3), u_3 = (1, -1, 0)\} \subset \boldsymbol{R}^3$
c) $S_3 = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, -1, 1), u_3 = (1, -1, 1)\} \subset \boldsymbol{R}^3$
d) $S_4 = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\} \subset \boldsymbol{R}_3[x]$

$$S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\boldsymbol{R})$$

2.6.8. Să se verifice dacă următoarele operații definesc produse scalare pe spațiile vectoriale considerate

a) $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$

b) $<x, y> = x_1y_1 - 2x_2y_2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$

c) $<x, y> = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3$

2.6.9 Să se ortonormeze sistemele de vectori în raport cu produsul scalar uzual

a) $v_1 = (1, -2, 2)$, $v_2 = (-1, 0, -1)$, $v_3 = (5, 3,-7)$
b) $v_1 = (1, 1 , 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3= (0, 0, 1)$.

2.7.BIBLIOGRAFIE

2.7.1. Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Curs de algebră, geometrie analitică, geometrie diferențială şi ecuații diferențiale. Partea I-a, Universitatea Transilvania Braşov, 1992.

2.7.2. Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Postolache M., Algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială şi ecuații diferențiale. Culegere de probleme. Editura ALL, Bucureşti, Ediția I-a, 1994, Ediția a II-a, 1998.

2.7.3. Atanasiu Gh., Lazăr V., Purcaru M., Curs de algebră liniară şi geometrie analitică (pentru colegiu). Universitatea Braşov, 2000.

2.7.4. Pitiş Gh., Curs de algebră, geometrie şi ecuații diferențiale, Partea I-a, Universitatea Transilvania Braşov, 1992.

2.7.5. Udrişte C., Radu C., Dicu C., Mălăncioiu O., Algebră, Geometrie şi Ecuații diferențiale, E.D.P., Bucureşti, 1982.

Capitolul 3

SPAŢII PUNCTUALE EUCLIDIENE

Spaţiile în care vor fi studiate majoritatea noţiunilor de geometrie din acest volum sunt spaţii în care noţiunile de punct şi vector sunt indispensabile. Noţiunea de spaţiu afin permite folosirea celor două noţiuni într-un cadru bine definit.

Acest capitol este dedicat, în mod special, însuşirii cunoştinţelor de algebră vectorială: noţiunea de vector, operaţii elementare cu vectori, produse de vectori, cât şi a consecinţelor geometrice aplicative: calculul lungimilor, unghiurilor, ariilor şi volumelor formate de vectori.

Cea mai mare parte a disciplinelor tehnice folosesc intens această algebră.

Obiective operaţionale:

3.1. Să înţeleagă noţiunile de spaţiu afin, spaţiu punctual euclidian şi spaţiu punctual euclidian al vectorilor liberi

3.2. Să reţină proprietaţile produsului scalar şi ale produsului vectorial care vor fi generalizate la teoria câmpurilor scalare şi vectoriale

3.3. Să poată rezolva orice problemă care necesită lungimi de vectori, arii de paralegornume, volume de paralelipiped şi cazurile lor particulare

Conţinutul capitolului:

§3.1 Spaţiul afin: definiţie şi exemple

În cele ce urmează vom considera o mulţime nevidă $\mathsf{A} = \{A, B, C, ..., P, Q, R, ...\}$ şi vom conveni ca elementele sale să se numească *puncte* iar un element $(A, B) \in \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ să se numească *bipunct* al lui A. Punctul A se va numi originea bipunctului, iar punctul B se va numi extremitatea bipunctului (A, B). Bipunctele (A, B) şi (B, A) se vor numi bipuncte simetrice.

3.1.1 Definiţie. *Numim **spaţiu afin**, tripletul* (A, V, φ) *în care* A *este o mulţime nevidă de puncte,* V *un* ***K****-spaţiu vectorial şi funcţia* $\varphi: \mathsf{A}\times\mathsf{A} \to \mathsf{A}$, $\varphi(A,B) = \bar{v} \in V$ *, care satisface condiţiile:*

A$_1$) $\forall\ A, B, C \in \mathsf{A}$, $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$

A$_2$) $\forall\ \bar{v} \in V, \forall A \in \mathsf{A}$ *există un punct* $B \in \mathsf{A}$, *unic determinat de* *relația* $\varphi(A,B)=\bar{v}$.

Mulțimea A se numeşte *mulțime suport* a spațiului afin şi elementele sale vor fi numite punctele spațiului afin. Spațiul vectorial ***V*** se numeşte *spațiul vectorial director* al spațiului afin, iar elementele sale vor fi numite vectorii sapțiului afin. Aplicația φ este numită *funcția de structură afină*.

Elementele unui spațiu afin sunt puncte şi vectori.

Spațiul afin (A, *V*, φ) se zice real sau complex după cum spațiul vectorial ***V*** este real sau complex.

Dacă în axioma A_1) considerăm $A = B = C$, atunci $\varphi(A, A) = \bar{0}$, $\forall A \in$ A. Deci oricărui bipunct (A, A) îi corespunde prin funcția de structură vectorul nul $\bar{0} \in V$.

Vectorii corespunzători unei perechi de bipuncte simetrice sunt vectori opuşi. În adevăr, dacă luăm $C = B$, în axioma A_1), avem $\varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$.

3.1.2 Consecință. *Funcția φ este surjectivă şi în plus, pentru fiecare punct $O \in$ A fixat, φ_O: A $\to$ **V**, $\varphi_O(A) = \varphi(O, A)$, $\forall A \in$ A, este bijectivă.*

Demonstrația este imediată ținând cont de axiomele A_1) şi A_2).

Într-un spațiu afin (A, *V*, φ) funcția φ determină o relație de echivalență pe mulțimea bipunctelor lui A, pe care o vom numi relația de *echipolență*.

Vom spune ca bipunctul (A, B) este echipolent cu bipunctul (C, D) dacă acestea au aceeaşi imagine prin φ.

$$(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow \varphi(A, B) = \varphi(C, D) \qquad (1.1)$$

Se verifică uşor că relația "~" este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, adică este o relație de echivalență pe A × A.

Spațiul factor A × A/~ este în corespondență bijectivă cu spațiul vectorial ***V***. Fiecărui vector $\bar{v} \in V$ îi corepunde o singură clasă de echivalență de bipuncte echipolente, anume

$$\varphi^{-1}(\bar{v}) = \{ (A,B) \in \text{A} \times \text{A} \mid \varphi(A,B) = \bar{v} \} \qquad (1.2)$$

Când identificăm spațiul factor A × A/~ cu spațiul vectorial ***V*** prin această bijecție, clasa bipunctului (A, B) notată cu $\overline{AB}$, poartă numele de *vector liber* al spațiului afin.

În aceste condiții axiomele A_1) şi A_2) pot fi scrise în felul următor:

$$\forall A,B,C \in \text{A}, \quad \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \qquad (1.3)$$

$$\forall \bar{v} \in V, \forall A \in \text{A}, \ \exists\ B \in \text{A}, \text{ unic aşa încât } \overline{AB} = \bar{v}$$

Fie $O \in$ A un punct fixat şi A° = $\{O\}$ × A = $\{(O, A) / A \in$ A $\}$ mulțimea bipunctelor de origine O.

Ținând cont de Consecința 1.2 şi că relația $A \in$ A $\mapsto$ $(O,A) \in$ A° este o corespondență bijectivă, rezultă că A° se poate identifica atât cu A cât şi cu spațiul vectorial director ***V***.

Când se identifică A° cu spațiul vectorial ***V*** se induce pe A° structura vectorială din ***V***. Vectorii acestui spațiu se numesc *vectori legați* ai spațiului afin sau *vectori tangenți* în O la A şi vor fi notați prin $\overrightarrow{OA}$.

Când se identifică A cu spațiul vectorial A°, prin bijecția

$A \in \mathsf{A} \to (O, A) \in \mathsf{A}^o$, înseamnă că s-a considerat A ca spaţiu vectorial, având punctul O ca origine.

Vectorul $\overrightarrow{OA} \in \varphi(O, A) = \overline{OA}$ se va numi *vector de poziţie*.

Practic în orice punct $O \in \mathsf{A}$ al unui spaţiu afin (A, V, φ) se poate construi un spaţiu vectorial A°, care se identifică cu A°.

În urma acestor identificări, se justifică noţiunea de *dimensiune* a unui spaţiu afin ca fiind dimensiunea spaţiului vectorial director $\boldsymbol{V}$.

Dacă $dim\boldsymbol{V} = n$, atunci spaţiul afin de dimensiune n se va nota cu (A_n, $\boldsymbol{V}_n$) sau simplu A_n.

Observaţii

1° Un alt mod de a defini un spaţiu afin porneşte de la definirea unei relaţii de echivalenţă pe mulţimea bipunctelor unei mulţimi nevide A şi apoi se cere ca spaţiul cât să satisfacă anumitor axiome [ ].

2° Dacă spaţiul vectorial $\boldsymbol{V}$ este un spaţiu vectorial euclidian atunci spaţiul afin (A, $\boldsymbol{V}$, φ) este numit ***spaţiu punctual euclidian***. Dacă $dim\boldsymbol{V} = n$, vom nota atunci prin E_n spaţiul punctual euclidian corespunzător. Structura euclidiană a spaţiului vectorial director $\boldsymbol{V}$ va permite studiul proprietăţilor metrice ale unor submulţimi din spaţiul punctual euclidian E_n.

3° Există spaţii afine care nu sunt spaţii vectoriale. Dar, orice spaţiu vectorial este un spaţiu afin, întrucât funcţia φ: $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$, verifică axiomele A_1) şi A_2). Spaţiul afin astfel definit ($\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}$, φ) se numeşte ***spaţiul afin canonic*** asociat spaţiului vectorial $\boldsymbol{V}$.

Exemple

1° ***Spaţiul afin standard***

Să considerăm spaţiul aritmetic $\boldsymbol{K}^n$. Acest spaţiu poate fi organizat ca un spaţiu vectorial (ex.2, §1, Cap.2) căruia îi putem asocia spaţiul afin canonic ($\boldsymbol{K}^n$, $\boldsymbol{K}^n$, φ) unde funcţia de structură afină φ este definită de relaţia $\varphi(A, B) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$, pentru $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ şi $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Acest spaţiu afin este numit *spaţiul afin standard* şi va fi notat tot cu $\boldsymbol{K}^n$.

În caz particular pentru $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$, avem spaţiul afin standard ($\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^n$, φ), în care spaţiul vectorial director $\boldsymbol{R}^n$ este un spaţiu euclidian (ex.1, §4, Cap.2), deci spaţiul afin ($\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^n$, φ) devine un spaţiu punctual euclidian.

2° ***Spaţiul afin geometric al vectorilor liberi***

Considerăm ca mulţime suport spaţiul punctual al geometriei elementare E_3, spaţiul vectorial al vectorilor liberi V_3 (ex.6, §2, Cap.2), ca spaţiu vectorial director şi funcţia φ: $E_3 \times E_3 \to \mathsf{V}_3$, $\varphi(A,B) = \overline{AB} \in \mathsf{V}_3$, care asociază bipunctului (A, B) clasa de echivalenţă a acestuia, ca funcţie de structură afină.

Obţinem în acest fel *spaţiul afin geometric al vectorilor liberi* $\mathsf{A}_3 = (E_3, \mathsf{V}_3, \varphi)$. Acest spaţiu a constituit modelul spaţiilor afine.
Vom studia în detaliu acest spaţiu în capitolul următor.

3° ***Varietăţile liniare*** ale unui spaţiu vectorial $\boldsymbol{V}$ sunt spaţii afine.

O varietate liniară a unui spaţiu vectorial $\boldsymbol{V}$ reprezintă o submulţime L de forma $L = \overline{a} + \boldsymbol{V}'$, unde $\boldsymbol{V}'$ este o subspaţiu vectorial al lui $\boldsymbol{V}'$.

Dacă vom considera funcţia

$$\varphi' : L \times L \to \boldsymbol{V}',\ \varphi'(\overline{a} + \overline{v}, \overline{a} + \overline{w}) = \overline{w} - \overline{v},$$

atunci axiomele A_1) şi A_2) sunt verificate şi deci tripletul (L, $\boldsymbol{V}'$, φ) este un spaţiu afin.

În caz particular, orice subspaţiu vectorial este un spaţiu afin.

§3.2. Combinaţii afine. Repere în spaţii afine

Fie spațiul afin (A, $\boldsymbol{V}$, φ), un sistem de puncte $\{A_0, A_1, ..., A_p\} \subset$ A şi scalarii $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p \in \boldsymbol{K}$.

3.2.1 Definiție. *Numim **combinație afină** a punctelor* $\{A_0, A_1, ..., A_p\} \subset$ A, *punctul* $P \in$ A *dat de*

$$P = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + ... + \alpha_p A_p \quad \text{cu} \quad \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_p = 1 \quad (2.1)$$

Relația (2.1) poate fi înțeleasă ca o relație vectorială între vectorii de poziție ai punctelor $P, A_0, A_1, ..., A_p$, folosind ca punct origine un punct oarecare $O \in$ A, adică

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + ... + \alpha_p \overrightarrow{OA_p} \qquad (2.1)'$$

Combinația afină (2.1) poate fi scrisă şi sub forma

$$P = \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right) A_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i \,, \quad \alpha_i \in \boldsymbol{K}, \quad i = \overline{1, p} \qquad (2.2)$$

Scalarii $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p$ cu proprietatea $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_p = 1$ se numesc *coeficienții combinației* afine sau *ponderi*.

3.2.2 Definiție. *Un sistem finit de puncte din* A *se numeşte **afin dependent** dacă există un punct în sistem care să se exprime ca o combinație afină a celorlalte puncte din sistem. În caz contrar vom spune că sistemul este **afin independent**.*

3.2.3 Propoziție. *Sistemul de puncte este afin dependent (independent) dacă şi numai dacă sistemul de vectori* $\{\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, ..., \overline{A_0A_p}\}$ *este liniar dependent (independent).*

Demonstrație. Dacă sistemul de puncte $\{A_0, A_1, ..., A_p\}$ este afin dependent atunci un punct poate fi exprimat ca o combinație afină a celorlalte. Să presupunem că A_0 este o combinație afină a sistemului $\{A_0, A_1, ..., A_p\}$

$$A_0 = \alpha_1 A_1 + ... + \alpha_p A_p \,, \quad \text{cu} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p = 1 \qquad (2.3)$$

Considerând pe A_0 ca origine relația (3) poate fi scrisă sub forma vectorială

$$\vec{0} = \alpha_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_0A_2} + ... + \alpha_p \overrightarrow{A_0A_p} \qquad (2.4)$$

Deoarece cel puțin unul din coeficienții combinației este nenul rezultă că vectorii $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_p}$ sunt liniar dependenți.

Reciproc. Să presupunem că sistemul de vectori $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_p}\}$ este liniar dependent, adică există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \boldsymbol{K}$ nu toți nuli aşa încât are loc egalitatea

$$\alpha_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_0A_2} + ... + \alpha_p \overrightarrow{A_0A_p} = \overline{0} \qquad (2.5)$$

Să considerăm cazul $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Demonstrăm că ecuația (2.5) în A_0 are soluție unică.

În adevăr, alegând $O \in$ A ca origine, ecuația (5) poate fi scrisă sub forma :

$$\alpha_1(\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_1}) + \alpha_2(\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_2}) + ... + \alpha_p(\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_p}) = \vec{0}$$

de unde rezultă

$$\alpha_1\overrightarrow{OA_0} = \alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{OA_p} \quad \text{sau}$$

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{\alpha_1}{\alpha}\overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha}\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\alpha}\overrightarrow{OA_p}$$

adică A_0 este unic determinat şi în plus, $\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\alpha} = 1$. Deci A_0 este o combinație afină a celorlalte puncte.

Dacă $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 0$, cum cel puțin un scalar este nenul, de exemplu α_p, din (5) obținem

$$\overrightarrow{A_0A_p} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_p}\overrightarrow{A_0A_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_p}\overrightarrow{A_0A_2} - \ldots - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}\overrightarrow{A_0A_{p-1}}$$

Considerând $\alpha_0 = 0$ obținem

$$A_p = \alpha_0 A_0 - \frac{\alpha_1}{\alpha_p}A_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_p}A_2 - \ldots - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}A_{p-1}$$

unde $\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{\alpha_p} - \frac{\alpha_2}{\alpha_p} - \ldots - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} = 1$, adică sistemul de puncte $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$ este afin dependent.

Fie A_n un spațiu afin n-dimensional.

3.2.4 Definiție. *Un sistem de puncte* $\mathsf{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ *se numeşte* ***reper afin*** *în spațiul afin* A_n *dacă sunt îndeplinite condițiile:*
1) R *este un sistem de puncte afin independent*
2) *Orice punct* $P \in \mathsf{A}_n$ *poate fi exprimat ca o combinație afină a punctelor din* R .

Dacă R este un reper afin, atunci pentru $\forall\, P \in \mathsf{A}$ avem

$$P = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n\ , \quad \forall P \in \mathsf{A}_n \qquad (2.6)$$

în care $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ (2.7)

Sistemul de puncte $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ afin independent, ce formează un reper afin, determină în mod unic sistemul de vectori liniar independenți $\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \ldots, \overline{A_0A_n}$ ce reprezintă o bază a spațiului vectorial director $\boldsymbol{V_n}$ al spațiului afin A_n.

Dacă considerăm punctul $A_0 = O$ ca punct origine al spațiului afin A_n şi notând baza spațiului vectorial director cu $\overline{e}_1 = \overline{A_0A_1}, \vec{e}_2 = \overline{A_0A_2}, \ldots, \overline{e}_n = \overline{A_0A_n}$ putem defini într-un spațiu afin A_n noțiunea de reper cartezian.

3.2.5 Definiție. *Se numeşte* ***reper cartezian*** *într-un spațiu afin* A_n *, o pereche* $\mathsf{R} = \{O; \mathsf{B}\}$*, în care O este un punct fixat în* A_n*, iar* $\mathsf{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ *este o bază a spațiului vectorial director.*

Fie $\mathsf{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază a spațiului vectorial director $\boldsymbol{V_n}$. Atunci, pentru fiecare punct $P \in \mathsf{A}_n$, vectorul de poziție $\overrightarrow{OP}$ poate fi scris în mod unic sub forma:

$$\overline{OP} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \qquad (2.8)$$

Scalarii $x_1, x_2,..., x_n$ vor fi numiți *coordonatele carteziene* ale punctului P în raport cu reperul R = {O; B}, iar bijecția $P \in A_n \mapsto (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{K}^n$ va fi numită *funcție de coordonate* corespunzătoare reperului R = {O; B}.

Fie R = {O; B}, un reper cartezian în A_n. Un alt reper R′ = {O'; B′}, din A_n va fi determinat în mod unic dacă cunoaștem vectorul de poziție al punctului O' față de reperul inițial R și relația dintre B′ = $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n\}$ și baza inițială B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$, adică

$$\begin{cases} \overline{OO'} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i0}\bar{e}_i \\ \bar{e}'_i = \sum\limits_{n=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_i \end{cases}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.9}$$

Dacă $P \in A_n$ este un punct oarecare și (x_i), (x'_j), $i,j = \overline{1,n}$ sunt coordonatele sale în reperul R respectiv R′, atunci din relația $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ obținem formulele

$$x_i = a_{ij}x'_j + a_{i0}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0, \quad i, j = \overline{1,n} \tag{2.10}$$

numite *ecuațiile transformării de coordonate* obținute la schimbarea reperului R cu R′.

Dacă notăm cu $X = {}^t[x_1, x_2, ..., x_n]$, $X' = {}^t[x'_1, x'_2, ..., x'_n]$, $A_0 = (a_{i0})$, $A = (a_{ij})$ putem scrie ecuațiile schimbării de coordonate sub formă matriceală

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad X = AX' + A_0 \tag{2.11}$$

Matricea $\begin{pmatrix} A & A_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de ordinul $n + 1$ este numită *matricea de trecere* de la reperul *R* la reperul *R′*.

În particular dacă *B′* = *B* atunci $A = I$ iar ecuațiile (2.11) se scriu sub forma:

$$X = X' + A_0 \quad \text{sau} \quad x_i = x'_1 + a_{i0}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.11$'$}$$

Schimbarea reperului *R* = {O; *B*} cu *R′* = {O'; *B*} guvernată de ecuațiile transformării de coordonate (11)′ se numește *translație.*

Dacă $O' = O$, schimbarea reperului *R* = {O; *B*} cu reperul *R′* = {O; *B′*}, adică $a_{i0} = 0$, $i = \overline{1,n}$ se numește *centro-afinitate* și este caracterizată de ecuațiile

$$X = AX' \quad \text{sau} \quad x_i = a_{ij}x'_1, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.11$''$}$$

Remarcă: Orice reper afin poate fi înlocuit cu un reper cartezian și reciproc.

§3.3. Subspații afine

Fie (*A*, V, φ) un spațiu afin, A′ o submulțime nevidă a lui A și φ' restricția lui φ la

$\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$. Dacă $\boldsymbol{V}' = \varphi(\mathcal{A}' \times \mathcal{A}')$ este un subspațiu vectorial al lui $\boldsymbol{V}$ atunci sunt satisfăcute axiomele A_1) şi A_2) pentru tripletul $(\mathcal{A}', V', \varphi')$.

3.3.1 Definiție. *Se numeşte **subspațiu afin** al spațiului afin* $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ *un triplet* $(\mathcal{A}', V', \varphi')$, *unde* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ *este o submulțime nevidă,* $\boldsymbol{V}' = \varphi(\mathcal{A}' \times \mathcal{A}')$ *este un subspațiu vectorial al lui* $\boldsymbol{V}$, *iar* φ' *este restricția lui* φ *la* $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$.

Un subspațiu afin al unui spațiu afin $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ este determinat fie de submulțimea $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ pentru care $\varphi(\mathcal{A}' \times \mathcal{A}') = \boldsymbol{V}' \subset \boldsymbol{V}$ este subspațiu vectorial, fie de un punct $P_0 \in \mathcal{A}$ şi un subspațiu vectorial $\boldsymbol{V}' \subset \boldsymbol{V}$, caz în care mulțimea suport este dată de $\mathcal{A}' = \{ A \in \mathcal{A}' \,/\, \overline{P_0 A} \in \boldsymbol{V}' \}$.

3.3.2 Propoziție. *O submulțime nevidă* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ *este un subspațiu afin dacă şi numai dacă combinația afină a oricăror două puncte din* $\mathcal{A}'$ *aparține lui* $\mathcal{A}'$ *adică*

$$\forall A, B \in \mathcal{A}' \Rightarrow (1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{A}', \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{K} \qquad (3.1)$$

Demonstrație: Dacă $\mathcal{A}'$ este un subspațiu afin atunci subspațiul vectorial director $\boldsymbol{V}'$ este dat de $\boldsymbol{V}' = \{ \overrightarrow{P_0 A} \,/\, A \in \mathcal{A}' \}$.

Considerând $\overrightarrow{P_0A}$, $\overrightarrow{P_0B} \in \boldsymbol{V}'$ atunci

$(1-\lambda)\overrightarrow{P_0A} + \lambda\overrightarrow{P_0B} = \overrightarrow{P_0C} \in \boldsymbol{V}'$ deci $C = (1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{A}'$.

Reciproc. Fie $P_0 \in \mathcal{A}$ un punct fixat. Demonstrăm că mulțimea $\{ \overrightarrow{P_0 A} \,/\, A \in \mathcal{A}' \} = \boldsymbol{V}'$ este un subspațiu vectorial. Dacă notăm cu $B = (1-\lambda)P_0 + \lambda A$ atunci $B \in \mathcal{A}$ şi deci $\overrightarrow{P_0B} = \lambda\overrightarrow{P_0A} \in \boldsymbol{V}'$. Să arătăm acum că şi suma $\overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{P_0B} \in \boldsymbol{V}'$. Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ combinația afină (3.1) va determina punctul $c = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \in \mathcal{A}'$; adică $\overrightarrow{P_0C} \in \boldsymbol{V}'$. Întrucât $\overrightarrow{P_0C} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{P_0B}\right) \in \boldsymbol{V}'$, conform primei părți a demonstrației avem şi $2\overrightarrow{P_0C} \in \mathcal{A}'$, deci $\overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{P_0B} \in \boldsymbol{V}'$. c.c.t.d.

Propoziția (3.2) este valabilă pentru orice combinație afină a unui număr finit de puncte din $\mathcal{A}'$.

Se poate demonstra fără dificultate că mulțimea combinațiilor afine finite ce pot fi formate cu punctele sistemului $S' = \{A_0, A_i\}$, $i \in I$ este un subspațiu afin, pe care-l vom nota cu $< S' >$ sau $L(S')$ numit *subspațiul afin generat* de sistemul S'.

Spațiul vectorial director al subspațiului afin $L(S')$ este subspațiul vectorial generat de sistemul de vectori $\{\overrightarrow{A_0A_i}\}$, $i \in I$, adică $V' = <\{ \overrightarrow{A_0A_i} \}>$.

De remarcat faptul că dacă $S' = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_p\}$ este un sistem finit de puncte afin independente din $\mathcal{A}$, atunci S' reprezintă un reper afin pentru subspațiul generat $L(S)$, iar $\mathcal{R} = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_p})$ este un reper cartezian. În acest caz $dimL(S) = p$.

În mulțimea subspațiilor afine ale unui spațiu afin $\mathcal{A}$ pot fi definite operațiile de intersecție şi uniune de subspații.

Prin *intersecția* subspațiilor afine $\mathcal{A}'$ şi $\mathcal{A}''$ se înțelege submulțimea $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$. Dacă $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \varnothing$ atunci spațiul vectorial director al subspațiului $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ este $\boldsymbol{V}' \cap \boldsymbol{V}''$, unde $\boldsymbol{V}'$ şi $\boldsymbol{V}''$ sunt subspațiile directoare ale lui $\mathcal{A}'$ şi respectiv $\mathcal{A}''$.

Prin *uniunea* subspațiilor afine $\mathcal{A}'$ şi $\mathcal{A}''$ se înțelege subspațiul afin generat de $\mathcal{A}''$ şi se notează cu $\mathcal{A}' \vee \mathcal{A}''$. Dacă $\mathcal{A}'$ şi $\mathcal{A}''$ sunt două subspații afine, iar $\boldsymbol{V'}$ şi $\boldsymbol{V''}$ spațiile lor directoare, atunci spațiul vectorial director al uniunii este dat de

a) $\boldsymbol{V'} + \boldsymbol{V''}$, dacă $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \varnothing$

b) $\boldsymbol{V'} + \boldsymbol{V''} + \boldsymbol{U}$ dacă $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \varnothing$, unde $\boldsymbol{U}$ este spațiul vectorial al subspațiului afin generat de două puncte $A'_0 \in \mathcal{A}'$ şi $A'_0 \in \mathcal{A}''$.

3.3.3 Definiție. *Subspațiul generat de două puncte afin independente din* $\mathcal{A}$, $S = \{A_0, A_1\}$, *se numeşte* ***dreaptă afină***, *pe scurt dreaptă, dat de*

$$\mathcal{A}_1 = \{P \in \mathcal{A} \,/\, P = (1 - \lambda)A_0 + \lambda A_1,\ \lambda \in \boldsymbol{K}\} \qquad (3.2)$$

Spațiul vectorial director este dreapta vectorială

$$\boldsymbol{V_1} = \{\overline{A_0 P} \in V \,/\, \overrightarrow{A_0 P} = \lambda \overrightarrow{A_0 A_1},\ \ \lambda \in \boldsymbol{K}\} \qquad (3.3)$$

Punctele $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$ sunt afin independente dacă şi numai dacă $A_0 \neq A_1$.

În spațiul vectorial V_1 există cel puțin un vector nenul ($A_0 \neq A_1$) şi orice doi vectori sunt liniar dependenți, ceea ce înseamnă că dim $\mathcal{A}_1 = 1$.

Doi vectori ai spațiului vectorial V_1 se zic *coliniari*.

Proprietatea de coliniaritate a doi vectori este deci echivalentă cu dependența liniară a acestora.

Pentru $\lambda = 0$ obținem $P = A_0$, iar pentru $\lambda = 1$ se obține $P = A_1$.

Definind funcția $f: \mathcal{A} \to \boldsymbol{K}$, prin $f(P) = \lambda$, $\forall P \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \boldsymbol{K}$ determinat unic de relația (3.3), obținem o corespondență biunivocă între punctele dreptei $\mathcal{A}_1$ şi mulțimea elementelor din $\boldsymbol{K}$.

Dacă $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$, pentru $\lambda \in (0, 1)$, din relația $\overrightarrow{A_0 P} = \lambda \overrightarrow{A_0 A_1}$ se obțin punctele interioare segmentului orientat $\overrightarrow{A_0 A_1}$, iar pentru $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus [0,1]$ se obțin punctele exterioare segmentului $\overrightarrow{A_0 A_1}$.

Un reper cartezian în subspațiul $\mathcal{A}_1$ este definit de un punct fix O şi un vector nenul $\overline{e} \in V_1$, adică $\mathcal{R}\ \{O, \overline{e}_1\}$.

Într-un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O, \overline{e}_1\}$ al spațiului afin $\mathcal{A}_1$, pentru orice punct $P \in \mathcal{A}_1$ vectorul de poziție $\overrightarrow{OP}$ se exprimă în mod unic sub forma

$$\overline{OP} = x\overline{e} \qquad (3.4)$$

iar coordonata $x \in \boldsymbol{K}$ este numită *abscisa* punctului P.

3.3.4 Definiție. *Spunem că un punct* $P \in \mathcal{A}_1$ *împarte segmentul orientat* $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$, *în raportul* $k \in \boldsymbol{K}$, *dacă* $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$. *Spunem că numărul* $k \in \boldsymbol{K}$ *este raportul simplu al punctelor* $A, B, P \in \mathcal{A}_1$.

3.3.5 Propoziție. *Punctul* $P \in \mathcal{A}_1$ *împarte segmentul* $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$, *în raportul* $k \in \boldsymbol{K}$, *dacă şi numai dacă pentru un punct fix* $O \in \mathcal{A}_1$, *avem*

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}, \quad k \neq -1 \tag{3.4}$$

Înlocuind $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$ în relația $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$ se obține (3.4) şi reciproc.

În caz particular pentru $k = 1$ se obține mijlocul segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

Vom numi figură a dreptei afine A_1 orice submulțime de puncte din A_1.

Înțelegem prin geometria afină a dreptei A_1 mulțimea noțiunilor, figurilor şi proprietăților lor bazate pe axiomele ce definesc un spațiu afin.

3.3.6 Definiție. *Subspațiul generat de trei puncte* $S = \{A_0, A_1, A_2\} \in \mathsf{A}$ *afine independente se numeşte* ***plan afin****, pe scurt plan, dat de*

$$\mathsf{A} = \{ P \in \mathsf{A} \ / \ P = (1 - \lambda - \mu) A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 ,\ \lambda, \mu \in \boldsymbol{K} \} \tag{3.5}$$

Spațiul vectorial director este planul vectorial

$$\boldsymbol{V}_2 = \{ \overline{A_0 P} \in V \,/\, \overrightarrow{A_0 P} = \lambda \overrightarrow{A_0 A_1} + \mu \overrightarrow{A_0 A_2},\ \lambda, \mu \in \boldsymbol{K} \} \tag{3.6}$$

Vectorii spațiului $\boldsymbol{V}_2$ se numesc *vectori coplanari*.

În spațiul A_2 trei puncte afin independente determină doi vectori liniar independenți şi orice trei vectori din V_2 sunt coplanari, ceea ce înseamnă că *dim* $\mathsf{A}_2 = 2$.

Un reper cartezian în subspațiul afin A_2 este definit de un punct fix $O \in \mathsf{A}_2$ şi vectorii $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2 \in V_2$, adică $\mathsf{R} = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.

Într-un reper cartezian R, pentru orice punct $P \in \mathsf{A}_2$ vectorul de poziție $\overrightarrow{OP}$ se exprimă în mod unic sub forma

$$\overline{OP} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 \tag{3.7}$$

iar coordonatele $x, y \in \boldsymbol{K}$ sunt numite *abscisa* şi respectiv *ordonata* punctului P.

Subspațiile proprii ale planului afin A_2 sunt dreptele afine.

Două drepte ale planului afin se zic *paralele* dacă sunt caracterizate de acelaşi spațiu vectorial director. Relația de paralelism în planul afin A_2 este o relație de echivalență, iar o clasă de echivalență în raport cu această relație defineşte o *direcție* în plan.

Se numeşte *figură* a planului A_2,orice submulțime de puncte a sa .

Înțelegem prin *geometria afină a planului* A_2 mulțimea noțiunilor, figurilor şi proprietăților lor bazate pe axiomele ce definesc noțiunea de spațiu afin.

Dacă avem patru puncte $A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathsf{A}$ afin independente, atunci subspațiul afin A_3, dat de mulțimea punctelor

$$\mathsf{A}_3 = \{ P \in \mathsf{A} \ / \ P = (1 - \lambda - \mu - \nu) A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 ,\ \lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{K} \} \tag{3.8}$$

are drept spațiu vectorial director, spațiul

$$V_3 = \{ \overrightarrow{A_0 P} \in V \,/\, \overrightarrow{A_0 P} = \lambda \overrightarrow{A_0 A_1} + \mu \overrightarrow{A_0 A_2} + \nu \overrightarrow{A_0 A_3},\ \lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{K} \} \tag{3.9}$$

Acest subspațiu afin este de dimensiune trei.

Modul în care este construit spațiul afin A_3 permite stabilirea unei corespondențe biunivoce între mulțimea punctelor spațiului afin A_3 şi mulțimea punctelor spațiului afin standard $\boldsymbol{K}^3$. Oricărui punct P $\in \mathsf{A}_3$ îi corespunde o singură ternă ordonată de numere $(\lambda, \mu, \nu) \in \boldsymbol{K}^3$, dată de (3.8).

În baza acestei corespondențe biunivoce putem dota spațiul afin A_3 cu proprietățile spațiului afin standard $\boldsymbol{K}^3$.

Subspațiile spațiului afin A_3 sunt subspațiile de dimensiune unu, dreptele afine şi respectiv subspațiile afine de dimensiune doi, adică planele afine.

Astfel, o dreaptă afină din spațiul afin A_3, pe scurt *dreaptă*, este generată de două puncte distincte $A, B \in A_3$. Punctele unei drepte $d \subset A_3$ sunt caracterizate de

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}, \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{K} \tag{3.10}$$

Un subspațiu afin de dimensiune doi al spațiului afin A_3 se numeşte plan afin, pe scurt *plan*. Planele spațiului A_3 le vom nota cu literele mici ale alfabetului grec (α, β, ...).

Un plan $\alpha \subset A_3$ este generat de trei puncte $A, B, C \in A_3$ afin independente.

Punctele planului α sunt caracterizate de relația vectorială

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AB}, \quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K} \tag{3.11}$$

Dacă considerăm un punct oarecare fixat $O \in A_3$, atunci (3.11) poate fi scrisă sub formă echivalentă

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AB}, \quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K} \tag{3.11$'$}$$

Fie planele $\alpha, \beta \in A_3$. Dacă $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ atunci spațiul vectorial director al intersecției $\alpha \cap \beta$ este dat de $V_\alpha \cap V_\beta$, unde V_α şi V_β sunt spațiile vectoriale directoare corespunzătoare planelor α şi respectiv β.

Subspațiul $V_\alpha \cap V_\beta$ poate fi de dimensiune unu sau doi.

Dacă $dim\ V_\alpha \cap V_\beta = 1$ atunci intersecția $\alpha \cap \beta = d$, este o dreaptă afină, iar dacă $dim\ V_\alpha \cap V_\beta = 2$ atunci planele α şi β sunt confundate.

Dacă $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ atunci planele α şi β sunt paralel (strict).

În spațiul afin A_3, un reper cartezian este dat de un punct fixat $O \in A_3$ şi o bază $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a spațiului vectorial director $\boldsymbol{V}_3$, adică $R = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Oricărui punct $P \in A_3$ îi asociem vectorul de poziție $\overrightarrow{OP}$ având exprimarea

$$\overline{OP} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 \tag{3.12}$$

Scalarii $x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{K}$ reprezintă coordonatele punctului P în reperul R şi caracterizează în mod unic acest punct.

Construcții asemănătoare pot fi făcute considerând mai multe puncte afin independente ale spațiului afin A, obținând în acest fel spații afine de dimensiuni mai mari.

Fie A şi $\overline{A}$ două spații afine.

3.3.7 Definiție. *O aplicație t: $A \to \overline{A}$ cu proprietatea $t(\alpha P + \beta Q) = = \alpha t(P) + \beta t(Q)$, $\forall P, Q \in A$ şi $\forall\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$, $\alpha + \beta = 1$ se numeşte* ***aplicație afină*** *(morfism de spații afine).*

O aplicaţie afină t: A $\rightarrow \overline{\text{A}}$ determină în mod unic morfismul (aplicaţia liniară asociată) $T: V \rightarrow \widetilde{V}$ între spaţiile vectoriale asociate. Ştiind că pentru $\forall \bar{v} \in V$ şi $\forall$ A $\in$ A, $\exists$ B $\in$ A astfel încât φ $(A, B) = \bar{v}$, putem defini aplicaţia liniară asociată $T : V \rightarrow \widetilde{V}$ prin relaţia $T(\vec{v}) = \widetilde{\varphi}(t(A), t(B))$, unde $\widetilde{\varphi}$ este funcţie de structură afină a spaţiului $\overline{\text{A}}$. Definiţia nu depinde de alegerea punctului A.

Mulţimea aplicaţiilor afine bijective de la un spaţiu afin A la el însuşi (transformări afine) formează, în raport cu operaţia de compunere a aplicaţiilor, un grup GA(A) numit *grupul afin* (grupul afinităţilor).

Vom numi *figură* a spaţiului afin A orice submulţime de puncte a sa .

Prin *geometria afină* a spaţiului afin A vom înţelege studiul figurilor şi proprietăţilor acestora care sunt invariate de grupul afin.

Cele mai simple şi în acelaşi timp cele mai importante proprietăţi afine sunt:

- proprietatea de coliniaritate a trei puncte
- proprietatea a două subspaţii afine de a fi paralele
- raportul simplu determinat de un punct, care împarte un segment orientat $\overline{AB}$.

Alte proprietăţi afine se stabilesc în general cu ajutorul acestora, motiv pentru care proprietăţile amintite vor fi numite proprietăţi afine fundamentale.

§3.4. Spaţiul afin geometric al vectorilor liberi

Fie E_3 spaţiul punctual al geometriei elementare şi V_3 spaţiul vectorial al vectorilor liberi.

Dacă asociem oricărui bipunct (A, B) $\in E_3 \times E_3$ vectorul liber $\overline{AB} \in \text{V}_3$ atunci aplicaţia $\varphi : E_3 \times E_3 \rightarrow \text{V}_3$, $\varphi(A, B) = \overline{AB}$ satisface proprietăţile A_1) şi A_2) din definiţia spaţiului afin, adică

A_1) $\forall A, B, C \in E_3$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

A_2) $\forall\ \bar{v} \in \text{V}_3$, $\forall\ A \in E_3$ există un punct B $\in E_3$ unic determinat de relaţia $\overline{AB} = \bar{v}$.

3.4.1 Definiţie. *Tripletul* $\text{A}_3 = (E_3, \text{V}, \varphi)$ *se numeşte* ***spaţiul afin geometric al vectorilor liberi.***

Elementele spaţiului afin A_3 sunt puncte şi vectori. Punctele spaţiului afin A_3 sunt punctele mulţimii suport E_3 pe care le vom nota cu majuscule A, B, C, ..., O, P, ..., iar vectorii spaţiului afin A_3 sunt vectorii spaţiului vectorial director V_3, vectorii liberi pe care-i vom nota cu $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ..., sau cu $\bar{a}, \bar{b}, ..., \bar{u}, \bar{v}, ...,$. Aplicaţia $\varphi : E_3 \times E_3 \rightarrow \text{V}_3$ ce satisface axiomele A_1) şi A_2) reprezintă funcţia de structură afină, iar relaţia de echivalenţă definită de aceasta pe mulţimea E_3 reprezintă tocmai relaţia de echipolenţă "~" a segmentelor orientate, aşa cum aceasta a fost definită în geometria euclidiană.

Fie $O \in E_3$ un punct fixat. Aplicaţia $\varphi : E_3 \times E_3 \rightarrow \text{V}_3$ definită prin $\varphi_0(A) = \varphi(O, A)$, $\forall\ A \in E_3$ este bijectivă (Consecienţa 1.2) ceea ce permite identificarea spaţiului punctual E_3 cu spaţiul vectorial al vectorilor liberi.

Punctul $O \in E_3$, corespunzător vectorului nul $\overline{0} \in V_3$, va fi considerat drept origine a spațiului afin A_3. În plus, $\forall\, \overline{v} \in V_3$ există în mod unic un punct $A \in E_3$ determinat de relația $\overline{OA} = \overline{v}$. Vectorul $\overrightarrow{OA}$ este numit *vectorul de poziție* al punctului A.

Mulțimea vectorilor de poziție formează un spațiu vectorial izomorf cu spațiul vectorial al vectorilor liberi.

Să considerăm acum două puncte distincte A şi B din spațiul E_3. Subspațiul afin generat de A şi B,

$L(\{A, B\}) = \{P \in E_3 / \exists\, \lambda \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $P = (1 - \lambda)A + \lambda B\} = d$

este un subspațiu de dimensiune unu numit *dreaptă afină*, pe scurt *dreaptă*, având spațiul vectorial director dreapta vectorială

$V_1 = \{ \overrightarrow{AP} \in V_3 / \exists\, \lambda \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} \}$

Pentru orice punct $P \in d \setminus \{A, B\}$, coliniar cu A şi B, sistemul de puncte $\{A, B, P\}$ este afin dependent, echivalent cu faptul că vectorii $\overline{AP}$ şi $\overline{AB}$ sunt liniar dependenți. (Propoziția 1.1).

Reamintim că doi vectori care au aceeaşi direcție se numesc vectori *coliniari*. Vectorii subspațiului V_1 au aceeaşi direcție ceea ce justifică definiția coliniarității dintr-un spațiu afin oarecare.

3.4.2 Propoziție. *Doi vectori $\overline{u}$ şi $\overline{v} \in V_3$ sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenți, adică $\exists\, \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ astfel încât $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$.*

Demonstrație. Fie $O \in E_3$ un punct fixat. Există $A, B \in E_3$ astfel încât $\overline{u} = \overline{OA}$ şi $\overline{v} = \overline{OB}$. Dacă $\overline{u}$, $\overline{v}$ sunt coliniari atunci punctele O, A, B sunt coliniare, adică sistemul de puncte $\{O, A, B\}$ este afin dependent, ceea ce este echivalent cu dependența liniară a vectorilor $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$.

Segmentele orientate $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt reprezentanța vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ în punctul O, adică $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt liniar dependenți pentru orice alegere a punctului O.

Reciproc, dacă $\overline{u}$ şi $\overline{v} \in V_3$ sunt liniar dependenți, atunci $\forall\, O \in E_3$, vectorii $\overline{OA} = \overline{u}$ şi $\overline{OB} = \overline{v}$ sunt liniar dependenți, adică sistemul de puncte $\{O, A, B\}$ este afin dependent. Coliniaritatea punctelor $O, A,$ şi B este echivalentă cu faptul ca vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ au aceeaşi direcție. c.c.t.d.

Dacă $\overline{v} \in V_3 \setminus \{\overline{0}\}$ atunci $\forall\, \overline{u} \in V_3$ coliniare cu $\overline{v}$, poate fi scrisă sub forma:

$\overline{u} = \lambda\overline{v}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (condiția de coliniaritate) (4.1)

3.4.3 Consecință. *Submulțimea*
$V_1 = \{\overline{u} \in VV_3 / \exists\lambda \in R,\ \overline{u} = \lambda\overline{v},\ \overline{v} \neq \overline{0}\} \subset V_3$ *a tuturor vectorilor coliniari cu vectorul nenul $\overline{v}$ este un subspațiu vectorial unidimensional.*

Orice trei puncte necoliniare sunt afin dependente, ceea ce înseamnă că orice doi vectori necoliniari sunt liniar independenți.

Trei puncte $A, B, C \in E_3$ necoliniare determină un plan. Planul generat de aceste puncte afin independente este dat de

$A_2 = \{P \in E_3 \mid \exists\, \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}, P = (1 - \lambda - \mu)A + \lambda B + \mu C \} = \pi$

subspațiu afin având drept spațiu vectorial director planul vectorial

$$\mathrm{V}_2 = \{ \overline{AP} \in \mathrm{V}_3 \mid \exists\, \lambda, \mu \in R,\ \ \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \}$$

Pentru orice punct $P \in \pi \setminus \{A, B, C\}$, sistemul $\{A, B, C, P\}$ este afin dependent adică vectorii $\overline{AP}$, $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ sunt liniar dependenţi.

Trei vectori $\overline{u}$, $\overline{v}$ şi $\overline{w}$ se zic coplanari dacă aceştia sunt paraleli cu un plan.

3.4.4 Propoziţie. *Trei vectori* $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in \mathrm{V}_3$ *sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi, adică* $\exists\, \lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$ *astfel încât* $\lambda\overline{u} + \mu\overline{v} + \nu\overline{w} = \vec{0}$.

Demonstraţia este similară celei din propoziţia precedentă.

Dacă $\overline{u}$, $\overline{v} \in \mathrm{V}_3 \setminus \{\overline{0}\}$ sunt doi vectori, atunci $\forall\ \overline{w} \in \mathrm{V}_3$ coplanar cu $\overline{u}$ şi $\overline{v}$, poate fi scris sub forma:

$$\overline{w} = \lambda\overline{u} + \mu\overline{v}, \quad \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}, \text{ (condiţia de coplanaritate)} \qquad (4.2)$$

3.4.5 Consecinţă. **Submulţimea**

$$\mathrm{V}_2 = \{ \overline{w} \in \mathrm{V}_3 \mid \exists\, \lambda, \mu \in R,\ \overline{w} = \lambda\overline{u} + \mu\overline{v}, \overline{u}, \overline{v} \neq \overline{0} \} \subset \mathrm{V}_3,$$

a tuturor vectorilor coplanari cu vectorii nenuli $\overline{u}$ *şi* $\overline{v}$, *este un spaţiu vectorial bidimensional .*

Fie acum patru puncte $A, B, C, D \in E_3$ necoplanare. Sistemul de puncte $\{A, B, C, D\}$ este afin independent , ceea ce înseamnă că orice trei vectori necoplanari sunt liniar independenţi. Spaţiul afin generat de patru puncte necoplanare este de dimensiune trei şi orice cinci puncte ale acestui spaţiu vor fi afin dependente.

Vectorial acest lucru se exprimă prin următoarea teoremă:

3.4.6 Teoremă. *Spaţiul vectorial* V_3 *al vectorilor liberi din* E_3 *are dimensiunea trei.*

Demonstraţie. Orice patru puncte necoplanare formează un sistem afin independent ceea ce este echivalent cu existenţa a trei vectori $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ necoplanari (liniar independenţi). Să arătăm că aceşti trei vectori necoplanari generează spaţiul vectorial al vectorilor liberi V_3. Pentru aceasta fie $\overline{x}$ un al patrulea vector, un punct oarecare $O \in E_3$ şi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OX}$ reprezentanţii vectorilor $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{x}$ în punctul O (fig. 1)

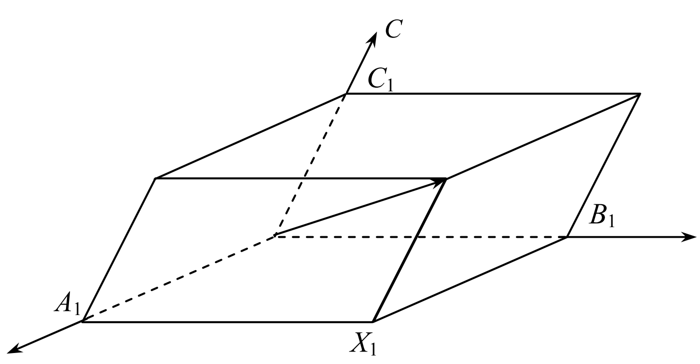


fig. 1

Folosind de două ori regula paralelogramului de însumare a doi vectori liberi în paralelogramele OA_1X_1B şi respectiv OX_1XC_1 rezultă că

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$$

Cum, $\overrightarrow{OA_1}$ şi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}$ şi $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt coliniari rezultă că există scalari $\lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{R}$ aşa încât

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$$

relaţie echivalentă cu

$$\overline{x} = \lambda\overline{u} + \mu\overline{v} + \nu\overline{w},$$

adică vectorii necoplanari $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ formează o bază a spaţiului vectorial al vectorilor liberi, deci dim $V_3 = 3$. c.c.t.d.

Pentru un punct fixat $O \in E_3$ şi o bază dată $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ în V_3, ansamblul R $(O; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ reprezintă un reper cartezian în spaţiul afin
$A_3 = (E_3, V_3, \varphi)$.

Oricărui punct $P \in E_3$ îi asociem în mod unic vectorul de poziţie $\overrightarrow{OP}$ a cărui expresie analitică în reperul R este dată de

$$\overline{OP} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 \quad ; \quad x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}$$

Scalarii $x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}$ vor fi numiţi coordonatele carteziene ale punctului P iar funcţia

$$f: E_3 \to \boldsymbol{R}^3 \quad ; \quad P \in E_3 \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$$

este numită *funcţia de coordonate*.

Funcţia de coordonate permite stabilirea unei corespondenţe biunivoce între mulţimea punctelor spaţiului punctual E_3 şi spaţiul vectorial $\boldsymbol{R}^3$.

Dacă $\overline{u} \in V_3$ este un vector liber oarecare atunci există un singur punct $P \in E_3$ şi numai unul, astfel încât $\overline{u} = \overline{OP}$ ceea ce înseamnă că în reperul R vectorul $\overline{u}$ se scrie sub forma

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3,$$

scalarii $x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}$, coordonate ale punctului P, vor fi numiţi coordonatele vectorului $\vec{u}$ în reperul R.

Bijecţiile menţionate mai sus justifică indentificarea deseori a spaţiilor E_3, V_3 şi $\boldsymbol{R}^3$.

Acest fapt ne permite să privim, în acelaşi timp, spaţiul aritmetic $\boldsymbol{R}^3$ ca pe un spaţiu de puncte şi ca pe un spaţiu vectorial, adică să considerăm spaţiul afin standard $(\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^3, \varphi)$.

Dacă R $(O; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ este un reper cartezian fixat şi spaţiul afin geometric A_3 şi $x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}$ coordonatele vectorului $\overline{u} \in V_3$, vom scrie $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ sau $\vec{u}\,(x_1, x_2, x_3)$.

În acest context, dacă $\overline{u}_1\ (x_1, x_2, x_3)$ şi $\overline{u}_2\ (y_1, y_2, y_3)$ sunt doi vectori liberi, atunci:

1° $\overline{u}_1$ este coliniar cu $\overline{u}_2$ $(\overline{u}_1 \| \overline{u}_2)$ dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt proporţionale (egale în cazul particular $\overline{u}_1 = \overline{u}_2$).

2° $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$ sunt coplanari dacă şi numai dacă coordonatele unuia sunt combinații liniare de coordonatele celorlalți doi.

Fie un plan $\alpha \subset E_3$, şi o dreaptă $d \subset E_3$ care intersectează planul α într-un singur punct şi fie un punct oarecare $A \in E_3$. Planul prin A paralel cu planul α intersectează dreapta d într-un singur punct A'.

Punctul $A' \in d$ se numeşte *proiecția paralelă cu planul* α a punctului A pe dreapta d.

Dacă $\overline{AB} \in \mathsf{V}_3$ este un vector liber oarecare, A' şi B' fiind proiecțiile paralele cu planul α al punctelor A şi respectiv B, atunci vectorul $\overline{A'B'}$ este numit proiecția paralelă cu planul α a vectorului $\overline{AB}$ pe dreapta d (fig. 2)

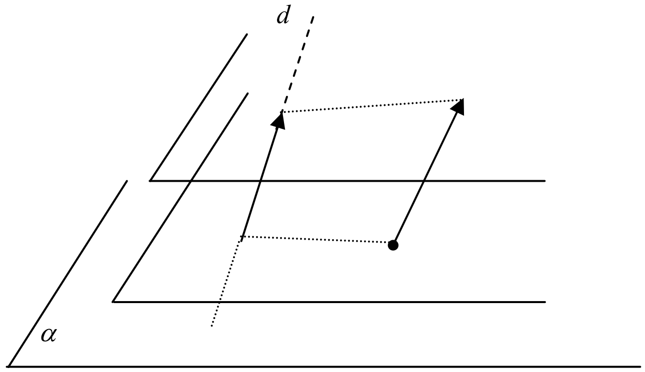


fig. 2

Dacă prin punctul A construim dreapta d' paralelă cu d aceasta intersectează planul α în punctul A''.

Punctul A'' este numit *proiecția paralelă cu dreapta d* a punctului A pe planul α.

Dacă $\overline{AB} \in \mathsf{V}_3$ este un vector liber oarecare, A'' şi B'' fiind proiecțiile paralele cu dreapta d ale punctelor A şi respectiv B pe planul α, atunci vectorul $\overline{A''B''}$ este numit proiecția paralelă cu dreapta d a vectorului $\overline{AB}$ pe planul α (fig. 3).

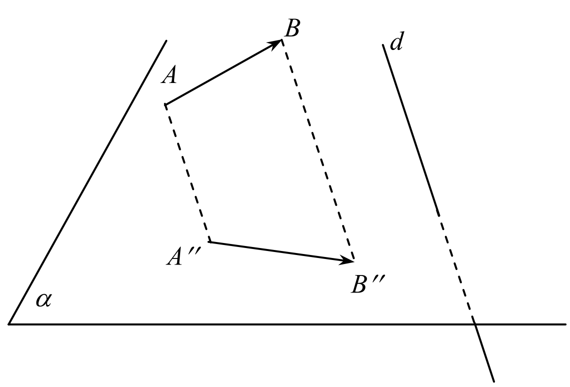


fig. 3

În ambele cazuri se demonstrează uşor că proiecția unui vector $\overline{u}_1 = \overline{AB}$ nu depinde de alegerea reprezentanților acestui vector.

Fie în spațiul geometric E_3 un punct O şi dreptele Ox_1, Ox_2 şi Ox_3 care determină planele distincte x_1Ox_2, x_2Ox_3 şi x_3Ox_1 prin punctul O.

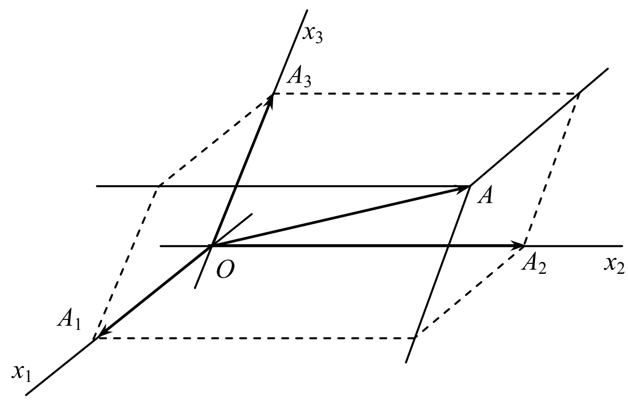


fig. 4

Notăm cu A_1, A_2, A_3 proiecțiile punctului A pe dreptele Ox_1, Ox_2, Ox_3 paralele cu planele x_2Ox_3, x_3Ox_1 şi respectiv x_1Ox_2.

Vectorul de poziție $\overrightarrow{OA}$ poate fi scris sub forma

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\ , \tag{4.3}$$

numită *descompunerea vectorului* $\overrightarrow{OA}$ după direcțiile Ox_1, Ox_2, Ox_3.

Mai mult, dacă considerăm reperul R $(O;\ \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ în care $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ este o bază a spațiului vectorial al vectorilor liberi V_3 şi care determină direcțiile dreptelor Ox_1, Ox_2, Ox_3, atunci există scalarii $a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $\overline{OA_1} = a_1\overline{e}_1$, $\overline{OA_2} = a_2\overline{e}_2$, $\overline{OA_3} = a_3\overline{e}_3$.

Dacă $\overline{u} \in V_3$ este un vector liber ce are ca reprezentant în punctul O vectorul de poziție $\overrightarrow{OA}$, el poate fi scris în reperul R, în mod unic sub forma

$$\overline{u} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3 \tag{4.4}$$

Scalarii a_1, a_2, a_3 $\in \boldsymbol{R}$, coordonatele vectorului $\overline{u}_1$ în reperul dat, nu depind de alegerea reprezentanților, astfel aceste coordonate sunt perfect determinate de proiecțiile paralele ale vectorului $\overline{u}_1$ pe cele trei direcții.

§3.5. Spațiul punctual euclidian al vectorilor liberi

Introducerea noțiunii de vector liber în spațiu geometric E_3 a fost posibilă ținând seama de noțiunile fundamentale ale geometriei euclidiene cum ar fi punctul, dreapta, planul, distanța, precum şi de axiomele la care sunt supuse aceste noțiuni.

În ultimul paragraf al capitolului precedent au fost puse în evidență câteva proprietăți, fără a apela la noțiunea de distanță. Gama acestor proprietăți se îmbogătățeşte mult dacă pe spațiul vectorial al vectorilor liberi se defineşte un produs scalar. Se defineşte astfel noțiunea de spațiu punctual euclidian al vectorilor liberi $\mathcal{J}_3$. Produsul scalar defineşte la rândul său noțiunile de normă euclidiană a unui vector, unghiul a doi vectori şi respectiv noțiunea de distanță euclidiană. În cele ce urmează, vom aborda calea construcției acestuia aşa cum a decurs în matematică şi vom evidenția apoi echivalența noțiunilor introduse cu cele definite în cazul general. Vom folosi unele noțiuni definite în cadrul structurii de spațiu afin geometric al vectorilor liberi şi vom pune în evidență diferențele specifice ce apar în cazul structurii euclidiene.

§3.5.1. Proiecții ortogonale

Fie E_3 spațiul de puncte al geometriei euclidiene ,definit cu ajutorul unui sistem axiomatic, în care considerăm introdusă noțiunea de vector.

Lungimea unui vector $\overline{AB} \in V_3$ a fost definită de numărul real $d(AB)$, adică distanța dintre punctele A şi B, pe care o vom nota în continuare cu $|\overline{AB}|$, modulul vectorului $\overline{AB}$ sau lungimea geometrică a vectorului $\overline{AB}$.

Un vector $\bar{e}$ cu proprietatea $|\bar{e}| = 1$ se numeşte *versor* sau vector unitate. Orice vector $\bar{u} \in V_3$ coliniar cu $\bar{e}$ poate fi scris sub forma $\bar{u} = |\bar{u}| \cdot \bar{e}$.

Am definit în paragraful precedent proiecția pe o dreaptă paralelă cu un plan şi respectiv proiecția pe un plan paralelă cu o dreaptă. Dacă dreapta $d \subset E_3$ este perpendiculară pe planul $\alpha \subset E_3$ atunci proiecția paralelă cu planul α a vectorului $\bar{v} \in V_3$ pe dreapta d va fi numită *proiecția ortogonală a vectorului $\bar{v}$ pe dreapta d* şi va fi notată cu $\overline{pr_d \bar{v}}$, iar proiecția paralelă cu dreapta d a vectorului $\bar{v}$ pe planul α va fi numită *proiecția ortogonală a vectorului $\bar{v}$ pe planul α* şi va fi notată cu $\overline{pr_\alpha \bar{v}}$.

Se demonstrează uşor că proiecția unui vector pe două drepte paralele ne procură acelaşi vector, ceea ce înseamnă că proiecția unui vector pe o dreaptă depinde numai de direcția acesteia. De aceea dacă $\bar{u}$ este un vector nenul care defineşte direcția dreptei d, atunci putem vorbi de proiecția lui $\bar{v}$ pe $\bar{u}$, pe care o vom nota cu $\overline{pr_{\bar{u}} \bar{v}}$.

Dacă $\bar{e}$ este versorul lui $\bar{u}$, adică $\bar{u} = |\bar{u}|\, \bar{e}$, atunci pentru $\forall\ \bar{v} \in V_3$, $\overline{pr_{\bar{u}} \bar{v}}$ este un vector coliniar cu $\bar{e}$, $\overline{pr_{\bar{u}} \bar{v}} = |\overline{pr_{\bar{u}} \bar{v}}| \cdot \bar{e}$.

Numărul real $|\overline{pr_{\bar{u}} \bar{v}}|$ se numeşte *mărimea algebrică* a proiecției ortogonale $\overline{pr_{\bar{u}} \bar{v}}$ pe care o vom nota simplu $pr_{\bar{u}} \bar{v}$, şi care reprezintă coordonata vectorului $\bar{v}$ pe direcția determinată de $\bar{u}$.

3.5.1.1 Teoremă. *Pentru $\bar{u} \in V_3 \setminus \{\bar{0}\}$ $\forall\, \bar{v}$, $\bar{w} \in V_3$, şi $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$ avem:*

$$\overline{pr}_{\overline{u}}(\overline{v}+\overline{w}) = \overline{pr}_{\overline{u}}\overline{v} + \overline{pr}_{\overline{u}}\overline{w}$$
$$\overline{pr}_{\overline{u}}(\lambda\overline{v}) = \lambda\,\overline{pr}_{\overline{u}}\overline{v} \qquad (1.1)$$

Demonstrație. Fie o dreaptă având aceeaşi direcție cu $\overline{u}$ şi vectorii $\overline{v} = \overline{AB}$, $\overline{w} = \overline{BC}$, având suma $\overline{v}+\overline{w} = \overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$ (fig. 1).

Notând cu $\overline{A'B'}$ şi respectiv $\overline{B'C'}$ proiecțiile vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{w}$ pe dreapta *d* rezultă

$$\overline{pr}_{\overline{u}}(\overline{v}+\overline{w}) = \overline{pr}_{\overline{u}}\overline{AC} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{pr}_{\overline{u}}\overline{v} + \overline{pr}_{\overline{u}}\overline{w}$$

Analog (fig. 2)

$$\overline{pr}_{\overline{u}}(\lambda\overline{v}) = \overline{pr}_{\overline{u}}\overline{AC} = \overline{A'C'} = \lambda\overline{A'B'} = \lambda\,\overline{pr}_{\overline{u}}\overline{v}$$

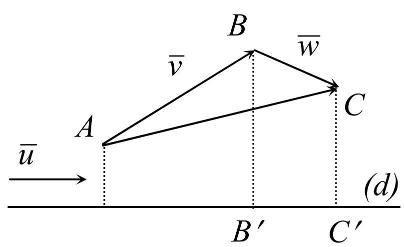


fig. 1

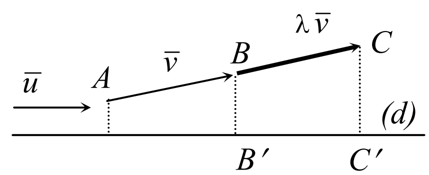


fig.2

Proprietățile din teorema 1 ale proiecției ortogonale induc aceleaşi proprietăți pentru mărimea algebrică a acestei proiecții, adică

$$pr_{\overline{u}}(\overline{v}+\overline{w}) = pr_{\overline{u}}\overline{v} + pr_{\overline{u}}\overline{w}$$
$$pr_{\overline{u}}(\lambda\overline{v}) = \lambda\; pr_{\overline{u}}\overline{v} \qquad (1.2)$$

Dacă considerăm două semidrepte |OA şi |OB în spațiul punctual E_3, atunci numim *unghi al vectorilor liberi* $\overline{v} = \overline{OA}$, $\overline{w} = \overline{OB}$, nenuli, notat cu $\varphi = <(\overline{v};\overline{w})$, unghiul $\varphi \in$ [*O, π*] format de semidreptele |OA şi |OB.

Vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{w}$ nenuli sunt ortogonali dacă unghiul lor este $\dfrac{\pi}{2}$.

Unghiul vectorilor $\overline{u}$ şi $\overline{w}$ nu depinde de alegerea reprezentanților $\overrightarrow{OA}$ şi respectiv $\overrightarrow{OB}$. Convenim că vectorul nul este ortogonal pe orice vector.

Noțiunea de unghi permite explicitarea mărimii algebrice a proiecției unui vector în funcție de lungimea vectorului şi unghiul dintre vector şi direcția dreptei pe care se face proiecția (fig. 3).

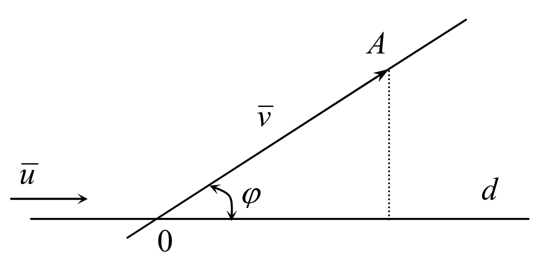


fig. 3

$$|\overline{pr_{\overline{u}}\overline{v}}| = |\overline{v}|\cos\varphi \qquad (1.3)$$

Cu aceste elemente putem introduce noțiunea de produs scalar pe spațiul vectorial al vectorilor liberi.

§3.5.2. Produsul scalar

Fie V_3 spațiul vectorial real al vectorilor liberi

3.5.2.1 Teoremă. *Funcția* $''\cdot''$*:* $V_3 \times V_3 \to \boldsymbol{R}$*, definită prin*

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \begin{cases} |\overline{u}|.|\overline{v}|\cos(\overline{u},\overline{v}), & \forall\ \overline{u},\overline{v} \in V_3 \setminus \{\overline{0}\} \\ 0, & \text{pentru } \overline{a}=\overline{0} \text{ sau / şi } \overline{b}=\overline{0} \end{cases} \qquad (2.1)$$

defineşte un ***produs scalar*** *pe spațiul vectorial al vectorilor liberi.*

Demonstrație. Să verificăm cele patru condiții ce definesc un produs scalar.

1. $(\overline{u_1}+\overline{u_2})\cdot\overline{v} = \overline{u_1}\cdot\overline{v}+\overline{u_2}\cdot\overline{v}$, $\forall \overline{u_1},\overline{u_2},\overline{v} \in V_3$

Din definiția produsului scalar şi proprietatea (1.3) avem $\overline{u}\cdot\overline{v} =$ $=|\overline{u}| \cdot |\overline{pr_{\overline{u}}\overline{v}}| = |\overline{v}| \cdot |\overline{pr_{\overline{v}}\overline{u}}|$, $\forall\ \overline{u},\overline{v} \in V_3 \setminus \{\overline{0}\}$ deci $(\overline{u_1}+\overline{u_2})\cdot\overline{v} =$ $=|\overline{v}| \cdot |\overline{pr_{\overline{v}}(\overline{u_1}+\overline{u_2})}| = |\overline{v}|(|\overline{pr_{\overline{v}}\overline{u}_1}|+|\overline{pr_{\overline{v}}\overline{u}_2}|) = |\overline{v}|\,|\overline{pr_{\overline{v}}\overline{u}_1}| + |\overline{v}|\,|\overline{pr_{\overline{v}}\overline{u}_2}|) =$ $= \overline{u}_1\cdot\overline{v} + \overline{u}_1\cdot\overline{v}$.

2. $(\alpha\overline{u})\cdot\overline{v} = \alpha(\overline{u}\cdot\overline{v})$, $\forall\ \overline{u},\overline{v} \in V_3$, $\forall\ \alpha \in \boldsymbol{R}$.
$(\alpha\overline{u})\cdot\overline{v} = |\overline{v}|\,|\overline{pr_{\overline{v}}(\alpha\overline{u})}| = \alpha|\overline{v}|\,|\overline{pr_{\overline{v}}\overline{u}}| = \alpha(\overline{u}\cdot\overline{v})$, $\forall\,\overline{u},\overline{v} \in V_3$, $\forall\alpha\in \boldsymbol{R}$.

3. $\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{v}\cdot\overline{u}$, $\forall\ \overline{u},\ \overline{v} \in V_3$. Comutativitatea rezultă din comutativitatea produsului în mulțimea numerelor reale.

4. $\overline{u}\cdot\overline{u} \geq 0$, $\overline{u}\cdot\overline{u} = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$, $\forall\ \overline{u} \in V_3$.
$<\overline{u},\overline{u}> = |\overline{u}|^2 \geq 0$, $|\overline{u}|^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$.

Pentru cazul în care cel puțin un factor al produsului scalar este vectorul nul proprietățile rezultă imediat.

3.5.2.2 Consecință. *Spațiul vectorial al vectorilor liberi* V_3 *înzestrat cu produsul scalar* (2.1) *este un spațiu vectorial euclidian real.*

3.5.2.3 Consecință. *Spațiul afin* $A_3 = (E_3, V_3, \varphi)$ *având ca spațiu vectorial asociat spațiul euclidian* V_3 *, devine un* ***spațiu punctual***

euclidian *pe care-l vom nota cu* $\mathcal{J}_3$.

Observații.

1° În paragraful precedent au fost evidențiate bijecțiile naturale dintre spațiile E_3, V_3 și $\boldsymbol{R}^3$. Astfel, având fixat un reper cartezian R $(O;\ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ în spațiul afin A_3, funcția de coordonate f: $V_3 \to \boldsymbol{R}^3$, definită prin $f(\bar{u}) = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$, $\forall\ \bar{u} \in V_3$, realizează o bijecție între cele două spații vectoriale. Această bijecție reprezintă un izomorfism de spații vectoriale care permite transportul structurii euclidiene canonice definită pe $\boldsymbol{R}^3$ pe spațiul vectorial al vectorilor liberi V_3.

Se verifică uşor că aplicația :

$$< , > : V_3 \times V_3 \to \boldsymbol{R},\ (\bar{u}, \bar{v}) \to <\bar{u}, \bar{v}> =: <f(\bar{u}),\ f(\bar{v})>_R \qquad (2.2)$$

este un produs scalar pe V_3, unde $< , >_R$ este produsul scalar definit pe $\boldsymbol{R}^3$.

Cu ajutorul acestui produs scalar se defineşte în mod natural norma $\|\bar{u}\| = \sqrt{<\bar{u}, \bar{v}>} = \sqrt{<f(\bar{u}),\ f(\bar{v})>_R}$

Dacă considerăm două puncte arbitrare $A,\ B \in E_3$ şi vectorii de poziție $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ caracterizați de ternele $(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$, şi respectiv $(y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3$, atunci vectorul $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ va fi caracterizat de terna $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ şi va avea norma dată de

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{<\overline{AB}, \overline{AB}>} = \sqrt{<f(\overline{AB}), f(\overline{AB})>_R} =$$
$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} = \delta(A, B) = |\overline{AB}|.$$

Acest rezultat arată că norma $\|\overline{AB}\|$ definită de produsul scalar (2.2) coincide cu lungimea geometrică $|\overline{AB}|$, a vectorului $\overline{AB}$.

Unghiul a doi vectori nenuli $\overline{OA}$ şi $\overline{OB} \in V_3$ definit de produsul scalar $< , >$ coincide cu unghiul (geometric) definit de direcțiile semidreptelor $|OA$ şi $|OB$. În adevăr,

$$\cos\varphi = \frac{<\overline{OA}, \overline{OB}>}{\|\overline{OA}\| \cdot \|\overline{OB}\|} = \frac{\overline{pr_{\overline{OA}}\overline{OB}}}{\|\overline{OB}\|} = \frac{\overline{pr_{\overline{OA}}\overline{OB}}}{|\overline{OB}|} = \cos\sphericalangle(\overline{OA}, \overline{OB}).$$

În consecință, produsul scalar (2.2), indus de bijecția f, pe spațiul vectorial V_3 al vectorilor liberi, coincide cu produsul scalar (2.1).

2° Cunoaşterea produsului scalar pe spațiul vectorial al vectorilor liberi permite calculul lungimii vectorilor şi a unghiului dintre doi vectori:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}\,\bar{a}}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|}\ ,\ \varphi = \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) \qquad (2.3)$$

3° Doi vectori nenuli sunt ortogonali $\Leftrightarrow$ produsul lor scalar este nul.

Fie B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ o bază în spațiul vectorial V_3.

Dacă $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$ şi $\bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3$, atunci obținem:

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1\bar{e}_1\bar{e}_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\bar{e}_1\bar{e}_2 + (a_1b_3 + a_3b_1)\bar{e}_1\bar{e}_3 + \\ + a_2b_2 + \bar{e}_2\bar{e}_2 + (a_2b_3 + a_3b_2)\bar{e}_2\bar{e}_3 + a_3b_3 + \bar{e}_3\bar{e}_3 \qquad (2.4)$$

Deci, produsul scalar a doi vectori este perfect determinat dacă se cunoaşte înmulţirea scalară a vectorilor bazei B.

O bază în V_3 formată din vectori ortogonali doi câte doi este numită *bază ortonormată* iar coordonatele unui vector într-o bază ortonormată se numesc *coordonate euclidiene*.

În geometria euclidiană se demonstrează că printr-un punct există trei drepte perpendiculare două câte două de unde rezultă existenţa unui reper cartezian ortonormat în spaţiul punctual euclidian $\mathcal{J}_3$.

Dacă B = $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este o bază ortonormată în V_3 atunci $\bar{i}\,\bar{i} = \bar{j}\,\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1$, $\bar{i}\,\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$, adică produsul scalar al vectorilor bazei B este dat de tabelul

$\cdot$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	k
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Produsul scalar a doi vectori oarecare $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ şi $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ va avea expresia canonică

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (2.5)$$

Proiecţia ortogonală a vectorului $\bar{a}$ pe direcţia vectorului $\bar{i}$ este dată de $\overline{pr_{\bar{i}}\bar{a}} = \frac{\bar{a}\bar{i}}{\bar{i}\,\bar{i}}\bar{i} = (\bar{a}\bar{i})\bar{i} = a_1\bar{i}$, analog $\overline{pr_{\bar{j}}\bar{a}} = a_2\bar{j}$ şi $\overline{pr_{\bar{k}}\bar{a}} = a_3\bar{k}$. Astfel coordonatele euclidiene ale vectorului $\bar{a}$ reprezintă mărimile proiecţiilor ortogonale ale lui $\bar{a}$ pe cele trei axe ale reperului cartezian ortonormat .

Expresiile analitice ale normei unui vector şi respectiv unghiului a doi vectori vor fi date de

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (2.6)$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \ \varphi \in [0, \pi] \qquad (2.7)$$

În particular vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \qquad (2.8)$$

§3.5.3. Produsul vectorial

Fie vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ $\in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\bar{b} \neq \bar{0}$ notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\vec{b}$.

3.5.3.1 Definiţie. *Se numeşte* ***produs vectorial*** *operaţia binară internă*

“×”:$V_3 \times V_3 \to V_3$, *care asociază perechii ordonate* $(\overline{a}, \overline{b})$ *vectorul* $\overline{c}$ *notat cu* $\overline{a} \times \overline{b}$, *caracterizat de*

1° $\|\overline{a} \times \overline{b}\| = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cdot \sin\varphi$

2° $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ *este ortogonal pe* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$

3° Sensul vectorului $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ *este dat de regula mâinii drepte când rotim pe* $\overline{a}$ *peste* $\overline{b}$ *sub un unghi ascuţit (regula burghiului drept) (fig. 4)*

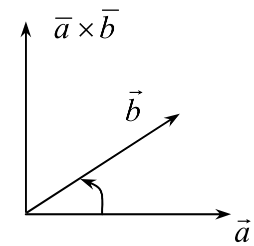


fig. 4

Dacă notăm cu $\overline{e}$ versorul direcţiei ortogonale pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ atunci $\overline{a} \times \overline{b} = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cdot \sin\varphi \cdot \overline{e}$.

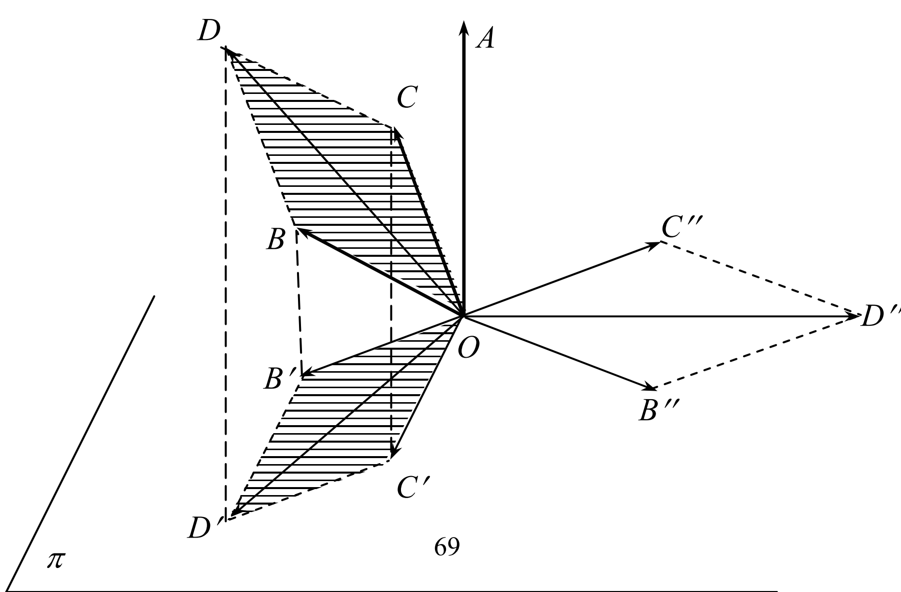
3.5.3.2 *Produsul vectorial are următoarele proprietăţi:*
Propoziţie.

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (*anticomutativitatea*)
2. $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$ (*distributivitatea*)
3. $(\alpha\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\alpha\overline{b}) = \alpha \cdot \overline{a} \times \overline{b}$ (*omogenitatea*)
4. *pentru* $\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$, $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a}$
5. *pentru* $\overline{b} \neq \lambda\overline{a}$, *norma* $\|\overline{a} \times \overline{b}\|$ *reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii într-un punct ai vectorilor* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$.

Demonstraţie.

1.Din definiţia produsului vectorial rezultă că vectorii $\overline{a} \times \overline{b}$ şi $\overline{b} \times \overline{a}$ au aceeaşi normă, aceeaşi direcţie, dar sensuri opuse.

2. Să considerăm reprezentanţii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ ai vectorilor $\overline{a}$ şi



$\overline{b}$ şi respectiv $\overline{c}$ în punctul $O \in E_3$ şi planul π prin O perpendicular pe direcţia vectorului $\overline{a}$. (fig. 5)

fig. 5

Notând cu $\overrightarrow{OB}' = \overline{pr_\pi}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}' = \overline{pr_\pi}\overrightarrow{OC}$ obţinem

$$\overline{a} \times \overline{b} = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cdot \sin\varphi \cdot \overline{e}_1 = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{OB'}\| \cdot \overline{e}_1 = \overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OB''}$$

analog $\overline{a} \times \overline{c} = \overline{OA} \times \overline{OC'} = \overline{OC''}$

Dacă $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ iar paralelogramul $OB'D'C'$ este proiecţia paralelogramului $OBDC$ pe planul π, atunci $\overrightarrow{OD}' = \overrightarrow{OB}' + \overrightarrow{OC}' = \overline{pr_\pi}\overrightarrow{OD}$.

Vectorul $\overrightarrow{OB}''$ se obţine rotind cu un unghi de $\pi/2$ vectorul $\overrightarrow{OB}'$ în planul π, şi înmulţind vectorul obţinut cu $\|\overline{a}\|$. Analog se obţine $\overrightarrow{OC}''$ din $\overrightarrow{OC}'$. Prin rotirea paralelogramului $OB'D'C'$ cu un unghi de $\pi/2$ şi înmulţind cu $\|\overline{a}\|$ se obţine tot un paralelogram (asemenea cu primul) de unde rezultă că $\overrightarrow{OD}'' \perp \overrightarrow{OD}'$ şi $\|\overrightarrow{OD}''\| = \|\overrightarrow{OD}'\| \cdot \|\overrightarrow{OA}\|$. Deci

$$\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{OA} \times \overline{OD} = \overline{OA} \times \overline{OD'} = \overline{OD''} = \overline{OB''} + \overline{OC''}$$

$$= \overline{OA} \times \overline{OB'} + \overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{a} \times \overline{b} + a \times \overline{b}$$

Similar se demonstrează distributivitatea produsului vectorial în raport cu primul factor, adică

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$$

3. Pentru $\alpha > 0$, vectorul $\alpha\overline{a}$ are direcţia şi sensul vectorului $\overline{a}$ iar $(\alpha\overline{a}) \times \overline{b}$ şi $\alpha(\overline{a} \times \overline{b})$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. În plus,

$$|(\alpha\overline{a}) \times \overline{b}| = |\alpha\overline{a}| \times |\overline{b}| \cdot \sin\varphi = |\alpha||\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi =$$

$$= |\alpha||\overline{a} \times \overline{b}| = |\alpha(\overline{a} \times \overline{b})|$$

Pentru $\alpha < 0$, vectorul $\alpha\overline{a}$ are direcţia şi sensul lui $-\overline{a}$ iar $(\alpha\overline{a}) \times \overline{b}$ şi $\alpha(\overline{a} \times \overline{b})$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. În plus,

$$|(\alpha\overline{a}) \times \overline{b}| = |\alpha\overline{a}| \times |\overline{b}| \cdot \sin(\pi - \varphi) = |\alpha||\overline{a}||\overline{b}|\sin(\pi - \varphi) =$$

$$= |\alpha||\overline{a} \times \overline{b}| = |\alpha(\overline{a} \times \overline{b})|$$

Analog se demonstrează $\overline{a} \times (\alpha\overline{b}) = \alpha(\overline{a} \times \overline{b})$.

Pentru $\alpha = 0$, din 3 rezultă $\overline{a} \times \overline{0} = \overline{0}$.

4. Dacă $\overline{a}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$, din $\overline{a} \times \overline{b} = 0$ rezultă că $\|\overline{a} \times \overline{b}\| = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0$, adică vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari, $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

Din definiţia produsului vectorial avem $\|\overline{a} \times \overline{a}\| = 0$, de unde obţinem $\overline{a} \times \overline{a} = 0$.

Dacă $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ atunci $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{a}) = \lambda(\overline{a} \times \overline{a}) = 0$.

5. Pentru $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ necoliniari construim paralelogramul OACB (fig. 6)

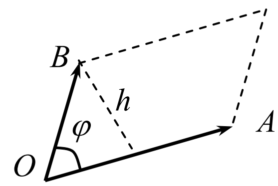


fig. 6

$$\| \overline{a} \times \overline{b} \| = \| \overline{OA} \times \overline{OB} \| = \| \overline{OA} \| \cdot \| \overline{OB} \| \cdot \sin\varphi$$
$$= \| \overline{OA} \| \cdot h$$

adică aria paralelogramului determinat de $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Dacă B ($\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$) este o bază ortonormată în V_3 atunci folosind definiția produsului vectorial şi proprietățile acestuia, obținem tabelul

$\times$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	$\overline{0}$	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	$\overline{0}$	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	$\overline{0}$

(3.1)

Astfel, produsul vectorial a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ şi $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$, va avea expresia canonică

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\overline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overline{k}, \qquad (3.2)$$

Expresia canonică (3.2) se poate obține dezvoltând după prima linie determinantul formal

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3.2)'$$

Doi vectori sunt coliniari ($\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$) dacă şi numai dacă

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \qquad (3.3)$$

Produsul scalar şi produsul vectorial satisfac identitatea lui Lagrange:

$$(\overline{a}\overline{b})^2 + (\overline{a} \times \overline{b})^2 = \| \overline{a} \|^2 \cdot \| \overline{b} \|^2 \qquad (3.4)$$

§3.5.4. Dublu produs vectorial

3.5.4.1 Definiție. *Fie vectorii* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ $\in V_3$. *Se numeşte dublu* ***produs vectorial*** *al vectorilor* $\overline{a}$, $\overline{b}$ *şi* $\overline{c}$ *vectorul*

$$\overline{v} = \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) \qquad (4.1)$$

Din definiția produsului vectorial rezultă că vectorul $\bar{v}$ este coplanar cu vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ (vectorii din paranteză). Dacă construim vectorul $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{w}$, acesta va fi un vector coplanar cu $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ de unde rezultă că $\bar{v} = a \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (a \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{w}$.

Se poate demonstra uşor, folosind expresiile analitice ale vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, formula de dezvoltare a dublului produs vectorial

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} \qquad (4.2)$$

sau sub forma determinantului simbolic

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ \overline{ab} & \overline{ac} \end{vmatrix} \qquad (4.3)$$

§3.5.5. Produsul mixt

3.5.5.1 Definiție. *Fie vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ $\in$ V$_3$. Se numeşte **produsul mixt** al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ numărul real $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ dat de*

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) =: \bar{a}\,(\bar{b} \times \bar{c}) \qquad (5.1)$$

3.5.5.2 Teorema. *Produsul mixt are următoarele proprietăți:*

1) $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}) + (\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c})$
2) $(\alpha\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$
3) $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \varepsilon_\sigma(\bar{a}_{\sigma(1)}, \bar{a}_{\sigma(2)}, \bar{a}_{\sigma(3)})$, $\sigma \in S_3$, $\varepsilon_\sigma = \pm 1$.
4) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt liniar dependenți (coplanari)
5) $|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = Vol._{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$, pentru $\forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in$ V$_3 \setminus \{0\}$

Proprietățile 1) şi 2) , aditivitatea şi respectiv omogenitatea, rezultă din definiția produsului mixt şi se extinde pentru orice factor.

Proprietatea 3) se poate exprima echivalent prin proprietățile:

3)′ $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$

ce exprimă invarianța produsului mixt la permutări circulare, adică $\varepsilon_\sigma = +1$ ($\sigma \in S_3$ - permutare pară) şi

3)″ $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})$, şi celelalte relații corespunzătoare permutărilor impare care exprimă proprietatea de anticomutativitate pentru orice doi factori alăturați.

Echivalența 4) rezultă imediat pentru cel puțin un factor egal cu vectorul nul, iar pentru $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ $\in$ V $_3\setminus\{0\}$, anularea produsului mixt este echivalentă cu ortogonalitatea vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}\times\bar{c}$, adică coplanaritatea vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$.

Dacă notăm cu $Vol._{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$ volumul paralelipipedului format de reprezentanții vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ într-un punct $O\in E_3$ (fig.7)

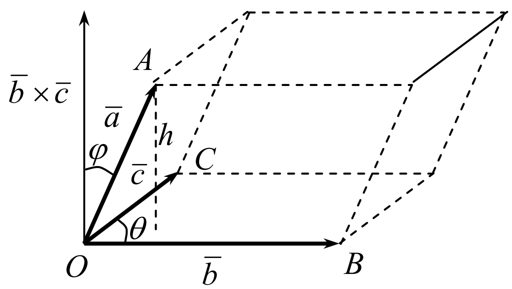


fig.7

şi notând cu $\theta = \sphericalangle(\bar{b}, \bar{c})$, cu $\varphi = \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}\times\bar{c})$, obținem

$$\begin{aligned}(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) &= \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\cdot\bar{c}\|\cdot\cos\varphi = (\|\bar{a}\|\cdot\cos\varphi)\cdot\|\bar{b}\cdot\bar{c}\| = \\ &= \pm h\cdot \mathsf{A}_{(\bar{b},\bar{c})} = \pm Vol._{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}\end{aligned}$$

Dacă B = ($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) este o bază ortonormată în spațiul vectorial al vectorilor liberi V $_3$, iar $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ şi $\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$ sunt expresiile analitice ale vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi respectiv $\bar{c}$, atunci produsul mixt are expresia canonică dată de

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(5.2)

Ținând seama de proprietățile determinanților şi de expresia analitică canonică a produsului mixt pot fi uşor de verificat proprietățile 1-5.

Spunem că o bază $B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset$ V $_3$ este pozitiv (negativ) orientată dacă produsul mixt ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) este pozitiv (negativ).

§3.6. Probleme rezolvate

3.6.1. Pe latura BC a unui triunghi ABC se consideră un punct M care împarte segmentul BC în raportul $\frac{BM}{MC} = k$. Să notăm $\overline{AB} = \overline{c}, \overline{AC} = \overline{b}, \overline{AM} = \overline{m}$. Să se demonstreze relația : $\overline{m} = \frac{\overline{c} + k\overline{b}}{1+k}$.

<u>Soluție:</u>

Din relația $\frac{BM}{MC} = k$, obținem:

$$\frac{BM}{BM+MC} = \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \qquad (1)$$

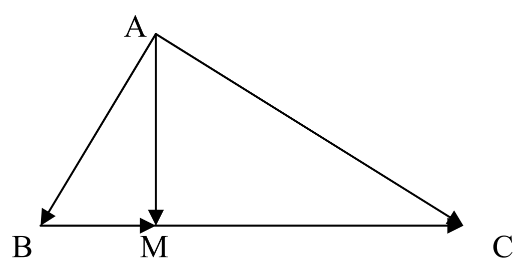
Vectorii $\overline{BM}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari şi prin urmare,

$$\overline{BM} = \frac{k}{k+1}\overline{BC}.$$

(2)

În triunghiul ABM, vectorul $\overline{AM}$ se exprimă cu ajutorul vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{BM}$ prin relația:

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}. \qquad (3)$$



Substituind $\overline{BM}$ din (2)şi (3) obținem:

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{k}{k+1}\overline{BC} = \frac{k\overline{AB} + \overline{AB} + k\overline{BC}}{1+k} = \frac{\overline{AB} + k(\overline{AB} + \overline{BC})}{1+k}$$

(4)

În triunghiul ABC, vectorul AC se exprimă cu ajutorul relației:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \qquad (5)$$

Substituind valoarea lui $\overline{AC}$ din (5) în (4), obținem: $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + k\overline{AC}}{1+k}$.

Ținând seama de notațiile vectoriale din ipoteză, se obține: $\vec{m} = \frac{\vec{c} + k\vec{b}}{1+k}$.

Observație:

Dacă k = 1, atunci punctul M este mijlocul laturii BC. Prin urmare, AM este mediană.

Formula (6) devine

$$\overrightarrow{m_a} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

3.6.2. Se dă triunghiul *ABC*. Fie *AP*, respectiv *AQ* bisectoarele interioare şi exterioare unghiului *A*. Să notăm *AB = c, AC = b, BC = a.*

1) Să se demonstreze relațiile:

$\overrightarrow{AP} = x(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$;

$\overrightarrow{AQ} = y(b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC})$;

2) Notăm cu *m* raportul în care punctul *P* împarte segmentul BC. Să se demonstreze relația:

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC}}{1-m}$.

3) *Să se demonstreze că bisectoarea AP împarte latura BC în segmente proporționale cu celelalte două laturi.*

<u>*Soluție:*</u>

1) Să notăm cu $\vec{u}, \vec{v}$ şi $\vec{w}$ versorii dreptelor *AB,AC şi AP* (figura 3.6.2).

Deoarece *AP* este bisectoare rezultă

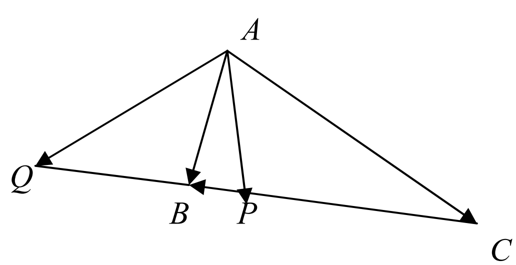


Fig.3.6.2.

că vectorul $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ are aceeaşi direcție cu vectorul $\overrightarrow{AP}$. Vectorii $\vec{w}$ şi $\overrightarrow{AP}$ sunt colineari.

$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{w} = \lambda(\vec{u}+\vec{v})$.

Să observăm că:

$\overrightarrow{AB} = c\vec{u}; \overrightarrow{AC} = b\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c}; \vec{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{b}.$

Din aceste relații deducem:

$\overrightarrow{AP} = \frac{\lambda \overrightarrow{AB}}{c} = x\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right).$

Se observă din figura 3.6.2. că vectorul $\vec{u} - \vec{v}$ are aceeaşi direcție cu $\overrightarrow{AQ}$. Printr-un procedeu de demonstrație analog cu cel de la punctul precedent, se obține:

$\overrightarrow{AQ} = y(b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}).$

1) Să notăm $m = \frac{PB}{PC}$. Din figura 3.6.2. deducem:

$$\overrightarrow{PB} = m\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = m\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} - m\overrightarrow{AP} = (1-m)\overrightarrow{AP}$$

Din această relație deducem:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC}}{1-m} = \frac{\overrightarrow{AB}}{1-m} - \frac{m\overrightarrow{AC}}{1-m}.$$

2) Ținând seama de relațiile precedente putem scrie:

$$x\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC}}{1-m} \Leftrightarrow \left(bx - \frac{1}{1-m}\right)\overrightarrow{AB} = \left(-cx - \frac{m}{1-m}\right)\overrightarrow{AC}.$$

Deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt liniar independenți, obținem relațiile:

$bx = \frac{1}{1-m}; cx = \frac{-m}{1-m}$

Se împart cele două relații membru cu membru şi se obține:

$\frac{b}{c} = -m \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{BP}{PC}.$

Observație:

Din relațiile stabilite mai sus se obține:

$$x = \frac{1}{b(1-m)} = \frac{1}{b\left(1 + \frac{c}{b}\right)} = \frac{1}{b+c}; \quad \overrightarrow{AP} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}.$$

3.6.3. Se dau vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ şi $\vec{c}$ pentru care se cunoaşte $\|\vec{a}\| = 1, \|\vec{b}\| = 2$ şi $\|\vec{c}\| = 3$.

$$\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}; \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \frac{\pi}{4}; \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Să se calculeze norma vectorului $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

<u>Soluție:</u>

Se ştie că:

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right\| = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)} = \sqrt{\left\|\vec{a}\right\|^2+\left\|\vec{b}\right\|^2+\left\|\vec{c}\right\|^2+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2\left(\vec{a},\vec{c}\right)-2\left(\vec{b},\vec{c}\right)} =$$

$$\sqrt{1+2^2+3^2+2-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}} = \sqrt{16-3\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\left(\vec{a},\vec{c}\right) = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{c}\right\|\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 1\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\vec{b},\vec{c}\right) = \left\|\vec{b}\right\|\cdot\left\|\vec{c}\right\|\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

3.6.4. Se dau vectorii:

$\vec{a} = 2\vec{m}-\vec{n},$ $\quad \left\|\vec{m}\right\| = 1, \left\|\vec{n}\right\| = 2.$

$\vec{b} = 3\vec{m}+\vec{n},$

Se cere:

a) lungimea diagonalelor paralelogramului construit cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

b) unghiul dintre cele două diagonale, ştiind că unghiul dintre $\vec{m}$ şi $\vec{n}$ este $\frac{\pi}{3}$.

<u>Soluție:</u>

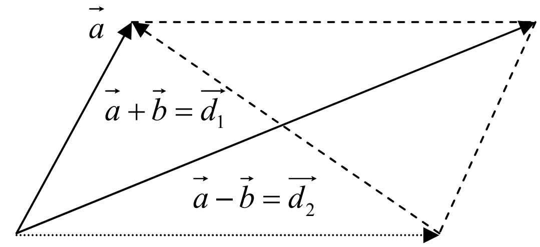


Fig. 3.6.3.

a) $\overline{d_1} = \overline{a}+\overline{b} = 5\overline{m} \Rightarrow \left\|\overline{d_1}\right\| = 5\left\|\overline{m}\right\| = 5\bullet 1 = 5$

$$\overline{d_2} = \overline{a} - \overline{b} = -\overline{m} - 2\overline{n} \Rightarrow \|d_2\| = \sqrt{\left(-\overline{m} - 2\overline{n}\right) \bullet \left(-\overline{m} - 2\overline{n}\right)} =$$

$$\sqrt{\|\overline{m}\|^2 + 4\|\overline{n}\|^2 + 4\left(\overline{m}, \overline{n}\right)} = \sqrt{1 + 4 \bullet 2^2 + 4 \bullet 1 \bullet 2 \bullet \frac{1}{2}} = \sqrt{21}.$$

b) $$\cos \sphericalangle \left(d_1, d_2\right) = \frac{\left(\overline{d_1}, \overline{d_2}\right)}{\|\overline{d_1}\| \bullet \|\overline{d_2}\|} = \frac{\|\overline{a}\|^2 - \|\overline{b}\|^2}{5\sqrt{21}} =$$

$$= \frac{4\|\overline{m}\|^2 + \|\overline{n}\|^2 - 4\left(\overline{m} \bullet \overline{n}\right) - 9\|\overline{m}\|^2 - \|\overline{m}\|^2 - 6\left(\overline{m} \bullet \overline{n}\right)}{5\sqrt{21}} = \frac{-5\|\overline{m}\|^2 - 10\left(\overline{m} \bullet \overline{n}\right)}{5\sqrt{21}} =$$

$$= \frac{-5 - 10}{5\sqrt{21}} = \frac{-15}{5\sqrt{21}} = \frac{-3}{\sqrt{21}}.$$

$$\sphericalangle \left(d_1, d_2\right) = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{21}}\right).$$

3.6.5. Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\overline{m}$ şi $\overline{n}$ ştiind că $\overline{a} \perp \overline{b}, \overline{c} \perp \overline{d}$ unde:

$$\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}, \overline{b} = 2\overline{m} - 3\overline{n}, \overline{c} = 3\overline{m} + \overline{n} \quad \text{şi} \quad \overline{d} = -\overline{m} + 3\overline{n}.$$

<u>*Soluţie:*</u>

Ortogonalizarea vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, respectiv $\overline{c}$ şi $\overline{d}$, conduce la:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\|\overline{m}\|^2 - \|\overline{m}\|\|\overline{n}\|\cos\alpha - 3\|\overline{n}\|^2 = 0,$$

$$\left(\overline{c}, \overline{d}\right) = 0 \Leftrightarrow -3\|\overline{m}\|^2 + 8\|\overline{m}\|\|\overline{n}\|\cos\alpha + 3\|\overline{n}\|^2 = 0,$$

unde prin α s-a notat unghiul dintre vectorii $\overline{m}$ şi $\overline{n}$.

Adunând cele două relaţii se obţine:

$$-\|\overline{m}\|^2 = -7\|\overline{m}\|\|\overline{n}\|\cos\alpha \Leftrightarrow \|\overline{m}\| = 7\|\overline{n}\|\cos\alpha.$$

Dacă se elimină $\left\|\overline{m}\right\|^2$ din primele două relații se obține:

$$13\left\|\overline{m}\right\|\left\|\overline{n}\right\|\cos\alpha = 3\left\|\overline{n}\right\|^2 \Leftrightarrow 3\left\|\overline{m}\right\|\cos\alpha = 3\left\|\overline{n}\right\|.$$

Ultimele două relații, prin împărțire, conduc la:

$$\cos\alpha = \frac{3}{13 \bullet 7} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3}{91}}\right).$$

3.6.6. Fie vectorii:

$\overline{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\overline{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

a) Cercetați dacă vectorii $\overline{a}$ și $\overline{b}$ sunt ortogonali și determinați proiecția vectorului $\overline{a}$ pe $\overline{b}$ și proiecția lui $\overline{b}$ pe $\overline{a}$.

b) Determinați $\sphericalangle\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.

c) Verificați identitatea lui Lagrange în cazul acestor vectori.

<u>*Soluție:*</u>

a) Doi vectori sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este 0.

$\left(\overline{a},\overline{b}\right) = 2 \bullet 1 + 1 \bullet 3 + (-1) \bullet 1 = 4,$ rezultă că $\overline{a}$ și $\overline{b}$ nu sunt ortogonali.

$$pr_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left\|\overline{b}\right\|} = \frac{4}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}}.$$

$$pr_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left\|\overline{a}\right\|} = \frac{4}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

b) $\cos\sphericalangle\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \dfrac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left\|\overline{a}\right\| \bullet \left\|\overline{b}\right\|} = \dfrac{4}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \dfrac{4}{\sqrt{66}}$ *deci* $\sphericalangle\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \arccos\dfrac{4}{\sqrt{66}}.$

c) Identitatea lui Lagrange este:

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|^2+\left(\overline{a}\bullet\overline{b}\right)^2=\left|\overline{a}\right|^2\bullet\left|\overline{b}\right|^2.$$

Se calculează produsul vectorial dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$$

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{50}.$$

Verificăm relația şi avem:

$\left(\sqrt{50}\right)^2+4^2=\left(\sqrt{6}\right)^2\bullet\left(\sqrt{11}\right)^2$ adevărat.

3.6.7. Fie $\overline{r_A}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

$\overline{r_B}=\vec{k}$

$\overline{r_C}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

vectori de poziție ai vârfurilor unui triunghi ABC.

Determinați:

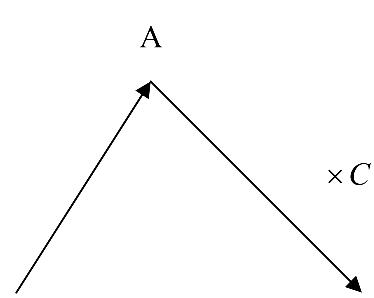
a) aria triunghiului ABC;

b) un vector perpendicular pe planul vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ având lungimea $2\sqrt{14}$;

c) determinați distanța de la vârful A la latura BC a triunghiului;

d) aflați măsura unghiului A al triunghiului ABC;

e) să se determine un punct D în planul triunghiului ABC astfel încât r_D să fie perpendicular pe BC şi să aibă mărimea 4.



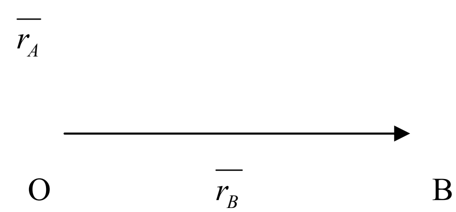


Fig.3.6.4.

<u>Soluție:</u>

$\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\overline{AC} = \overrightarrow{r_C} - \overline{r_A} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\overline{BC} = \overrightarrow{r_C} - \overline{r_B} = 2\vec{i} + \vec{j}$

a) Aria $_{\Delta ABC}$ =

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

b) $\left.\begin{matrix}\bar{v}\perp\overline{AB}\\ \bar{v}\perp\overline{AC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow colinear\ \ cu\ \left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)$

$\vec{v} = \alpha\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right) = \alpha\left(\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)$

$\left|\vec{v}\right| = \left|\alpha\right| \bullet \left|\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right|$

Avem $2\sqrt{14} = \left|\alpha\right| \bullet \sqrt{14}$ de unde $\left|\alpha\right| = 2$ deci $\alpha = \pm 2$.

Atunci $\left|\vec{v}\right| = \pm 2\left(\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)$.

c) Aria $_{\Delta ABC} = d\left(A,B,C\right) \bullet \dfrac{\left|\overline{BC}\right|}{2} \Rightarrow d = \dfrac{2\,Aria_{\Delta ABC}}{\left\|\overline{BC}\right\|} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2^2+1}} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$.

d) Măsura unghiului A se poate determina din produsul scalar $\overline{AB}$ cu $\overline{AC}$ (aflând cos $\hat{A}$) sau scriind aria ca $\dfrac{|\overline{AB}| \bullet |\overline{AC}| \sin \hat{A}}{2}$.

$$\sin \hat{A} = \frac{2 Aria_{\Delta ABC}}{\|\overline{AB}\| \bullet \|\overline{AC}\|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \hat{A} = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

e) D(x,y,z)

D∈(ABC) dacă produsul mixt dintre D şi celelalte este zero

$$\Rightarrow \left(\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{r_D} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = 0 \\ \overline{r_D} \perp \overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{r_D} \bullet \overline{BC} = 0.$$

3.6.8. Se dau vectorii:

$\overline{a} = \lambda \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

$\overline{b} = \vec{i} + \lambda \vec{j} + 3\vec{k}$

$\overline{c} = \lambda \vec{i} + 4\vec{j}$

Să se determine λ astfel încât cei trei vectori să fie coplanari şi în acest caz să se descompună vectorul $\overline{a}$ după direcțiile vectorilor $\overline{b}$ şi $\overline{c}$.

<u>*Soluție:*</u>

Vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari dacă sunt liniar dependenți (produsul mixt $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$).

Dacă $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$ atunci $\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 6 \\ 1 & \lambda & 3 \\ \lambda & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$2 + 12\lambda - 6\lambda^2 - 12\lambda = 0$

$\lambda^2 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ sau $\lambda_2 = -2$.

Dacă $\lambda = 2$:

$= 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

$\bar{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$\bar{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

atunci: $\bar{a} = \alpha\bar{b} + \beta\bar{c}$

$2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} = (\alpha + 2\beta)\vec{i} + (2\alpha + 4\beta)\vec{j} + (3\alpha\vec{k})$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 2\\ \beta = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{a} = 2\bar{b}$$

Dacă $\lambda = -2$:

$\bar{a} = m(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) + n(-2\vec{i} + 4\vec{j})$

$\bar{a} = (m-2n)\vec{i} + (-2m+4n)\vec{j} + 3m\vec{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = 2\bar{b} + 2\bar{c}.$$

3.6.9. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii: $\bar{a} = 2\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$; $\bar{b} = \bar{u} - \bar{w}$; $\bar{c} = \bar{u} + \bar{w}$ care au originea comună și $\|\bar{u}\| = 1$; $\|\bar{v}\| = 2$; $\|\bar{w}\| = 3$; $\sphericalangle(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\pi}{2}$; $\sphericalangle(\bar{u}, \bar{w}) = \frac{\pi}{3}$; $\sphericalangle(\bar{u}, \bar{w}) = \frac{\pi}{4}$.

Soluție:

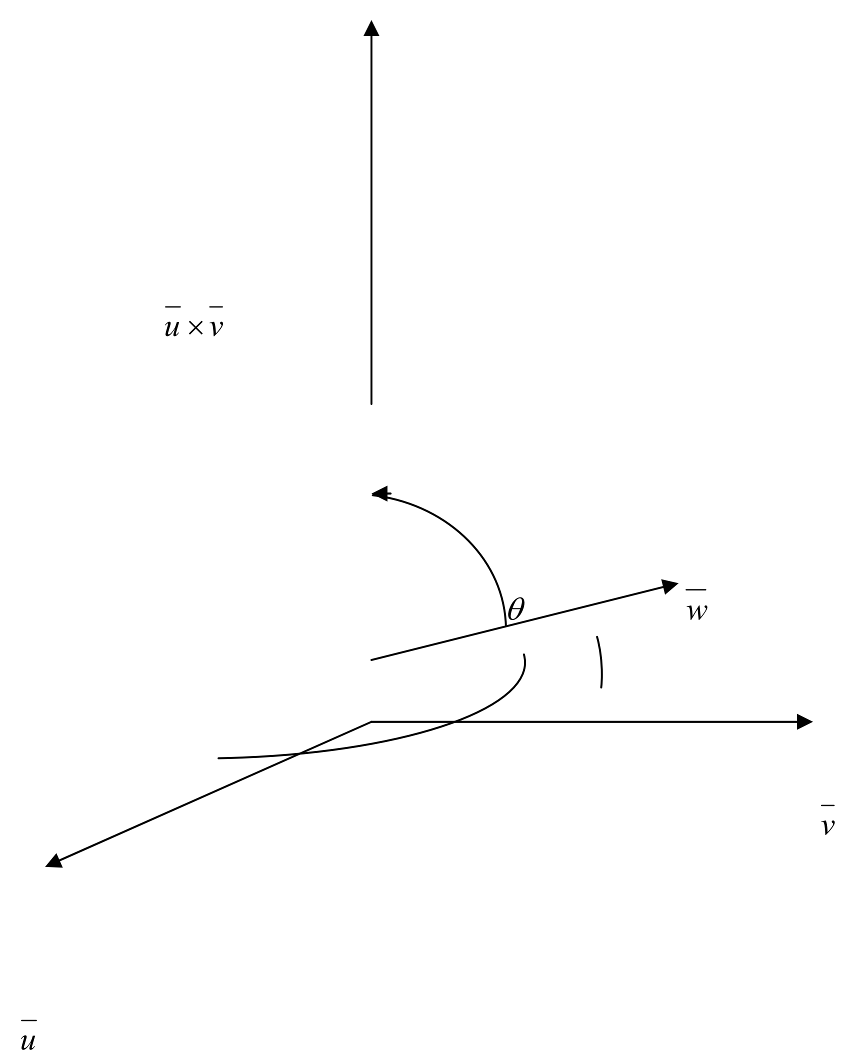


Fig.3.6.5

Se ştie că volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ are valoarea:

$V = \left|\overline{a} \bullet \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)\right|.$

Calculăm pe rând:

$\overline{b} \times \overline{c} = (\overline{u} - \overline{w}) \times (\overline{u} \times \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{u} + \overline{u} \times \overline{w} - \overline{w} \times \overline{u} - \overline{w} \times \overline{w} = 0 + \overline{u} \times \overline{w} + \overline{u} \times \overline{w} - 0 =$
$2\overline{u} \times \overline{w}$

$\overline{a} \bullet (\overline{b}\ \overline{c}) = (2\overline{u} - \overline{v} - \overline{w}) \bullet 2(\overline{u} \times \overline{w}) = 4(\overline{u}, \overline{u}, \overline{w}) -$
$2(\overline{v}, \overline{u}, \overline{w}) + 2(\overline{w}, \overline{u}, \overline{w}) = 2(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = 2(\overline{w}, \overline{u}, \overline{v})$

$\overline{a}\quad \overline{b}\quad \overline{c}\quad \overline{u}\quad \overline{v}\quad \overline{w}\quad \times\quad =\quad +$

$V = \left|\overline{a} \bullet \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)\right|. = 2$

$\left\|\overline{w}\right\| \left(\left|\overline{u}\right| \bullet \left|\overline{v}\right| \sin \sphericalangle \left(\overline{u}, \overline{v}\right)\right) \cos \sphericalangle \left(\overline{w}, \overline{u} \times \overline{v}\right) = 2 \bullet 3 \bullet 1 \bullet 2 \bullet 1 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}..$

Cosinusul unghiului dintre $\overline{w}$ şi $\overline{u} \times \overline{v}$ se află din:

$\cos^2 \sphericalangle \left(\overline{u}, \overline{v}\right) + \cos^2 \sphericalangle \left(\overline{u}, \overline{w}\right) + \cos^2 \sphericalangle \left(\overline{w}, \overline{u} \times \overline{v}\right) = 1$

deci $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}.$

3.6.10. Fiind date punctele $A(4,-2,2)$, B(3,1,1), C(4,2,0), determinați vârful D al tetraedrului ABCD ştiind că punctul $D \in O_2$ şi volumul tetraedrului ABCD este 4 unități. Determinați de asemenea şi lungimea înălțimii dusp din D pe baza ABC.

Soluție:

D∈O_2 deci coordonatele punctului D sunt: D(0,0,α).

$$\overline{AD} = -4\overline{i} + 2\overline{j} + (\alpha - 2)\overline{k}$$

$$\overline{AB} = -\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k} \qquad \Rightarrow V = \frac{\varepsilon}{6}\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \frac{\varepsilon}{6}\begin{vmatrix} -4 & 2 & \alpha-2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\overline{AC} = 4\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$= \frac{\varepsilon}{3}\begin{vmatrix} -4 & 2 & \alpha-2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{3}\left(12 - 2\alpha + 4 + 8 - 2\right) \Rightarrow \frac{22-2\alpha}{3} = 4 \Rightarrow \alpha = 5.$$

Punctul D are coordonatele (0,0,5).

Dacă se notează cu h înălțimea construită din D pe planul ABC, atunci volumul se poate exprima:

$$V = \frac{h \bullet Aria_{ABC}}{3} \quad .$$

Avem vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ şi rezultă produsul vectorial:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$$

$$Aria_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\right\| \times \left\|AC\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+16} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$$

Atunci h = $\dfrac{3V}{Aria_{ABC}} = \dfrac{3 \bullet 4}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$

3.6.11. Calculați valoarea expresiei:

$$E = \left(\frac{\overline{a} \times \overline{b}}{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}, \frac{\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})}{\left(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}\right)} \right) + 2$$

ştiind că vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ sunt necoplanari, iar vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt nenuli şi nu sunt ortogonali.

<u>*Soluție:*</u>

Ținând cont de interpretarea produsului vectorial dublu:

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} \overline{b} & \overline{c} \\ \overline{a} \bullet \overline{b} & \overline{a} \bullet \overline{c} \end{vmatrix} = \left(\overline{a} \bullet \overline{c}\right)\overline{b} - \left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\overline{c}$$

$$E = \frac{\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\left[\left(\overline{a} \bullet \overline{c}\right)\overline{b} - \left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\overline{c}\right]}{\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left[\overline{a} \bullet \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)\right]} + 2 = \frac{\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\left(\overline{a} \bullet \overline{c}\right)\overline{b} - \left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\overline{c}}{\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} + 2 =$$

$$= \frac{\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\overline{b} - \left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\overline{c}}{\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} + 2 = \frac{\left(\overline{a} \bullet \overline{c}\right)\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}\right) - \left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)}{\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right)\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} + 2 =$$

$$= \frac{0 - \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \bullet \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)}{\left(\overline{a} \bullet \overline{b}\right) \bullet \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} + 2 = -1 + 2 = 1$$

3.6.12. Să se calculeze:

$\left(\overline{a}, \overline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right).$

<u>*Soluție:*</u>

$$\left(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\left(\bar{a}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{b}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}\right)=$$

$$=\bar{a}\left(\bar{a}\times\bar{a}+\bar{b}\times\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\bar{a},\bar{c}\right)+\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right).$$

S-au folosit proprietățile:

1) $\bar{a}\times\bar{a}=0$

2) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}.$

3) $\left(\bar{a},\bar{a},\bar{c}\right)=0$

3.6.13. Să se calculeze:

$$\left(\bar{a}+\bar{b},\bar{b}+\bar{c},\bar{c}+\bar{a}\right)$$

Soluție:

Folosind definiția produsului mixt se obține:

$$\left(\bar{a}+\bar{b},\bar{b}+\bar{c},\bar{c}+\bar{a}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)\right]=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left[\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}\right]=$$

$$=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)+\left(\bar{a},\bar{b},\bar{a}\right)+\left(\bar{a},\bar{c},\bar{a}\right)+\left(\bar{b},\bar{b},\bar{c}\right)+\left(\bar{b},\bar{b},\bar{a}\right)+\left(\bar{b},\bar{c},\bar{a}\right)=2\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$$

În calcul s-a ținut cont de distributivitatea produsului scalar şi vectorial față de suma vectorilor.

3.6.14. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{\left(\bar{a}\times\bar{b},\bar{b}\times\bar{c},\bar{c}\times\bar{a}\right)}=\frac{\bar{b}}{\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)}.$$

Soluție:

Numărătorul expresiei din membrul stâng poate fi privit ca un dublu produs vectorial $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right),\bar{b},\bar{c}.$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{c}\right]-\bar{c}\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bar{b}\right]=\bar{b}\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{b},\bar{a},\bar{b}\right)=\bar{b}\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right).$$

Numitorul expresiei din stânga este un produs mixt care devine:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a}\right)=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\left[\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\times\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\right].$$

În paranteza pătrată se reia raționamentul de mai sus:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\left[\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\times\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\right]=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\left\{\overline{c}\left[\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\overline{a}\right]-\overline{a}\left[\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\overline{b}\right]\right\}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\left[\overline{c}\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)-\overline{a}\left(\overline{b},\overline{b},\overline{c}\right)\right]=$$

$$=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\left[\overline{c}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right]=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)^2.$$

Reconstituind raportul din stânga egalității se obține:

$$\frac{\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)}{\left(\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\times\overline{c},\overline{c}\times\overline{a}\right)}=\frac{\overline{b}\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)}{\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)^2}=\frac{\overline{b}}{\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)}.$$

§3.7. TEME DE REZOLVAT PENTRU EVALUARE

3.7.1. Fie A, B două puncte distincte ale unui spațiu afin real A, $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\lambda\neq\pm1$ şi C, $D\in$ A definite prin $C=\frac{1}{1-\lambda}A+\frac{\lambda}{\lambda-1}B$, $D=\frac{1}{1+\lambda}A+\frac{\lambda}{1+\lambda}B$. Dacă $E=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}D$ atunci $\overrightarrow{EA}=\lambda^2\overrightarrow{EB}$.

3.7.2. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n\in$ A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\in\boldsymbol{R}$ cu $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$. Să se arate că vectorul $\overline{v}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i MA_i$ nu depinde de alegerea punctului $M\in$ A.

3.7.3. Punctul M împarte segmentul AB în raportul $k=\frac{m}{n}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ oricare ar fi punctul $O\in$ A.

3.7.4. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi M un punct oarecare. Să se demonstreze relația $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

3.7.5. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n\in$ A , $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\in\boldsymbol{R}$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda\neq0$. Să se arate că punctul P este centru de greutate al sistemului de puncte $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ cu ponderile $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \vec{0}$. Să se scrie relaţia pentru centrul de greutate al unui triunghi.

3.7.6. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi respectiv $B_1, B_2, \ldots, B_n$ puncte distincte din spaţiul afin real A. Considerând punctele $G = \frac{1}{n}A_1 + \frac{1}{n}A_2 + \ldots + \frac{1}{n}A_n$ şi respectiv $G' = \frac{1}{n}B_1 + \frac{1}{n}B_2 + \ldots + \frac{1}{n}B_n$, să se arate că $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = n\overrightarrow{GG'}$. În particular două sisteme finite de puncte { $A_1, A_2, \ldots, A_n$ } şi { $B_1, B_2, \ldots, B_n$ } au acelaşi centru de greutate cu ponderile $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, …, $\frac{1}{n}$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$.

3.7.7. Fie $A, B, C \in$ A trei puncte afin independente. Să se arate că dacă punctele P şi Q împart segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ şi respectiv $\overrightarrow{AC}$ în acelaşi raport, atunci vectorii $\overrightarrow{PQ}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari şi reciproc (teorema lui Thales).

3.7.8. Fie A, B, C trei puncte afin independente şi E, F, G punctele ce împart segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi respectiv $\overrightarrow{CA}$ în raport cu a, b şi c. Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă ca punctele E, F, G să fie afin dependente este ca $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$ (teorema lui Menelaus).

3.7.9. Fie A, B, C trei puncte afin independente, E (respectiv F) un punct coliniar cu punctele A şi C (respectiv A şi B) astfel încât dreptele afine generate de sistemele de puncte $\{B, E\}$ şi $\{C, F\}$ să aibă un punct comun D. Să se arate că punctele $X = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D$, $Y = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F$ şi $Z = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ sunt afin dependente (dreaptă Newton-Gauss).

3.7.10. În spaţiul afin canonic $\boldsymbol{R}^3$ se consideră punctul $O(2, -1, 3)$ şi sistemul de puncte R = $\{E_0 = (1, -2, -3), E_1 = (1, 1, -5), E_2 = (-2, -1, 3), E_4 = (6, 1, 2)\}$

a) Să se scrie reperul cartezian R ′ cu originea în O, asociat lui R.
b) Să se determine schimbarea de coordonate la trecerea de la reperul R ′ la reperul R″ = $\{O; f_1, f_2, f_3\}$, unde $f_1 = (1, 2, 0)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (2, 0, 1)$ şi să se indice transtaţia şi centro-afinitatea prin care se realizează această schimbare de reper.

3.7.11. Fie $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - 3\overline{n}$, unde $\|\overline{m}\| = 5$, $\|\overline{n}\| = 3$, $<(\overline{m'}, \overline{n'}) = \frac{\pi}{2}$. Să se calculeze:

a) lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$;
b) unghiul dintre diagonale;
c) aria paralelogramului determinat de $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

3.7.12. Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori perpendiculari, cu $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 4$. Să se calculeze $\|(3\overline{a}-\overline{b})\times(\overline{a}-2\overline{b})\|$.

3.7.13. Fie $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ vectori necoplanari. Să se studieze liniara independenţă a vectorilor

$$\begin{cases} \overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n} + \overline{p} \\ \overline{b} = \overline{m} + \overline{n} + 2\overline{p} \\ \overline{c} = \overline{m} - \overline{n} \end{cases}$$

3.7.14 Fie $\overline{v} = 2\overline{i} + \alpha\overline{j} + \beta\overline{k}$. Să se determine α şi β astfel încât $\overline{v}$ să fie perpendicular pe vectorii $\overline{a} = -\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = 3\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}$. Să se calculeze unghiul dintre $\overline{v}$ şi $\overline{a} + \overline{b}$.

3.7.15. Se dau vectorii $\overline{v}_1 = a\overline{j} - b\overline{k}$, $\overline{v}_2 = -a\overline{i} - c\overline{k}$, $\overline{v}_3 = b\overline{j} - c\overline{j}$. Să se calculeze: $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$, $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$ şi $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3$.

3.7.16 Să se determine λ astfel încât vectorii $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{v}_2 = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{v}_2 = \lambda\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ să fie coplanari şi să se găsească relaţia de dependenţă liniară.

3.7.17 Să se calculeze aria şi înălţimea din *A* în triunghiul ABC dat de *A* (0, 1, 0), *B* (2, 0, 1), *C* (-1, 0, -4).

3.7.18 Să se calculeze volumul tetraedrului *ABCD* şi înălţimea din *A* a acestuia, unde *A* (3, 2, -1), *B* (4, 3, -1), *C* (5, 3, -1), *D* (4, 2, 1).

§3.8. BIBLIOGRAFIE

3.8.1. Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Curs de algebră, geometrie analitică, geometrie diferenţială şi ecuaţii diferenţiale. Partea I-a, Universitatea Transilvania Braşov, 1992.

3.8.2. Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Postolache M., Algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferenţială şi ecuaţii diferenţiale. Culegere de probleme. Editura ALL, Bucureşti, Ediţia I-a, 1994, Ediţia a II-a, 1998.

3.8.3. Simionescu C., Atanasiu Gh., Curs de geometrie analitică, Catedra de Matematică, Universitatea din Braşov, 1976.

Capitolul 4

GEOMETRIA LINIARĂ ÎN SPAŢIU

În acest capitol vor fi studiate varietăţile liniare ale spaţiului punctual euclidian $E_3 = (E_3,V_3,\varphi)$ pornind de la diferite moduri de precizare geometrică a lor. Varietăţile liniare de dimensiune unu respectiv doi din spaţiul E_3 sunt subspaţii afine proprii în spaţiul afin E_3 , adică dreptele şi respectiv planele afine.

Un subspaţiu afin poate fi determinat fie de o submulţime de puncte ale sale, fie de un punct al său şi de subspaţiul director. Vom porni de la aceste condiţii geometrice şi vom caracteriza algebric dreptele şi planele spaţiului E_3 raportându-ne la un reper cartezian ortonormat $R(O;\bar{i},\bar{j},\bar{k})$.

Luând în considerare structura euclidiană a spaţiului vectorial director V_3 vom aborda aspectele legate de unghiuri şi distanţe.

Obiective operaţionale:

4.1. Să reţină principiul geometriei analitice: unei forme geometrice îi corespunde cel puţin o ecuaţie şi reciproc. În cazul nostru unui plan îi corespunde o ecuaţie de gradul întâi şi reciproc.
4.2. Să poată scrie ecuaţia unui plan şi ecuaţiile unei drepte în spaţiu în situaţiile prezentate.
4.3. Să fie capabil să stabilească poziţiile; punct-plan, punct-dreaptă, plan-plan, dreaptă-plan.
4.4. Să poată calcula distanţe şi unghiuri în geometria liniară (de gradul întâi) din spaţiu.

Conţinutul capitolului:

§4.1. Planul în spațiu

În E_3 , spațiul al geometriei euclidiene, un plan este în mod unic determinat de următoarele condiții:

1) trei puncte necoliniare
2) un punct şi două drepte neparalele
3) un punct şi o dreaptă perpendiculară pe plan.

4.1.1. Planul prin trei puncte

Fie M_0, M_1, $M_2 \in E_3$ trei puncte necoliniare (afin independente). Subspațiul afin $\pi \subset E_3$ generat de punctele M_0, M_1, M_2 are ca spațiu vectorial director un subspațiu de dimensiune doi în spațiul vectorial V_3, dat de

$$V_2 = \{\overline{M_0M} \in V_3 \mid \exists \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}\ ,\ \text{astfel încât}\ \overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{M_0M_1} + \mu\overrightarrow{M_0M_2}\ \}$$

Un punct $M \in \pi$ dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \in V_2$.

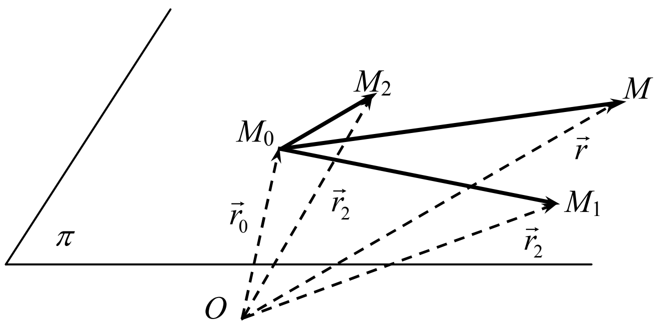


fig.1.

Dacă notăm cu $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, $i = 0, 1, 2$ vectori de poziție ai punctelor M şi respectiv M_0, M_1, M_2 în reperul cartezian R (O; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$), ($Oxyz$) atunci mulțimea punctelor planului π va fi caracterizat de relația vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) + \mu(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \quad , \quad \lambda, \mu \in R \tag{1.1}$$

numită *ecuația vectorială* a planului prin trei puncte.

Dacă (x, y, z), $(x_i, y_i, z_i) \in R^3$, $i = 0, 1, 2$ sunt coordonatele punctelor M şi respectiv M_i, $i = 0, 1, 2$ atunci ecuația vectorială (1.1) scrisă în reperul cartezian $Oxyz$ este echivalentă cu ecuațiile

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} \tag{1.2}$$

numită *ecuațiile carteziene parametrice* ale planului prin trei puncte.

Relația $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{M_0M_1} + \mu\overrightarrow{M_0M_2}$ reprezintă condiția de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ echivalentă cu anularea produsului mixt, adică

$$(\overline{M_0M}, \overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_2}) = 0 \text{ sau } (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}_1 - \bar{r}_0, \bar{r}_2 - \bar{r}_0) \tag{1.3}$$

În coordonate carteziene ecuația (1.3) se scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

numită *ecuație carteziană* a planului prin trei puncte.

În particular, punctele A (a, 0, 0), B (0, b, 0), C (0, 0, c) situate pe axele de coordonate ale reperului $Oxyz$ determină un plan π, iar coordonatele punctelor sale satisfac ecuația

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$, sau după dezvoltare

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0 \tag{1.5}$$

numită *ecuația prin tăieturi* a planului π.

Remarcă. Condiția necesară şi suficientă pentru ca patru puncte $M_i(x_i,y_i,\ z_i)$, $i=\overline{1,4}$ să fie situate într-un plan este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.6}$$

4.1.2. Planul printr-un punct, paralel cu două direcții date

Fie punctul $M_0 \in E_3$ şi dreptele distincte d_1, $d_2 \subset E_3$. Considerăm în punctul M_0 reprezentanții vectorilor $\overline{v}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$, $\overline{v}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$ paraleli dreptelor d_1 respectiv d_2 (fig.2)

Vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, liniar independenți generează subspațiul vectorial

$V_2 = \{\ \overline{v} \in V_3 \mid \exists \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\overline{v} = \lambda\overline{v}_1 + \mu\overline{v}_2\ \}$.

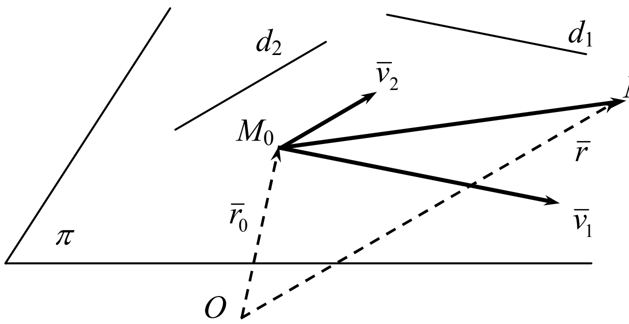


fig.2

Punctul $M_0 \in E_3$ şi subspaţiul vectorial V_2 determină subspaţiul afin bidimensional $\pi \subset E_3$. Un punct $M \in \pi$ dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \in V_2$, adică vectorii $\overline{M_0M}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt coplanari.

Utilizând vectorii de poziţie $\vec{r}$ şi $\vec{r}_0$ corespunzători punctelor M şi respectiv M_0, relaţia de coplanaritate $\overline{M_0M} = \lambda\bar{v}_1 + \mu\bar{v}_2$ se scrie sub forma

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{v}_1 + \mu\bar{v}_2 \tag{1.7}$$

numită *ecuaţia vectorială* a planului printr-un punct, paralel cu două direcţii.

Proiectând ecuaţia (1.7) pe axele sistemului cartezian de coordonate *Oxyz* obţinem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, l_1 + \mu l_2 \\ y = y_0 + \lambda\, m_1 + \mu m_2 \\ z = z_0 + \lambda\, n_1 + \mu n_2 \quad , \quad \lambda, \mu \in R \end{cases} \tag{1.8}$$

numite *ecuaţiile carteziene sub formă parametrică* ale planului printr-un punct, paralel cu două direcţii.

Relaţia de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_0M}$, $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ este caracterizată de anularea produsului mixt al celor trei vectori, adică $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$. Obţinem astfel ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.9}$$

numită *ecuaţia carteziană* a planului printr-un punct, paralel cu două direcţii.

Remarcă. În particular, ecuaţia (1.9) poate fi adaptată şi pentru alte situaţii cunoscute din geometria elementară, în care un plan este perfect determinat. Anume: planul determinat de o dreaptă şi un punct nesituat pe dreaptă, planul determinat de două drepte concurente şi respectiv planul determinat de două drepte paralele.

4.1.3. Planul printr-un punct, perpendicular pe o dreaptă

Primele două cazuri de determinare a unui plan sunt specifice unui spaţiu afin, planul fiind gândit ca mulţimea suport a unui subspaţiu afin de dimensiunea doi al spaţiului afin E_3. Punând în valoare proprietăţile oferite de structura euclidiană a spațiului vectorial V_3, putem caracteriza algebric punctele unui plan printr-un punct şi care să fie perpendicular pe o direcție dată.

Se ştie din geometria elementară că există un singur plan şi numai unul care trece printr-un punct şi este perpendicular pe o dreaptă dată. Din punct de vedere algebric acest fapt se exprimă în felul următor: dacă V_2 este un subspațiu vectorial de dimensiune doi în spațiul vectorial euclidian al vectorilor liberi V_3 atunci există un unic complement ortogonal V_1, subspațiu de dimensiune unu, care permite scrierea în sumă directă a spațiului vectorial al vectorilor liberi, sub forma $V_3 = V_2 \oplus V_1$.

Deci, determinarea planului afin π printr-un punct având ca spațiu vectorial director pe V_2 este echivalentă cu determinarea planului printr-un punct având direcția normalei paralelă cu subspațiul V_1 ortogonal subspațiului V_2.

Un vector cu direcție perpendiculară pe un plan va fi numit *vectorul* normal al planului sau pe scurt *normala* planului.

Fie un punct M_0 $(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ şi vectorul nenul $\overline{N}(A, B, C) \in V_3$ în spațiul punctual euclidian E_3 dotat cu reperul cartezian ortonormat R $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, (fig.3).

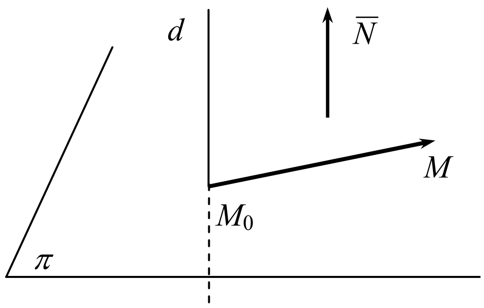


fig.3

Un punct $M(x, y, z)$ este situat în planul π, planul prin punctul M_0 perpendicular pe dreapta $d \parallel \overline{N}$, dacă şi numai dacă vectorul $\overline{M_0M}$ este ortogonal pe vectorul $\overline{N}$, adică $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$. Folosind expresia analitică a produsului scalar obținem:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1.10)$$

numită *ecuația planului printr-un punct şi de normală dată.*

Prelucrând membrul stâng al ecuației (1.10) şi notând cu $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ obținem:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1.11)$$

numită *ecuația carteziană generală* a unui plan.

Observații:

1°. Orice plan $\pi \subset E_3$ este caracterizat într-un reper cartezian $Oxyz$ de o ecuație polinomială de gradul I în nedeterminatele x, y, z şi reciproc.

2°. În ecuația (1.11) coeficienții nedeterminatelor reprezintă coordonatele vectorului normal la plan. În consecință, două plane ale căror ecuații diferă prin termenul liber sunt plane paralele, deci ecuația

$$Ax + By + Cz = \lambda \ , \ \lambda \in R \qquad (1.12)$$

reprezintă familia planelor paralele din spațiu de normală dată $\overline{N}(A, B, C)$. Pentru $\lambda = 0$ ecuația (1.12) reprezintă ecuația unui plan prin origine.

3°. *Ecuațiile planelor de coordonate*. Aceste plane conțin originea, deci $\lambda = 0$ şi au ca normale vectorii reperului R $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, $\bar{i} = (1,0,0)$, $\bar{j} = (0,1,0)$, $\bar{k} = (0,0,1)$. Obținem:

$z = 0$ – ecuația planului xOy
$y = 0$ – ecuația planului xOz
$x = 0$ – ecuația planului yOz

4°. *Ecuația normală a unui plan*. Să considerăm planul $\pi \subset E_3$ şi punctul M_0 proiecția originii reperului R $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ pe planul π. Dacă notăm cu p distanța de la origine la planul π, cu α, β, γ unghiurile pe care le face vectorul $\overrightarrow{OM_0}$ cu axele de coordonate atunci putem scrie:

$\overline{OM_0} = \|\overline{OM_0}\| \cdot \bar{e} = p(\cos\alpha\, \bar{i} + \cos\beta\, \bar{j} + \cos\gamma\, \bar{k})$,

$\|\bar{e}\| = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Un punct $M(x, y, z)$ este situat în planul π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{OM_0} = p\cos\alpha\, \bar{i} + p\cos\beta\, \bar{j} + p\cos\gamma\, \bar{k}$ şi $\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = (x - p\cos\alpha)\bar{i} + (y - p\cos\beta)\bar{j} + (z - p\cos\gamma)\bar{k}$ sunt ortogonali, adică $\overline{OM_0} \cdot \overline{M_0M} = 0$. În coordonate condiția de ortogonalitate este echivalentă cu:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (1.13)$$

numită *ecuația normală* a planului sau ecuația planului sub forma lui Hess.

În ecuația (1.13) $p \in R_+$ reprezintă distanța originii la planul π, iar cantitățiile $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cu proprietatea $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

reprezintă coordonatele versorului $\bar{e}$ al direcției normale la planul π şi vor fi numite *cosinusurile directoare* ale direcției $\bar{e}$.

Dacă considerăm planul π dat prin ecuația generală $Ax + By + Cz + D = 0$, având normala $\overline{N} = (A, B, C)$ şi împărțim ecuația prin $\|\overline{N}\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ obținem:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \tag{1.14}$$

numită *ecuația normalizată* a planului π. Alegem semnul "+" sau "-" după cum D este negativ sau pozitiv, întrucât comparând ecuația (1.14) cu ecuația (1.13) avem $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\alpha$, $\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\beta$, $\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\gamma$, şi termenul liber $\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p$, în care $p > 0$, reprezintă o distanță.

4.1.4. Poziția relativă a două plane

Studiul pozițiilor geometrice a două plane $\pi_1, \pi_2 \subset E_3$:

- plane ce se interesectează după o dreaptă
- plane paralele (strict)
- plane confundate,

se reduce la studiul mulțimii soluțiilor sistemului format cu ecuațiile celor două plane.

Să considerăm în reperul cartezian ortonormat R $(O;\ \bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ planele (π_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi (π_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Dacă notăm cu $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ matricea sistemului

$$(I)\quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ , \end{cases} \tag{1.15}$$

avem următoarele cazuri:

- rang $M = 2$ sistemul (I) este compatibil simplu nedeterminat.

Mulțimea soluțiilor sistemului (I) caracterizează locul geometric al punctelor comune celor două plane, adică dreapta de intersecție a celor două plane $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

- rang $M = 1$ şi $\Delta_c = 0$ – sistemul (I) este compatibil dublu nedeterminat, adică cele două plane coincid, $\pi_1 \equiv \pi_2$.

- rang $M = 1$ şi $\Delta_c \neq 0$ – sistemul (I) este incompatibil. Cele două plane nu au nici un punct comun, $\pi_1 \parallel \pi_2$.

4.1.5. Poziţia relativă a trei plane

În spaţiul punctual euclidian J_3 dotat cu reperul cartezian R (O; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) considerăm planele:

(π_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
(π_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
(π_3): $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

Notăm cu $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, matricea sistemului format cu ecuaţiile celor trei planuri. Avem următoarele cazuri:

a) rang $M = 3 \Leftrightarrow$ sistemul (I) este compatibil determinat. Soluţia sistemului reprezintă coordonatele punctului comun celor trei plane. Vom spune că cele trei plane sunt concurente (snop de plane).

b) rang $M = 2$ şi $\Delta_c = 0 \Leftrightarrow$ sistemul (I) este compatibil simplu nedeterminat. Mulţimea soluţiilor reprezintă coordonatele punctelor situate pe o dreaptă comună celor trei plane. Spunem că cele trei plane formează un *fascicul de plane*.

Condiţiile rang $M = 2$ şi $\Delta_c = 0$ sunt echivalente cu faptul că o ecuaţie a sistemului (I) este o combinaţie liniară a celorlalte. Dacă planele (π_1) şi (π_2) determină o dreaptă (d) atunci orice plan prin dreapta de intersecţie este reprezentat analitic ca o combinaţie a ecuaţiilor celor două plane. Ecuaţia fasciculului de plane prin dreapta de intersecţie a planelor π_1 şi π_2, numită axa fasciculului, este dată de

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (1.16)$$

$\lambda, \mu \in R, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$

Ecuaţia $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \alpha(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, $\alpha \in R$ reprezintă ecuaţia fasciculului prin dreapta (d) din care lipseşte planul π_2.

În particular, axa Ox gândită ca intersecția planelor xOy şi xOz, determină fasciculul planelor prin Oz caracterizat de

$$\lambda y + \mu z = 0 \tag{1.17}$$

c) rang $M = 2$ şi $\Delta_c \neq 0 \Leftrightarrow$ sistemul (I) este incompatibil. Două plane se intersectează după o dreaptă, al treilea plan fiind paralel cu dreapta de intersecție a primelor două plane (planele formează o prismă)

d) rang $M = 1$ şi $\Delta_{c_1} = \Delta_{c_2} = 0 \Leftrightarrow$ sistemul (I) este compatibil dublu nedeterminat. Cele trei plane sunt confundate.

e) rang $M = 1$ şi $\exists\ \Delta_{c_i} \neq 0 \Leftrightarrow$ sistemul (I) este incompatibil. Planele sunt paralele (strict sau două pot fi confundate).

§4.2. Dreapta în spațiu

Fie R (O; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$), un reper cartezian ortonormat în spațiul punctual euclidian E$_3$ = (E_3, V$_3$, φ). Oricărui punct $M \in E_3$ îi putem asocia vectorul de poziție $\bar{r} = \overrightarrow{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, unde terna $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$, coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ în baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ vor fi numite coordonatele punctului M.

În spațiul geometric E_3, o dreaptă este unic determinată de următoarele condiții:

- un punct şi de o direcție dată
- două puncte distincte
- intersecția a două plane

4.2.1. Dreapta determinată de un punct şi o direcție

Fie un punct $M_0 \in E_3$ şi vectorul nenul $\bar{v} \in$ V$_3$. Vectorul nenul $\bar{v}$ generează subspațiul vectorial unidimensional V$_1$ = $\{\bar{u} \in$ V$_3$ $/ \bar{u} = \lambda \bar{v}, \lambda \in \boldsymbol{R}\}$.

În aceste condiții subspațiul afin ce conține punctul M_0 şi care admite pe V$_1$ ca spațiu director va avea drept mulțime suport dreapta (d) ale cărei puncte sunt date de

$$d = \{M \in E_3 \mid \overline{M_0 M} \in \mathrm{V}_1\}.$$

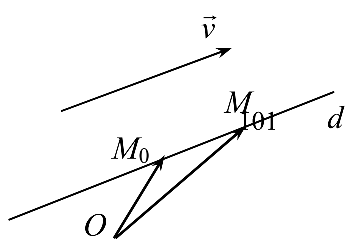


fig. 1

Condiția $\overline{M_0M} \in V_1$ are loc dacă şi numai dacă $\exists\lambda \in R$ aşa încât $\overline{M_0M} = \lambda\bar{v}$. Scriind $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ obținem

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{v}\,,\ \lambda\in R \tag{2.1}$$

numită *ecuația vectorială* a dreptei (*d*) prin punctul M_0 având direcția dată de vectorul $\bar{v}$.

Dacă proiectăm relația (2.1) pe axele reperului cartezian R$(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ obținem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n\ , \quad \lambda \in R \end{cases} \tag{2.2}$$

numite *ecuațiile parametrice* ale dreptei *d* prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ având direcția dată de vectorul $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$.

Vectorul $\vec{v} = (l, m, n) \in V_3$ va fi numit *vectorul director* al dreptei (*d*) iar coordonatele $l, m, n \in R$ vor fi numite *parametrii directori* ai dreptei (*d*).

Dacă vectorul director este versorul $\bar{e}$, care formează unghiurile α, β, γ cu axele de coordonate *Ox*, *Oy*, *Oz*, atunci parametrii directori: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, coordonatele versorului $\bar{e}$, se vor numi *cosinusurile directoare* ale dreptei (*d*).

Cosinusurile directoare ale unei direcții în spațiu satisfac relația

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Observație: ecuațiile (2.1) sau forma echivalentă (2.2) guvernează mişcarea rectilinie şi uniformă a unui punct material.

Eliminând parametrul λ din ecuațiile (2.2) se obțin ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,, \tag{2.3}$$

numite ecuațiile *carteziene canonice* (sub formă de rapoarte) ale dreptei *d* prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi cu direcția dată de vectorul $\bar{v} = (l, m, n)$

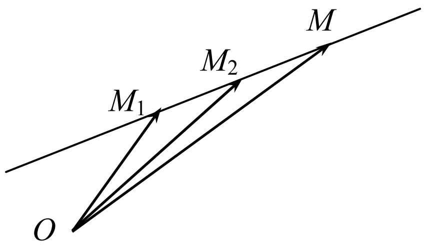
Observație: ecuațiile canonice se scriu şi când unul sau doi parametri parametrii directori sunt nuli, convenind în acest caz că numărătorul corespunzător este nul şi că ecuaţiile sunt date efectiv de egalarea produsului mezilor cu produsul extremilor în proporţiile formate.

4.2.2. Dreapta determinată de două puncte distincte

Fie M_1, $M_2 \in E_3$ două puncte distincte. Subspaţiul afin generat de aceste puncte va avea ca spaţiu vectorial director subspaţiul unidimensional $V_1 \subset V_3$ dat de

$$V_1 = \{ \overline{M_1M} \in V_3 \mid \exists \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ astfel încât } \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_1M_2} \}$$

fig. 2



Cu alte cuvinte un punct $M \in E_3$ aparţine mulţimii suport a subspaţiului afin generat de punctele M_1 şi M_2, adică M este situat pe dreapta prin cele două puncte, dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_1M}$ şi $\overline{M_1M_2}$ sunt coliniari. Astfel, mulţimea punctelor dreptei prin M_1 şi M_2 va fi caracterizată de relaţia vectorială

$$\bar{r} = (1-\lambda)\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2,\ \lambda \in R \tag{2.4}$$

sau

$$(\bar{r} - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \bar{0} \tag*{(2.4)$'$}$$

numită *ecuaţia vectorială* a dreptei prin două puncte.

În reperul cartezian R $(O;\ \bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$, considerând $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$, vom obţine:

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2\ , \quad \lambda \in R \end{cases} \tag{2.5}$$

numite *ecuaţiile parametrice* ale dreptei prin două puncte.

Observație: Pentru $\lambda \in (0, 1)$ ecuațiile (2.5) ne procură mulțimea punctelor de pe dreapta (d) cuprinse între punctele M_1 şi M_2, iar pentru $\lambda \in R \setminus [0, 1]$ obținem punctele dreptei (d), puncte exterioare segmentului M_1M_2. Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ obținem coordonatele mijloacelor segmentului M_1M_2.

Eliminarea parametrului $\lambda \in R$ în ecuațiile (2.5) sau impunând proporționalitatea coordonatelor a doi vectori coliniari, obținem

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{2.6}$$

numite *ecuațiile carteziene* sub formă *canonică* ale unei drepte prin două puncte.

4.2.3. Dreapta ca intersecție a două plane

Se ştie din geometria elementară că două plane neparalele se intersectează după o dreaptă (d). În paragraful precedent această situație geometrică este caracterizată analitic de un sistem de ecuații liniare compatibil nedeterminat, format cu ecuațiile celor două plane. Astfel, ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

vor fi numite ecuațiile dreptei (d) dată de intersecția a două plane.

O soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului (2.7) va caracteriza un punct al dreptei (d) iar vectorul $\overline{v} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$, unde $\overline{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ şi $\overline{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ sunt normalele celor două plane ce determină dreapta (d).

Observație: Ecuațiile carteziene (2.3) şi (2.6) ale unei drepte în spațiu pot fi interpretate ca un sistem de două ecuații liniare, adică dreapta (d) gândită ca intersecția a două plane.

4.2.4. Poziția relativă a două drepte

Fie dreptele (d_1) şi (d_2) date de ecuațiile

$(d_1)\ \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$

$(d_2)\ \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$

Considerăm vectorii $\overline{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\overline{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ – vectori directori ai dreptelor (d_1) respectiv (d_2) şi vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$ respectiv $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$.

Avem cazurile:

a) dacă $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{M_1M_2}) \neq 0$ – dreptele (d_1) şi (d_2) sunt necoplanare sau drepte oarecare în spaţiu (strâmb aşezate în spaţiu)

În acest caz există o direcţie comună normală unică pe cele două drepte, dată de $\overline{v}=\overline{v}_1\times\overline{v}_2$ şi deci o unică dreaptă care se sprijină pe cele două drepte având direcţia $\overline{v}$ (fig. 3), numită *perpendiculara comună* a dreptelor (d_1) şi (d_2).

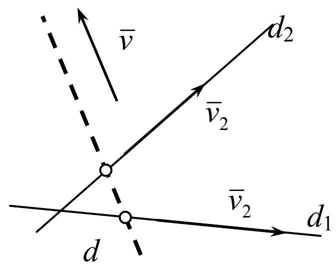


fig. 3

Perpendiculara comună (d) este dată de intersecţia planelor π_1 şi π_2; π_1 - planul prin dreapta (d_1) paralel cu $\overline{v}$ şi π_2 - planul prin (d_2) paralel cu $\overline{v}$. Ecuaţiile perpendicularei comune sunt:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \\ \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \end{cases} \tag{2.8}$$

unde $(l, m, n) = \bar{v} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$

b) dacă $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \overline{M_1M_2}) = 0$ – dreptele (d_1) şi (d_2) sunt coplanare

b$_1$) $\bar{v}_2 \neq \lambda \bar{v}_1$ - drepte concurente

b$_2$) $\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1$ - drepte paralele (strict)

b$_3$) $\bar{v}_2 = \lambda \bar{v}_1$ şi $\overline{M_1M_2} = \mu \bar{v}_1$ - drepte confundate

§4.3. Unghiuri şi distanţe

Fie (d) o dreaptă în spaţiul punctual euclidian E_3. Pe dreapta (d) se pot stabili două sensuri de parcurs. O dreaptă (d) împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numeşte *dreaptă orientată*.

Dacă $\bar{v}$ este vectorul director al dreptei (d), atunci vom alege sensul de parcurs pe dreaptă sensul lui $\bar{v}$ (sens pozitiv).

Fie planul $\pi \subset E_3$ având vectorul normal $\overline{N}$. Planul are două feţe iar alegerea unui sens pe dreapta normală este echivalentă cu alegerea unei feţe a planului. Un plan π împreună cu o alegere a sensului pe normală se numeşte *plan orientat.* Vom alege sensul pe normală sensul dat de vectorul $\overline{N}$.

4.3.1. Unghiul a două drepte în spaţiu

Fie dreptele (d_1) şi (d_2) orientate de vectori directori $\bar{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ şi respectiv $\bar{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

Prin unghiul dreptelor (d_1) şi (d_2) vom înţelege unghiul $\varphi \in [0, \pi]$, unghiul dintre vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$, dat de

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \tag{3.1}$$

În particular avem:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

4.3.2. Unghiul a două plane

Fie planele neparalele π_1 şi π_2, date de

$$(\pi_1) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(\pi_2) \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

În geometria elementară unghiul a două plane neparalele este definit ca fiind unghiul diedru al celor două plane. Acest unghi este congruent sau suplementar cu unghiul vectorilor $\overline{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ şi $\overline{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, vectorii normali planelor π_1 respectiv π_2.

Acceptăm ca unghiul diedru determinat de planele orientate π_1 şi π_2 să fie măsurat prin unghiul dintre $\overline{N}_1$ şi $\overline{N}_2$. Acest unghi este dat de

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (3.2)$$

În particular $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 = 0$

4.3.3. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan este definit în geometria elementară ca fiind unghiul dintre dreaptă şi proiecția ortogonală a acesteia pe plan.

Fie dreapta (d) orientată de vectorul director $\overline{v}$ = (l, m, n) şi palnul π orientat de normala $\overline{N} = (A, B, C)$ (fig. 5)

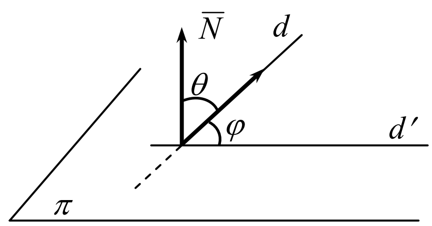


fig. 5

Unghiul $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dintre dreapta (d) şi planul π este legat de unghiul θ, unghiul vectorilor $\bar{v}$ şi $\overline{N}$, prin relaţiile $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$,deci $\sin\varphi = \pm\cos\theta$ .Astfel obţinem :

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{v}\overline{N}|}{\|\bar{v}\|\cdot\|\overline{N}\|} = \frac{|lA + mB + nC|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{3.3}$$

În particular:

$d \,\|\, \pi \Leftrightarrow \bar{v}\ \overline{N} = 0 \Leftrightarrow lA + mB + nC = 0,$

$d \perp \pi \Leftrightarrow \bar{v}\times\overline{N} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$

4.3.4 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Reamintim că distanţa dintre două submulţimi S_1 şi S_2 într-un spaţiu metric este dată de $\delta(S_1, S_2) = \inf\{\delta(M_1, M_2) \mid M_1 \in S_1, M_2 \in S_2\}$.

În spaţiul punctual euclidian E_3 dotat cu metrică euclidiană distanţa dintre două submulţimi se reduce la distanţa dintre două puncte. Astfel, distanţa de la un punct la o dreaptă este dată de distanţa dintre punct şi proiecţia ortogonală a acestuia pe dreaptă (fig. 6)

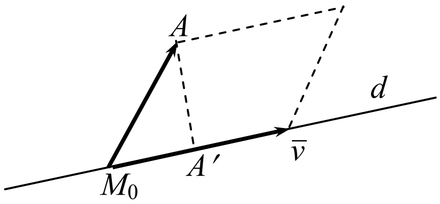


fig. 6

Fie dreapta (d) prin punctul M_0, orientată prin vectorul director $\bar{v}$, punctul A exterior dreptei şi A' proiecţia acestuia pe dreapta (d). Determinând punctul A', ca intersecţia dreptei (d) cu planul prin A ortogonal dreptei, obţinem $\delta(A, d) = \delta(A, A')$. Altfel, construind paralelogramul determinat de vectorii $\overline{M_0A}$ şi $\bar{v}$, obţinem

$$\delta(A, d) = \delta(A, A') = \frac{\|\bar{v}\times\overline{M_0A}\|}{\|\bar{v}\|} \tag{3.4}$$

4.3.5. Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct M_0 la un plan (π) $Ax + By + Cz + D = 0$ este dată de distanța dintre punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi punctul M' (x', y', z'), proiecția ortogonală a acestuiape planul π.

Determinăm coordonatele (x', y', z') ale punctului M', rezolvând sistemul format de ecuația planului şi ecuațiile dreptei prin punctul M_0 ortogonală pe plan, adică:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \quad x = x_0 + \lambda A \\ \quad y = y_0 + \lambda B \\ \quad z = z_0 + \lambda C \end{cases} \tag{3.5}$$

Parametrul pe dreaptă corespunzător punctului M', notat cu λ', este dat de

$\lambda' = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$ şi obținem

$$\delta(M_0, M') = \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2} = \sqrt{A^2\lambda'^2 + B^2\lambda'^2 + C^2\lambda'^2} =$$
$$= |\lambda'|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

iar distanța de la punctul M_0 la planul π este dată de

$$\delta(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.6}$$

Observație: Distanța de la un punct M_0 la un plan π se obține luând modulul expresiei obținute prin înlocuirea coordonatelor punctului dat în membrul stâng al ecuației normalizate a planului.

4.3.6. Distanța dintre două drepte oarecare în spațiu

Fie dreptele oarecare în spațiu

(d_1) $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$

(d_2) $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$

Fie (d) perpendiculara comună a dreptelor (d_1) şi (d_2) iar P_1 respectiv P_2 punctele de contact ale acesteia cu (d_1) respectiv (d_2).

Construim paralelipipedul determinat de vectorii $\overline{M_1M_2}$ = = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1), $\overline{v}_1$ = (l_1, m_1, n_1) şi $\overline{v}_2$ = (l_2, m_2, n_2). (fig. 7)

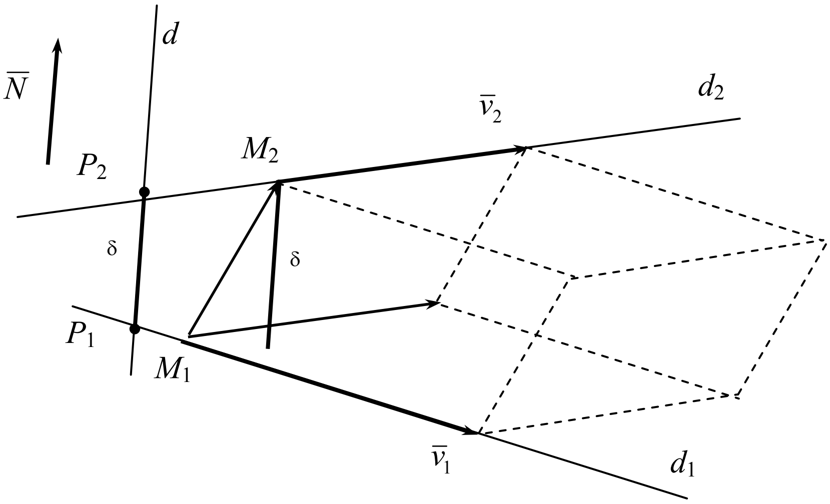


fig. 7

Distanța dintre dreptele (d_1) şi (d_2) este dată de distanța dintre punctele de contact ale perpendicularei comune cu cele două drepte, distanța ce reprezintă înălțimea paralelipipedului construit. Astfel, obținem

$$\delta(d_1, d_2) = \delta(P_1, P_2) = \frac{|(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{M_1M_2})|}{\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|} \tag{3.7}$$

§.4.4. Probleme rezolvate

4.4.1. Să se scrie ecuația unui plan:

a). paralel cu planul xOy şi care trece prin punctul A(2,-5,3)

b). care trece prin axa Oz şi prin punctul B(-3,1,-2)

c). paralel cu Ox, care trece prin punctele M_1(4,0,-2) şi M_2(5,1,7)

<u>*Soluție:*</u>

a) Orice plan paralel cu planul xOy are ecuația $z = a$, deci planul cerut este

$z = 3.$

b) Ecuația unui plan care trece prin axa Oz este Ax+By = 0.

Punând condiția să treacă prin punctul dat rezultă:

(P):x + 3y = 0.

c) Ecuația unui plan paralel cu Ox este

(P):By + Cz + D = 0.

Din condițiile ca să treacă prin M_1 şi M_2 obținem:

$$\begin{cases} 0 \bullet B - 2C + D = 0 \\ B \bullet 1 + C \bullet 7 + D = 0 \end{cases} \text{ deci} \begin{cases} D = 2C \\ B = -9C \end{cases} \text{ atunci(P):9y-z-2 = 0}$$

4.4.2 Să se scrie ecuația planului paralel cu planul 3x-y+z-6 = 0 şi care trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele $M_1(1,3,2)$ şi $M_2(1,-5,-4)$

<u>*Soluție:*</u>

Coordonatele mijlocului M al segmentului M_1M_2 sunt:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} = -1 \\ z_M = \dfrac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2} = -1 \end{cases}$$

Normala la planul căutat este aceeaşi cu normala la planul (P), adică $\overline{N_1} = \overline{N} = 3\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$

Ecuația planului căutat devine:

(P₁):3(x-1)-1(y+1)+1(z+1)=0. Respectiv

(P₁):3x-x+z-3=0.

4.4.3. Se dă un tetraedru ABCD definit de punctele A(3,0,0). B(2,4,0), C(-3,-1,0). D(0,0,5) şi se cere să se scrie ecuațiile fețelor tetraedrului.

<u>*Soluție:*</u>

Pentru determinarea ecuațiilor fețelor tetraedrului se va folosi ecuația de plan determinat de trei puncte:

$$P:\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Introducând coordonatele punctelor corespunzătoare se obțin ecuațiile fețelor:

$$(ABC): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ respectiv, } (ABC) : z = 0.$$

$$(ABD): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{respectiv, } (ABD) : 20x + 5y + 12z - 60 = 0.$$

Analog rezultă ecuațiile:

$(BCD) : 5x - 5y - 2z + 10 = 0$

$(ACD) : 5x - 30y + 3z - 15 = 0.$

4.4.4. Să se scrie ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului M_1M_2 unde $M_1(1,-1,2)$ şi $M_2(4,-3,1)$, este paralel cu dreapta (D): $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ şi este perpendicular pe planul $(P_1) : x - 2y - z - 1 = 0$

Soluție:

Mijlocul M al segmentului M_1M_2 are coordonatele $M\left(\frac{5}{2},-2,\frac{3}{2}\right)$

Deoarece $(P)\perp(P_1)$ rezultă că normala la planul (P_1) $\overline{N_1}$ este un vector conținut în planul (P).

$$\overline{N_1} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}.$$

Deoarece dreapta (D)II(P) vectorul director al dreptei $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ este şi el conținut în planul (P).

Deci planul (P) este determinat de un punct şi două direcții neparalelele.

Ecuația planului este de forma:

$$(P): \begin{vmatrix} x - \frac{5}{2} & y + 2 & z - \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{respectiv}$$

(P) : x - 3y + 7z – 19 = 0.

4.4.5. Se dau punctele A(3,-1,3), B(5,1,-1) şi C(0,4,-3). Se cer ecuațiile carteziene, parametrice şi vectoriale ale dreptelor AB şi AC.

<u>*Soluție:*</u>

Vectorul director al dreptei AB este:

$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$

Ecuațiile sub formă de rapoarte ale dreptei AB:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}.$$

Se poate considera vector al dreptei AB:

$$\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}.$$

Ecuațiile parametrice ale dreptei AB se obțin prin egalarea rapoartelor ecuațiilor carteziene cu parametrul t şi rezultă:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t, \qquad t \in R \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Ecuația vectorială a dreptei AB este de forma:

$\bar{r} = \overline{r_A} + t\bar{u}$, unde $\overline{r_A} = \overline{OA} = 3\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$

Se obține:

$$\overline{r} = (3+t)\overline{i} + (-1+t)\overline{j} + (3-2t)\overline{k}.$$

Analog:

$$AC: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-6}$$

$$AC: \begin{cases} x = 3-3t \\ y = -1+5t \\ z = 3-6t \end{cases}, \quad t \in R.$$

$$AC: \overline{r} = (3-3t)\overline{i} + (-1+5t)\overline{j} + (3-6t)\overline{k}.$$

Vectorul director al dreptei AC este:

$$\overline{v} = -3\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k}.$$

4.4.6. Să se scrie ecuațiile sub formă de rapoarte şi parametrice ale dreptei

$$\begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ x + 4y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$$

Soluție:

Dreapta (D) este dată ca intersecție de două plane (P_1) şi (P_2).

Vectorul director al dreptei (D) este $\overline{v} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, unde $\overline{N_1}$ şi $\overline{N_2}$ sunt normalele la cele două plane.

Obținem: $\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 9(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}).$

Se poate considera ca vector director al dreptei $(D)\overline{v'} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

Un punct care verifică ecuația dreptei este M(-1,1,0). Ecuațiile sub formă de rapoarte ale dreptei ce trece prin M şi de vector director $\overline{v'}$ este:

$$(D): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Egalând rapoartele din ecuațiile de mai sus cu parametrul t se obțin ecuațiile parametrice ale dreptei de forma:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbf{R}.$$

4.4.7. Considerăm planul (P):3x+5y-2z-6=0 şi dreptele

$(D_1): \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-7}{-6} = \dfrac{z+2}{3}$

$(D_2): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-21}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ şi

$(D_3): \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z+4}{-2}$

Să se arate că:

a). (D_1) intersectează planul (P), determinându-se coordonatele punctului de intersecție şi valoarea unghiului $\alpha = \sphericalangle(D_1, P)$.

b). (D_2) este paralelă cu planul (P).

c). (D_3) este perpendiculară pe planul (P), aflându-se coordonatele punctului de intersecție.

<u>*Soluție:*</u>

a) Coordonatele punctului A de intersecție sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z - 6 = 0 \\ \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-7}{-6} = \dfrac{z+2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{10}; \frac{19}{20}\right).$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{u} \cdot \overline{N}}{\|\overline{u}\| \cdot \|\overline{N}\|} = \frac{\left(4\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}\right)\left(3\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}\right)}{\sqrt{16+36+9}\sqrt{9+25+4}} = \frac{-24}{\sqrt{61}\sqrt{38}} = \frac{-24}{\sqrt{2318}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{-24}{\sqrt{2318}}\right).$$

b) Pentru ca (D_2) să fie paralelă cu planul (P) trebuie ca vectorul director $\overline{v_2} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$ al lui (D_2) să fie perpendicular pe normala $\overline{N} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$ la planul (P).

$\bar{v} \cdot \overline{N} = 3 + 5 - 8 = 0 \Rightarrow (D_2) \perp (P).$

c) Pentru ca (D_3) să fie perpendiculară pe planul (P) trebuie ca vectorul director $\overline{v_3} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$ al lui (D_3) să fie coliniar cu normala $\overline{N} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$ la planul (P).

$$\bar{v} \times \overline{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (D_3) \perp (P).$$

Punctul de intersecție B dintre (D_3) şi (P) are coordonatele soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z - 6 = 0 \\ \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z+4}{-2} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{49}{38}; \frac{7}{38}; \frac{-170}{38}\right).$$

4.4.8. Se dau planele

(P_1) : x + 2y + 4z – 1 = 0,

(P_2) : 2x + 4y + 8z – 9 = 0,

(P_3) : 2x + y – z + 10 = 0 şi

(P_4) : x + y + z – 2 = 0.

Să se arate că:

a) (P_2) $\parallel$ (P_1).

b) (P_3)$\perp$ (P_1) şi să se determine ecuațiile dreptei de intersecție,

c) să se determine ecuațiile dreptei de intersecție dintre (P_4) şi (P_1) şi să se calculeze unghiul dintre cele două plane.

Soluție:

a) Pentru ca (P_2) $\parallel$ (P_1) trebuie ca normalele celor două plane să fie coliniare.

$$\overline{N_1} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\overline{N_2} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (P_2) \| (P_1)$$

b) Pentru ca $(P_3) \perp (P_1)$ trebuie ca normalele celor două plane să fie ortogonale.

$$\overline{N_1} \cdot \overline{N_3} = (\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k})(2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow (P_3) \perp (P_1)$$

Dreapta de intersecție (D) dintre (P_1) şi (P_3) se scrie ca intersecție de două plane:

$$(D): \begin{cases} x + 2y + 4z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 10 = 0 \end{cases}$$

c) Dreapta de intersecție (D_1) dintre (P_1) şi (P_4) se scrie ca intersecție de două plane:

$$(D_1): \begin{cases} x + 2y + 4z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Unghiul dintre (P_1) şi (P_4), cu normalele $\overline{N_1}$ şi $\overline{N_4}$ este:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_4}}{\left\|\overline{N_1}\right\| \cdot \left\|\overline{N_4}\right\|} = \frac{(\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k})(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})}{\sqrt{1 + 4 + 16}\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{63}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{63}}\right).$$

4.4.9. Se dă triunghiul cu vârfurile A(1,1,1), B(2,3,4) şi C(-1,0,3). Să se calculeze lungimile înălțimilor triunghiului.

Soluție:

Lungimile înălțimilor sunt distanțeşle de la vărfuri la dreptele determinate de vârfurile triunghiului (luate două câte două).

Vectorii de direcție ai laturilor triunghiului sunt:

$$\overline{v_{AB}} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$$
$$\overline{v_{AC}} = -2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$
$$\overline{v_{BC}} = -3\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$$

Lungimile înălțimilor sunt:

$$h_A = \frac{\left\|\overline{BA} \times \overline{v_{BC}}\right\|}{\left\|\overline{v_{BC}}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9+9+1}} = \frac{\sqrt{49+64+9}}{\sqrt{19}} = \sqrt{\frac{122}{19}}\ .$$

Analog:

$$h_B = \frac{\left\|\overline{AB} \times \overline{v_{AC}}\right\|}{\left\|\overline{v_{AC}}\right\|} = \sqrt{\frac{122}{19}}\ ,$$

$$h_C = \frac{\left\|\overline{AC} \times \overline{v_{BC}}\right\|}{\left\|\overline{v_{BC}}\right\|} = \sqrt{\frac{122}{19}}\ .$$

4.4.10. Să se determine ecuațiile perpendicularei coborâte din punctul M(1,-1,-2) pe dreapta:

$$(D): \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}\ .$$

cât şi simetricul punctului M față de dreapta (D).

<u>*Soluție:*</u>

Ecuația planului care trece prin M şi este perpendicular pe dreapta (D) este :

(P) : 2(x - 1) + 1(y + 1) - 1(z + 2) = 0.

Intersecția dintre dreapta (D) şi planul (P) este:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 1 \\ z = -t \\ 2(2t-4) + t + 2 - (-t+2) = 0 \end{cases} \qquad \text{deci} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{7}{3} \\ z = -\dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

Dreapta perpendiculară pe dreapta (D) ce trece prin punctul M este dreapta determinată de punctele A şi M.

$$(D'): \frac{x-1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{y+1}{-1-\frac{7}{3}} = \frac{z+2}{-2+\frac{4}{3}}$$

$$(D'): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{-1}$$

Intersecția dintre dreapta perpendiculară (D') şi dreapta dată (D) este punctul $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ care este mijlocul segmentului format de M şi simetricul său M'.

Din $x_A = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$ rezultă:

$$x_{M'} = 2x_A - x_M = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{3},$$

$$y_{M'} = 2y_A - y_M = 2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{17}{3},$$

$$z_{M'} = 2z_A - y_M = 2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{17}{3}.$$

Coordonatele simetricului sunt:

$$M'\left(-\frac{5}{3},\frac{17}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

4.4.11. Să se afle simetricul punctului M(-1,2,0) față de planul (P) : x + 2y – z + 3 = 0.

Soluție:

Dreapta perpendiculară pe planul (P) care trece prin punctul M are vectorul director paralel cu normala $\overline{N}$ la planul (P).

$$(D): \frac{x-(-1)}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1}.$$

Intersectând dreapta (D) cu planul (P) se obține punctul care reprezintă mijlocul M_0 al segmentrului format de punctul M şi simetricul său M'.

Coordonatele lui M_0 sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+2 \\ z=-t \\ x+2y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+2 \\ z=-t \\ t-1+4t+4+t+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=-1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow M_0(-2,0,1)$$

Coordonatele simetricului:

$x' = 2x_0 - x_M = -4 + 1 = -3$

$y' = 2 \times 0 - 2 = -2$

$z' = 2$

Prin urmare M'(-3,-2,2).

4.4.12. Se dă planul (P) : x + y + z – 3 = 0 şi dreapta

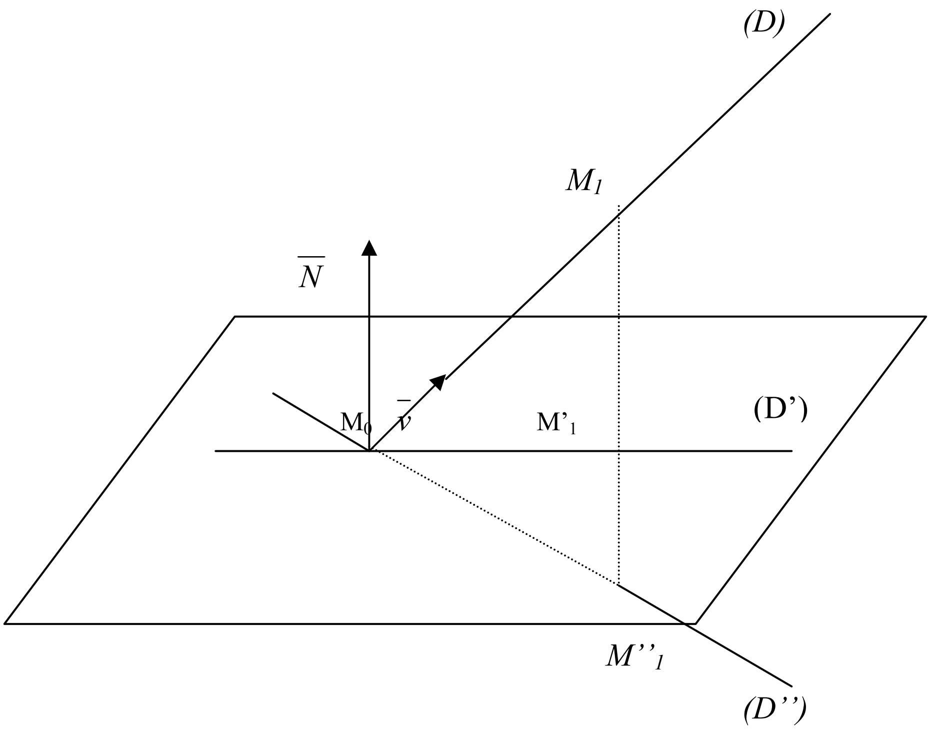
$$(D): \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$$

Să se determine:

a) ecuația proiecției (D') a dreptei (d) pe planul (P).

b) ecuația (D'') a simetricei dreptei (D) față de planul (P).

<u>Soluție:</u>



a) Punctul M_0 de intersecție dintre dreapta (D) şi planul (P) are coordonatele soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \Rightarrow M_0\left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Dreapta (D') se obține din intersecția dintre planul (P) şi un plan (P') perpendicular pe acesta care conține dreapta (D) (trecând prin M_0). Ecuația lui (P') este ecuația unui plan trecând printr-un punct M_0 şi dat de două direcții neparalele $\overline{N}$ şi $\overline{v}$, de forma:

$$(P'): \begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & y & z-\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{, respectiv}$$

(P') : x - 2y + z = 0.

Ecuațiile dreptei (D') devin:

$$(D'): \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-2y+z-3=0 \end{cases}.$$

b) Un alt punct $M_1 \in$ (D) este $M_1(1,-1,0)$. Proiecția lui pe planul (P) este M_1' cu coordonatele soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1} \end{cases} \text{, respectiv } M'(2,0,1).$$

Simetricul M''_1 al punctului M_1 față de planul (P) are coordonatele:

$$\begin{aligned} x_{M''_1} &= 2x_{M'_1} - x_{M_1} = 3 \\ y_{M''_1} &= 1 \\ z_{M''_1} &= 2 \end{aligned} \quad \text{, adică } M''_1(3,1,2).$$

Dreapta (D''_1), simetrica lui (D) față de planul (P) are ecuația determinată de punctele M_0 şi M''_1 de forma:

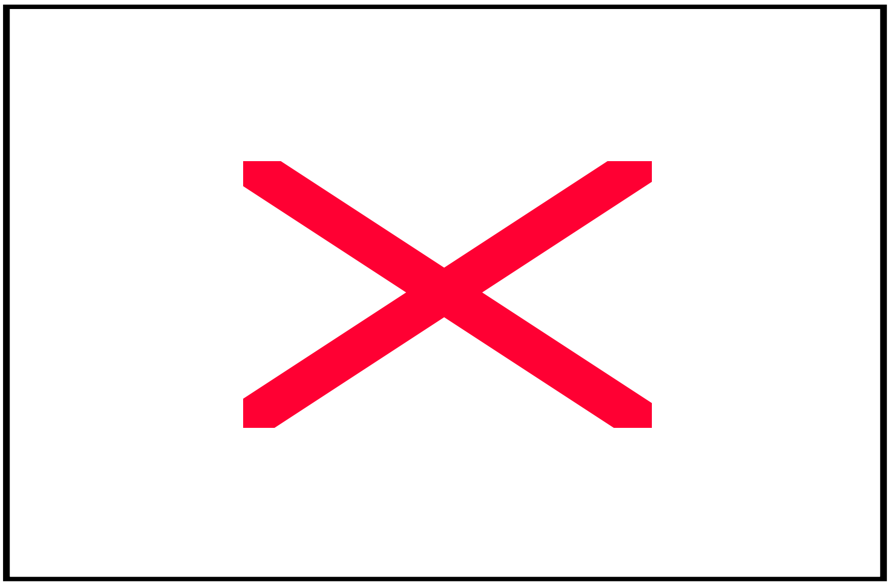
$$(D''): \frac{x-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}, \text{ respectiv}$$

$$(D''): \frac{2x-3}{3} = \frac{y}{1} = \frac{2z-3}{1}$$

4.4.13. Fie panele (P_1) : x + y + z - 1 şi (P_2) : 2x – y + z – 5 = 0.

Să se determine ecuația planului (P_3) simetricul planului (P_1) față de planul (P_2).

Soluție:



Dreapta de intersecție (D) dintre planele (P_1) şi (P_2) are ecuațiile:

$$(D):\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+z-5=0 \end{cases}.$$

Vectorul director al dreptei (D) este $\overline{v}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}$, adică:

$$\overline{v}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=+2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$$

Un punct M_0 al dreptei (D) este $M_0(2,-1,0)$.

Un alt punct M_1 al planului (P_1) este $M_1(1,1,-1)$.

Proiecția lui M_1 pe planul (P_2) este punctul M_2 cu coordonatele soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} 2x-y+z-5=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1} \end{cases} \text{ respectiv } M_2\left(\frac{8}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right).$$

Simetricul M_3 al punctului M_1 față de planul (P_2) are coordonatele:

$$x_{M_3} = 2x_{M_2} - x_{M_1} = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3}$$

$$y_{M_3} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \qquad \text{respectiv} \quad M_3\left(\frac{13}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$z_{M_3} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

Ecuația planului (P_3), simetricul planului (P_1) față de (P_2), se scrie ca ecuația unui plan trecând prin M_0 şi de două direcții neparalele $\bar{v}$ şi $\overline{M_0M_3}$:

$$(P_3): \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -3 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0 \text{ respectiv } x - 5y - z - 7 = 0.$$

4.4.14. Să se determine un plan care trece prin intersecția planelor:
(P_1) : $x + 5y + z = 0$ şi (P_2) : $x - z + 4 = 0$

şi care formează cu planul *(P_3) : $x - 4y - 8z + 12 = 0$* un unghi de măsură $\frac{\pi}{4}$.

<u>*Soluție:*</u>

Planul (P) care trece prin intersecția planelor P_1 şi P_2 are ecuația $(P_\lambda): P_1 + \lambda P_2 = 0$ adică

$(P_\lambda) : x + 5y + z + \lambda(x - z + 4) = 0$

$(P_\lambda) : (1+\lambda)x + 5y + (1-\lambda)z + 4\lambda = 0$

Pentru ca planul (P_λ) şi (P_3) să formeze un unghi de măsura $\frac{\pi}{4}$ trebuie ca normalele celor două plane să formeze unghiul cerut, adică:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot(1+\lambda)-4\cdot5-8(1-\lambda)}{\sqrt{1+4^2+8^2}\cdot\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

$$27+2\lambda^2=2(\lambda-3)^2$$

$$27+2\lambda^2=2\lambda^2-12\lambda+18$$

$$12\lambda=18-27$$

$$\lambda=-\frac{3}{4}$$

(P) : x + 20y + 7z – 12 = 0

4.5. §TEME DE REZOLVAT PENTRU EVALUARE

4.5.1. Se dau A (3, 1, 0), B (2, 1, -1), C (3, 2, 1). Să se scrie ecuația unui plan:

a) care trece prin A, B, C;
b) care trece prin B şi este paralel cu xOy;
c) care trece prin C şi conține axa Oz;
d) care trece prin B, C şi este paralel cu Oy.

4.5.2. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul M (2, 0, 1) şi este perpendicular pe planele $(P_1) : x + y + z = 0$ şi (P_2): $x - 2y + 3z = 1$.

4.5.3. Să se scrie ecuația unui plan paralel cu planul (P) $x + y + z = 3$ şi care trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele M_1 (1, 3, 2) şi M (-1, 3 , 4).

4.5.4. Să se determine ecuația planului care trece prin M (-1, 1, 0) şi taie pe axele de coordonate segmente proporționale cu numerele 2, 3, 4.

4.5.5. Fie planul $\begin{cases} x=-2+3\lambda u-4v \\ y=1-2u+\mu v \\ z=1-\mu u+\lambda v \end{cases}$.

Să se găsească λ şi μ astfel încât planul să fie ortogonal pe vectorul $\bar{v}$ (1, 7, 11). Să se scrie ecuația generală a planului.

4.5.6. Fie triunghiul A, B, C cu A (0, 2, 0), B (3, 2, 1), C (0, 1, 2). Să se scrie ecuațiile:

a) înălțimii din A;
b) medianei din B;
c) mediatoarei laturii AB.

4.5.7. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin M (1,-1,1) şi este paralelă cu dreapta de intersecție a planelor (P_1) $x + y = 3$ şi (P_2) $x - z = 1$.

4.5.8. Un mobil M se deplasează în spațiu pe traiectoria dată de

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Să se determine momentul t la care mobilul se află în planul $x + y + z = 0$ şi să se scrie ecuațiile carteziene ale acestei traiectorii.

4.5.9. Găsiți α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ astfel încât dreapta $\frac{x}{\alpha} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z}{2}$ să fie conținută în planul $x - z = 0$ şi să treacă prin M (1, 1, 1).

4.5.10. Să se scrie ecuația planului care trece prin M_0 (2, -1, 1) şi este perpendicular pe dreapta definită de planele $(P_1) : x + 2y + 2z + 2 = 0$ şi $(P_2) : x - y + z + 1 = 1$.

4.5.11. Să se scrie ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului M (1, -1, 2), N (4, -3, 1), este paralel cu dreapta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ şi perpendicular pe planul $x - 2y - z - 1 = 0$.

4.5.12. Să se scrie ecuațiile dreptei conținute în planul (P) $x + 3y + 2z - 2 = 0$, care se sprijină pe dreapta $x = y = z$ şi este paralelă cu planul $4x - y - z - 3 = 0$.

4.5.13. Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$ pe planul $3x - 2y + z - 4 = 0$.

4.5.14. Să se scrie ecuația unui plan paralel cu planul (P) $3x + 5y + z = 0$ care trece prin punctul M (2, 0 , 5).

4.5.15. Să se scrie planul care trece prin A (3, 1, -2) şi care conţine dreapta $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

4.5.16. Fie punctul M (2, 1, 0) şi planul (P) $2x + 2y + z = 1$. Să se determine:

a) proiecţia lui M pe plan;
b) simetricul lui M faţă de plan;
c) distanţa de la M la (P).

4.5.17. Fie dreapta (d) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ şi planul (P) $2x - y + z = 0$. Să se determine proiecţia dreptei (d) pe planul (P).

4.5.18. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin dreapta $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$ şi care este perpendicular pe planul $x + y + z = 0$.

4.5.19. Calculaţi unghiul pe care îl face dreapta (d) : $\frac{x}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ şi planul $2x+2y-z-3=0$.

4.5.20. Să se determine unghiul dintre planele $x+y+2z=1$, $2x-y+2z=3$.

4.5.21 Să se arate că dreptele (d_1): $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$ şi (d_2): $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{2}$ sunt oarecare în spaţiu şi să se determine distanţa dintre ele.

4.5.22. Să se determine simetricul planului $2x + y - 2z = 1$ faţă de planul $x + y + z = 0$.

§4.6. BIBLIOGRAFIE

4.6.1. Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Curs de algebră, geometrie analitică, geometrie diferenţiaşă şi ecuaţii diferenţiale. Partea I-a, Universitatea Transilvania Braşpv, 1992.

4.6.2. Atanasiu Gh., Munteanu Gh., Postolache M., Algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială şi ecuații diferențiale. Culegere de probleme. Editura ALL, Bucureşti, Ediția I-a, 1994, Ediția a II-a, 1998.

4.6.3. Atanasiu Gh., Lazăr V., Purcaru M., Curs de algebră liniară şi geometrie analitică (pentru colegiu). Universitatea Transilvania, Braşov, 2000.

4.6.4. Simionescu C., Atanasiu Gh., Curs de geometrie analitică, Catedra de Matematică, Universitatea din Braşov, 1976.

Capitolul 5

TRANSLAȚIA ŞI ROTAȚIA REPERULUI CARTEZIAN

În prima parte a cursului, referitoare la algebra liniară, s-a văzut că izometriile pe un spațiu vectorial sunt funcții surjective care păstrează distanța euclidiană ; orice izometrie $f = T \circ S$ unde T este o translație, iar S este transformare ortogonală. În E_3 izometriile de bază sunt rotația, simetria în raport cu un plan, simetria în raport cu un punct şi translația. Fie $f = T \circ S$ o izometrie determinată de reperele $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi $\{O', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$. **Izometria** f se numeşte **pozitivă** (**deplasare**) dacă baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ este orientată pozitiv şi **negativă** (**antideplasare**), în caz contrar. Principalele izometrii pozitive sunt : translațiile, rotațiile şi simetria în raport cu o dreaptă, iar principalele izometrii negative sunt : simetria în raport cu un plan şi simetria în raport cu un punct.

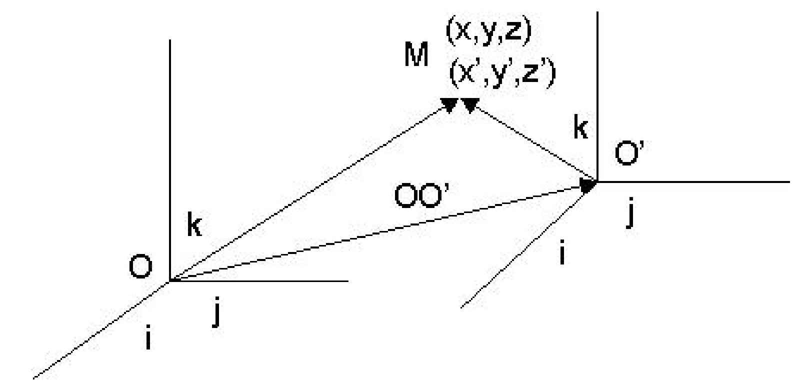
În continuare se vor aborda izometriile pozitive.

Cele mai importante izometrii pozitive, care au aplicabilitate în ceea ce face obiectul acestei cărți, sunt **translația** şi **rotația**. Se va considera spațiul euclidian E_3 şi în acesta, repere ortonormate.

<u>Definiția 5.1.</u> Se numeşte **translație a reperului cartezian** Oxyz de vector liber $\bar{v}$, deplasarea T a reperului R =Oxyz astfel ca axele noului reper R'=O'x'y'z' să fie paralele şi de acelaşi sens cu cele ale reperului Oxyz, iar $\overrightarrow{OO'} \in \bar{v}$.

<u>Observația 5.1.</u> **1)** Translația T de vector $\bar{v}$, duce reperul R =Oxyz=$\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în reperul R'=O'x'y'z'=$\{O', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$, unde $R' = T(R) =$
$= \{O' = T(O); \bar{i}' = T(\bar{i}) = \bar{i}; \bar{j}' = T(\bar{j}) = \bar{j}; \bar{k}' = T(\bar{k}) = \bar{k}\}$.

2) Se vor stabili relațiile între coordonatele (x,y,z) ale unui punct M raportat la reperul R şi coordonatele (x',y',z') ale aceluiaşi punct raportat la reperul R'.



Dacã a,b,c sunt coordonatele punctului O' în R, se observã cã $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, adicã :

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} + x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k} \quad \text{sau}$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (a + x')\bar{i} + (b + y')\bar{j} + (c + z')\bar{k} \ , \quad \text{de unde}$$

$$T: \begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y', \\ z = c + z', \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \\ z' = z - c, \end{cases}$$

care reprezintã **formulele de translație**.

Formulele anterioare rescrise vectorial devin:

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ sau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

numite : **ecuațiile translației** de repere carteziene, T, de vector $\bar{v}(a,b,c)$.

Aceste ecuații admit scrierea matriceală:

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ sau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

de unde se vede că translațiile sunt izometrii pozitive: $T \circ S$, unde S=Id, iar det S=det I_3=1>0.

Caz particular : **Translația în planul (xOy)** este datã de relațiile:

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases}$$

Definiția 5.2. Se numeşte **rotație a reperului cartezian** R=Oxyz, deplasarea S a reperului R, astfel ca O'=O, iar versorii directori ai noului reper R'=O'x'y'z' să se obțină din cei ai reperului inițial R prin intermediul unei transformări liniare ortogonale pozitive.

Observația 5.2. **1)** Printr-o rotație S, reperul $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este dus în reperul $R' = \{O', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$, dat de $R' = \{O' = S(O) = O, \bar{i}' = S(\bar{i}), \bar{j}' = S(\bar{j}), \bar{k}' = S(\bar{k})\}$, unde transformarea asociată $S: V_3 \to V_3$, este un endomorfism ortogonal de determinant pozitiv, deci S produce trecerea de la baza ortonormată B=$\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza ortonormată B '=$\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ din spațiul V_3.

2) Fie în E_3 douã repere ortonormate $R=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ şi $R'=\{O,\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$, care au originea comunã . Fiecare din vectorii $\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'$ pot fi exprimați în funcție de vectorii $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ astfel :

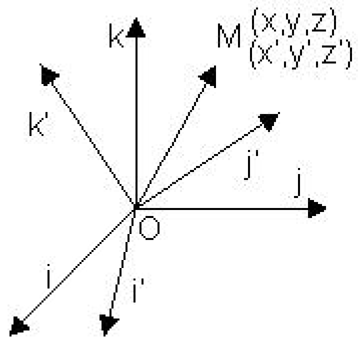
$$\begin{cases} \bar{i}'\equiv S(\bar{i})=\langle\bar{i}',\bar{i}\rangle\bar{i}+\langle\bar{i}',\bar{j}\rangle\bar{j}+\langle\bar{i}',\bar{k}\rangle\bar{k}, \\ \bar{j}'\equiv S(\bar{j})=\langle\bar{j}',\bar{i}\rangle\bar{i}+\langle\bar{j}',\bar{j}\rangle\bar{j}+\langle\bar{j}',\bar{k}\rangle\bar{k}, \\ \bar{k}'\equiv S(\bar{k})=\langle\bar{k}',\bar{i}\rangle\bar{i}+\langle\bar{k}',\bar{j}\rangle\bar{j}+\langle\bar{k}',\bar{k}\rangle\bar{k}, \end{cases}$$

adică, formal, $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})\cdot{}^{T}A=(\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}')$, unde

$A=\begin{pmatrix} \langle\bar{i}',\bar{i}\rangle & \langle\bar{i}',\bar{j}\rangle & \langle\bar{i}',\bar{k}\rangle \\ \langle\bar{j}',\bar{i}\rangle & \langle\bar{j}',\bar{j}\rangle & \langle\bar{j}',\bar{k}\rangle \\ \langle\bar{k}',\bar{i}\rangle & \langle\bar{k}',\bar{j}\rangle & \langle\bar{k}',\bar{k}\rangle \end{pmatrix}$ este matricea transformării ortogonale a izometriei S, adică este matricea de trecere de la baza $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ la baza $\{\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$.

Condiția ca baza B' să fie ortonormată, asemeni bazei B, este echivalentă cu relațiile $A\cdot{}^{T}A={}^{T}A\cdot A=I_3$, adică $A^{-1}={}^{T}A$, deci matricea A este o matrice ortogonală; deoarece S are determinant pozitiv, se obține det A=1.

Rezultã cã trecerea de la baza ortonormatã $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, la baza ortonormatã $\{\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$ se face cu ajutorul matricei ortogonale A, iar trecerea inversã se face cu ajutorul matricei ${}^{T}A$.



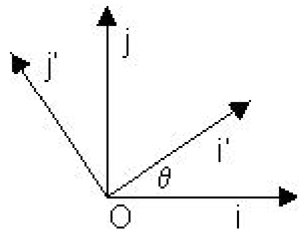
3) Pentru a stabili relația de legãturã între coordonatele x,y,z, ale punctului M raportat la reperul R şi coordonatele x',y',z' ale aceluiaşi punct raportat la reperul R', se observã cã $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$ sau : $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$, de unde se poate scrie matriceal :

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ sau } \quad S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

Invers, se obține : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

<u>Caz particular :</u> **Rotația în plan**.

Fie reperul ortonormat $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ şi fie rotația de unghi θ a acestuia .



Se observã cã : $(\widehat{\bar{i}, \bar{i}'}) = \theta$, $(\widehat{\bar{i}, \bar{j}'}) = 90° + \theta$, $(\widehat{\bar{i}', \bar{j}}) = 90° - \theta$, $(\widehat{\bar{j}, \bar{j}'}) = \theta$.

Dacă se exprimă pe $\bar{i}'$ şi $\bar{j}'$ în funcție de $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, rezultã :

$$S : \begin{cases} \bar{i}' = \bar{i}\cos\theta + \bar{j}\sin\theta , \\ \bar{j}' = -\bar{i}\sin\theta + \bar{j}\cos\theta . \end{cases}$$

Se obține: $\begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix}$, de unde :

$$\begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \end{pmatrix},$$

deci o rotație in planul (xOy) , de unghi θ în jurul originii are formulele date de :

$$S : \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

Din compunerea unei translații şi a unei rotații în plan, rezultã o **roto-translație**, caracterizată de formulele :

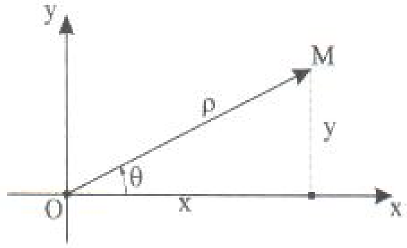
$$T \circ S : \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b \end{cases},$$ unde a ,b sunt coordonatele noii origini .

Capitolul 6

SCHIMBĂRI DE REPERE ÎN PLAN ŞI SPAȚIU

6 §1. Trecerea de la reperul cartezian la cel polar în plan.

Dacă se identifică spațiul euclidian E_2 cu planul (xOy), se defineşte reperul polar în E_2. Orice punct $M(x, y) \in E_2 \setminus \{0\}$ poate fi localizat prin cuplul ordonat (ρ, θ), unde :



- ρ este distanța de la origine la punctul M.
- θ este măsura unghiului dintre semidreptele Ox şi OM.

Definiția 1.1. Numerele reale (ρ, θ) se numesc **coordonatele polare** ale punctului M în plan.

Relația dintre coordonatele polare şi cele carteziene este dată de următoarele formule de trecere de la reperul cartezian la cel polar :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Observația 1.1. Dacă $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, atunci ecuațiile de trecere de la reperul cartezian la cel polar, asigură o corespondență biunivocă

$$(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow (x, y) \in E_2 \setminus \{0\},$$

între mulțimile $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$ şi mulțimea de puncte $E_2 \setminus \{0\}$.

Transformarea inversă care asociază unui punct M de coordonate carteziene (x,y), coordonatele sale polare (ρ, θ),

$$(x, y) \in E_2 \setminus \{0\} \rightarrow (\rho, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$$

este dată de relația:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

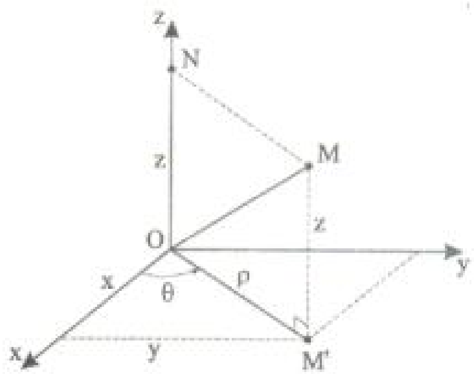
cu unghiul θ dat de relațiile:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

6 §2. Trecerea de la reperul cartezian la cel cilindric în spațiu.

Fie spațiul E_3 raportat la un reper cartezian Oxyz. Orice punct $M(x,y,z) \in E_3 \setminus (Oz)$ este determinat de tripletul ordonat (ρ,θ,z), unde:

- ρ este distanța de la origine la proiecția ortogonală M' a punctului M pe planul (xOy);
- θ este măsura unghiului dintre semidreptele Ox şi OM'.



<u>Definiția 2.1.</u> Numerele reale (ρ,θ,z) se numesc **coordonate cilindrice** ale punctului M în spațiu.

Relația dintre coordonatele cilindrice şi cele carteziene este dată de următoarele formule de trecere de le reperul cartezian la cel cilindric:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

<u>Observația 2.1.</u> **1)** Dacă $(\rho,\theta,z) \in (0,\infty) \times [0,2\pi) \times R$, atunci ecuațiile de trecere de la reperul cartezian la cel cilindric asigură o corespondență biunivocă:

$$(\rho,\theta,z) \in (0,\infty) \times [0,2\pi) \times R \to (x,y,z) \in E_3 \setminus (Oz),$$

între mulțimile $(0,\infty)\times[0,2\pi)\times R$ şi mulțimea de puncte $E_3\setminus(Oz)$.

Transformarea inversă, care asociază unui punct M de coordonate carteziene (x,y,z) coordonatele sale cilindrice (ρ,θ,z),

$$(x,y,z)\in E_3\setminus(Oz)\to(\rho,\theta,z)\in(0,\infty)\times[0,2\pi)\times R$$

dată de relațiile:

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ z=z,\end{cases}$$

cu unghiul θ, dat de relațiile:

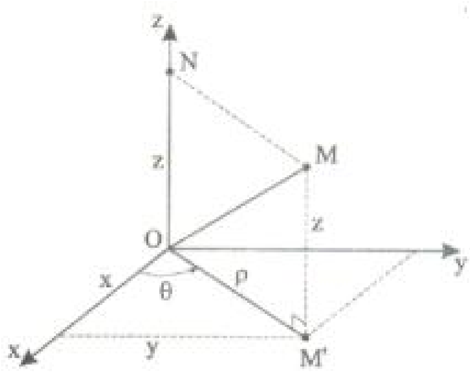
$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}$$

2) Dacă se fixează coordonata $\rho=\rho_0$, se obține un cilindru circular drept cu generatoarele paralele cu axa (Oz), de unde şi denumirea de coordonate cilindrice.

6 §3. Trecerea de la reperul cartezian la reperul sferic în spațiu.

Fie un punct $M\in E_3\setminus(Oz)$, având coordonatele carteziene (x,y,z). Un alt set de coordonate, care caracterizează poziția punctului M în spațiu, este tripletul ordonat (r, φ,θ), unde:

- r reprezintă distanța, d(O,M) dintre origine şi punctul M,
- θ este unghiul dintre semidreptele Ox şi OM', unde M' este proiecția punctului M pe planul (xOy),
- φ este unghiul dintre semidreptele Ox şi OM.



<u>Definiția 3.1.</u> Numerele reale (r,φ,θ) se numesc **coordonatele sferice** ale punctului M în spațiu.

Relațiile dintre coordonatele sferice şi cele carteziene ale punctului sunt date de următoarele formule de trecere de la reperul cartezian la cel sferic:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta\,, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = r\cos\varphi\,. \end{cases}$$

Dacă se consideră (r,φ,θ) $\in (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$, aceste formule asigură o corespondență biunivocă între domeniul specificat şi mulțimea de puncte $E_3 \setminus (Oz)$.

<u>Observația 3.1.</u> **1)** Corespondența anterioară fiind biunivocă rezultă că transformarea inversă, care asociază unui punct M de coordonate carteziene (x,y,z), coordonatele sale sferice (r,φ,θ),

$$(x,y,z) \in E_3 \setminus (Oz) \to (r,\varphi,\theta) \in (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$$

este dată de relațiile:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi = \arccos(\frac{z}{r}), \end{cases}$$

şi unghiul θ este dat de relațiile:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

2) Dacă se fixează $r=r_0$, se obține o sferă cu centrul în origine din care au fost scoşi polii (punctele de intersecție ale acestora cu axa (Oz)), de unde şi denumirea de coordonate sferice.

Capitolul 7

CONICE

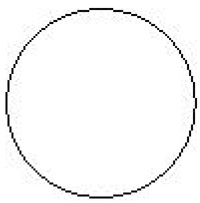
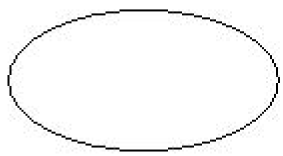
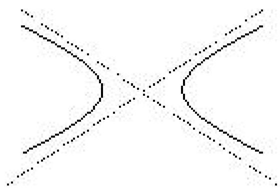
7 §1. Noțiuni generale.

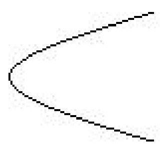
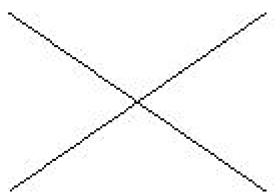
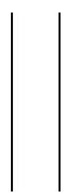
Fie E_2, spațiul punctual euclidian real, bidimensional, raportat la un reper cartezian ortonormat $R\{0,\bar{i},\bar{j}\}$ şi fie funcția :

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33},\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0.$$

Definiția 1.1. Se numeşte **conicã** o mulțime (Γ) de puncte M din planul E_2 , ale cãror coordonate (x,y) , în raport cu reperul R, satisfac ecuația algebricã de gradul al doilea : f(x,y)=0, cu $a_{ij}=a_{ji},\ i\neq j,\ a_{ij}\in\mathbb{R},\ i,j=\overline{1,3}$ numitã ecuația conicei în raport cu reperul R.

Din studiile anterioare sunt cunoscute câteva exemple de astfel de mulțimi de puncte, numite curbe plane de ordinul al doilea, date în urmãtorul tabel :

cerc	elipsă	hiperbolă
		
$x^2+y^2=r^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

parabolă	Pereche de drepte concurente	Pereche de drepte paralele
		

Pereche de drepte confundate	Mulțime cu un singur punct	Mulțimea vidã
		$\emptyset$
$x^2 = 0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$

Una din problemele importante ale geometriei analitice este aceea de a dovedi, cã orice conicã este congruentã cu una din urmãtoarele mulțimi de puncte : cerc, elipsã, hiperbolã, parabolã, pereche de drepte , mulțime care conține un singur punct, sau mulțime vidã, date de tabelul anterior.

Rezolvarea acestei probleme se va face în douã variante : fie folosind elemente din teoria formelor pãtratice, fie folosind schimbarea axelor de coordonate.

Folosind roto-translația , se realizeazã trecerea de la reperul cartezian ortonormat $R=\{0,\bar{i},\bar{j}\}$ la un reper ortonormat adecvat, orientat pozitiv (numit reper canonic sau natural) fațã de care ecuația f(x,y)=0 sã aibã forma cea mai simplã posibilã, numitã **ecuația canonicã** sau **ecuația redusã**.

Dupã cum se va vedea ulterior, în discuție intervin urmã-toarele numere atașate polinomului f(x,y):

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, I=a_{11}+a_{22},$$

cu $a_{ij}=a_{ji}, i\neq j, a_{ij}\in R, i,j=\overline{1,3}$.

Prin trecerea de la reperul R, la reperul canonic , polinomul f(x,y) se schimbã în f(x',y'). Se poate arãta cã numerele Δ',δ',I' atașate polinomului f(x',y') sunt respectiv egale cu numerele Δ,δ,I .

De aceea Δ,δ,I se numesc **invarianții izometrici** sau **ortogonali** ai conicei.

7 §2. Centrul unei conice.

Existã conice $(\Gamma): f(x,y)=0$ care admit un centru de simetrie . Acest centru este de fapt originea reperului canonic . Pentru a gãsi relațiile care conduc la centrul unei conice , se efectueazã o translație :

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Ecuația conicei fațã de sistemul translatat în $C(x_0, y_0)$ va fi: $f(x_0 + x', y_0 + y') = 0$. Dacă se aplică formula lui Taylor pentru funcții de douã variabile , aceastã ecuație se poate scrie :

$$f(x_0 + x', y_0 + y') = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(x'\frac{\partial f}{\partial x_0} + y'\frac{\partial f}{\partial y_0} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 y_0} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} \right) = 0,$$

unde :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_0} = 2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_0} = 2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_{23}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 2a_{11}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0 y_0} = 2a_{12}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = 2a_{22}, \end{cases}$$

dezvoltarea se oprește la derivatele de ordinul al doilea , deoarece toate derivatele de ordin mai mare ca doi sunt nule.

Punctele (x',y') şi (-x',-y') sunt pe curba (Γ) dacă şi numai dacã expresia : $x'\frac{\partial f}{\partial x_0} + y'\frac{\partial f}{\partial y_0}$ este identic nulã , adicã dacã şi numai dacã punctul (x_0, y_0) satisface relațiile: $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$.

De aceea, dacã o conicã (Γ) are centru, atunci coordonatele centrului sunt în mod necesar soluția sistemului :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este :

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Dacã $\delta \neq 0$, atunci sistemul are solutie unicã şi deci (Γ) admite centru de simetrie (cerc, elipsã, hiperbolã, pereche de drepte concurente, punct). În acest caz, ecuația conicei redusã la centru este :

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + f(x_0, y_0) = 0$$

<u>Semnificația invariantului Δ</u> . Se va determina constanta $f(x_0, y_0)$ pentru cazul în care $\delta \neq 0$. Se poate scrie :

$$f(x_0, y_0) = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_0 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_0 +$$
$$+ (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}).$$

Rezultã cã : $f(x_0, y_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$.

Sistemul $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} - f(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$ de trei ecuații cu douã necunoscute este compatibil dacã determinantul caracteristic este nul , adicã : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -(a_{33} - f(x_0, y_0)) \end{vmatrix} = 0$.

Acesta se poate scrie :

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de unde:}$$

$f(x_0 y_0) = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Astfel ecuația redusã la centru este :

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Dacã Δ=0 , ecuația redusã devine :

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0.$$

În cazul : $\delta < 0$ (discriminantul ecuației este pozitiv), aceastã ecuație reprezintã douã drepte care trec prin centrul conicei.

Dacă : $\delta > 0$, ecuația reprezintã mulțimea {(0,0)}.

În cazul : $\delta \neq 0, \Delta = 0$, conica este degeneratã în douã drepte sau într-un punct.

Dacã $\Delta \neq 0$, conica este nedegeneratã (cerc, elipsã, hiperbolã, parabolã, mulțime vidã).

Observația 2.1.

1) Numãrul Δ - numit determinantul mare al conicei , determinã **natura conicei** , adicã: nedegeneratã sau degeneratã;

2) Numãrul δ - numit determinantul mic al conicei, determinã **genul conicei** astfel :

a) dacã $\delta > 0$ (elipsã, mulțime vidã) , conica se numeşte de gen eliptic;

b) dacã $\delta < 0$ (hiperbolã, pereche de drepte concurente), conica se numeşte de gen hiperbolic;

c) dacã $\delta = 0$ (parabolã , drepte paralele sau confundate), conica se numeşte de gen parabolic .

Dacă se face un rezumat al celor expuse anterior , se pot trage concluziile date în tabelul urmãtor :

Condiții	Curba
$\Delta = 0,\ \delta > 0$	$(\Gamma) = \{(x_0, y_0)\}$,(punct dublu).

$\Delta = 0$, $\delta = 0$	$(\Gamma) = d_1 \cup d_2$, unde (d_1) şi (d_2) sunt drepte paralele sau confundate, sau $\Gamma = \varnothing$.
$\Delta = 0$, $\delta < 0$	$(\Gamma) = d_1 \cup d_2$, (d_1) şi (d_2) sunt drepte concurente. Dacă I=0 rezultă $(d_1) \perp (d_2)$.
$\Delta \neq 0$, $\delta > 0$, $I \cdot \Delta < 0$	Elipsă.
$\Delta \neq 0$, $\delta > 0$, $I \cdot \Delta > 0$	$(\Gamma) = \varnothing$.
$\Delta \neq 0$, $\delta = 0$	Parabolă.
$\Delta \neq 0$, $\delta < 0$	Hiperbolă şi dacă I=0 se obține, hiperbolă echilateră.

7 §3. Reducerea la forma canonicã a ecuației unei conice.

Fie conica :

$(\Gamma): a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Se urmăreşte ca printr-o schimbare de reper, ce constă dintr-o rotație compusă cu o translație, să se obțină reperul canonic al conicei (Γ).

În continuare se va descrie modul în care se află ecuațiile schimbării de reper (de coordonate), determinate de matricea rotației şi vectorul de translație.

Pentru stabilirea ecuației canonice se au în vedere urmã-toarele situații:

1) Dacã $a_{12} = 0$, atunci se face o translație. Aceasta se determină diferit, după cum conica este cu centru sau nu. În primul caz, originea se mută în centrul C al conicei, deci translație de vector $\overline{OC}$, în al doilea caz, ecuațiile translației se determină dacă se efectuează restrângeri de pătrate şi/sau grupări de termeni liberi.

2) Dacã $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întâi o rotație. În acest caz se poate proceda fie ca în §3.1., fie ca în §3.2.

7 §3.1. Metoda valorilor proprii.

Se ataşază ecuației conicei (Γ), forma pătratică:

$\varphi(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Matricea acestei forme pătratice este : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Din ecuaţia caracteristică : $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$ se determinã rãdãcinile λ_1, λ_2, care sunt reale şi distincte .

Dacã :

1) λ_1, λ_2 au semne contrare , adicã $\delta < 0$, conica este de gen hiperbolic;

2) λ_1, λ_2 au acelaşi semn , adicã $\delta > 0$, conica este de gen eliptic;

3) Una din rãdãcini este zero , atunci conica este de gen parabolic.

Din sistemele : $\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)u_i + a_{12}v_i = 0, \\ a_{21}u_i + (a_{22} - \lambda_i)v_i = 0, \ i = 1,2, \end{cases}$

se determinã pentru fiecare valoare proprie, componentele vectorilor proprii (u_1, v_1) şi (u_2, v_2) care sunt ortogonali (deoarece matricea A este realã şi simetricã). Vectorii proprii , astfel gãsiţi se normeazã şi se noteazã cu $\bar{e}_1$, respectiv $\bar{e}_2$.

Fie R, matricea formatã cu componentele vectorilor $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$ aşezate pe coloane, având în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre vectorii $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$ prin opusul sãu , astfel ca det R =+1.

Pentru a simplifica alegerea valorilor proprii se poate folosi regula : $\operatorname{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2) = \operatorname{sgn} a_{12}$, în acest fel componentele vectorului $\bar{e}_1$ vor fi pozitive , iar prima componentã a vectorului $\bar{e}_2$ se va lua negativã, astfel : det R =+1.

Rotaţia: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, reduce forma pãtraticã: $\varphi(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{22}y^2$ la forma sa canonicã $\varphi'(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

Versorii proprii $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ dau direcţiile noilor axe (0x'), respectiv (0y').

Prin înlocuirea necunoscutelor x şi y cu expresiile lor din formulele de rotaţie , ecuaţia conicei devine :

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0.$$

Dacă se grupează termenii în x' şi respectiv y' şi se restrâng pătratele, rezultă: $\lambda_1(x'+...)^2+\lambda_2(y'+...)^2+a=0$ şi prin efectuarea translației: X=x'+... şi Y=y'+... se obține ecuația canonică: $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+a=0$.

<u>Exemplu</u> : Sã se reducã la forma canonicã şi sã se reprezinte grafic conica : (Γ) : $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

Matricea formei patratice: $\varphi(x,y)=5x^2+4xy+8y^2$ este: A= $=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$.

Ecuația caracteristicã este :

$P(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-13\lambda+36=0$ care are rãdãcinile 4 şi 9 .

Dacă se ține cont de regula $\operatorname{sgn}(\lambda_1-\lambda_2)=\operatorname{sgn} a_{12}$, rezultă că : $\lambda_1=9; \lambda_2=4$.

Sistemul $\begin{cases}(5-\lambda_i)x_1+2x_2=0\\ 2x_1+(8-\lambda_i)x_2=0,\ i=1,2\end{cases}$ determinã componentele vectorilor proprii.

Pentru $\lambda_1=9$ se obține sistemul : $\begin{cases}-4x_1+2x_2=0\\ 2x_1-x_2=0\end{cases}$, adicã $x_2=2x_1$, rezultă: $\bar{v}_1(1,2)$.

Pentru $\lambda_2=9$ se obține sistemul: $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ 2x_1+4x_2=0\end{cases}$, adicã : $x_1=-2x_2$, rezultă: $\bar{v}_2(-2,1)$.

Se obțin: $\bar{e}_1=\frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)$ şi $\bar{e}_2=\frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|}=\left(\frac{-2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)$.

Matricea de rotație R = $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, cu det R=+1.

Rotația: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dã : $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y'). \end{cases}$

Prin înlocuire în ecuația conicei se obține :

$$(\Gamma):\ 9x'^2+4y'^2-\frac{32}{\sqrt{5}}(x'-2y')-\frac{56}{\sqrt{5}}(2x'+y')+80=0, \text{adică}$$

$$(\Gamma):\ 9x'^2-\frac{144}{\sqrt{5}}x'+4y'^2+\frac{8}{\sqrt{5}}y'+80=0.$$

Prin adunarea şi scăderea termenilor necesari pentru completarea pãtratelor perfecte se obține:

$$(\Gamma):\ 9\left(x'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}x'+\frac{64}{5}\right)-\frac{576}{5}+4\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{5}\right)-\frac{4}{5}+80=0, \text{adică}$$

$$(\Gamma):\ 9\left(x'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-36=0.$$

Dacă se face translația : $X=x'-\frac{8}{\sqrt{5}}, Y=y'+\frac{1}{\sqrt{5}}$, se obține forma canonicã : (Γ): $9X^2+4Y^2-36=0$ sau (Γ): $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}-1=0$, deci (Γ) este o elipsă reală.

Pentru a reprezenta grafic această elipsã se ține cont de faptul cã direcțiile axelor (0x') şi (0y') sunt date de $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, apoi se efectueazã translația anterioarã în punctul $C(\frac{8}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$ şi se gãsesc axele (CX) şi (CY), unde C este centrul conicei.

7 §3.2. Metoda roto-translației.

Se poate determina rotația sistemului de coordonate şi în alt mod, aflând unghiul θ cu care se roteşte reperul dat.

Matricea R a schimbării de bază (ce duce versorii reperului inițial în cei ai reperului rotit) este o matrice ortogonalã de determinant +1. Bazele fiind ortonormate, coeficienții noilor versori sunt exact cosinuşii directori ai direcțiilor lor, deci:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Folosind acest fapt, următoarea teoremă permite determinarea matricii de rotație prin intermediul unghiului de rotație θ.

Teorema 3.1 : Fie conica cu centru $(\Gamma): f(x,y)=0$, astfel încât în ecuația conicei să fie îndeplinită condiția $a_{12} \neq 0$ (deci apare monomul xy). Atunci, dacă se efectuează rotația reperului inițial (xOy)$\to$(x'Oy') cu unghiul θ ce satisface ecuația:

(1) $(a_{11} - a_{22})\sin 2\theta = 2a_{12}\cos 2\theta$,

ecuația conicei în sistemul rotit (Γ): $f'(x',y')=0$ nu mai conține monomul x'y'.

Demonstrație: Dacă se înlocuiesc x şi y din relațiile care determinã rotația, coeficientul lui x'y' din ecuația $f'(x',y')=0$ este: $(a_{22} - a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta$ şi dacă se pune condiția ca el sã se anuleze , se obține relația: $(a_{11} - a_{22})\sin 2\theta = 2a_{12}\cos 2\theta$. Astfel, teorema este demonstratã.

Relația anterioarã este echivalentã cu : $\mathrm{tg} 2\theta = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$ şi dacă se impune condiția ca unghiul de rotație să fie în intervalul $(0, \pi]$ se obține $2\alpha \le \pi$ şi deci $\sin 2\alpha > 0$. □

Teorema 3.2 : Fie conica fără centru $(\Gamma): f(x,y)=0$, astfel încât în ecuația conicei să fie îndeplinită condiția $a_{12} \neq 0$. Atunci dacă se efectuează rotația (xOy)$\to$(x'Oy') cu unghiul θ ce satisface ecuația:

(2) $\quad \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}$,

ecuația conicei în sistemul rotit nu va mai conține monomul x'y'.

Demonstrație: Dacă se foloseşte $\delta \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, se verifică echivalența formulelor (1) şi (2). □

Observația 3.1. După aplicarea rotației, reperul canonic se obține printr-o translație, fie se restrâng pătratele şi/sau se grupează termenii liniari rămaşi, ori se translatează originea O în centrul conicei.

Exemplu: Sã se stabilească natura şi genul conicei (Γ): $9x^2-6xy+y^2+20x=0$ şi sã se reducã la forma canonicã, folosind metoda roto-translației .

Soluție:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100 \qquad \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ deci conica este o

parabolã nedegeneratã .

Din $\operatorname{tg}2\theta = \dfrac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$ rezultã $\operatorname{tg}2\theta = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ sau $\dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \dfrac{3}{4}$;

$3\operatorname{tg}^2\theta - 8\operatorname{tg}\theta + 3 = 0$ cu soluțiile : $\operatorname{tg}\theta = 3$; $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{1}{3}$.

Dacă se considerã cã rotația se face în sens pozitiv (trigonometric) şi cã $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ rezultã $\operatorname{tg}\theta = 3$.

Dacă se ține cont cã : $\sin\theta = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$

cu $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ rezultã cã: $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, cu ajutorul cãrora se obține rotația :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'), \end{cases} \quad \text{cu matricea } R = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Dacă se înlocuiesc în ecuația conicei , se obține:

$y'^2+\frac{2}{\sqrt{10}}x'-\frac{6}{\sqrt{10}}y'=0$ şi se completează pãtratul rezultã :

$\left(y'-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2=-\frac{2}{\sqrt{10}}x'+\frac{9}{10}$ sau $\left(y'-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2=-\frac{2}{\sqrt{10}}\left(x'-\frac{9}{2\sqrt{10}}\right)$ şi dacă se face translația : $X=x'-\frac{9}{2\sqrt{10}}, Y=y'-\frac{3}{\sqrt{10}}$ rezultă : $Y^2=-\frac{2}{\sqrt{10}}X$.

Se observã din matricea R cã :

$\overline{e}_1\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ şi $\overline{e}_2\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, care dau direcțiile noilor axe.

Deoarece X trebuie sã fie negativ , ramurile parabolei sunt îndreptate invers sensului pozitiv al axei (VX).

7 §4. Intersecția unei conice cu o dreaptă.

Fie o dreaptã (d) determinatã de un punct $P_0(x_0,y_0)$ şi o direcție $\overline{e}(r,s)$, cu ecuațiile parametrice: $\begin{cases} x=x_0+rt \\ y=y_0+st \end{cases}, t\in R$ şi o conicã (Γ) de ecuație :

$$(\Gamma):\quad f(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Intersecția dintre dreaptă şi conicã conduce la sistemul:

$$\begin{cases} x = x_0 + rt, \\ y = y_0 + st, \\ f(x,y) = 0, \end{cases}$$

care, prin eliminarea lui x şi y, conduce la ecuația de gradul II în "t":

$$t^2\left(a_{11}r^2 + 2a_{12}rs + a_{22}s^2\right) + t\left[r\left(2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13}\right) + s\left(2a_{12}x_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2a_{22}y_0 + 2a_{23}\right)\right] + f\left(x_0, y_0\right) = 0,$$

adicã: $\varphi(r,s)t^2 + \left(r\dfrac{\partial f}{\partial x_0} + s\dfrac{\partial f}{\partial y_0}\right)t + f\left(x_0, y_0\right) = 0$, sau

(1) $\quad \varphi(r,s)t^2 + \left(rf_{x_0} + sf_{y_0}\right)t + f\left(x_0, y_0\right) = 0$, unde s-a notat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = f_{x_0}; \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = f_{y_0}.$$

În funcție de natura rădăcinilor ecuației (1) se deosebesc cazurile:

1) Dacă $\varphi(r,s) \neq 0$. Atunci ecuația (1) este de gradul doi cu discriminantul $q = \left(rf_{x_0} + sf_{y_0}\right)^2 - 4\varphi(r,s) \cdot f\left(x_0, y_0\right)$.

Dacã q>0 , atunci ecuația are douã rãdãcini distincte t_1, t_2, deci dreapta (d) taie pe (Γ) în douã puncte distincte P_1, P_2, adicã este secantã.

Dacã q=0 , atunci ecuația are douã rãdãcini reale confundate $t_1 = t_2$, deci dreapta taie conica (Γ) în douã puncte confundate $P_1 \equiv P_2$ şi se numeşte tangentă la (Γ) în punctul P_1. Evident, din orice punct $P_0 \notin (\Gamma)$ se pot duce cel mult douã tangente la (Γ) .

În particular, dacã $P_0 \in (\Gamma)$ şi f_{x_0}, f_{y_0} nu se anuleazã simultan, se observã cã tangenta la (Γ) în P_0 are ecuația :

(2) $\quad \left(x - x_0\right)f_{x_0} + \left(y - y_0\right)f_{y_0} = 0$,

deoarece în acest caz : $f(x_0,y_0)=0; q=0$, adicã $rf_{x_0}+sf_{y_0}=0$, în care înlocuind pe $r=\frac{x-x_0}{t}; s=\frac{y-y_0}{t}$ se obține ecuația:
$(x-x_0)f_{x_0}+(y-y_0)f_{y_0}=0$.

Dacã în aceastã ecuație se înlocuiesc f_{x_0}, f_{y_0}, se obține ecuația:
$a_{11}xx_0+a_{12}(x_0y+y_0x)+a_{22}yy_0+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0$, care reprezintã ecuația tangentei la conicã într-un punct $P_0\in(\Gamma)$ obținutã prin dedublare din ecuația conicei.

Dacã q<0 , atunci ecuația (1) nu are soluții în R şi deci dreapta (d) nu taie conica (Γ) .

2) Fie $\varphi(r,s)=0$. Ecuația (1) este de gradul întâi. Dacã $rf_{x_0}+sf_{y_0}\neq 0$, atunci se obține o soluție unicã t_1 şi deci (d) taie pe (Γ) într-un singur punct P_1. Dacã $rf_{x_0}+sf_{y_0}=0$ şi $f(x_0,y_0)\neq 0$, atunci ecuația (1) este imposibilã şi deci (d) nu taie pe (Γ) . Dacã $rf_{x_0}+sf_{y_0}=0$, şi $f(x_0,y_0)=0$, atunci ecuația (1) este identic satisfãcutã şi deci dreapta are o infinitate de puncte comune cu (Γ), rezultã $(d)\subseteq(\Gamma)$.

Fie (Γ) o conicã nedegeneratã şi $\overline{e}(r,s)$ o direcție în planul conicei.

<u>**Definiția 4.1.**</u> Direcția $\overline{e}(r,s)$ se numeşte **direcție asimptoticã** pentru conica (Γ) dacã :

(3) $\varphi(r,s)\equiv a_{11}r^2+2a_{12}rs+a_{22}s^2=0$

În virtutea discuției de mai sus, este evident cã o dreaptã care are o direcție asimptoticã taie conica nedegeneratã într-un singur punct sau nu o intersecteazã.

Se obțin cazurile:

1) Dacã $\delta<0, \Delta\neq 0$ (hiperbolã) , atunci ecuația $\varphi(r,s)=0$ are douã rãdãcini reale şi distincte, deci conica admite douã direcții asimptotice.

2) Dacã $\delta > 0, \Delta \neq 0$ (elipsã) , atunci ecuația φ(r,s)=0 nu admite soluții reale, nebanale, deci conica nu are direcții asimptotice.

3) Dacã $\delta = 0, \Delta \neq 0$ (parabolã) , atunci ecuația φ(r,s) =0 are o rădăcină dublă şi deci conica are o singură direcție asimptoticã, care este de fapt direcția axei parabolei.

<u>**Definiția 4.2.**</u> O dreaptã (d) se numeşte **asimptotã** a unei conice nedegenerate (Γ), dacã direcția ei este asimptoticã şi $(d) \cap (\Gamma) = \phi$.

<u>Observația 4.1.</u> Dacã o dreaptã (d) are direcția $\overline{e}(r,s)$, atunci panta acesteia va fi m=$\frac{s}{r}$.

În acest fel ecuația (3) se transformã în :

(3') $\quad a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$,

care dã pantele asimptotelor unei conice.

Din cele prezentate mai sus, rezultã cã este adevãratã urmãtoarea teoremã:

<u>**Teorema 4.1.**</u> O asimptotã a unei conice nedegenerate (Γ) este caracterizatã analitic prin ecuația $rf_x + sf_y = 0$, unde $\overline{e}$(r,s) este o direcție asimptoticã pentru (Γ).

<u>Observația 4.2.</u>

1) Hiperbola are douã asimptote care trec prin centrul conicei. În acest caz , dacã $\left(x_0, y_0\right)$ este centrul conicei şi m_1, m_2 sunt pantele asimptotelor , ecuațiile acestora se pot scrie şi sub forma :

$y - y_0 = m_1\left(x - x_0\right)$, respectiv $y - y_0 = m_2\left(x - x_0\right)$.

2) Elipsa nu admite nici o direcție asimptoticã şi în consecințã nu are asimptote.

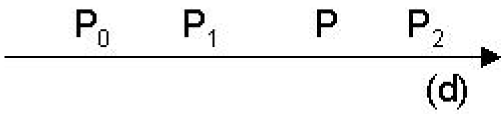
3) Parabola admite o direcție asimptoticã, pentru care, ecuația $rf_x + sf_y = 0$ este imposibilã şi deci parabola nu are asimptotã.

7 §5. Pol şi polarã.

Fie dreapta (d) : $\begin{cases} x = x_0 + rt, \\ y = y_0 + st, \, t \in R, \end{cases}$ orientatã prin vectorul director $\overline{v}(r,s)$ şi P,Q douã puncte pe aceastã dreaptã.

Definiția 5.1. Numãrul ρ_{PQ} definit prin $\overline{PQ} = \rho_{PQ} \frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|}$ se numeşte **mãrimea relativã** a segmentului [PQ].

Se considerã cã pe dreapta (d) au fost fixate patru puncte $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P(x, y), P_2(x_2, y_2)$, corespunzãtoare valorilor t_0, t_1, t, t_2 ale parametrului t .



Definiția 5.2. Se numeşte **biraport** al punctelor P_0, P, P_1, P_2

numãrul: $\left[P_0, P;\, P_1, P_2\right] = \frac{\rho_{P_0P_1}}{\rho_{P_1P}} : \frac{\rho_{P_0P_2}}{\rho_{P_2P}} = \frac{t_1 - t_0}{t - t_1} : \frac{t_2 - t_0}{t - t_2}$.

Dacã $\left[P_0, P;\, P_1, P_2\right] = -1$, atunci biraportul se numeşte **biraport armonic** sau **diviziune armonicã** şi se spune cã perechea de puncte (P_0, P) este conjugatã armonic fațã de perechea (P_1, P_2), sau invers.

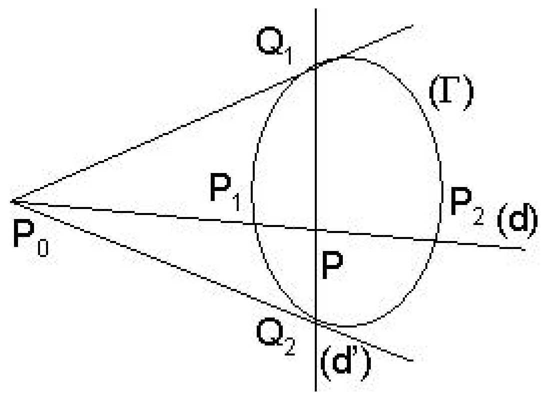
Având în vedere definiția biraportului, în cazul diviziunii armonice se obține:

$$\frac{t_1 - t_0}{t - t_1} + \frac{t_2 - t_0}{t - t_2} = 0.$$

Dacã se presupune cã punctul P_0 este luat drept origine pe (d), adicã : $t_0 = 0$, atunci diviziunea armonicã este caracterizatã prin :

$$\frac{2}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}.$$

Fie (Γ) o conică nedegenerată, de ecuație generală: f(x,y)=0. Dacã $P_0(x_0,y_0)$ este un punct dat, atunci fie (d) : $x = x_0 + rt$, $y = y_0 + st$, $t \in R$ o dreaptã care trece prin P_0 şi taie (Γ) în douã puncte $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$.



<u>Teorema 5.1.</u> Locul geometric al punctului P conjugatul armonic al lui P_0 în raport cu P_1,P_2, atunci când direcția $\bar{v}(r,s)$ a lui (d) variazã , este o parte din dreapta (d') de ecuație :

(1) $a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0$.

<u>Demonstrație:</u> **1)** Se admite mai întâi cazul când $P_0 \notin (\Gamma)$. Prin ipotezã, dacă se intersectează dreapta (d) cu conica (Γ) se obțin punctele P_1 şi P_2 corespunzãtoare valorilor t_1 şi t_2 care sunt rãdãcinile ecuației :

(2) $\varphi(r,s)t^2 + \left(rf_{x_0} + sf_{y_0}\right)t + f(x_0,y_0) = 0$.

Din ecuația de mai sus , rezultã :

$$\frac{t_1 + t_2}{t_1t_2} = -\frac{rf_{x_0} + sf_{y_0}}{f(x_0,y_0)}.$$

Pe de altã parte , ştiind cã diviziunea armonicã este caracterizatã de : (3) $\frac{2}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$, rezultã $\frac{2}{t} = -\frac{rf_{x_0} + sf_{y_0}}{f(x_0,y_0)}$.

Pentru a se obține ecuația locului geometric cãutat se eliminã parametrii t,r,s între ecuația precedentã şi ecuațiile dreptei (d) şi se obține :

$\left(x-x_0\right)f_{x_0}+\left(y-y_0\right)f_{y_0}=-2f\left(x_0,y_0\right)$, care este de fapt ecuaţia din teoremã.

2) Dacă $P_0\in(\Gamma)$ se obţine $f\left(x_0,y_0\right)=0$. Atunci $P_1\equiv P_2$ şi cum $P_2\in(\Gamma)$ rezultă că $P\equiv P_0$. Într-adevăr cum $f\left(x_0,y_0\right)=0$, din ecuaţia (2) se obţine: $t_1\cdot t_2=0$. Din (3) se obţine: $\frac{t}{2}=\frac{t_1\cdot t_2}{t_1+t_2}=0$, rezultă t=0. Aceasta înseamnă că, conjugatul armonic al lui P_0 este el însuşi oricare ar fi direcţia $\overline{v}$ a dreptei (d) şi deci locul geometric al lui P este tangenta în P_0 la conica (Γ) . □

<u>Definiţia 5.3.</u> Dreapta (d') se numeşte **polara** punctului P_0 în raport cu conica (Γ) , punctul P_0 se numeşte **polul** dreptei (d') în raport cu conica (Γ), iar ecuaţia (1) este **ecuaţia carteziană a polarei.**

<u>Observatia 5.1.</u>

1) Poziţia dreptei (d') faţã de conica (Γ) depinde de poziţia punctului P_0 faţã de (Γ) (şi invers).

2) Substituţiile $x^2\to xx_0$, $y^2\to yy_0$, $xy\to\frac{1}{2}\left(xy_0+x_0y\right)$, $x\to\frac{1}{2}\left(x+x_0\right)$, $y\to\frac{1}{2}\left(y+y_0\right)$ se numesc dedublãri.

Prin dedublarea ecuaţiei de gradul al doilea :

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ în punctul $P_0\left(x_0,y_0\right)$ se înţelege ecuaţia de gradul întâi:

$$a_{11}xx_0+a_{12}\left(xy_0+x_0y\right)+a_{22}yy_0+a_{13}\left(x+x_0\right)+a_{23}\left(y+y_0\right)+a_{33}=0,$$

care mai poartă denumirea de: ecuaţia dedublată a conicei şi reprezintã ecuaţia polarei punctului P_0 faţã de conica (Γ), sau ecuaţia tangentei la conicã, dacã $P_0\in(\Gamma)$.

3) Pentru determinarea polului unei drepte (d) : ax+by+c=0 în raport cu o conicã (Γ), se pune condiţia ca dreptele (d) şi (d') sã coincidã , adicã cele douã ecuaţii sã aibã coeficienţii proporţionali , adicã :

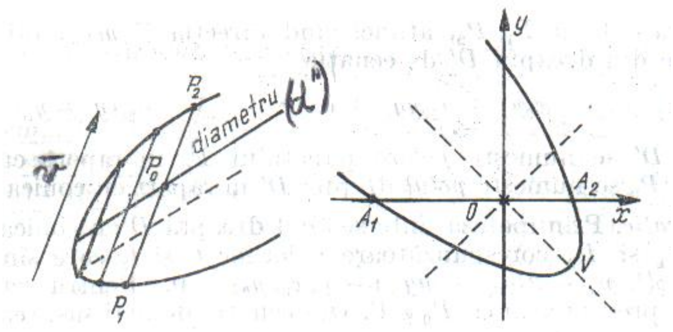
$$\frac{a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}}{a}=\frac{a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}}{b}=\frac{a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}}{c},$$
sistem din care se determină coordonatele x_0, y_0 ale polului.

7 §6. Diametrul conjugat cu o direcție dată.

Fie conica (Γ) şi o direcție $\bar{v}(r,s)$.

Teorema 6.1. Locul geometric al mijloacelor corzilor conicei (Γ) paralele cu direcția $\bar{v}(r,s)$ este o parte a dreptei (d") de ecuație (d") : $rf_x+sf_y=0$.

Demonstrație : Dreapta care trece printr-un punct $P_0(x_0,y_0)$ şi este paralelă cu $\bar{v}(r,s)$ are ecuațiile: $\begin{cases} x=x_0+rt, \\ y=y_0+st, \ t\in R. \end{cases}$



Prin ipoteză această dreaptă intersectează conica (Γ) în două puncte: $P_1(x_1=x_0+rt_1, y_1=y_0+st_1)$ şi $P_2(x_2=x_0+rt_2, y_2=y_0+st_2)$, unde t_1, t_2 sunt soluțiile ecuației :

$$t^2\varphi(r,s)+t\left(rf_{x_0}+sf_{y_0}\right)+f\left(x_0,y_0\right)=0.$$

Mijlocul segmentului $[P_1, P_2]$ are coordonatele: $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0+r\frac{t_1+t_2}{2}$; $\frac{y_1+y_2}{2}=y_0+s\frac{t_1+t_2}{2}$ şi acest punct coincide cu P_0 dacă şi numai dacă $t_1+t_2=0$, adică $rf_{x_0}+sf_{y_0}=0$. Deoarece punctul P_0 a fost ales arbitrar, se pot renota coordonatele lui, prin x şi y deci teorema este demonstrată. □

Definiția 6.1. Dreapta (d"): $rf_x + sf_y = 0$ se numeşte **diametrul conjugat direcției** $\overline{v}$ pentru conica (Γ).

Consecința 6.1. **1)** Fie (Γ): f(x,y)=0 o conică cu centru ($\delta \neq 0$), adică totdeauna sistemul $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ are soluție unică (coordonatele centrului conicei). Dacă se are în vedere ecuația diametrului conjugat , rezultă că centrul conicei (Γ) se află pe diametrul conjugat oricărei direcții din plan. În acest caz, diametrul conjugat oricărei direcții din plan aparține unui fascicol de drepte ce trece prin centrul conicei.

2) Fie (Γ): f(x,y)=0 o conică fără centru, ($\delta = 0$). Din $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, rezultă: $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \overset{not.}{=} \mu$.

Dar $f_y = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23}$, astfel încât $f_y = \alpha f_x + \beta, \alpha, \beta \in R$. Atunci, ecuația diametrului conjugat direcției $\overline{v} = r\overline{i} + s\overline{j}$ devine:

$rf_x + s(\alpha f_x + \beta) = 0$ sau $f_x + \lambda = 0$ unde $\lambda = \frac{s\beta}{r + s\alpha} \in R$.

Această ecuație arată că , în acest caz, diametrele conjugate oricăror direcții din plan, aparțin unui fascicol de drepte paralele. Direcția acestui fascicul este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{21})$.

Evident, axa de simetrie a parabolei este un diametru şi are deci direcția anterioarã.

3) Fie (Γ)o conică cu centru ($\delta \neq 0$) şi se notează cu $\overline{v}_0(r_0, s_0)$ direcția diametrului de ecuație $rf_x + sf_y = 0$, conjugat direcției $\overline{v}(r,s)$.

Direcția $\overline{v}_0(r_0, s_0)$ satisface relația: $\frac{r_0}{ra_{12} + sa_{22}} = \frac{s_0}{-(ra_{11} + sa_{12})}$ sau

$$(1) \quad a_{11}rr_0 + a_{12}(rs_0 + r_0s) + a_{22}ss_0 = 0,$$

care este de fapt dedublarea relației $\varphi(r,s) = 0$ şi reprezintã relația dintre direcțiile a doi diametri conjugați.

Dacă se consideră $m = \frac{s}{r}$, panta dreptei de direcție (r,s) , relația devine:

(2) $a_{22}mm_0 + a_{12}(m+m_0) + a_{11} = 0$, care reprezintã relația dintre pantele a doi diametri conjugați.

<u>Definiția 6.2.</u> O pereche de diametri ale cãror direcții sunt în relația (1) se numesc **diametri conjugați unul altuia**.

<u>7§7. Direcții principale. Axele unei conice.</u>

Se considerã o conicã (Γ): f(x,y)=0 , o direcție $\overline{v}(r,s)$ şi diametrul conjugat acestei direcții : $rf_x + sf_y = 0$.

<u>Definiția 7.1.</u> Direcția $\overline{v}(r,s)$ se numeşte **direcție principalã** pentru conica (Γ): f(x,y)=0, dacã este perpendicularã pe direcția diametrului său conjugat: $rf_x + sf_y = 0$.

<u>Teorema 7.1.</u> Diametrul conjugat unei direcții principale este o axã de simetrie a conicei şi, invers, o direcție perpendicularã pe o axã de simetrie este o direcție principalã a conicei.

<u>Demonstratie</u>: Diametrul conjugat unei direcții principale conține mijloacele corzilor conicei (Γ), care sunt perpendiculare pe diametru. Astfel, acest diametru este o axã de simetrie. Reciproca este evidentã (deoarece axa de simetrie este un diametru). □

<u>Observația 7.1.</u> **1)** Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica (Γ) poate să fie cerc, elipsã, hiperbolã sau pereche de drepte concurente (dacă e degeneratã).

Fie $\overline{v}(r,s)$ o direcție principală a conicei (Γ), iar $\overline{v}_0(r_0,s_0)$ direcția diametrului său conjugat, care este o axã de simetrie a conicei (conform teoremei de mai sus). Atunci se obține sistemul:

$$\begin{cases} rr_0 + ss_0 = 0, \\ a_{11}rr_0 + a_{12}(rs_0 + r_0 s) + a_{22}mm_0 = 0. \end{cases}$$

Dacă se elimină r_0, s_0 între cele două ecuații, se obține ecuația care dă direcțiile axelor conicei:

(1) $(a_{11} - a_{22})rs + a_{12}(s^2 - r^2) = 0$.

Dacă se scriu ecuațiile diametrilor conjugați acestor direcții, sau ecuațiile dreptelor care trec prin centrul conicei (Γ)şi au aceste direcții , se obține unul şi acelaşi lucru, anume: ecuațiile axelor.

Din ecuația (1) , fãcând înlocuirea $m=\frac{s}{r}$, se obține :

(1') $\quad a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=0$,

ecuație care determinã pantele axelor.

2) Fie $\delta=0,\Delta\neq 0$ (parabolã) . Anterior s-a vãzut cã direcția axei parabolei este $(a_{12},-a_{11})$ sau $(a_{22},-a_{21})$. Direcția perpendicularã pe axã este (a_{11},a_{12}) sau (a_{21},a_{22}). De aici rezultã cã ecuația axei parabolei este: $a_{11}f_x+a_{12}f_y=0$ sau $a_{21}f_x+a_{22}f_y=0$, adicã diametrul conjugat direcției (a_{11},a_{12}) sau (a_{21},a_{22}) .

<u>Definiția 7.2.</u> Intersecția conicei cu axele (axa) sunt puncte numite **vârfurile conicei**.

<u>7 §8. Conice prin condiții inițiale.</u>

<u>Teorema 8.1.</u> O conicã este determinatã în general prin cinci condiții inițiale.

<u>Demonstrație</u> : Ecuația generalã a unei conice :

$(\Gamma): a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ se mai poate scrie sub forma :

$x^2+mxy+ny^2+px+qy+r=0$,

dacã se noteazã coeficienții ce se obțin dupã împãrțirea ecuației prin $a_{11}\neq 0$ cu m, n, p, q, r .

Ecuația anterioarã este determinatã atunci când se cunosc coeficienții: m, n, p, q, r . Dar, pentru a determina aceşti cinci coeficienți, sunt necesare în general cinci relații compatibile între ele. Rezultã, cã în general o conicã este determinatã prin cinci condiții inițiale.

De exemplu, cinci puncte determinã o conicã cu condiția ca punctele sã nu fie coliniare (dacã sunt coliniare , conica este degeneratã). □

<u>Teorema 8.2.</u> (<u>Intersecția a douã conice</u>). Douã conice se intersecteazã în cel mult patru puncte .

Demonstrație : Pentru a obține coordonatele punctelor de intersecție a conicelor :

$$(\Gamma_1)\quad : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$(\Gamma_2)\quad : a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0,$$

se rezolvã sistemul format din ecuațiile celor douã conice . Ecuațiile pot fi scrise sub forma :

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0,$$
$$a'_{22}y^2 + 2(a'_{12}x + a'_{23})y + a'_{11}x^2 + 2a'_{13}x + a'_{33} = 0.$$

Dacă se pune condiția ca cele douã ecuații sã aibã o rãdãcinã comunã se obține o ecuație de gradul patru în x, care are cel mult patru rãdãcini reale. □

Teorema 8.3. Ecuația generalã a conicelor care trec prin punctele de intersecție ale conicelor (Γ_1) şi (Γ_2) este:

$$(\Gamma):\ \alpha(\Gamma_1) + \beta(\Gamma_2) = 0,\ \alpha,\beta \in R.$$

Demonstrație : Ecuația $\alpha(\Gamma_1) + \beta(\Gamma_2) = 0$ reprezintã ecuația unei familii de conice, (Γ_1)şi (Γ_2) fiind cuprinse în această mulțime.

Într-adevãr , pentru :$\alpha = 0; \beta = 1$, se obține (Γ_2)= 0 , iar pentru $\alpha = 1; \beta = 0$, se obține (Γ_1)=0.

Astfel cã ecuația $\alpha(\Gamma_1) + \beta(\Gamma_2) = 0$, reprezintã conice care trec prin cele patru puncte de intersecție ale conicelor (Γ_1)şi (Γ_2).

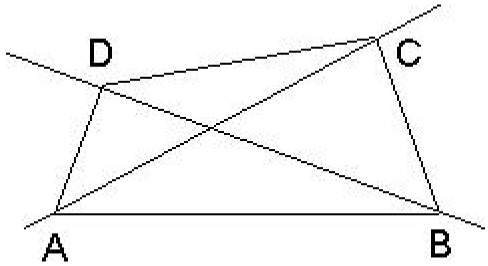
Cel puțin unul din parametrii α sau β sunt nenuli, astfel dacã $\alpha \neq 0$, atunci rezultă $(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2) = 0$, unde $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Această ultimã ecuație reprezintã ecuația fascicolului de conice determinat de (Γ_1)şi (Γ_2) şi ea depinde de un singur parametru $\lambda \in$R. Astfel cã, date fiind patru puncte de intersecție ale conicelor (Γ_1)şi (Γ_2) , o conicã din fascicol este determinată unic de a cincea condiție. □

Definiția 8.1. Mulțimea tuturor conicelor(Γ): $(\Gamma_1)+\lambda(\Gamma_2)=0$, $\lambda \in$R, care trec prin intersecția a două conice date, se numeşte **fascicol de conice**. Conicele (Γ_1)şi (Γ_2) se numesc **conicele de bază ale fascicolului**.

Teorema 8.4. Ecuația generalã a conicelor circumscrise unui patrulater ABCD este :

$\alpha(AB)(CD)+\beta(AD)(BC)=0$, $\alpha,\beta \in$R.



Demonstrație : Dreptele (AB) şi (CD) pot fi dreptele în care degenerează o conicã , deci produsul (AB)(CD)=0 reprezintã o conicã degeneratã (Γ_1). Analog produsul ecuațiilor dreptelor (AD)(BC)=0 reprezintã o conicã degeneratã (Γ_2). Cele două conice se intersectează în cele patru puncte: A,B,C,D.

Astfel, conform teoremei anterioare fascicolul de conice determinat de conicele (Γ_1)şi $(\Gamma_2)$are ecuația :

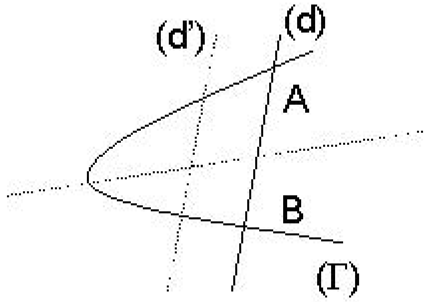
$\alpha(AB)(CD)+\beta(AD)(BC)=0$, $\alpha,\beta \in$R şi reprezintã toate conicele circumscrise patrulaterului ABCD. □

Teorema 8.5 Ecuația generalã a conicelor bitangente unei conice (Γ) în punctele în care aceasta este tãiatã de o dreapta (d) este : $(\Gamma)+\lambda(d)^2=0$, $\lambda \in$R.

Demonstrație:

Fie (Γ)=0 ecuația conicei , (d)=0 ecuația dreptei care uneste douã puncte A şi B de pe conicã. Dacă se consideră dreapta (d') paralelã cu dreapta (d) şi se scrie ecuația generalã a conicelor care trec prin punctele de intersecție ale conicei (Γ) cu cele douã drepte, se obține :

$(\Gamma)+\lambda(d)(d')=0$, $\lambda \in R$.



Dacã se face ca dreapta (d') sã tindã cãtre dreapta (d) , se obține $(\Gamma)+\lambda d^2=0$, ecuația conicelor bitangente conicei (Γ) în punctele în care (d) taie conica (Γ). □

<u>Teorema 8.6.</u> Ecuația generalã a conicelor tangente la douã drepte concurente (d_1) şi (d_2), în punctele în care acestea sunt tãiate de o a treia dreaptã (d_3) este :

$$(d_1)(d_2)+\lambda(d_3)^2=0.$$

<u>Demonstrație</u> : Dacã în exemplul anterior, conica (Γ) degenereazã în douã drepte concurente (d_1)şi (d_2), iar dreapta (d) se noteazã cu (d_3) , atunci ecuația $(\Gamma)+\lambda(d)^2=0$ devine $(d_1)(d_2)+\lambda(d_3)^2=0$ şi reprezintã conicele bitangente dreptelor (d_1)şi (d_2) în punctele în care acestea sunt tãiate de dreapta (d_3).□

Capitolul 8

CUADRICE

Fie $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ un reper ortonormat în spațiul euclidian E_3.

Definiție : Se numeşte **cuadricã** locul geometric, (Σ), al punctelor M din spațiul euclidian E_3, ale cãror coordonate (x,y,z), în raport cu reperul ortonormat R satisfac ecuația algebricã:

$$f(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0.$$

Prin trecerea de la reperul $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la un reper cartezian adecvat, orientat pozitiv, numit reper canonic, fațã de care ecuația f(x,y,z)=0 sã aibã cea mai simplã formã posibilã, numitã ecuație canonicã, se dovedeşte cã (Σ) este congruentã cu una din mulțimile : sferã, elipsoid, hiperboloid cu o pânzã, hiperboloid cu douã pânze, paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic, con, cilindru, pereche de plane secante, pereche de plane paralele, pereche de plane confundate, dreaptã, mulțime care conține un punct, mulțime vidã.

Se vor da în continuare exemple de cuadrice pe forma canonicã (redusã).

8§1. SFERA.

Fie C(a,b,c) un punct fix, R>0 un număr real fixat.

Definiția 1.1. Mulțimea punctelor $M(x,y,z) \in E_3$ cu proprietatea că distanța de la aceste puncte la punctul fix C este egală cu R, deci d(C,M)=R , este o suprafață numită **sferă de centru C şi rază R**.

Dacă se are în vedere expresia analitică a distanței dintre două puncte se obține:

(1) $\quad (S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$,

care se numeşte **ecuația carteziană implicită** a sferei de centru C şi rază R.
Dupã dezvoltarea pãtratelor şi ordonarea termenilor, se obține ecuația :

(2) (S): $x^2+y^2+z^2$-2ax-2by-2cz+d=0, unde

(3) $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.

Ecuația (2) se numeşte **ecuația carteziană generalã** a sferei.

<u>Observația 1.1.</u> Sfera este o cuadricã în care $a_{11}=a_{22}=$ $=a_{33}\neq 0$ şi $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$, adicã : (S) : $A(x^2+y^2+z^2)+$ +Bx+Cy+Dz+E=0 reprezintã ecuația unei sfere.

Din relația (3) rezultã raza sferei: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}$.
Dacã :

1) $a^2+b^2+c^2-d>0$, atunci sfera este realã cu centrul C(a,b,c) şi raza R;

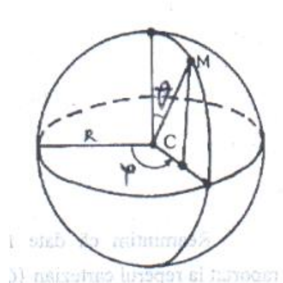
2) $a^2+b^2+c^2-d$ =0, atunci sfera este un punct şi anume centrul C(a,b,c).

3) $a^2+b^2+c^2-d<0$, atunci sfera este imaginarã .

Fiind datã o sferã (S) de razã R şi centru C(a,b,c), atunci ecuația (1) este echivalentă cu trei **ecuații parametrice** în R^3:

(4) $(S):\begin{cases} x=a+R\cos\theta\ \sin\varphi, \\ y=a+R\sin\theta\ \cos\varphi, \\ z=a+R\cos\varphi\ ,\ \varphi\in[0,2\pi),\theta\in[0,\pi], \end{cases}$

sau cu ecuația vectorială:



(5) $(S):\bar{r}=\bar{r}_0+R(\cos\theta\ \sin\varphi\ \bar{i}+\sin\theta\sin\varphi\ \bar{j}+\cos\varphi\ \bar{k})$, în V_3.

<u>8 §1.1. Intersecția unei sfere cu o dreaptã.</u>

Fie sfera (S): $x^2+y^2+z^2$-2ax-2by-2cz+d=0, $a^2+b^2+c^2-d>0$

şi dreapta (d) : $\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\alpha \\ y = y_0 + \rho\cos\beta \\ z = z_0 + \rho\cos\gamma \end{cases}$ care trece prin punctul $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \notin (S)$ şi are versorul director $\overline{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Problema intersecţiei dintre dreapta (d) şi sfera (S) revine la rezolvarea sistemului format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia sferei.

Dacă se înlocuiesc x,y,z din ecuaţiile dreptei în ecuaţia sferei, se obţine ecuaţia de gradul al doilea în ρ :

$$\rho^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2\rho\left[\left(x_0 - a\right)\cos\alpha + \left(y_0 - b\right)\cos\beta + \right.$$
$$\left. + \left(z_0 - c\right)\cos\gamma\right] + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + d = 0$$

Dar $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai direcţiei şi deci: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, iar $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + d =$ $= S\left(x_0, y_0, z_0\right)$ atunci :

(6) $\rho^2 + 2\rho\left[\left(x_0 - a\right)\cos\alpha + \left(y_0 - b\right)\cos\beta + \left(z_0 - c\right)\cos\gamma\right] + S\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0.$

Dacă se notează cu Δ - discriminantul acestei ecuaţii, se obţine:

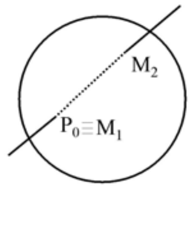
1) Dacã Δ >0, $\rho_1 \neq \rho_2 \in R$, atunci dreapta este secantã şi taie sfera în douã puncte distincte M_1 şi M_2.

2) Dacã Δ =0, $\rho_1 = \rho_2 \in R$, atunci dreapta intersecteazã sfera în douã puncte confundate , deci este tangentã la sferã.

3) Dacã Δ <0, $\rho_1, \rho_2 \in C$, atunci dreapta nu taie sfera , deci este exterioarã sferei.

Dacã punctul $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in (S)$, atunci $S\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$ şi ecuaţia (6) devine :

(6') $\rho^2 + 2\rho\left[\left(x_0 - a\right)\cos\alpha + \left(y_0 - b\right)\cos\beta + \left(z_0 - c\right)\cos\gamma\right] = 0$ şi deci $\rho_1 = 0$ şi $\rho_2 \neq 0$.



Dacã se doreşte ca dreapta (d) sã fie tangentã sferei în punctul $P_0 \in (S)$ trebuie ca $\rho_1 = \rho_2$, ceea ce înseamnã cã $\rho = 0$ şi deci :

$$\left(x_0 - a\right)\cos\alpha + \left(y_0 - b\right)\cos\beta + \left(z_0 - c\right)\cos\gamma = 0 \quad .$$

Din ecuațiile parametrice ale dreptei (d) rezultã :

$\cos\alpha = \dfrac{x - x_0}{\rho}$; $\cos\beta = \dfrac{y - y_0}{\rho}$; $\cos\gamma = \dfrac{z - z_0}{\rho}$; şi prin înlocuire în ecuația precedentã se obține :

(7) $\left(x_0 - a\right)\left(x - x_0\right) + \left(y_0 - b\right)\left(y - y_0\right) + \left(z_0 - c\right)\left(z - z_0\right) = 0$,

care reprezintã ecuația unui plan tangent la sferã în $P_0 \in (S)$. Deci într-un punct de pe sferã se poate duce un plan tangent la sferã în acel punct.

Dacã se ține cont de condiția $S\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$ şi ecuația (7) rezultã:

(7') $xx_0 + yy_0 + zz_0 - a\left(x + x_0\right) - b\left(y + y_0\right) - c\left(z + z_0\right) + d = 0$,

ecuația planului tangent la sferã în $P_0 \in (S)$, care se obține prin dedublare din ecuația sferei.

8 §.1.2. Poziția unui plan fațã de o sferã.

Fie sfera (S) de centru C(a,b,c) şi razã R, iar planul (π) de ecuație (π):Ax+By+Cz+D=0 .

Poziția planului (π) fațã de sfera (S) se studiazã prin compararea distanței de la centrul C al sferei la planul (π), cu raza R a sferei:

1) Dacã $d(C,(\pi)) > R$, rezultã cã planul (π) este exterior sferei.

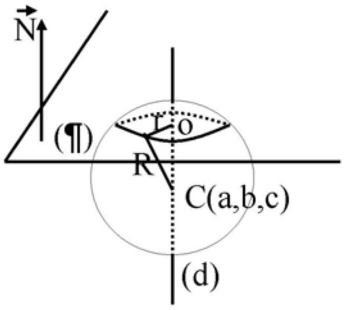
2) Dacã $d(C,(\pi)) = R$, rezultã cã planul (π) este tangent sferei.

3) Dacã $d(C,(\pi)) < R$, rezultã cã planul (π) este secant şi taie sfera dupã un cerc real.

În acest ultim caz, se va determina centrul şi raza cercului de secțiune.

Dacã $\overline{N}(A,B,C)$ este normala la planul (π), se vor scrie ecuațiile dreptei (d), care trece prin centrul sferei şi are direcția datã de $\overline{N}$:

$(d): \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}.$



La intersecția dintre dreapta (d) şi planul (π) se aflã centrul, O, al cercului de secțiune. Raza cercului, r, se aflã din triunghiul dreptunghic determinat de centrul sferei, centrul cercului şi un punct oarecare de pe cercul de secțiune şi anume: $r = \sqrt{R^2 - d^2(C,(\pi))}$.

8 §1.3. Puterea unui punct fațã de o sferã.

Definiția 1.2. Se numeşte **puterea punctului** $P_0(x_0,y_0,z_0)$ în raport cu sfera (S), numãrul :

(8) $\rho_{(S)}(P_0) = \varepsilon \|\overline{P_0M_1}\| \cdot \|\overline{P_0M_2}\|$ unde M_1 şi M_2 sunt punctele de intersecție ale dreptei $d(P_0,\overline{e})$ cu sfera (S), iar $\varepsilon = -1$ dacã $\overline{P_0M_1}$ şi $\overline{P_0M_2}$ au sensuri opuse (P_0 interior sferei).

Prin trecere la norme în relația $\overline{P_0M_i} = \rho_i\overline{e}$, i=1,2, unde ρ_1, ρ_2 reprezintă rădăcinile ecuației (6), se obține: $\|\overline{P_0M_1}\| = |\rho_1|$ şi $\|\overline{P_0M_2}\| = |\rho_2|$, $\|\overline{e}\| = 1$, astfel cã: $\rho_{(S)}(P_0) = \varepsilon \cdot |\rho_1| \cdot |\rho_2| = \varepsilon|\rho_1\rho_2| =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 = S(x_0,y_0,z_0).$

Se obține astfel cã puterea unui punct fațã de o sferã nu depinde de direcția dreptei (d) ce trece prin P_0, ci numai de poziția punctului P_0 fațã de sferã.

În concluzie puterea punctului P_0 fațã de sfera (S) este :

(9) $\rho_{(S)}(P_0) = S(x_0,y_0,z_0),$

adică se obține prin înlocuirea coordonatelor punctului în ecuația sferei.

<u>Definiția 1.3.</u> Se numeşte **plan radical** a două sfere (S_1)şi (S_2), locul geometric al punctelor P din E_3, care au aceeaşi putere față de cele două sfere , adică: $\rho_{(S_1)}(P)=\rho_{(S_2)}(P)$.

Dacă P(x,y,z) este un punct al acestui loc geometric, atunci rezultă că: $S_1(x,y,z)=S_2(x,y,z)$, adică :

(10) $(S_1)-(S_2)=0$,

care este ecuația planului radical al sferelor (S_1)şi (S_2) . Din (10) se obține **ecuația carteziană generală a planului radical** :

(10') $2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)+d_1-d_2=0$.

Se observă că vectorul $\overline{C_1C_2}$ are componentele: $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$, ceea ce arată că planul radical este perpendicular pe linia centrelor.

<u>Definiția 1.4.</u> Se numeşte **axă radicală** a trei sfere $(S_1),(S_2),(S_3)$: locul geometric al punctelor P din E_3 care au aceeaşi putere față de cele trei sfere , adică: $\rho_{(S_1)}(P)=\rho_{(S_2)}(P)=$ $=\rho_{(S_3)}(P)$.

Dacă $(S_1)-(S_2)=0$ este ecuația planului radical al sferelor (S_1)şi (S_2) , iar $(S_2)-(S_3)=0$, ecuația planului radical al sferelor (S_2)şi (S_3), atunci ecuația planului radical al sferelor (S_1)şi (S_3), adică: $(S_1)-(S_3)=0$, trece prin dreapta de intersecție a primelor două. Astfel că ecuațiile axei radicale al celor trei sfere este :

(11) $\begin{cases}(S_1)-(S_2)=0,\\(S_2)-(S_3)=0.\end{cases}$

Pozițiile relative a două sfere (S_1)şi (S_2) se deduc din compararea distanței dintre centrele celor două sfere, cu suma razelor lor.

Pentru douã sfere care se intersecteazã dupã un cerc real, are sens sã se vorbeascã de fascicol de sfere , adicã de mulțimea sferelor care trec prin cercul de intersecție a celor douã sfere . Ecuația fascicolului de sfere este:

(12) $(S_1)+\lambda(S_2)=0,\ \lambda\in R.$

Pentru douã sfere care se intersecteazã , cercul de secțiune se aflã în planul radical al celor douã sfere , deci ecuația fascicolului poate fi scrisă şi sub forma:

(13) $(S_1)+\lambda((S_1)-(S_2))=0,\ \lambda\in R.$

8 §2. ELIPSOIDUL.

Definiția 2.1.: Se numeşte **elipsoid**, (E), este locul geometric al punctelor M din spațiu E_3, ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ satisfac ecuația :

(E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$,a>0, b>0, c>0.

Pentru a vedea care este forma acestei suprafețe se va face intersecția ei cu :

- axele de coordonate : (Ox): $A(a,0,0)$ şi $A'(-a,0,0)$,
  (Oy): $B(0,b,0)$ şi B'(0,-b,0),
  (Oz): $C(0,0,c)$şi $C'(0,0,-c)$,
- planele de coordonate : (xOy) : $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\\ z=0,\end{cases}$

  (xOz) : $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\\ y=0,\end{cases}$

  (yOz) : $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\\ x=0,\end{cases}$

adicã elipse în planele de coordonate,

- plane paralele cu planele de coordonate, de ecuații:

z=h: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)=0,\\ z=h,\end{cases}$

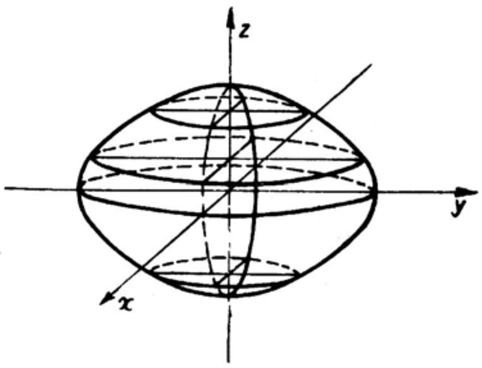
care reprezintã elipse, dacã $|h|<c$.

Analog pentru intersecția cu planele de ecuații: y=h, x=h .

Întrucât pentru (x,y,z)$\in$(E) rezultă: (-x,y,z), (x,-y,z), (-x,-y,z), (-x,-y,-z)$\in$(E) se obține că elipsoidul admite planele de coordonate (xOy), (xOz) şi (yOz), ca plane de simetrie. De asemenea şi intersecțiile acestor plane: axele de coordonate (Ox), (Oy), (Oz) sunt axe de simetrie ale elipsoidului, precum şi originea O este centrul de simetrie al elipsoidului.

Dacã a=b=c se obține o sferã.

Dacă se are în vedere cele expuse mai sus, se poate reprezenta elipsoidul în modul următor:



8 §3. HIPERBOLOIDUL CU O PÂNZÃ.

Definiția 3.1: Se numeşte **hiperboloid cu o pânzã**, $\left(H_1\right)$, locul geometric al punctelor M din spațiul E_3, ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, satisfac ecuația :

$$(H_1):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Dacă se procedează ca în cazul precedent, se va face intersecția acestei suprafețe cu :

- axele de coordonate:

  (Ox) : A(a,0,0) şi A'(-a,0,0),

  (Oy) : B(0,b,0) şi B'(0,-b,0),

  (Oz) : pentru x=0 şi y=0, sistemul nu are soluție , deci cuadrica nu intersecteazã axa (Oz).

- planele de coordonate :

$$(xOy):\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0\\ z=0\end{cases}\ ,\ \text{elipsã},$$

$$(xOz):\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases},\ \text{hiperbolã},$$

$$(yOz):\ \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases},\ \text{hiperbolã}.$$

- plane paralele cu planele de coordonate, de ecuații

$$z=h:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)=0\ \text{, elipsă pentru orice } h\in\mathbf{R},$$

$$y=h:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)=0\ \text{,hiperbolã pentru orice } |h|<b,$$

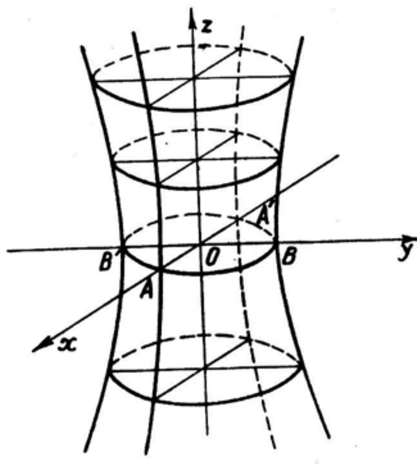
$$x=h:\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)=0\ \text{,hiperbolã pentru orice } |h|<a.$$

Ca şi în cazul elipsoidului, suprafața (H_1) are planele de coordonate, axele şi originea ca plane de simetrie, axe de simetrie şi respectiv centru de simetrie.

Observația 3.1. Suprafața (H_1): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, a>0, b>0, c>0 se mai numeşte: hiperboloid cu o pânză cu axa (Oz) ca axă netransversală. Atunci şi suprafețele:
(H'_1): $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$,a>0, b>0, c>0 şi (H''_1): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, a>0, b>0, c>0 reprezintă hiperboloizi cu o pânză cu axe netransversale (Ox) şi (Oy).

Definiția 3.2. Suprafața $(\sum)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ este un con numit **conul asimptot** al hiperboloidului cu o pânză, (H_1).

Hiperboloidul cu o pânză are următoarea reprezentare grafică:



8 §3.1. Generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânzã.

Definiția 3.3. **1)** Se numeşte **suprafață riglată**, o suprafață $(\sum) \subset E_3$, care poate fi generată prin mişcarea unei drepte (d), care se sprijină pe o curbă (Γ). În acest caz, dreapta (d) se numeşte **generatoarea rectilinie** a suprafeței riglate, iar curba (Γ) se numeşte **curbă directoare** a suprafeței $(\sum)$.

2) O cuadrică se numeşte **dublu riglată,** dacă prin fiecare punct al său trec două drepte distincte conținute în cuadrică.

Teorema 3.1. Hiperboloidul cu o pânză este o cuadrică dublu riglată.

Demonstrație: Se consideră ecuația canonică a hiperboloidului cu o pânză:

$$(H_1) \ : \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Aceasta este echivalentã cu :

$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$, rezultă cã următoarele familii de drepte : $\{(\Delta_\lambda)/\lambda\in R\}$ şi $\{(\Delta_\mu)/\mu\in R\}$ sunt conținute în hiperboloid, dreptele având respectiv ecuațiile:

$$(\Delta_\lambda) \ : \ \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right), \lambda\in R\end{cases} \quad \text{şi} \quad (\Delta_\mu): \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right), \mu\in R.\end{cases}$$

Propoziția 3.1. Prin fiecare punct al hiperboloidului (H_1) trece o generatoare şi numai una din fiecare din cele două familii de generatoare: (Δ_λ) şi (Δ_μ).

Demonstrație : Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (H_1)$, prin înlocuire în (Δ_λ) se obține un sistem liniar cu o singurã necunoscută λ, compatibil. Se obține deci o soluție unică λ_0, ce determinã o singurã generatoare din (Δ_λ).

Analog pentru (Δ_μ). □

Consecința 3.1. Douã generatoare din aceeaşi familie nu se întâlnesc.

Propoziția 3. 2. Orice generatoare din familia (Δ_λ) întâlneşte o singurã generatoare din familia (Δ_μ) şi reciproc.

Demonstrație : Sistemul liniar şi neomogen de patru ecuații cu trei necunoscute: x,y,z (λ,μ - fiind dați), format de ecuațiile dreptelor (Δ_λ) şi (Δ_μ) are determinantul caracteristic nul, oricare ar fi valorile lui λ şi μ, deci este compatibil determinat. □

8§4. HIPERBOLOIDUL CU DOUÃ PÂNZE.

Definiția 4.1. Se numeşte **hiperboloidul cu două pânze** , (H_2), locul geometric al punctelor M din spațiul E_3, ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ satisfac ecuația:

$$(H_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \text{ , a>0, b>0, c>0.}$$

Dacă se consideră în mod asemãnător, intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu axele de coordonate şi planele de coordonate , se observã că acesta are numai două vârfuri , nu taie planul (xOy), iar intersecțiile lui cu planele (xOz), (yOz) sunt hiperbole.

Intersecțiile suprafeței $\left(H_2\right)$ cu plane paralele cu planul (xOy), sunt: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)=0, \\ z=h. \end{cases}$

Pentru $|h|>c$ se obțin elipse.

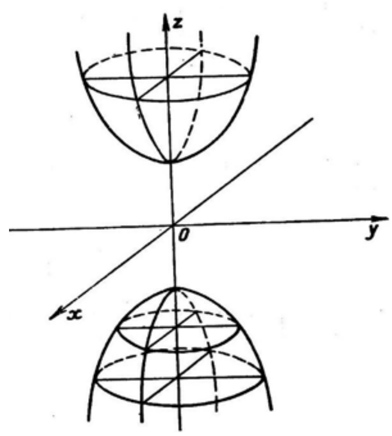
Intersecțiile suprafeței $\left(H_2\right)$ cu planele de ecuații x=h şi y=h sunt hiperbole.

Această suprafață are aceleaşi simetrii ca şi hiperboloidul cu o pânză.

<u>Observația 4.1.</u> Suprafața $\left(H_2\right): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$, a>0, b>0, c>0 se mai numeşte: hiperboloid cu două pânze cu axă transversală axa (Oz). Atunci şi suprafețele: $\left(H'_2\right): -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$, a>0, b>0, c>0 şi $\left(H''_2\right): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$, a>0, b>0, c>0 reprezintă hiperboloizi cu două pânze dar cu axele (Ox) şi respectiv (Oy) ca axe transversale.

<u>Definiția 4.2.</u> Suprafața $(\Sigma): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ este un con, numit: **conul asimptot** al hiperboloidului cu două pânze, $\left(H_2\right)$.

Hiperboloidul cu douã pânze are următoarea reprezentare grafică :



8 §5. PARABOLOIDUL ELIPTIC.

Definiția 5.1. Se numeşte **paraboloid eliptic**, (P_E) locul geometric al punctelor M din spațiul E_3, ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, satisfac ecuația :

$$(P_E): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad , p>0, a>0, b>0.$$

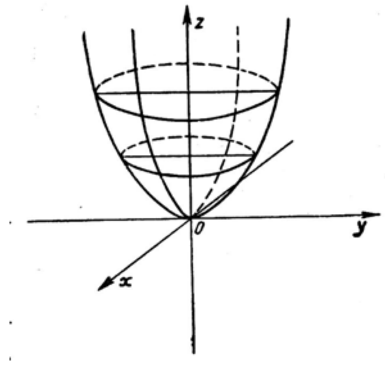
Intersecția paraboloidului eliptic cu planul (yOz) şi respectiv (xOz) este parabola: $\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz, \end{cases}$ şi respectiv parabola: $\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = 2pz. \end{cases}$

Intersecțiile suprafeței (P_E) cu planele de ecuații z=h>0 , sunt elipse, iar cu planele de ecuații: x=h, y=h sunt parabole.

Din forma ecuației rezultă că planele (xOz) şi (yOz) sunt plane de simetrie, iar axa (Oz) – axă de simetrie.

Observația 5.1. Şi suprafețele (P'_E) : $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2px$ şi (P''_E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2py$, (a>0, b>0, c>0) sunt tot paraboloizi eliptici, dar cu axele de simetrie: (Ox) şi respectiv (Oy). Dacă se schimbă pe x cu –x, y cu –y, z cu –z, atunci ecuațiile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -2py$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -2px$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2pz$, reprezintă tot paraboloizi eliptici, dar orientați după axele lor de simetrie orientate negativ.

Paraboloidul eliptic are următoarea reprezentare grafică:



8 §6. PARABOLOIDUL HIPERBOLIC.

Definiția 6.1. Se numeşte **paraboloid hiperbolic** sau **şa**, (P_H), locul geometric al punctelor M din spațiul E_3, ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ satisfac ecuația :

$$(P_H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz \quad , p>0, a>0, b>0.$$

Intersecția cu planul (xOy) sunt dreptele :

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\\ z=0\end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\\ z=0\end{cases}.$$

Intersecțiile cu plane paralele cu (xOy) de ecuații z=h, $h\in R^*$ sunt hiperbolele:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2ph=0,\\ z=h.\end{cases}$$

Intersecțiile lui (P_H) cu planele (xOz) şi (yOz) sunt respectiv parabolele:

$$\begin{cases}y=0\\ 2pz=\frac{x^2}{a^2}\end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases}x=0\\ 2pz=-\frac{y^2}{b^2}\end{cases}.$$

Intersecțiile suprafeței (P_H) cu plane paralele cu planul (yOz), de ecuații z=h, $h\in R^*$, sunt parabolele:

$$\begin{cases}x=h,\\ 2pz=\frac{h^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\quad h\in R^*,\end{cases}$$

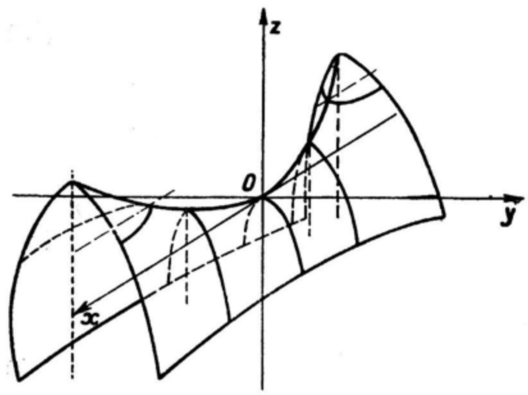
iar intersecțiile cu plane paralele cu planul (xOz), de ecuații z=h, $h\in R^*$, sunt parabolele:

$$\begin{cases}y=h,\\ 2pz=\frac{x^2}{a^2}-\frac{h^2}{b^2},\ h\in R^*.\end{cases}$$

Paraboloidul hiperbolic este simetric față de (xOz) (yOz) şi axa (Oz).

Observația 6.1. Şi suprafețele $\left(P'_H\right)$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=2py$ şi $\left(P''_H\right)$: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2px$, (sau schimbând semnul) sunt tot paraboloizi hiperbolici, dar cu axa de simetrie (Oy), respectiv (Ox).

Paraboloidul hiperbolic are următoarea reprezentare grafică:



Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic.

Fie $\left(P_H\right)$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ un paraboloid hiperbolic. Ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză se obține:

Definiția 6.2. Familiile de drepte:

$$\left(\Delta_\lambda\right):\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda z\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{\lambda}\end{cases} \quad \text{şi} \quad \left(\Delta_\mu\right):\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\mu z\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{\mu}\end{cases},$$

se numesc: **generatoarele rectilinii** ale paraboloidului hiperbolic.
În concluzie şi paraboloidul hiperbolic este o cuadrică dublu riglată, deoarece prin fiecare punct al său trec două drepte distincte, conținute în cuadrică.

Observația 6.2. Rezultatele propozițiilor 3.1 şi 3.2 demonstrate în cazul hiperboloidului cu o pânză, ramân valabile şi în cazul paraboloidului hiperbolic.

8 §7. CONUL.

Definiția 7.1. Se numeşte **con,** locul geometric al punctelor M din spațiul E_3, ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ satisfac ecuația :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\text{, a>0, b>0, c>0.}$$

Intersecțiile conului cu plane paralele cu planul (xOy), de ecuații y=h, $h\in R^*$, sunt elipsele:

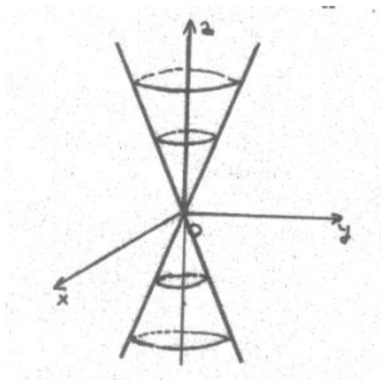
$$\begin{cases} z=h \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{h^2}{c^2}=0,\ h\in R^*. \end{cases}$$

Întersecțiile conului cu planele (xOz) şi (yOz) sunt respectiv perechi de drepte care trec prin origine, iar intersecțiile cu planele (xOz) şi (yOz) sunt respectiv hiperbolele:

$$\begin{cases} y=h \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{h^2}{b^2}=0,\ h\in R^* \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x=h \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{h^2}{a^2}=0,\ h\in R^*. \end{cases}$$

Dacã a=b=c , conul este un **con circular**.

Conul are urmãtoarea reprezentare graficã:



8 §8. CILINDRUL.

Definiția 8.1. 1) Se numeşte **cilindru circular,** locul geometric al punctelor M din spațiul E_3 ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ satisfac ecuația :

$$x^2+y^2=a^2\text{, a>0,}$$

unde a se numeşte **raza cilindrului**.

2) Se numeşte **cilindru eliptic,** locul geometric al punctelor M din spațiul E_3 ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ satisfac ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; a>0, \; b>0,$$

unde a şi b se numesc **semiaxele cilindrului eliptic**.

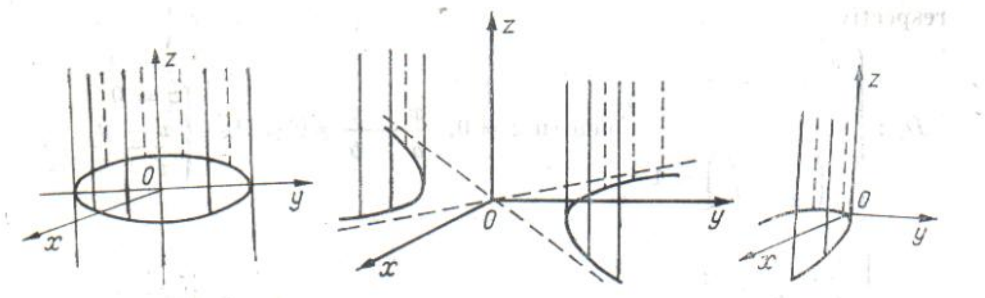
3) Se numeşte **cilindru hiperbolic,** locul geometric al punctelor M din spațiul E_3 ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ satisfac ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; a>0, \; b>0,$$

unde a şi b se numesc **semiaxele cilindrului hiperbolic**.

4) Se numeşte **cilindru parabolic,** locul geometric al punctelor M din spațiul E_3 ale cãror coordonate (x,y,z) în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ satisfac ecuația:

$$y^2 = 2px, \; p \in R^*.$$



cilindrul eliptic   cilindrul hiperbolic   cilindrul parabolic

Cilindrii sunt suprafețe generate pe drepte paralele cu axa (Oz) şi care se sprijinã pe elipsa, hiperbola respectiv parabola din planul (xOy) de ecuație: z=0.

Capitolul 9

GENERĂRI DE SUPRAFEȚE

Teoria generalã a suprafețelor face obiectul unui capitol separat din geometria diferențială.

Prin suprafață datã implicit, se înțelege locul geometric al punctelor M din spațiul E_3, ale cãror coordonate (x,y,z), în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, satisfac o ecuație de forma: F(x,y,z) = 0.

Prin curbă în spațiu datã implicit, se înțelege locul geometric al punctelor M din spațiul E_3 ale cãror coordonate (x,y,z), în raport cu reperul ortonormat $R = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, satisfac sistemul: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$, adicã o curbã în spațiu este datã ca intersecție a douã suprafețe.

Se poate vorbi de familii de suprafețe sau familii de curbe în spațiu.

Ecuația $F(x,y,z,\lambda)=0$, $\lambda \in R$, reprezintã o familie de suprafețe, depinzând de un parametru, iar sistemul: $\begin{cases} F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ G(x,y,z,\mu) = 0, \ \lambda, \mu \in R, \end{cases}$ reprezintă o familie de curbe în spațiu.

Dacã unei familii de curbe în spațiu i se impune o condiție suplimentarã pentru parametrii λ şi μ, de exemplu: $\Phi(\lambda, \mu) = 0$, atunci din sistemul :

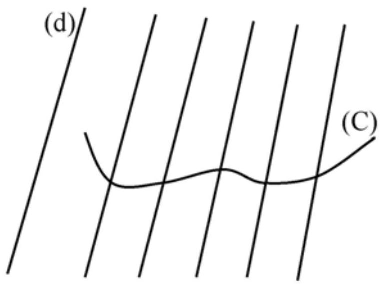
$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ G(x,y,z,\mu) = 0 \\ \Phi(\lambda, \mu) = 0, \end{cases}$$

prin eliminarea parametrilor λ şi μ, se obține: $\Psi(x,y,z) = 0$, adicã o suprafață.

9 §1. Suprafețe cilindrice.

Definiția 1.1. Se numeşte **suprafață cilindricã**, suprafața generatã prin mişcarea unei drepte care rãmâne paralelă cu o dreaptã datã şi se sprijinã pe o curbã datã, numită **curbă directoare a suprefeței**.

Se consideră dreapta (d) de ecuații (d): $\begin{cases}(P)=0\\(Q)=0,\end{cases}$ datã ca intersecție a douã plane.



Fie curba (C) datã ca intersecție a douã suprafețe :

(C): $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

Dreptele generatoare $\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right)$, paralele cu dreapta (d), se obțin ca intersecții a douã familii de plane, paralele cu planele (P) şi (Q):

$$\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right) : \begin{cases}(P)=\lambda\\(Q)=\mu\end{cases}, \quad \lambda,\mu\in R.$$

Condiția ca aceste drepte sã se sprijine pe curba (C) este ca sistemul: $\begin{cases}(P)=\lambda,\\(Q)=\mu,\\(F)=0,\\(G)=0,\end{cases}$ sã aibã soluții.

Sistemul este subdimensionat , are patru ecuații şi x,y,z,λ,μ necunoscute , deci în general este compatibil.

Dacă se elimină x,y,z din cele patru ecuații , se obține o singurã ecuație în λ şi μ : $\Phi(\lambda,\mu)=0$, numitã **condiție de sprijin** (sau **condiție de compatibilitate** a sistemului).

Dacă se înlocuiesc λ şi μ din ecuațiile generatoarelor, $\Delta(\lambda,\mu)$, în această condiție, adicã $\Phi((P),(Q))=0$, se obține ecuația suprafeței cilindrice.

<u>Observația 1.1.</u> Dacã este datã numai direcția dreptei (d) , adicã vectorul ei director: $\overline{v}(l,m,n)$, atunci ținând cont că toate dreptele din spațiu paralele cu această direcție taie cel puțin unul

din planele de coordonate, se pot scrie ecuațiile generatoarelor luând puncte din unul din aceste plane, dacã direcția nu este paralelã cu el.

Deci : $\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right)$: $\frac{x-\lambda}{l}=\frac{y-\mu}{m}=\frac{z}{n}$, aici fiind luat un punct $M(\lambda,\mu,0)$, $\lambda,\mu \in R$ din planul (xOy). Astfel ecuațiile generatoarelor se mai pot scrie :

$$\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right) : \begin{cases} x-\lambda = \frac{l}{n}z, \\ y-\mu = \frac{m}{n}z, \lambda, \mu \in R. \end{cases}$$

<u>Caz particular</u>: Sã se scrie ecuația suprafetei cilindrice cu generatoarele paralele cu axa (Oz) şi curba directoare (C): $\begin{cases} F=0, \\ G=0. \end{cases}$

Axa (Oz) are ecuațiile: (Oz): $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, deci $\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right)$: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \end{cases}$, $\lambda,\mu \in R$, iar ecuația suprafeței cilindrice cu generatoarele paralele cu (Oz) va fi $\Phi(x,y)=0$, ecuație în care lipseşte necunoscuta z. În mod analog se obțin ecuațiile suprafețelor cilindrice cu generatoarele paralele cu axele (Ox) şi (Oy).

<u>9 §2. Suprafețe conice.</u>

<u>Definiția 2.1.</u> Se numeşte **suprafaţã conicã** , suprafața generatã prin mişcarea unei drepte, care trece printr-un punct fix, numit **vârf** şi se sprijină pe o curbă dată, numită **curbă directoare**.

Fie V punctul fix. Se poate presupune cã V este obținut ca intersecție a trei plane (eventual paralele cu planele de coordonate) , adicã :

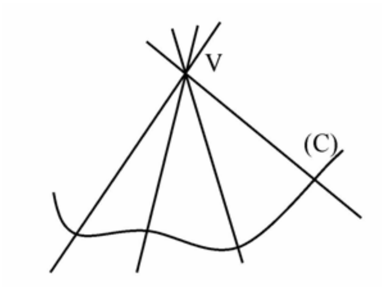
$$V : \begin{cases} (P)=0, \\ (Q)=0, \\ (R)=0, \end{cases}$$

respectiv, dacã $V\left(x_0,y_0,z_0\right)$, atunci : $\begin{cases} (P)\equiv x-x_0=0, \\ (Q)\equiv y-y_0=0, \\ (R)\equiv z-z_0=0. \end{cases}$

Toate dreptele care trec prin V pot fi obținute prin intersectarea fascicolelor de plane :

$$\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right):\begin{cases}(P)=\lambda(R),\\(Q)=\mu(R), \quad \lambda,\mu\in R.\end{cases}$$

Fie (C) curba directoare, de ecuații: (C) : $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$



Condiția ca dreptele generatoare $\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right)$ sã se sprijine pe curba directoare (C), este ca sistemul : $\begin{cases}(P)=\lambda(R),\\(Q)=\mu(R),\\(F)=0,\\(G)=0,\end{cases}$ să fie compatibil. În mod analog cu cazul suprafețelor cilindrice, prin eliminarea lui x,y,z din acest sistem, se obține **condiția de sprijin**: $\Phi(\lambda,\mu)=0$. Dacă se înlocuiesc pe λ şi μ din ecuațiile generatoarelor $\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right)$, se obține ecuația suprafeței conice : $\Phi\left(\frac{(P)}{(R)},\frac{(Q)}{(R)}\right)=0$.

<u>Observația 2.1.</u> Dacă se ține cont de faptul cã dintre cei trei parametri directori ai unei direcții din spațiu, sunt esențiali doar doi, o direcție oarecare poate avea componentele $(\lambda,\mu,1)$ şi atunci, dacã vârful este dat prin coordonatele lui, adicã : $V(x_0,y_0,z_0)$, dreptele generatoare au ecuațiile :

$$\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right) \ : \ \frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{1}\ ,\ \lambda,\mu\in R,$$

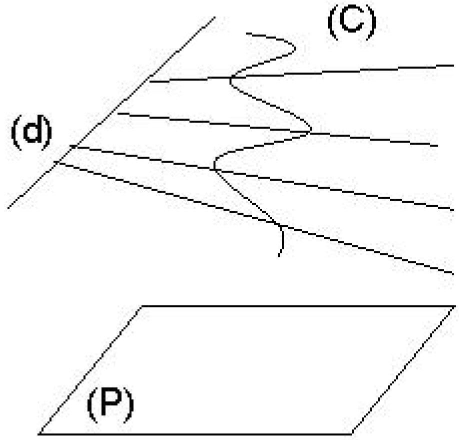
adicã:

$$\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right): \begin{cases} x - x_0 = \lambda\left(z - z_0\right), \\ y - y_0 = \mu\left(z - z_0\right), \quad \lambda, \mu \in R. \end{cases}$$

9 §3. Conoid cu plan director.

Definiția 3.1. Se numeşte **suprafață conoidă cu plan director**, suprafața generată prin mişcarea unei drepte, care ramâne paralelă cu un plan (P), dat, numit **plan director** şi se sprijină atât pe o curbă dată (C), numită **curbă directoare** cât şi pe o dreaptă dată, (d).

Fie (d) : $\begin{cases} (Q) = 0 \\ (R) = 0 \end{cases}$ şi (C) : $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$



Planele paralele cu planul (P) vor avea ecuațiile (P)=λ, $\lambda \in R$, iar planele care trec prin dreapta (d) fac parte dintr-un fascicol de plane: $(Q) = \mu(R)$, $\mu \in R$.

Intersecția celor două familii de plane, dau drepte paralele cu planul director (P) şi care se sprijină pe dreapta (d). Deci ecuațiile generatoarelor sunt :

$$\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right) : \begin{cases} (P) = \lambda, \\ \dfrac{(Q)}{(R)} = \mu, \quad \lambda, \mu \in R. \end{cases}$$

Dacă se impune condiția ca aceste drepte sã se sprijine pe curba directoare (C), se obține sistemul :

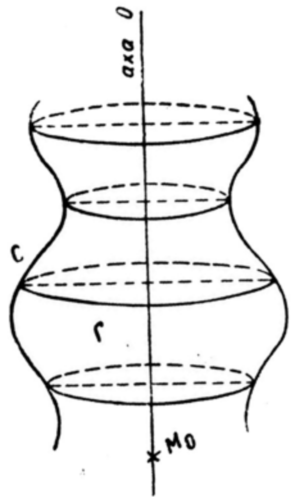
$$\begin{cases} (P) = \lambda \\ \dfrac{(Q)}{(R)} = \mu \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$, care trebuie sã fie compatibil , ceea ce conduce la condiția de compatibilitate: $\Phi(\lambda, \mu) = 0$.

Dacă se înlocuiesc λ şi μ din ecuațiile generatoarelor, $\left(\Delta_{\lambda,\mu}\right)$, se obține ecuația suprafeței conoide cu plan director: $\Phi\left((P), \dfrac{(Q)}{(R)}\right) = 0$.

9 §4. Suprafețe de rotație.

Definiția 4.1. : Se numeşte **suprafaţă de rotație** , suprafața generată prin rotirea (fãrã alunecare) a unei curbe (C) în jurul unei drepte fixe (d), numitã **axã de rotație**.

Se observã cã fiecare punct al curbei (C) descrie un cerc cu centrul pe dreapta (d) , având planul perpendicular pe axa de rotație.



Deci, se poate spune cã suprafața de rotație este suprafata generată de cercuri, cu centrele M_0 axa de rotație, (d), de rază variabilă, având planul perpendicular pe axã şi care se sprijinã pe curba (C).

Fie axa de rotație (d) : $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, şi curba dată (C), de ecuații:

$$(C):\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Cercurile generatoare se obțin dacă se intersectează sfere cu centrul în $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi razã variabilã, cu plane paralele şi perpendiculare pe axã.

$$\left(C_{\lambda,\mu}\right):\begin{cases}\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=\lambda^2,\\ lx+my+nz=\mu, \quad \lambda,\ \mu\in R\ .\end{cases}$$

Dacă se impune condiția ca aceste cercuri sã se sprijine pe curba (C), din sistemul format de ecuațiile cercurilor generatoare şi ecuațiile curbei (C), se obține condiția de sprijin :

$$\Phi\left(\lambda^2,\mu\right)=0.$$

Prin înlocuirea lui λ^2 şi a lui μ din ecuațiile generatoarelor, se obține:

$$\Phi\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2, lx+my+nz\right]=0,$$

care reprezintã ecuația suprafeței de rotație.

<u>Observația 4.1.</u> Se observã cã ecuația unei suprafețe de rotație este o funcție : $\Phi((S),(P))=0$ unde (S)=0, (P)=0 sunt ecuațiile unei sfere , respectiv a unui plan.

<u>Exemplu</u> : xy+xz+yz=0 este ecuația unui con de rotație, deoarece se poate scrie : $(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$.

GEOMETRIE

Prof. univ.dr. ATANASIU GHEORGHE

UNIVERSITATEA “TRANSILVANIA” DIN BRAŞOV
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA : INFORMATICĂ
ÎNVĂŢĂMÂNT LA DISTANŢĂ

2007

Cuprins

Partea II

GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Capitolul 1

Curbe plane

1.1 Definiţia analitică a curbelor plane

Încă din liceu ne este cunoscut faptul că reprezentarea grafică a unei funcţii reale de o variabilă reală este, în general, o „curbă plană”. Acest fapt nu este însă suficient pentru a defini corect noţiunea de curbă plană dacă ţinem cont că: 1). Nu orice curbă plană poate fi descrisă ca graficul unei singure funcţii (chiar într-un caz foarte simplu, cum e cel al cercului $x^2+y^2-R^2=0$, avem nevoie de două funcţii reale, anume, $y=\sqrt{R^2-x^2}$ şi $y=-\sqrt{R^2-x^2}$, lucrurile stând la fel în cazul elipsei şi hiperbolei). Pentru aceste curbe, şi nu numai, s-a preferat o reprezentare de forma $F(x,y)=0$.

2).Mai mult, din punctul de vedere al cinematicii, o curbă plană este traiectoria unui punct material, şi astfel devine util să descriem curba prin legătura dintre coordonatele (x,y) ale punctului şi timp: $x=\phi(t), y=\psi(t)$.

Mai precis:

Definitia 1.1 *Numim **arc simplu de curbă plană**, mulţimea punctelor* (Γ) *din* $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ *care satisfac o ecuaţie de tipul*

$$y=f(x) \qquad a<x<b, \tag{1.1}$$

sau o ecuaţie de tipul

$$F(x,y)=0 \qquad a<x<b,\ c<y<d, \tag{1.2}$$

sau un sistem de forma

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad t_1<t<t_2, \tag{1.3}$$

unde f, F, ϕ, ψ sunt funcţii reale de clasă cel puţin $\mathcal{C}^1$ pe domeniile lor de definiţie $(a, b, c, d, t_1, t_2 \in \mathbb{R})$, iar ϕ şi ψ din 1.3 stabilesc o corespondenţă bijectivă şi bicontinuă între punctele $M \in (\Gamma)$ şi mulţimea valorilor parametrului $t \in (t_1, t_2)$.

Ecuaţia 1.1 poartă numele de **reprezentarea explicită** a arcului simplu (Γ), în timp ce ecuaţia 1.2 se numeşte **reprezentare implicită**, iar sistemul 1.3, **reprezentarea parametrică** a lui (Γ).

Definitia 1.2 *O mulţime de puncte (Γ) se numeşte **arc regulat de curbă plană** dacă:*

1. *(Γ) este un arc simplu de curbă plană;*
2. *în reprezentările 1.2 şi 1.3 avem, în plus:*

$$(F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2 > 0$$

(în reprezentarea implicită), respectiv,

$$\left(\dot{\phi}\right)^2 + \left(\dot{\psi}\right)^2 > 0,$$

(în reprezentarea parametrică), unde

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt},\ \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}.$$

Condiţia $(F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2 > 0$ semnifică faptul că derivatele F'_x şi F'_y nu se anulează simultan în punctul de coordonate (x, y); la fel, $\left(\dot{\phi}\right)^2 + \left(\dot{\psi}\right)^2 > 0$ exprimă faptul că $\dot{\phi}$ şi $\dot{\psi}$ nu sunt simultan nule în nici un $t \in (t_1, t_2)$.

Dacă în definiţia de mai sus suntem asiguraţi de continuitatea derivatelor şi neanularea, respectiv cel puţin a uneia din derivatele până la şi inclusiv ordinul n, arcul regulat se spune a fi **arc regulat de ordinul** n, sau **de clasă** n.

Condiţiile din Definiţia 1.2 poartă numele de **condiţii de regularitate**.

Definitia 1.3 *Un punct $M \in (\Gamma)$ se numeşte **punct regulat** dacă el îndeplineşte toate condiţiile de regularitate. În caz contrar, punctul se numeşte **punct singular**.*

Astfel, putem spune că un arc regulat este constituit numai din puncte regulate, eventual exceptând extremităţile.

Definitia 1.4 *Numim **curbă de clasă** n o reuniune de arce regulate de clasă n.*

Aşadar, dacă (Γ_i) $(i \in I)$ este o mulţime de arce regulate de clasă n, atunci curba (C) de clasă n arată ca în fig. 1.1 (să observăm că ea poate avea şi „întreruperi"):

$$(C) = \bigcup_{i \in I} (\Gamma_i) . \tag{1.4}$$

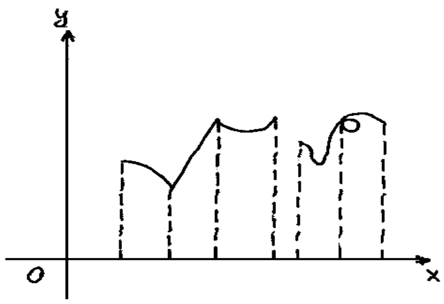


fig. 1.1

Prin definiţie deci, unui arc îi poate corespunde cel puţin una din reprezentările de mai sus.

Condiţiile de regularitate nu sunt altceva decât impuneri ale analizei matematice pentru a exista posibilitatea de trecere de la o reprezentare la altă reprezentare, pentru orice arc regulat de curbă plană, sau pentru orice arc simplu de curbă plană, în vecinătatea unui punct regulat al ei.

- Într-adevăr, trecerea de la reprezentarea 1.1 la reprezentarea 1.2 se realizează simplu luând $F(x, y) \equiv y - f(x) = 0$.

- Pentru a putea trece de la reprezentarea 1.2 la reprezentarea 1.1 aplicăm teorema de existenţă a funcţiilor implicite.

Teorema 1.5 *Dată o ecuaţie de forma 1.2, verificată de valorile $x = x_0$, $y = y_0$, pentru care funcţia $F(x, y)$ şi derivatele ei parţiale F'_x, F'_y sunt continue în vecinătatea valorilor x_0, y_0, atunci există o singură funcţie $y = f(x)$ care, în vecinătatea valorii x_0, verifică identic ecuaţia 1.2 şi ia valoarea y_0 pentru*

$x = x_0$. *Mai mult, această funcţie este bijectivă şi continuă în vecinătatea valorii* x_0 *şi are derivată continuă dată de formula:*

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{1.5}$$

- Trecerea de la reprezentarea 1.1 la reprezentarea 1.3 se realizează simplu prin:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

  sau prin

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = f(\phi(t)) \end{cases}, \tag{1.7}$$

  ceea ce ne arată că reprezentarea parametrică nu este unică.

- În fine, condiţiile de regularitate ne asigură că pentru o valoare $t = t_0 \in (t_1, t_2)$ avem de exemplu $\dot{\phi}(t_0) \neq 0$ şi există inversa funcţiei $x = \phi(t)$, să spunem $t = \phi^{-1}(x)$ într-o vecinătate suficient de mică a valorii t_0. De unde $y = \psi\left(\phi^{-1}(x)\right)$, este trecerea de la reprezentarea 1.3 la reprezentarea 1.1.

Exemple:

1. **Cercul**: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ (în reprezentarea implicită); o parametrizare a acestuia este
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

2. **Elipsa**: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (în reprezentare implicită), sau
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$
(în reprezentare parametrică).

3. **Hiperbola**: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (în reprezentare implicită), sau
$$\begin{cases} x = acht \\ y = bsht \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$
(în reprezentare parametrică).

Geometria diferenţială a curbelor plane se ocupă, în mod special, de studiul arcelor simple sau arcelor regulate de clasă n, în vecinătatea unui punct regulat. În cele ce urmează, vom neglija posibilitatea ca un punct al unei curbe să apară ca punct regulat într-o reprezentare şi ca punct singular în altă reprezentare.

1.2 Lungimea unui arc de curbă plană. Element de arc

Pentru a defini lungimea unui arc $\overset{\frown}{AB}$ al unei curbe plane (C), vom înscrie în $\overset{\frown}{AB}$ un poligon cu n laturi care uneşte punctele extreme A, B ale arcului (fig. 1.2).

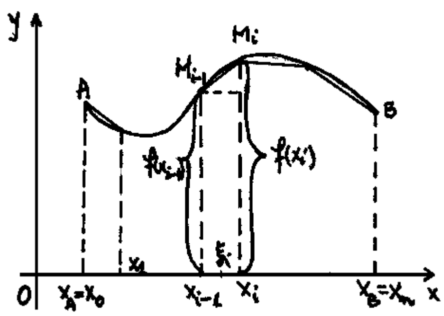


fig. 1.2

Acest lucru poate fi făcut pentru fiecare întreg pozitiv n, într-un mod arbitrar, însă în aşa fel ca lungimea laturii celei mai mari să se apropie de zero, când n tinde la infinit. Lungimile L_n ale acestor poligoane se obţin din teorema lui Pitagora. Dacă şirul $\{L_n\}$ al acestor lungimi este convergent cu limita L, atunci arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei (C) se spune a fi **rectificabil**, iar valoarea $L = L_{\overset{\frown}{AB}}$ este numită **lungimea** arcului $\overset{\frown}{AB}$ al curbei (C).

Teorema 1.6 *Orice arc $\overset{\frown}{AB}$ al unei curbe (C) de clasă cel puţin 1 (unu), este rectificabil. Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei (C) este dat în reprezentarea explicită*

$$y = f(x), \; x \in [x_A, x_B] \subset (a, b), \tag{1.8}$$

atunci lungimea sa este dată de

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \tag{1.9}$$

iar dacă arcul $\widehat{AB}$ *al curbei* (C) *este reprezentat parametric prin*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_A, t_B] \subset (t_1, t_2), \tag{1.10}$$

atunci lungimea sa este dată de

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt, \tag{1.11}$$

unde $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Demonstratie. Considerăm o linie poligonală P_n (cu n laturi), cu vârfurile

$$M_j(x_j,\ f(x_j)) \quad (j = 0, 1, 2, ..., n\,;\ x_0 = x_A < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = x_B).$$

Atunci, P_n are lungimea

$$L(P_n) = l_1 + l_2 + ... + l_n,$$

unde $l_i = M_{i-1}M_i$ este lungimea laturii a i-a a lui P_n.

Avem, evident,

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{1.12}$$

Deoarece funcţia $f(x)$ este continuă, cu derivata $f'(x)$ continuă, putem aplica teorema mediei din calculul diferenţial:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i).$$

şi atunci relaţia 1.12 devine

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Sumând după i de la 1 la n, obţinem:

$$L(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1}). \tag{1.13}$$

Deoarece f' este continuă (deci, integrabilă Riemann) şi lungimea coardei maxime tinde la zero, suma din 1.13, pentru $n \to \infty$, se apropie de integrala 1.9.

Făcând schimbarea de variabilă $x = x(t)$ în 1.9 şi ţinând cont de:

$$dx = \dot{x}(t)\, dt, \quad f' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

obţinem din 1.9:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\, \dot{x} dt = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

adică formula 1.11. ■

Dacă schimbăm valoarea fixă t_B în 1.11 printr-o variabilă t, atunci L devine o funcţie de t, să spunem, $s(t)$. Înlocuind t_A printr-o valoare fixată $t_0 \in (t_1, t_2)$, obţinem:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\widetilde{t} \quad (\dot{x} = \frac{dx}{d\widetilde{t}}, \dot{y} = \frac{dy}{d\widetilde{t}}). \tag{1.14}$$

Notăm cu M_0 punctul de pe curbă care corespunde valorii t_0 a parametrului şi cu M, pe cel corespunzător valorii t. Funcţia $s(t)$, numită **lungimea arcului** $\widehat{M_0 M}$ al curbei (C), are o interpretare geometrică simplă. Pentru aceasta dăm definiţia de mai jos:

Definitia 1.7 *Numim* ***sens pozitiv*** *pe o curbă (C), sensul care corespunde creşterii valorilor parametrului ales pe curbă (fig. 1.3).*

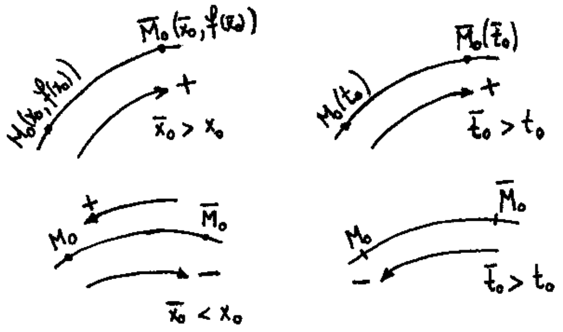


fig. 1.3

Revenind la 1.14, dacă $t > t_0$, atunci $s(t)$ este lungimea porţiunii din (C) cu punctul iniţial $M_0(t_0)$ şi punctul final $M(t)$. Dacă $t < t_0$, atunci $s(t)$ este negativ, şi lungimea arcului $\widehat{M_0 M}$ este dată de $-s(t) > 0$.

Teorema 1.8 *Lungimea de arc $s(t)$ poate fi întrebuinţată ca un parametru în reprezentările parametrice ale curbelor. Trecerea de la t la s păstrează clasa curbei.*

Demonstratie. Din 1.14, avem asigurată continuitatea funcţiei $s(t)$, neanularea derivatei lui $s(t)$ în raport cu parametrul t:

$$\dot{s}^2(t) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0 \tag{1.15}$$

şi faptul că funcţia $s(t)$ este monoton crescătoare. Rezultă că funcţia:

$$s = s(t)$$

dată de 1.14 admite o funcţie inversă, să spunem:

$$t = t(s),$$

care înlocuită în ecuaţiile parametrice 1.10, conduce la ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x(t(s)) \\ y = y(t(s)) \end{cases} \tag{1.16}$$

şi demonstrează prima parte a teoremei.

Presupunând acum 1.10 de clasă n, rezultă că funcţiile $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ sunt de clasă $n-1$; din 1.15, $\dot{s}(t)$ este de clasă $n-1$ şi $\dot{s}(t) \neq 0$. Din 1.16 avem:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}}, \; \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}}, \tag{1.17}$$

ceea ce implică:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{s}^2} = 1 \neq 0,$$

adică $\frac{dx}{ds}(s), \frac{dy}{ds}(s)$ sunt de clasă $n-1$ şi deci curba 1.16 este de clasă n. În plus, dacă un punct $P \in (C)$ este regulat în reprezentarea având ca parametru pe t, atunci el este regulat şi în reprezentarea 1.16. Cu aceasta, demonstraţia este completă. ■

Parametrul s este numit **parametrul natural** al curbei (C). Vom vedea că utilizarea reprezentării parametrice 1.16 simplifică unele consideraţii asupra curbelor plane.

Observatia 1.9 *Continuitatea funcţiilor din 1.8 sau 1.10 nu este suficientă pentru existenţa lungimii unui arc .*

De exemplu, mulţimea de puncte dată prin:

$$x = t, \;\; y = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \end{cases}$$

nu are o lungime finită (fig 4).

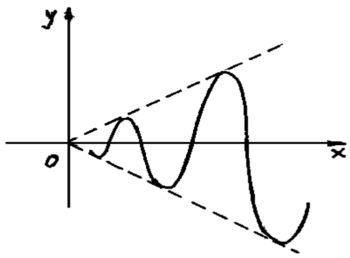


fig. 1.4

Din 1.17, obţinem pentru lungimea de arc formula:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Expresia $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ se notează cu ds şi se numeşte **elementul de arc (liniar)** al curbei (C). Cu alte cuvinte, avem:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1.18}$$

sau

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt, \tag{1.19}$$

sau încă,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{1.20}$$

Reamintim că am notat $y' = \dfrac{dy}{dx}$ şi $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Exercitiul 1.10 *Să se determine elementul de arc, lungimea arcului şi parametrizarea naturală (relativ la $t_0 = 0$) pentru curba* $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, \pi/2]$.

1.3 Contactul a două curbe plane

Problema intersecţiei a două curbe plane se reduce la problema algebrică de rezolvare a sistemului format din reprezentările curbelor în discuţie.

Să ne fixăm atenţia asupra unui punct, să spunem M_0, comun celor două curbe.

Definitia 1.11 *Spunem că două curbe plane au într-un punct de intersecţie un contact de ordinul* $n \in \mathbb{N}$, *dacă în acel punct sunt confundate* $n+1$ *puncte comune ale celor două curbe (punctul de intersecţie este comun de* $n+1$ *ori).*

1.3.1 Cazul în care ambele curbe sunt date în reprezentarea explicită

Fie curbele (C_1) şi (C_2) date respectiv prin reprezentările $y = f_1(x)$ şi $y = f_2(x)$.

Aşa cum am spus, găsirea punctelor comune revine la rezolvarea sistemului format din reprezentările curbelor (C_1) şi (C_2), adică:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{array} \right. \tag{1.21}$$

Sistemul de mai sus este echivalent cu

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = f_i(x) & (i = 1 \text{ sau } 2) \\ f_1(x) - f_2(x) = 0 & \end{array} \right.$$

Rezolvând ecuaţia

$$E(x) \equiv f_1(x) - f_2(x) = 0, \tag{1.22}$$

obţinem abscisele punctelor comune ale celor două curbe, să spunem x_i $(i = 0, 2, ..., k, ..., s)$, pentru care avem:

$$f_1(x_i) = f_2(x_i) \qquad i = 1, 2, ..., s.$$

Dacă $x = x_0$ este abscisa punctului M_0 în care cele două curbe au un contact de ordinul n, înseamnă, conform cu definiţia 1.11, că $x = x_0$ trebuie să fie rădăcină de multiplicitate $n+1$ a ecuaţiei $E(x) = 0$. Aceasta revine la faptul (cunoscut din analiza matematică):

$$E(x_0) = 0,\ E'(x_0) = 0,\ E^{(n)}(x_0) = 0, \text{ şi } \ E^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Ultimele relaţii se pot scrie, ţinând cont de 1.22, sub forma:

$$\begin{cases} f_1(x_0) = f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) = f_2'(x_0) \\ \dots \\ f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0) \\ f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0). \end{cases}$$

Am demonstrat astfel:

Teorema 1.12 *Dacă două curbe date prin ecuaţiile* $y = f_1(x), y = f_2(x)$ *au într-un punct* M_0 *un contact de ordinul* n, *atunci funcţiile* $f_1(x), f_2(x)$ *şi derivatele lor până la şi inclusiv ordinul* n *vor fi egale în acel punct, derivatele de ordinul* $n+1$ *având valori distincte.*

1.3.2 Cazul în care o curbă este dată parametric, iar a doua, implicit

Să considerăm acum curba (C_1) dată prin ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

iar curba (C_2) dată prin

$$F(x, y) = 0.$$

Determinarea punctelor de intersecţie între aceste curbe înseamnă rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ F(x, y) = 0 \end{cases},$$

sistem care este echivalent cu sistemul de mai jos:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \Phi(t) \equiv F(x(t), y(t)) = 0 \end{cases}. \tag{1.23}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului 1.23 obţinem valorile t_i $(i = 0, 2, ..., k, ..., s)$ ale parametrului t, corespunzătoare punctelor $M_i(x(t_i), y(t_i))$ comune curbelor (C_1) şi (C_2).

Dacă în punctul M_0 corespunzător valorii t_0 a parametrului t, cele două curbe au un contact de ordinul n, atunci $t = t_0$ trebuie să fie rădăcină de multiplicitate $n+1$ pentru ultima ecuaţie 1.23. Cu alte cuvinte, avem:

Teorema 1.13 *Dacă o curbă este dată parametric prin ecuaţiile* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, *iar o altă curbă printr-o ecuaţie implicită* $F(x, y) = 0$ *şi dacă notăm* $\Phi(t) \equiv F(x(t), y(t))$ *funcţia obţinută prin înlocuirea ecuaţiilor parametrice în membrul întâi al ecuaţiei implicite, atunci condiţiile ca într-un punct* M_0 *corespunzător parametrului* t_0 *să avem un contact de ordinul* n *sunt:*

$$\Phi(t_0) = 0, \Phi'(t_0) = 0, ..., \Phi^{(n)}(t_0) = 0 \quad \text{şi} \quad \Phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0. \tag{1.24}$$

Exemplul 1.14 *Să se stabilească ordinul contactului între curbele:* (C_1) : $y = \ln x$ *şi* $(C_2) : y = x - 1$ *în punctul de abscisă* $x = 1$;

Avem $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = x - 1$ şi $f_1(1) = f_2(1) = 0$. Calculând derivatele acestor funcţii în $x = 1$, obţinem că

$$\begin{aligned} f_1'(1) &= f_2'(1) = 1 \\ f_1''(1) &= -1 \neq f_2''(1) = 0, \end{aligned}$$

deci, cele două curbe au un contact de ordinul 1 în punctul considerat. Cu alte cuvinte, punctul $M_0(1, 0)$ este comun de două ori.

Exercitiul 1.15 *Să se stabilească ordinul contactului între curbele:* (C_1) : $y = \cos x$ *şi* $(C_2) : x^2 + y^2 - 1 = 0$ *în* $A(0, 1)$.

O parametrizare a curbei $y = \cos x$ este $x = t$, $y = \cos t$. Construim funcţia

$$\Phi(t) = t^2 + \cos^2 t - 1.$$

Avem $\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Phi'''(0) = 0$, $\Phi^{IV}(0) = 8 \neq 0$, şi de aici deducem că ordinul contactului între cele două curbe este $n = 3$ (adică, cele două curbe au în $A(0, 1)$ patru puncte comune confundate sau, echivalent, punctul $A(0, 1)$ este comun de patru ori).

1.4 Dreapta tangentă şi dreapta normală într-un punct regulat

Definitia 1.16 ***Dreapta tangentă*** *la o curbă într-un punct regulat* M_0 *este limita dreptei secante* $M_0\overline{M_0}$ *la curbă când* $\overline{M_0} \to M_0$ *(fig. 1.5).*

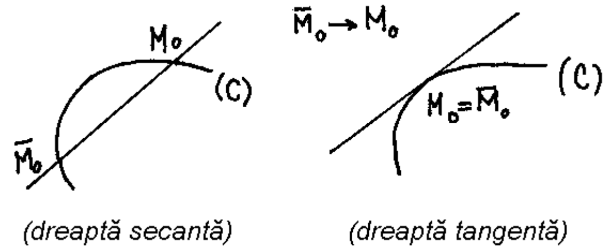


fig. 1.5

Ţinând cont de definiţia contactului a curbe plane (def. 1.11), conchidem că: **dreapta tangentă este dreapta care are cu curba, în punctul regulat M_0, un contact de ordin $n \geq 1$ (adică cel puţin două puncte în comun).**

A. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct regulat al curbei (C): $y = f(x)$; căutăm dreapta tangentă sub forma explicită $y = mx + n$. Conform teoremei 1.12, trebuie să avem îndeplinite condiţiile:

$$mx_0 + n = f(x_0), \; m = f'(x_0). \tag{1.25}$$

De aici obţinem că

$$m = f'(x_0), \; n = f(x_0) - x_0 f'(x_0). \tag{1.26}$$

Substituind acum relaţiile 1.26 în ecuaţia $y = mx + n$ şi notând $y_0 = f(x_0)$, obţinem pentru tangenta într-un punct regulat $M(x_0, y_0)$ la curba dată **în reprezentare explicită** $y = f(x)$ ecuaţia:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.27}$$

În cele ce urmează, vom mai folosi notaţia

$$y_0' = f'(x_0).$$

Observăm că 1.26 reafirmă un lucru cunoscut din analiza matematică referitor la interpretarea geometrică a derivatei $f'(x_0)$: derivata $f'(x_0)$ este panta tangentei la curbă în punctul de abscisă x_0.

B. Fie acum curba (C) dată **în reprezentarea parametrică** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, şi $M_0 \in (C)$ un punct regulat, corespunzător valorii t_0 a lui t; căutăm dreapta tangentă în M_0 sub forma generală (implicită)

$$Ax + By + C = 0. \tag{1.28}$$

atunci, în conformitate cu teorema 1.13, trebuie să avem îndeplinite condiţiile:

$$\begin{aligned} &(1.29) & Ax(t_0)+By(t_0)+C &= 0,\\ &(1.30) & A\dot{x}(t_0)+B\dot{y}(t_0) &= 0,\\ &(1.31) & A\ddot{x}(t_0)+B\ddot{y}(t_0) &\neq 0,\ \left(\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

Notăm pentru simplitate $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$, $\dot{y}(t_0)=\dot{y}_0$ etc.

Sistemul format din ecuaţiile 1.28, 1.29, 1.30 în necunoscutele A,B,C este un sistem omogen care trebuie să admită soluţie nebanală, adică trebuie să avem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_0 & y_0 & 1\\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & 0 \end{vmatrix}=0 \text{ sau } \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0} \tag{1.32}$$

şi reprezintă **ecuaţia dreptei tangente la curba dată parametric** într-un punct regulat al ei $M_0(t=t_0)$.

Observaţie. Ecuaţia 1.32 se putea obţine din ecuaţia 1.27 ţinând cont de relaţia $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

C. În fine, dacă în punctul regulat $M_0(x_0,y_0)$ al curbei (C) dată **în reprezentarea implicită** $F(x,y)=0$, căutăm dreapta tangentă în M_0 sub forma parametrică

$$\begin{cases} x=x_0+tv_1\\ y=y_0+tv_2 \end{cases}, \tag{1.33}$$

în conformitate cu teorema 1.13 ($\Phi(t)\equiv F(x_0+tv_1,y_0+tv_2)$), trebuie să avem îndeplinite condiţiile:

$$\begin{array}{l} F(x_0,y_0)=0, \qquad F'_{x_0}\cdot v_1+F'_{y_0}\cdot v_2=0\\ (F'_{x_0}=F'_x(x_0,y_0)=(F'_x)_{M_0};\ F'_{y_0}=F'_y(x_0,y_0)=(F'_y)_{M_0}), \end{array} \tag{1.34}$$

unde am ţinut cont că punctul $M_0(x_0,y_0)$ corespunde valorii $t_0=0$ a parametrului t şi de formula de derivare:

$$\frac{d}{dt}\left[F(u(t),v(t))\right]=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Prima egalitate 1.34 afirmă că $M_0 \in (C)$, iar din cea de-a doua, putem explicita

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}. \tag{1.35}$$

Eliminând parametrul t din ecuaţiile 1.33 şi ţinând cont de 1.35, obţinem **ecuaţia dreptei tangente în punctul regulat** $M_0\left(x_0, y_0\right)$ **al curbei** (C) **dată în reprezentarea implicită** $F\left(x, y\right) = 0$ sub forma:

$$\left(x - x_0\right) \cdot F'_{x_0} + \left(y - y_0\right) \cdot F'_{y_0} = 0. \tag{1.36}$$

Observaţie. Ecuaţia 1.36 se putea obţine din ecuaţia 1.27, ţinând cont de formula de derivare a funcţiilor implicite.

Definitia 1.17 ***Dreapta normală*** *într-un punct regulat al unei curbe plane este dreapta ce trece prin acel punct, perpendiculară pe dreapta tangentă.*

Notând cu m_{tg} panta tangentei şi cu m_N panta normalei, vom avea: $m_{tg} \cdot m_N = -1$ şi de aici rezultă cu uşurinţă ecuaţiile pentru normala într-un punct regulat al curbei, dată în diverse reprezentări.

Dacă curba (C) este dată **în reprezentarea explicită**, ecuaţia dreptei normale în punctul regulat $M_0\left(x_0, y_0\right)$ este:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}\left(x - x_0\right). \tag{1.37}$$

Dacă curba (C) este dată **în reprezentarea parametrică**, ecuaţia dreptei normale în punctul regulat $M_0\left(t = t_0\right)$ este:

$$\left(x - x_0\right) \cdot \dot{x}_0 + \left(y - y_0\right) \cdot \dot{y}_0 = 0. \tag{1.38}$$

Dacă curba (C) este dată **în reprezentarea implicită**, ecuaţia dreptei normale în punctul regulat $M_0\left(x_0, y_0\right)$ este:

$$\frac{x - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F'_{y_0}}. \tag{1.39}$$

În final, notând cu T (respectiv cu N) intersecţia între dreapta tangentă (respectiv dreapta normală) în punctul regulat M_0 şi axa Ox, se pun în evidenţă următoarele segmente: **segmentul tangentă** ($S_{tg} \equiv M_0T$), **segmentul normală** ($S_N \equiv M_0N$) , **segmentul subtangentă** (S_{stg}) şi **segmentul subnormală** (S_{sN}), ultimele două fiind, respectiv, proiecţiile ortogonale ale lui S_{tg} şi S_N pe axa Ox (fig. 1.6).

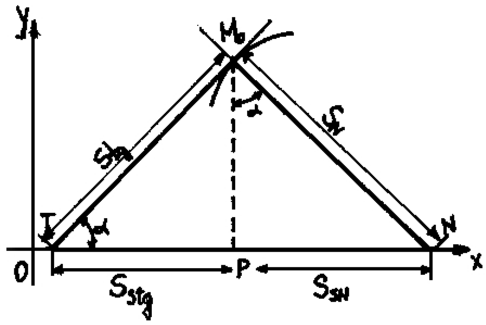


fig. 1.6

Deducerea lungimii acestor segmente este o operaţie trigonometrică, ţinând cont că:

$$m = tg\alpha = y_0' \text{ şi } M_0P = |y_0| \, .$$

Obţinem:

$$S_{stg} = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|, \; S_{sN} = |y_0 \cdot y_0'| \, ,$$

respectiv

$$S_{tg} = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right| \sqrt{1 + y_0'^2}, \; S_N = |y_0| \sqrt{1 + y_0'^2},$$

cum uşor se poate constata.

Mai mult, dacă trecem la parametrizarea cu s - lungimea de arc, şi ţinând cont de 1.20, avem:

$$\cos\alpha = \frac{S_{stg}}{S_{tg}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_0'^2}} = \frac{dx}{ds}|_{M_0}, \tag{1.40}$$

şi

$$\sin\alpha = \frac{y_0}{S_{tg}} = \frac{y_0}{\sqrt{1 + y_0'^2}} = \left(\frac{ydx}{ds}\right)_0 = \frac{dy}{ds}|_{M_0}. \tag{1.41}$$

Exercitiul 1.18 *Să se arate că o curbă este parabolă dacă şi numai dacă are în fiecare punct segmentul subnormală constant .*

1.5 Cercul osculator al unei curbe plane

Este binecunoscut din geometria sintetică (elementară) că trei puncte necoliniare determină un cerc şi numai unul ce trece prin ele.

Să considerăm un punct regulat M_0 al unei curbe plane (C) şi două puncte $\overline{M_0}$, $\overline{\overline{M_0}}$ infinit apropiate de M_0. Dacă aceste trei puncte nu sunt pe o aceeaşi dreaptă, atunci ele determină un cerc unic care trece prin ele. Apare în mod natural întrebarea: în cazul în care $\overline{M_0}$ şi $\overline{\overline{M_0}}$ tind de-a lungul lui (C) către M_0, un astfel de cerc mai există? Răspunsul, după cum vom demonstra mai jos, este, în general, afirmativ, cu mici excepţii, pe care le vom specifica. Mai întâi dăm definiţia care urmează:

Definitia 1.19 *Numim* ***cerc osculator*** *al unei curbe plane într-un punct regulat, cercul care are cu curba în acel punct un contact de ordin cel puţin doi ($n \geq 2$; $n+1 \geq 3$, adică cel puţin trei puncte comune confundate).*

Fie curba (C) dată în reprezentarea parametrică $x = x(t), y = y(t)$ şi un punct $M_0 \in (C)$ corespunzător lui $t = t_0$; căutăm ecuaţia cercului sub formă implicită

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0, \tag{1.42}$$

unde α, β - coordonatele centrului şi R - raza cercului, le vom determina din condiţiile de contact. În conformitate cu teorema 1.13, pentru care

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv (x(t)-\alpha)^2 + (y(t)-\beta)^2 - R^2, \\ \Phi'(t) &\equiv 2\left\{[x(t)-\alpha]\dot{x}(t) + [y(t)-\beta]\dot{y}(t)\right\}, \\ \Phi''(t) &\equiv 2\left\{[x(t)-\alpha]\ddot{x}(t) + [y(t)-\beta]\ddot{y}(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right\}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

va trebui să avem

$$\Phi(t_0) = 0, \Phi'(t_0) = 0, \Phi''(t_0) = 0,$$

contactul fiind de ordin cel puţin doi (punctul M_0 fiind comun de cel puţin trei ori).

Rezultă că α, β, R sunt soluţiile sistemului

$$\left\{ \begin{array}{c} (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 - R^2 = 0 \\ (x_0-\alpha)\dot{x}_0 + (y_0-\beta)\dot{y}_0 = 0 \\ (x_0-\alpha)\ddot{x}_0 + (y_0-\beta)\ddot{y}_0 = -\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right). \end{array} \right. \tag{1.44}$$

Considerăm sistemul (liniar) format din ultimele două ecuaţii 1.44, în necunoscutele $x_0 - \alpha$, $y_0 - \beta$; în ipoteza că determinantul acestuia este diferit de zero, adică

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.45}$$

prin regula lui Cramer găsim:

$$(1.46)\qquad x_0 - \alpha = \frac{\dot{y}_0\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}, \quad y_0 - \beta = \frac{-\dot{x}_0\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0},$$

din care deducem pentru coordonatele α, β ale centrului cercului expresiile:

$$(1.47)\qquad \alpha = x_0 - \frac{\dot{y}_0\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}, \quad \beta = y_0 + \frac{\dot{x}_0\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}.$$

Din prima egalitate 1.44 şi din 1.46 deducem raza R a cercului osculator:

$$R^2 = \frac{\dot{y}_0^2\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)}{\left(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0\right)^2} + \frac{\dot{x}_0^2\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)}{\left(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0\right)^2} = \frac{\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)^3}{\left(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0\right)^2},$$

sau

$$(1.48)\qquad R = \left|\frac{\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}\right|.$$

Dacă curba (C) este dată **în reprezentarea explicită** $y = f(x)$, atunci considerăm parametrizarea $x = t$, $y = f(t)$ şi avem

$$(1.49)\qquad \dot{x} = 1,\ \ddot{x} = 0,\ \dot{y} = f',\ \ddot{y} = f'', t_0 = x_0;$$

înlocuind în 1.47 şi 1.48, coordonatele centrului şi raza cercului osculator, într-un punct regulat al curbei, sunt date de:

$$(1.50)\qquad \alpha = x_0 - \frac{y_0'\left(1 + y_0'^2\right)}{y_0''},\ \beta = y_0 + \frac{\left(1 + y_0'^2\right)}{y_0''},\ R = \left|\frac{\left(1 + y_0'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}\right|.$$

Pentru a răspunde complet la problema existenţei cercului osculator, trebuie să ridicăm ipoteza 1.45.

Cercetăm cazul în care determinantul $\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix}$ este nul. Ţinând cont de 1.49, obţinem:

$$(1.51)\qquad \begin{vmatrix} 1 & y_0' \\ 0 & y_0'' \end{vmatrix} = 0,$$

care conduce la $y_0'' = y''(x_0) = 0$, adică, x_0 este punct de inflexiune pentru graficul lui f.

Presupunând acum că 1.51 are loc pe un întreg interval (x_1, x_2), avem

$$y''(x) = 0, \ \forall x \in (x_1, x_2).$$

Integrând, obţinem $y = c_1 x + c_2$, adică ecuaţia unei familii de drepte. În acest fel, am obţinut:

Teorema 1.20 *Orice curbă de clasă cel puţin 2 în vecinătatea unui punct regulat şi neinflexionar, admite un cerc osculator şi numai unul, în acel punct. Dacă curba este dată în reprezentarea parametrică (respectiv, explicită), atunci coordonatele centrului şi raza cerului osculator sunt date de formulele 1.47, 1.48 (respectiv, 1.50).*

Remarcăm deci că: a) în punctele dreptelor; b) în punctele unui arc - segment de dreaptă - al unei curbe; c) în punctele de inflexiune ale unei curbe, **nu** putem ataşa cerc osculator.

1.6 Curbura şi raza de curbură a unei curbe plane

Pentru a introduce noţiunea de curbură a unei curbe plane, ne vom aduce aminte de relaţia care există într-un cerc, între unghiul la centru, arcul corespunzător şi raza cercului.

Să considerăm un cerc de centru O şi rază R, două tangente în punctele M_1 şi M_2 şi să notăm cu α (măsurat în radiani) unghiul M_1OM_2, iar cu $arc\alpha = \overset{\frown}{M_1M_2}$ (fig. 1.7).

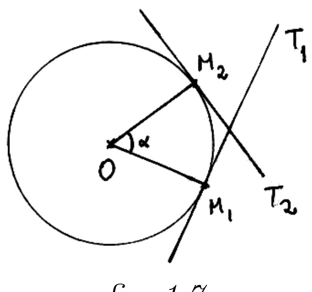


fig. 1.7

Deoarece $OM_1 \perp M_1T_1$ şi $OM_2 \perp M_2T_2$, rezultă că α este şi unghiul tangentelor.

Cunoaştem că

$$\overset{\frown}{M_1 M_2} = arc\alpha = \alpha \cdot R \text{ radiani},$$

de unde

$$\frac{\alpha}{arc\alpha} = \frac{1}{R} \text{(constant)}. \tag{1.52}$$

Relaţia 1.52 ne arată că oricare ar fi poziţia punctelor M_1, M_2 pe cerc, raportul între unghiul tangentelor şi arcul $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ este acelaşi sau cu alte cuvinte, "abaterea" cercului de la tangentă este aceeaşi în orice punct al cercului şi anume, $\frac{1}{R}$, cantitate numită **curbura cercului**.

În cazul unei curbe plane oarecare, acest lucru nu se mai întâmplă, dar sugerează introducerea noţiunii de curbură, în general, pentru o curbă plană oarecare într-un punct regulat.

Definiţia 4.1. Numim **unghi de contingenţă al unui arc de curbă**, şi-l notăm cu $\Delta\alpha$, unghiul ascuţit format de tangentele duse la extremităţile arcului (fig. 1.10).

Definiţia 4.2. Numim **curbură medie a unui arc de curbă**, şi o notăm cu K_m, raportul dintre unghiul de contingenţă şi lungimea arcului:

$$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}. \tag{1.53}$$

Definiţia 4.3. Numim **curbura unei curbe într-un punct,** şi o notăm cu K sau $\frac{1}{R}$, limita curburii medii când lungimea arcului tinde către zero; inversul curburii poartă numele de **raza de curbură** a curbei în acel punct:

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}, \; R = \frac{1}{K} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha}. \tag{1.54}$$

Ne propunem să determinăm o expresie analitică pentru calculul curburii. În acest scop, fie curba (C) dată în reprezentarea explicită $y = f(x)$, de clasă cel puţin 2 în vecinătatea unui punct regulat $M(x, y)$ al curbei, $\overline{M}(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punct al lui (C) infinit apropiat de M şi T, $\overline{T}$ tangentele în M şi $\overline{M}$, care formează cu axa Ox unghiurile ϕ şi respectiv $\phi + \Delta\phi$ (fig. 1.8). Presupunem, în plus, că $y'' \neq 0$.

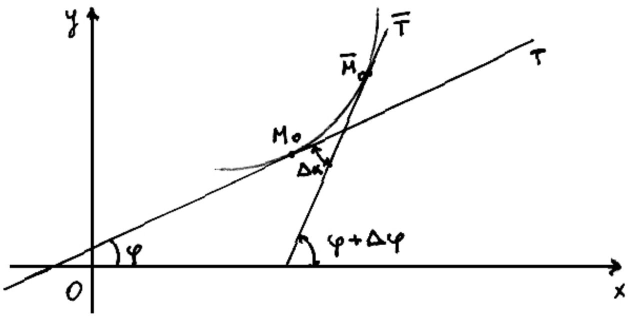


fig. 1.8

Din teorema unghiului exterior, avem

$$\phi + \Delta\phi = \phi + \Delta\alpha,$$

de unde

$$\Delta\alpha = \Delta\phi.$$

Curbura K este atunci dată de

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\phi}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\frac{d\phi}{dx}}{\frac{ds}{dx}},$$

în care am ţinut cont de ultima egalitate, apoi am împărţit numărătorul şi numitorul cu Δx şi am folosit faptul că, dacă $\Delta s \to 0$ ($\overline{M} \to M$), atunci $\Delta x \to 0$.

Făcând apel la interpretarea geometrică a derivatei, şi anume:

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\phi,$$

obţinem

$$\phi = arctgy'$$

şi deci

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+y'^2} \cdot y''.$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Ultimele două egalităţi conduc la relaţiile dorite:

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\ R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{1.55}$$

Observatia 1.21 *Prima formulă 1.55 calculată într-un punct $M_0(x_0, y_0)$, abstracţie făcând de semn, este identică cu formula razei cercului osculator (1.50). Concludem:* ***modulul razei de curbură a unei curbe într-un punct este egal cu raza cercului osculator al curbei plane în punctul respectiv.***

Astfel, ţinând cont de 1.55, am demonstrat

Teorema 1.22 ***Curbura şi raza de curbură într-un punct regulat al unei curbe de clasă cel puţin 2 în vecinătatea unui punct regulat şi neinflexionar*** *sunt determinate în mod unic şi diferite de zero, astfel:*

1. *prin formulele*

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\ R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{1.56}$$

dacă curba este dată în reprezentarea explicită $y = f(x)$;

2. *prin formulele:*

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ R = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \tag{1.57}$$

dacă curba este dată în reprezentarea parametrică $x = x(t), y = y(t)$, derivatele fiind luate în punctul considerat.

Dacă curba de clasă cel puţin 2 este dată **în reprezentarea implicită** $F(x, y) = 0$, atunci pentru calculul curburii şi razei de curbură putem folosi formulele 1.55 în care ţinem seama de formula de derivare a funcţiilor implicite

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{1.58}$$

Derivând 1.58, avem:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{F'_x}{F'_y}\right) = -\frac{F'_y \frac{d}{dx}(F'_x) - F'_x \frac{d}{dx}\left(F'_y\right)}{\left(F'_y\right)^2} = \\ &= -\frac{F'_y\left(F''_{x^2} + F''_{xy}\cdot y'\right) - F'_x\left(F''_{yx} + F''_{y^2}\cdot y'\right)}{\left(F'_y\right)^2}, \end{aligned}$$

unde am notat clasic: $F''_{x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $F''_{xy} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $F''_{yx} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, $F''_{y^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Făcând apel la faptul că clasa curbei este cel puţin 2, (este îndeplinită teorema lui Schwartz $F''_{xy} = F''_{yx}$), obţinem:

$$y'' = -\frac{F'^2_x \cdot F''_{y^2} - 2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} + F'^2_y \cdot F''_{x^2}}{F'^3_y}. \tag{1.59}$$

Printr-o demonstraţie identică cu cea a teoremei 1.20 din paragraful precedent, obţinem:

Teorema 1.23 *Curbura unei curbe este identic nulă dacă şi numai dacă curba este o dreaptă.*

Din acest motiv, exprimându-ne "grosso modo", putem spune că curbura unei curbe într-un punct măsoară "abaterea" curbei de la o linie dreaptă, anume "abaterea" de la dreapta tangentă la curbă în punctul respectiv.

Exemplul 1.24 *Fie curba (cicloida)*

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Determinaţi centrul cercului osculator, curbura şi raza de curbură într-un punct curent al acesteia.

Avem: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2r^2(1 - \cos t)$, $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = -r^2(1 - \cos t)$, de unde obţinem coordonatele centrului cercului osculator:

$$\alpha = r(t + \sin t), \ \ \beta = -r(1 - \cos t);$$

curbura este $K = -2r\sqrt{2(1 - \cos t)} = -4r\left|\sin \dfrac{t}{2}\right|$, iar raza de curbură, $R = \dfrac{1}{K}$.

1.7 Puncte singulare şi puncte multiple ale unei curbe plane

1.7.1 Puncte singulare

Conform cu cele discutate în paragraful 1, un punct singular $M_0(x_0, y_0)$ al unei curbe plane (C) poate fi caracterizat şi prin:

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

dacă (C) este dată în reprezentarea implicită $F(x, y) = 0$, respectiv,

$$\dot{x}(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0,$$

dacă (C) este dată în reprezentarea parametrică $x = x(t)$, $y = y(t)$, iar M_0 corespunde valorii t_0 a parametrului.

În reprezentarea explicită $y = y(x)$, toate punctele în care funcţia y este de clasă cel puţin unu, sunt puncte regulate.

După cum se poate observa din 1.32 şi 1.36, punctele singulare sunt exact acele puncte în care nu putem determina în mod unic (cel puţin la o primă evaluare) dreapta tangentă.

În cele ce urmează, încercăm să determinăm forma curbei plane în vecinătatea unui punct singular al ei, dat prin condiţiile de mai sus.

Fie, pentru început, curba (C) dată în **reprezentarea implicită** $F(x, y) = 0$. Punctele singulare M_0 sunt, în acest caz date de soluţiile (x_0, y_0) ale sistemului

$$\left\{ \begin{array}{c} F'_x(x_0, y_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0) = 0 \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. . \tag{1.60}$$

Mai general, putem spune că un punct $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ este **singular de ordin** k, dacă toate derivatele parţiale ale lui F până la ordinul $k-1$ inclusiv se anulează în (x_0, y_0), şi există cel puţin o derivată parţială de ordinul k, nenulă în acest punct:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l F}{\partial x^r \partial x^s}(x_0, y_0) &= 0, \ \forall (r, s) \text{ cu } r + s = l, \ l = 1, ..., k - 1; \\ \frac{\partial^k F}{\partial x^r \partial x^s}(x_0, y_0) &\neq 0, \ \text{ pentru cel puţin un } (r, s) \text{ cu } r + s = k. \end{aligned}$$

În cazul particular $\mathbf{k} = \mathbf{2}$ (adică, în cazul în care M_0 este **punct singular de ordinul al doilea**), panta tangentei la curbă este

$$m = y'_0 = -\left(\frac{F'_x}{F'_y}\right)_{M_0} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}; \tag{1.61}$$

constatăm că avem o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$.

Ridicăm nedeterminarea aplicând regula lui l'Hospital:

$$y_0' = y'(x_0) = -\left(\frac{\frac{d}{dx}(F_x')}{\frac{d}{dx}(F_y')}\right)_{M_0} = -\left(\frac{F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'}{F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'}\right)_{M_0},$$

adică

(1.62)
$$y_0' = -\frac{F''_{x_0^2} + F''_{x_0y_0} \cdot y_0'}{F''_{x_0y_0} + F''_{y_0^2} \cdot y_0'}.$$

Notând y_0' cu m, obţinem din 1.62:

Teorema 1.25 *În cazul unui punct singular de ordinul al doilea, pantele tangentelor la curbă sunt date de ecuaţia:*

(1.63)
$$F''_{y_0^2} \cdot m^2 + 2F''_{x_0y_0} \cdot m + F''_{x_0^2} = 0.$$

I. Să presupunem, mai întâi, că $F''_{y_0^2} \neq 0$, adică, 1.63 este o ecuaţie de gradul al doilea. În funcţie de semnul discriminantului acesteia

$$R = \left(F''_{x_0y_0}\right)^2 - F''_{x_0^2} \cdot F''_{y_0^2},$$

putem distinge următoarele trei cazuri în ceea ce priveşte natura punctelor singulare de ordinul al doilea:

1) $R > 0$; în acest caz, în punctul considerat avem două drepte tangente reale şi distincte, punctul este un **nod** (fig 1.9 (a)).

2) $R = 0$; în acest caz, în punctul M_0 avem două drepte tangente reale confundate, M_0 este un **punct de întoarcere (de prima speţă** (b_1), **de a doua speţă** (b_2), **de contact (tacnod)** (b_3)**).**

3) $R < 0$; în acest caz, pantele tangentelor sunt imaginare, deci nu putem duce drepte tangente reale la curbă în punctul M_0. Ţinând seama de 1.16, înseamnă că nu există puncte pe curbă într-o vecinătate suficient de mică a lui M_0. Punctul este un **punct izolat** (fig 9 (c)).

Merită sesizat faptul că, dacă $F''_{x_0^2} = 0$, atunci $m = 0$ este soluţie, adică una din dreptele tangente la (Γ) este dreapta orizontală $y = y_0$.

II: În situaţia în care $F''_{y_0^2} = 0$, ecuaţia pantelor tangentelor 1.63 este de gradul 1, având fie o soluţie (dacă $F''_{x_0y_0} \neq 0$), fie nici una (dacă $F''_{x_0y_0} = 0$, ceea ce, dacă ţinem seama că măcar una din derivatele parţiale de ordinul al doilea trebuie să nu se anuleze în M_0, conduce la $F''_{x_0^2} \neq 0$). La prima vedere, s-ar părea că într-un astfel de punct avem cel mult o dreaptă tangentă la curbă. Acest lucru nu este totuşi adevărat, după cum vom vedea. Mai precis, are loc

Propozitia 1.26 *Dacă în punctul singular $M_0(x_0, y_0)$, avem $F''_{y_0^2} = 0$, atunci dreapta $x = x_0$ este dreapta tangentă la (Γ) în M_0.*

Demonstraţie: Căutăm ecuaţia dreptei tangente sub forma $x = py + q$. Atunci „panta" p este

$$p = x'_0 = x'(y_0) = -\left(\frac{\dfrac{d}{dy}\left(F'_y\right)}{\dfrac{d}{dy}\left(F'_x\right)}\right)_{M_0} = -\left(\frac{F''_{y^2} + F''_{xy}\cdot x'}{F''_{xy} + F''_{x^2}\cdot x'}\right)_{M_0},$$

ceea ce conduce la

$$F''_{x_0^2}\cdot p^2 + 2F''_{x_0y_0}\cdot p + F''_{y_0^2} = 0. \tag{1.64}$$

Ţinând cont că $F''_{y_0^2} = 0$, deducem că $p = 0$ este soluţie; cu alte cuvinte, ecuaţia dreptei tangente căutate este de forma $x = q$. Punând condiţia ca aceasta să treacă prin M_0, obţinem $q = x_{0,}$, ceea ce înseamnă că una din dreptele tangente la curbă în acest caz este dreapta verticală $x = x_0$.

În concluzie, dacă $F''_{y_0^2} = 0$, atunci una din dreptele tangente este verticala $x = x_0$, iar cealaltă are panta dată de 1.63.

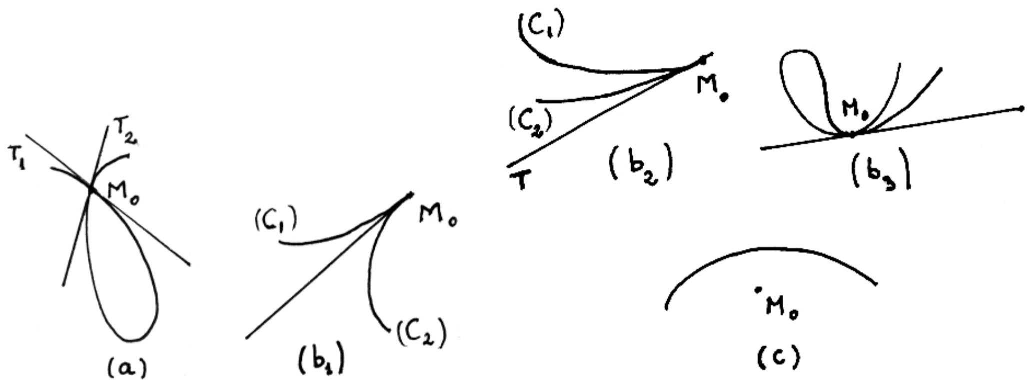


fig. 1.9

Dacă $p = 3$, membrul doi al relaţiei 1.62 este din nou o nedeterminare, care ridicată va conduce la implicaţii de natură algebrică ş.a.m.d.

În cazul în care curba (C) este dată **în reprezentare parametrică** $x = x(t)$, $y = y(t)$, un punct singular poate fi caracterizat şi prin

$$\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0.$$

Mai general, punctul singular M_0, corespunzător lui t_0, se numeşte **singular de ordinul** k, dacă

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0) &= \ddot{x}(t_0) = ... = x^{(k-1)}(t_0) = 0; \\ y(t_0) &= \ddot{y}(t_0) = ... = y^{(k-1)}(t_0) = 0, \end{aligned}$$

şi cel puţin una din derivatele de ordin k, $x^{(k)}(t_0)$, $y^{(k)}(t_0)$ este diferită de zero.

Presupunem că cel puţin una din derivatele de ordinul doi $\ddot{x}(t_0)$, $\ddot{y}(t_0)$ este diferită de zero, adică M_0 este singular de ordinul al doilea. În acest caz, pentru determinarea pantelor dreptelor tangente, vom aplica regula lui l'Hospital:

$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t \to t_0} \frac{\ddot{y}(t)}{\ddot{x}(t)} = \frac{\ddot{y}(t_0)}{\ddot{x}(t_0)}.$$

În cazul în care ambele derivate $\ddot{x}(t_0)$, $\ddot{y}(t_0)$ sunt nule, avem din nou o nedeterminare de tip $\frac{0}{0}$ şi aplicăm regula lui l'Hospital etc.

Exemplu: Fie curba *(foliul lui Descartes)* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Determinăm o parametrizare a curbei, pentru a studia punctele singulare ale curbei în reprezentare parametrică.

Pentru aceasta, intersectăm curba cu dreapta $y = tx$ (procedeu demn de reţinut!). Înlocuind pe y în ecuaţia curbei, obţinem:

$$x^2(x + t^3x - 3at) = 0.$$

Lăsând la o parte rădăcina dublă $x = 0$ (care corespunde punctului $O(0,0)$), avem:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \; y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \tag{1.65}$$

ceea ce reprezintă parametrizarea căutată.

În reprezentarea parametrică 1.65, avem:

$$\dot{x} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}, \; \dot{y} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2}.$$

Sistemul $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ nu admite soluţii, deci, în această reprezentare, toate punctele curbei (inclusiv $O(0,0)$) sunt puncte regulate.

În reprezentare implicită, avem $F'_x = 3x^2 - 3ay$, $F'_y = 3y^2 - 3ax$. Ataşăm sistemul 1.60 şi găsim unica soluţie $x = 0$, $y = 0$, adică punctul $O(0,0)$. În acest punct, calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} F''_{x^2}\rfloor_0 &= 6x_{|x=0,y=0} = 0, \\ F''_{xy}\rfloor_0 &= -3a_{|x=0,y=0} = -3a, \\ F''_{y^2}\rfloor_0 &= 6y_{|x=0,y=0} = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, $(0,0)$ este punct singular de ordinul al doilea. Deoarece $F''_{y^2} = 0$, una din dreptele tangente este verticala $x = 0$; conform cu 1.63, mai există o dreaptă tangentă, având panta $m = 0$, deci, O este un nod pentru curba considerată, dreptele tangente în acest punct fiind Oy şi, respectiv, Ox.

Aşadar, acelaşi punct al unei curbe plane poate apărea ca punct regulat într-o reprezentare şi ca punct singular în alta, fapt pe care, în general, nu îl luăm în considerare.

1.7.2 Puncte multiple

Definitia 1.27 *Un punct al unei curbe plane se numeşte* ***punct multiplu de ordin p***$\in \mathbb{N}^*$ *dacă curba trece de p ori prin acel punct.*

Dacă $p = 2$, punctul este un punct dublu; dacă $p = 3$, punctul este un punct triplu; dacă $p = 4$, punctul este un punct cvadruplu etc.

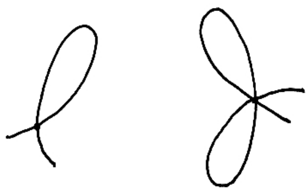


fig. 1.10

Evident, o curbă dată în reprezentarea explicită $y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}$, nu poate avea puncte multiple (deoarece orice paralelă la Oy nu poate intersecta graficul lui f în mai mult de un punct); prin urmare, nu vom lucra în reprezentarea explicită, ci doar în cea implicită sau parametrică.

Să considerăm $M_0(x_0, y_0)$ un punct dublu al curbei (C) dată **în reprezentarea implicită** $F(x,y) = 0$ şi fie (d) o dreaptă care trece prin M_0, de direcţie $\overrightarrow{v}(v_1, v_2)$:

$$(d)\begin{cases} x = x_0 + \rho v_1 \\ y = y_0 + \rho v_2 \end{cases},$$

punctul M_0 corespunzând la valoarea zero a parametrului (fig. 1.11).

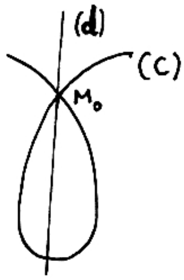


fig. 1.11

Intersecţia dintre (d) şi (C) revine la rezolvarea sistemului

$$x = x_0 + \rho v_1, y = y_0 + \rho v_2, F(x, y) = 0,$$

care este echivalent cu sistemul

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_0 + \rho v_1 \\ y = y_0 + \rho v_2 \\ F(x_0 + \rho v_1, y_0 + \rho v_2) = 0 \end{array} \right. , \tag{1.66}$$

ultima ecuaţie a acestui sistem fiind ecuaţia care determină valorile parametrului ρ corespunzătoare punctelor de intersecţie.

Dezvoltăm membrul întâi al ultimei ecuaţii 1.66 după formula lui Taylor:

$$\begin{array}{c} F(x_0, y_0) + \rho \left[v_1 F'_x(x_0, y_0) + v_2 F'_y(x_0, y_0) \right] + \frac{1}{2}\rho^2 [v_1^2 F''_{x^2}(x_0, y_0) + \\ +2v_1 v_2 F''_{xy}(x_0, y_0) + +v_2^2 F''_{y^2}(x_0, y_0)] + ... = 0. \end{array} \tag{1.67}$$

Dacă M_0 este punct dublu, atunci ecuaţia 1.67 în ρ trebuie să aibă rădăcină dublă $\rho = 0$ pentru v_1, v_2 arbitrari, adică

$$F(x_0, y_0) = 0,\ F'_x(x_0, y_0) = 0,\ F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

fără ca termenul în ρ^2 să fie identic nul, adică cel puţin una din derivatele parţiale de ordinul al doilea

$$F''_{x^2}(x_0, y_0) = F''_{x_0^2},\ F''_{xy}(x_0, y_0) = F''_{x_0 y_0},\ F''_{y^2}(x_0, y_0) = F''_{y_0^2},$$

trebuie să fie diferită de zero:

$$\left(F''_{x_0^2} \right)^2 + \left(F''_{x_0 y_0} \right)^2 + \left(F''_{y_0^2} \right)^2 > 0.$$

Aşadar:

Teorema 1.28 *Coordonatele (x_0, y_0) ale unui punct dublu al curbei dată în reprezentarea implicită $F(x, y) = 0$, verifică condiţiile:*

$$F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) = 0, \tag{1.68}$$

şi

$$\left(F''_{x_0^2} \right)^2 + \left(F''_{x_0 y_0} \right)^2 + \left(F''_{y_0^2} \right)^2 > 0, \tag{1.69}$$

adică, orice punct dublu este punct singular de ordinul al doilea pentru curba dată.

Dacă în dezvoltarea Taylor a membrului întâi al ecuaţiei 1.67 punem în evidenţă derivatele parţiale până la şi inclusiv ordinul p:

$$F(x_0, y_0) + \rho \left[v_1 (F'_x)_{M_0} + v_2 \left(F'_y\right)_{M_0} \right] + \frac{1}{2!}\rho^2 \left[v_1 (F'_x)_{M_0} + v_2 \left(F'_y\right)_{M_0} \right]' + ...$$
$$+ \frac{1}{(p-1)!}\rho^{p-1} \left[v_1 (F'_x)_{M_0} + v_2 \left(F'_y\right)_{M_0} \right]^{(p-2)} + \frac{1}{p!}\rho^p \left[v_1 (F'_x)_{M_0} + v_2 \left(F'_y\right)_{M_0} \right]^{(p-1)} + ... = 0.$$

putem, printr-un raţionament analog celui de mai sus, motiva:

Teorema 1.29 *Coordonatele* (x_0, y_0) *ale unui punct multiplu de ordin* p *al unei curbe date în reprezentarea implicită* $F(x, y) = 0$ *au proprietatea că funcţia* F *şi toate derivatele ei parţiale până la ordinul* $p - 1$ *inclusiv se anulează în* (x_0, y_0) :

(1.70) $$\frac{\partial^m F}{\partial x^r \partial y^s}(x_0, y_0) = 0,$$

pentru $\forall (r, s)$ *astfel încât* $r + s = m$, $m \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, *şi cel puţin o derivată parţială de ordinul* p *este nenulă în acest punct:*

(1.71) $$\exists (r, s), \ r + s = p, \quad \frac{\partial^p F}{\partial x^r \partial y^s}(x_0, y_0) \neq 0,$$

*adică, **orice punct multiplu de ordin*** p ***al curbei*** (C) ***este punct singular de ordin*** p ***al lui*** (C).

În **reprezentare parametrică**, un punct multiplu de ordin p al curbei $x = x(t)$, $y = y(t)$ va fi caracterizat prin

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_2) = ... = x(t_p) \\ y(t_1) &= y(t_2) = ... = y(t_p), \end{aligned}$$

cu t_1, $t_2, ..., t_p$ diferiţi.

Merită remarcat faptul că, în reprezentare parametrică, un punct multiplu nu este neapărat caracterizat prin anularea simultană a derivatelor $\dot{x}$, $\dot{y}$. Ca exemplu, să luăm curba

$$\begin{cases} x = t(t-1) \\ y = t(t-1)(t-2). \end{cases}$$

Evident, $O(0,0)$ este punct dublu, corespunzător valorilor $t = 0$ şi $t = 1$. În acest punct, avem

$$\dot{x} = 2t - 1 \neq 0.$$

1.8 Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane

1.8.1 Familii de curbe plane depinzând de un parametru

Fie ecuaţia

(1.72) $$F(x, y, \alpha) = 0,$$

în care α este un parametru şi să presupunem că, pentru orice α aparţinând unui interval sau reuniuni de intervale, sunt îndeplinite condiţiile ca ecuaţia 1.72 (cu α fixat) să reprezinte o curbă.

Definitia 1.30 *Mulţimea curbelor date de ecuaţia 1.72 este numită* ***familie de curbe care depinde de un parametru.***

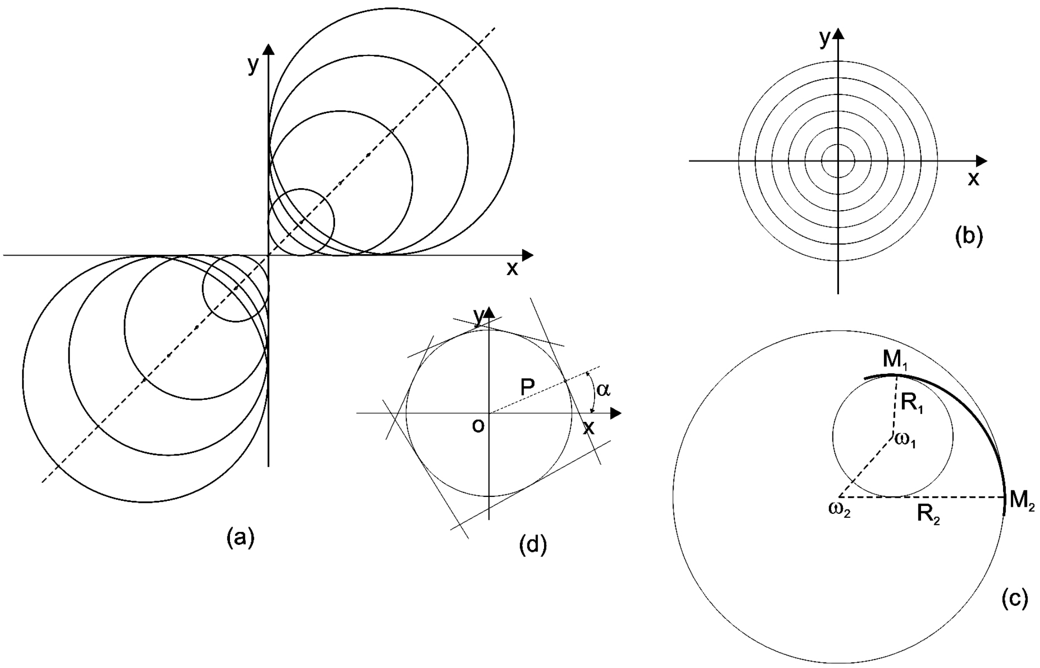


fig. 1.12

Exemplul 1.31 *Ecuaţia*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 - \alpha^2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

reprezintă o familie de cercuri, cu centrele pe prima bisectoare, tangente hiperbolei degenerate formate din axele de coordonate (fig. 1.12 (a)). (Două curbe se spun a fi ***tangente*** *într-un punct, dacă au aceeaşi dreaptă tangentă în punctul respectiv).*

Exemplul 1.32 *Ecuaţia:*

$$x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

reprezintă o familie de cercuri concentrice (fig. 1.12 (b)). Evident, nu există nici o curbă care să fie tangentă la toate aceste cercuri.

Exemplul 1.33 *Ecuaţia:*

$$F(X, Y, t) \equiv [X - \alpha(t)]^2 + [Y - \beta(t)]^2 - R^2(t) = 0,\ \ t \in (t_1, t_2),$$

în care
(1.73)

$$\alpha(t) = x(t) - \frac{\dot{y}(t)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \beta(t) = y(t) + \frac{\dot{x}(t)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)},$$

$$R(t) = \left| \frac{\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \right|,$$

reprezintă o familie de cercuri şi anume, toate cercurile osculatoare ale arcului de curbă $(C)\, x = x(t)\,, y = y(t)\,,\ t \in (t_1, t_2)$. Evident, aceste cercuri sunt tangente la curba (C) (fig. 1.12 (c)).

Exemplul 1.34 *Ecuaţia:*

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \quad (p > 0),$$

reprezintă o familie de drepte, perpendiculare pe o direcţie arbitrară ce trece prin originea axelor, şi situate la distanţa p faţă de origine. Evident, toate aceste drepte sunt tangente cercului cu centrul în origine şi raza p (fig. 1.12 (d)).

Din exemplele de mai sus remarcăm că, fiind dată o familie de curbe, se poate întâmpla să existe o curbă la care să fie tangente toate curbele familiei, sau să nu existe o asemenea curbă.

Definitia 1.35 *Dată fiind familia de curbe 1.72, dacă există o curbă (I) cu proprietatea că toate curbele familiei sunt tangente lui (I), atunci curba (I) poartă numele de* ***înfăşurătoarea*** *curbelor familiei date.*

Definitia 1.36 *Dacă familia de curbe 1.72 admite înfăşurătoare* (I), *atunci punctul de contact al unei curbe* (C_α) *a familiei (corespunzătoare unei valori* α *a parametrului) cu înfăşurătoarea* (I) *se numeşte* ***punct caracteristic*** *al curbei* (C_α).

Presupunem că înfăşurătoarea (I) există şi, mai mult, punctul caracteristic, să-i spunem M, **nu este singular pentru nici una din curbele** (C_α) **şi** (I).

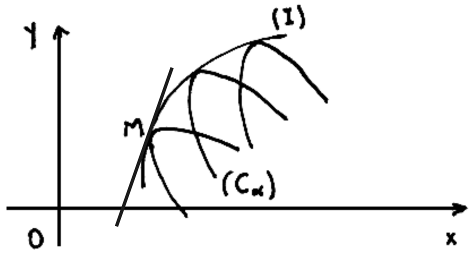


fig. 1.13

Dacă parametrul α variază, curba (C_α) variază, ceea ce ne arată că coordonatele (x, y) ale punctului M sunt funcţii de parametrul α, cu alte cuvinte, ecuaţiile înfăşurătoarei sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \end{array} \right. \tag{1.74}$$

cu $x(\alpha), y(\alpha)$ anumite funcţii de α, ce se cer determinate.

Aplicând definiţia 1.35, va trebui să egalăm panta tangentei în M la curba (C_α) $\left(y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y} \right)$ cu panta tangentei în M la curba (I) $\left(\dfrac{dy}{d\alpha} / \dfrac{dx}{d\alpha} \right)$, deci:

$$-\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{\dfrac{dy}{d\alpha}}{\dfrac{dx}{d\alpha}},$$

de unde deducem relaţia:

$$F'_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \cdot \frac{dy}{d\alpha} = 0. \tag{1.75}$$

Deoarece $M \in (C_\alpha)$, coordonatele lui M date de 1.74 trebuie să verifice pentru orice valoare a lui α ecuaţia curbelor familiei 1.72, adică

$$F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Derivând această identitate în raport cu α, obţinem

$$F'_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \cdot \frac{dy}{d\alpha} + F'_\alpha = 0 \tag{1.76}$$

Combinând 1.75 cu 1.76, rezultă:

$$F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{1.77}$$

În acest mod am obţinut: **coordonatele punctului curent al înfăşurătoarei curbelor** 1.72 **verifică sistemul format din ecuaţiile** 1.72 **şi** 1.77.

Să presupunem că familia 1.72 este formată din **curbe care au puncte singulare**. Fie S un punct singular al curbei (C_α).

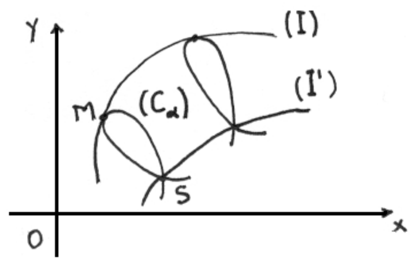


fig. 1.14

Dacă parametrul α variază, S descrie o curbă (I') (fig. 1.14). Coordonatele lui S, funcţii de α, verifică identic ecuaţia 1.72, deci şi relaţia 1.76, obţinută prin derivarea identităţii în raport cu α.

Deoarece S este punct singular, avem:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0,$$

care înlocuite în 1.76 conduc şi în acest caz la 1.77.

Aşadar, **şi coordonatele punctelor singulare ale curbelor familiei** 1.72 **verifică sistemul format din ecuaţiile** 1.72 **şi** 1.77.

Să considerăm acum problema inversă: să arătăm că eliminarea parametrului α între ecuaţiile 1.72 şi 1.77 (respectiv explicitarea în funcţie de α a lui x, y) conduce la ecuaţia (respectiv ecuaţiile) unei curbe tangente tuturor curbelor familiei 1.72.

În scopul demonstrării acestei afirmaţii, fiind dată ecuaţia 1.72, să-i ataşăm ecuaţia 1.77, obţinută prin derivare în raport cu α şi să presupunem că pentru o valoare oarecare (fixată) a parametrului α, sunt îndeplinite condiţiile ca ecuaţia 1.72 să reprezinte o curbă (C_α), iar ecuaţia 1.77 o curbă, să-i spunem (Γ_α). Mai mult, presupunem că (Γ_α) şi (C_α) au un punct comun $M(x, y)$ pentru care avem:

$$\frac{D(F, F'_\alpha)}{D(x, y)} \equiv \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{x\alpha} & F''_{y\alpha} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.78}$$

$$F''_{\alpha^2}(x, y, \alpha) \neq 0. \tag{1.79}$$

Înainte de a trece mai departe, să ne amintim teorema de existenţă referitoare la funcţiile implicite pentru două ecuaţii implicite.

Teorema 1.37 *Fiind date ecuaţiile $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ verificate de coordonatele x_0, y_0, z_0 ale unui punct M, dacă funcţiile $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ sunt continue şi au derivate parţiale de prim ordin continue într-o anumită vecinătate a lui M şi dacă determinantul funcţional*

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

este diferit de zero în M, ecuaţiile $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ definesc două (şi numai două) funcţii $y = f(x)$, $y = g(x)$, biunivoce şi continue în vecinătatea valorii $x = x_0$, care satisfac identic ecuaţiile $F = 0$, $G = 0$ şi iau valorile y_0 şi z_0 pentru $x = x_0$.

Derivatele funcţiilor y şi z, de asemenea continue, sunt date de sistemul

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0 \\ G'_x + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' = 0 \end{cases} \tag{1.80}$$

Reîntorcându-ne la 1.78, în primul rând putem afirma că, în acest caz, cel puţin una din derivatele F'_x, F'_y este nenulă în M, afirmaţie adevărată simultan şi pentru derivatele $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$. Rezultă că punctul M este punct **regulat pentru curbele** (C_α) **şi** (Γ_α).

În al doilea rând, putem aplica teorema de mai sus. sistemului 1.72, 1.77 şi obţinem pentru coordonatele x, y ale punctului M explicitarea:

$$\begin{cases} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \end{cases}, \tag{1.81}$$

$x(\alpha), y(\alpha)$ fiind funcţii continue (cu derivate continue) care verifică sistemul 1.72, 1.77:

$$F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0, \ F'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0. \tag{1.82}$$

Dacă α variază, curbele (C_α) şi (Γ_a) variază. Punctul M variind de asemenea, el descrie o curbă reprezentată parametric de 1.81, pentru care avem:

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_x \dfrac{dx}{d\alpha} + F'_y \dfrac{dy}{d\alpha} = 0 \\ F''_{\alpha x} \dfrac{dx}{d\alpha} + F''_{\alpha y} \dfrac{dy}{d\alpha} = -F''_{\alpha^2} \end{array} \right. , \tag{1.83}$$

relaţii obţinute prin derivare în raport cu α a identităţilor 1.82.

Ţinând cont de 1.78 şi 1.79, sistemul 1.83 în necunoscutele $\dfrac{dx}{d\alpha}, \dfrac{dy}{d\alpha}$ nu poate admite soluţia banală. Aceasta ne arată că punctul M este **punct regulat pentru curba** 1.81.

Mai mult, din prima relaţie 1.83, avem

$$-\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{\dfrac{dy}{d\alpha}}{\dfrac{dx}{d\alpha}},$$

ceea ce arată că dreapta tangentă în M la (C_α) coincide cu dreapta tangentă în M la curba 1.81, care este prin urmare curba (I), înfăşurătoarea curbelor familiei 1.72, iar M este punct caracteristic.

Am demonstrat:

Teorema 1.38 *Locul geometric al punctelor comune curbelor 1.72 şi 1.77,*

$$\begin{aligned} F(x,y,\alpha) &= 0, \\ F'_\alpha(x,y,\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

*numit **curbă discriminantă** a familiei 1.72 este format din înfăşurătoarea curbelor familiei 1.72 şi din locul geometric al punctelor singulare ale acestor curbe.*

Observatia 1.39 *Dacă $F''_{\alpha^2} = 0$ pentru orice valoare a parametrului α, avem:*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}(x,y,\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(F'_\alpha(x,y,\alpha)\right) = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) \equiv \phi(x,y) \Longleftrightarrow F(x,y,\alpha) \equiv \alpha\phi(x,y) + \psi(x,y), \end{aligned}$$

deci, în acest caz, familia de curbe se prezintă sub forma

$$\alpha\phi(x,y) + \psi(x,y) = 0 \tag{1.84}$$

şi, în general, nu putem determina o înfăşurătoare a familiei 1.84 în sensul definiţiei 1.35 Cu toate acestea, deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} \equiv \phi(x, y) = 0$, *prin "abuz", convenim a spune că* $\phi(x, y) = 0$ *este înfăşurătoarea curbelor familiei 1.84.*

Observatia 1.40 *Nu este exclusă posibilitatea să existe unele puncte caracteristice presupuse puncte regulate atât pentru* (I) *cât şi pentru curbele* (C_α) *corespunzătoare, în care* F''_{α^2} *să se anuleze. În aceste puncte, deoarece sistemul 1.83 admite soluţie nebanală, trebuie să avem şi determinantul funcţional* $\dfrac{D(F, F'_\alpha)}{D(x, y)}$ *de asemenea nul şi reciproc.*

Observatia 1.41 *Să considerăm două curbe* (C_α) *şi* $(C_{\alpha+\Delta\alpha})$ *ale familiei 1.72, corespunzătoare valorilor apropiate* α *şi* $\alpha + \Delta\alpha$ *ale parametrului* α. *În general, curbele* (C_α) *şi* $(C_{\alpha+\Delta\alpha})$ *se intersectează în unul sau mai multe puncte. Să notăm cu* P *un astfel de punct (fig. 1.15). Coordonatele lui* P *verifică sistemul:*

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0,$$

care este echivalent cu sistemul:

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad \frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

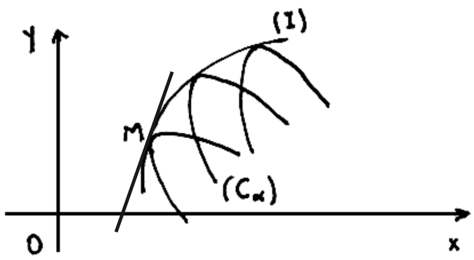


fig. 1.15

Trecând la limită pentru $\Delta\alpha \to 0$, punctul P tinde la un punct, să spunem M, ale cărui coordonate verifică sistemul

$$F(x, y, \alpha) = 0, \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0,$$

adică sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Concludem că M aparţine curbei discriminante a familiei 1.72. Dacă M nu este singular pentru (C_α), atunci el aparţine înfăşurătoarei curbelor familiei 1.72, iar dacă M este singular, el aparţine locului geometric al punctelor singulare ale curbelor familiei 1.72.

Observatia 1.42 *Este posibil să existe puncte caracteristice care să nu provină din intersecţia a două curbe infinit apropiate* (C_α) *şi* $(C_{\alpha+\Delta\alpha})$, *după cum ne vom convinge la sfârşitul acestui paragraf.*

1.8.2 Familii de curbe plane depinzând de doi parametri

Fie ecuaţia:

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0, \tag{1.85}$$

în care perechea (α, β) aparţine unui domeniu plan (Δ), astfel încât pentru orice pereche (α, β) fixată (din (Δ)), sunt îndeplinite condiţiile ca ecuaţia 1.85 să reprezinte o curbă.

Definitia 1.43 *Mulţimea curbelor date de ecuaţia 1.85 este numită* ***familie de curbe care depinde de doi parametri.***

În general, familia depinzând de doi parametri nu admite înfăşurătoare.

Vom lucra în **cazul în care există o relaţie de legătură între parametrii** α **şi** β, să spunem:

$$\phi(\alpha, \beta) = 0, \tag{1.86}$$

dată în aşa fel încât să se poată explicita un parametru. Aceasta, geometric, înseamnă că în planul $\pi(\alpha, \beta)$, ecuaţia 1.86 reprezintă o curbă situată total sau parţial în (Δ) (fig. 1.16).

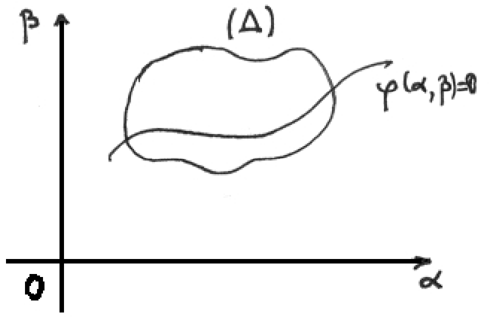


fig. 1.16

Dacă $\beta = \beta(\alpha)$ este explicitarea lui 1.86, atunci ecuaţia 1.85 devine:

$$F(x, y, \alpha, \beta(\alpha)) = 0, \tag{1.87}$$

care reprezintă o familie de curbe depinzând de un parametru.

În conformitate cu rezultatele de mai sus, trebuie să derivăm 1.87 în raport cu α şi obţinem:

$$F'_\alpha + F'_\beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Însă, din 1.86, avem:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\dfrac{d\phi}{d\alpha}}{\dfrac{d\phi}{d\beta}},$$

astfel încât ultima relaţie se poate scrie sub forma:

$$F'_\alpha \cdot \frac{d\phi}{d\beta} - F'_\beta \cdot \frac{d\phi}{d\alpha} = 0,$$

ecuaţie care este identică cu

$$\frac{D(F, \phi)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \tag{1.88}$$

Avem, deci:

Teorema 1.44 *Curba discriminantă a unei familii de curbe plane depinzând de doi parametri $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, legaţi între ei printr-o relaţie de forma $\phi(\alpha, \beta) = 0$, se obţine eliminând parametrii α şi β din sistemul:*

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0, \;\; \phi(\alpha, \beta) = 0, \;\; \frac{D(F, \phi)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \tag{1.89}$$

În cazul în care curbele 1.85 nu au puncte singulare, curba discriminantă coincide cu înfăşurătoarea curbelor familiei.

1.8.3 Evoluta unei curbe plane

Fiind dată o curbă, dreptele tangente la ea constituie o familie de drepte depinzând de un parametru (parametrul pe curbă), a cărei înfăşurătoare este curba dată (fig. 1.17).

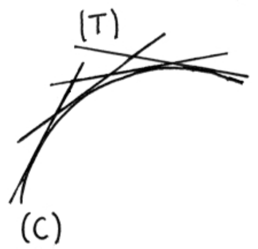


fig. 1.17

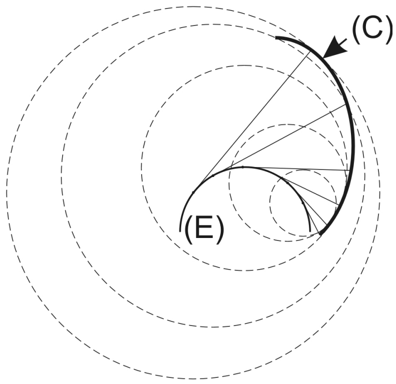


fig. 1.18

Evident, şi dreptele normale ale unei curbe plane constituie o familie de drepte depinzând de un parametru şi anume, parametrul ales pe curbă.

Definitia 1.45 *Numim* ***evoluta*** *sau* ***desfăşurata*** *unei curbe, înfăşurătoarea normalelor curbei date.*

Din definiţia dată, remarcăm că dreptele tangente la evoluta (E) sunt drepte normale la curba dată (C) (fig. 1.18).

Dacă considerăm ecuaţia curbei (C) dată sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

atunci, într-un punct curent $M(x(t), y(t))$ al curbei (C), ecuaţia dreptei normale va fi (formula 1.38)

$$[X - x(t)]\dot{x}(t) + [Y - y(t)]\dot{y}(t) = 0, \tag{1.90}$$

adică o ecuaţie de forma:

$$F(X, Y, t) = 0.$$

Pentru a determina evoluta, aplicăm teorema 1.38.

Aceasta înseamnă că trebuie eliminat parametrul t (pentru determinarea ecuaţiei evolutei sub formă implicită), sau de explicitat X şi Y în funcţie de t (pentru determinarea ecuaţiei evolutei sub formă parametrică), între ecuaţia 1.90 şi derivata ei în raport cu t, $\dot{F}_t(X, Y, t) = 0$:

$$[X - x(t)]\ddot{x}(t) + [Y - y(t)]\ddot{y}(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t). \tag{1.91}$$

Plasându-ne în ipoteza:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.92}$$

ceea ce înseamnă despre curba (C) că este de clasă cel puţin doi, iar M este punct regulat şi neinflexionar al lui (C), putem rezolva în mod unic sistemul format din ecuaţiile 1.90, 1.91 în necunoscutele $X - x(t), Y - y(t)$ şi apoi explicita X şi Y ca funcţii de t, sub forma:

$$X = x(t) - \frac{\dot{y}(t)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \quad Y = y(t) + \frac{\dot{x}(t)\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \tag{1.93}$$

ecuaţii ce reprezintă, sub formă parametrică, evoluta curbei (C) date.

Să observăm că ecuaţiile 1.93 , într-un punct fixat $M_0 \in (C)$, sunt identice cu formulele 1.47 ale coordonatelor centrului cercului osculator corespunzător lui M_0. Astfel, are loc

Teorema 1.46 *Evoluta unei curbe este locul geometric al centrelor cercurilor osculatoare ale curbei date (fig. 1.18).*

Exemplu: Pentru a determina evoluta elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, considerăm parametrizarea: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ şi avem:

$$\dot{x} = -a\sin t,\ \ddot{x} = -a\cos t,\ \dot{y} = b\cos t,\ \ddot{y} = -b\sin t,$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = ab.$$

Înlocuind în 1.93, obţinem

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,\ Y = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

1.8.4 Evolventa unei curbe plane

Definitia 1.47 *Numim* ***evolventa*** *sau* ***desfăşurătoarea*** *unei curbe plane (C), o curbă plană (D) care admite curba dată (C) drept evolută.*

Din definiţia de mai sus şi cea a evolutei, rezultă că dreptele tangente la (C) sunt drepte normale la (D) ((C) fiind înfăşurătoarea normalelor curbei (D)) şi faptul că nu există, pentru o curbă (C), o unică evolventă (D). Orice curbă (D') perpendiculară pe dreptele tangente la (C) reprezintă o evolventă a curbei (C) (fig. 1.19).

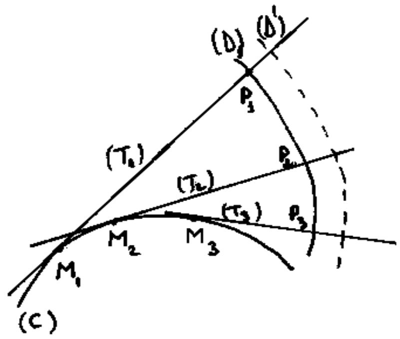


fig. 1.19

Nu există metode generale simple pentru determinarea ecuaţiei evolventei unei curbe oarecare, în schimb ea se poate construi prin metode mecanice.

Pentru a putea rezolva această problemă, demonstrăm teorema care urmează.

Teorema 1.48 *Diferenţa razelor de curbură în două puncte ale evolventei este egală cu lungimea arcului corespunzător pe curba dată.*

Demonstraţie: Fie $x = x(s), y = y(s)$ ecuaţiile parametrice ale curbei (C), cu s parametrul natural (definit în 1.14). Fie $M \in (C)$ şi P punctul în care evolventa (D) întâlneşte dreapta tangentă în M la (C) (fig. 1.20).

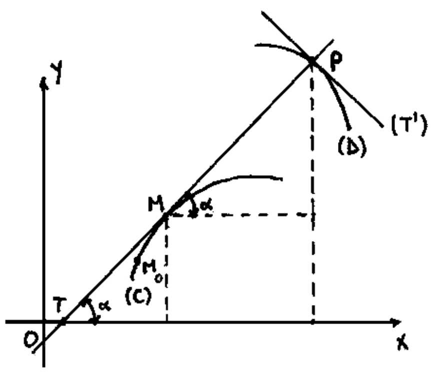


fig. 1.20

Notând cu R raza de curbură MP, cu α, înclinarea dreptei tangente TM faţă de Ox şi cu X, Y coordonatele punctului P, avem: $X = x + R\cos\alpha$,

$Y = y + R\sin\alpha$. Ţinând cont că $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha$ (relaţiile 1.40 şi 1.41), rezultă pentru X şi Y expresiile:

$$\begin{cases} X = x + R\dfrac{dx}{ds} \\ Y = y + R\dfrac{dy}{ds} \end{cases}.$$

Dreapta tangentă (T') în P la (D) are parametrii directori $\dfrac{dX}{ds}, \dfrac{dY}{ds}$ şi cum ea este perpendiculară pe dreapta tangentă (MT), trebuie să avem:

$$\frac{dX}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dY}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} = 0,$$

relaţie care devine, ţinând cont de expresiile X şi Y :

$$\left(\frac{dx}{ds} + \frac{dR}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + R\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dR}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + R\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dy}{ds} = 0,$$

sau încă

$$\left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)\left(1 + \frac{dR}{ds}\right) + \left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)R = 0. \tag{1.94}$$

Să ne reamintim că are loc egalitatea $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1$. Derivând această relaţie în raport cu s, găsim:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

Înlocuind în condiţia de ortogonalitate 1.94, rezultă

$$1 + \frac{dR}{ds} = 0,$$

care integrată ne dă relaţia:

$$R + s = c,$$

valabilă pentru orice poziţie a lui $M \in (C)$, deci şi a lui $P \in (D)$ corespunzător.

Luând pe curba (C) două puncte M_1 şi M_2, cărora le corespund punctele P_1 şi P_2 pe evolventa (D), avem pe de o parte

$$\overset{\frown}{M_0M_1} = s_1, \quad \overset{\frown}{M_0M_2} = s_2,$$

iar pe de altă parte

$$\begin{aligned} R_1 + s_1 &= c, \\ R_2 + s_2 &= c, \end{aligned}$$

relaţii care scăzute termen cu termen conduc la

$$R_1 - R_2 = s_2 - s_1 = \overset{\frown}{M_0 M_2} - \overset{\frown}{M_0 M_1},$$

adică

$$R_1 - R_2 = \overset{\frown}{M_1 M_2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 1.48 ne conduce la următoarea construcţie mecanică a evolventei unei curbe plane (C) :

Întindem un fir inextensibil, de lungime K, de-a lungul curbei (C), începând din M_0 - originea arcelor. Desfăşurând firul, ţinându-l întins aşa fel încât să rămână mereu tangent la curba (C), extremitatea acestui fir va descrie evolventa (desfăşurătoarea) (D) a curbei (C).

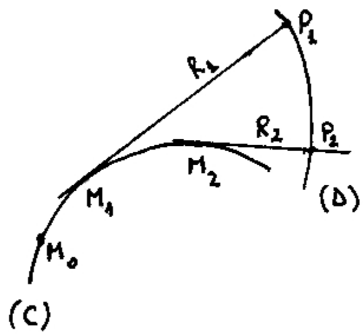


fig. 1.21

Observatia 1.49 *În fig. 1.21, $M_1, M_2 \in (C)$ sunt centre de cercuri osculatoare (pentru (D)), în conformitate cu teorema 1.46. Cum arcul este mai mare decât coarda ($\overset{\frown}{M_1 M_2} > M_1 M_2$), avem din teorema 6.5. relaţia*

$$R_1 - R_2 > M_1 M_2,$$

ceea ce exprimă faptul că distanţa centrelor a două cercuri osculatoare este mai mică decât diferenţa razelor, adică unul din ele este interior celuilalt (nu se întretaie) (fig. 1.12 (c)).

Acest rezultat ne exprimă că cercurile osculatoare ale unei curbe plane constituie o familie de curbe depinzând de un parametru (exemplul 3 §6), care admite înfăşurătoare (înfăşurătoarea fiind curba însăşi), pentru care **un punct caracteristic nu provine din puncte de intersecţie a două curbe apropiate ale familiei.**

În acest fel, observaţia 1.42 este motivată.

1.9 Reperul şi formulele lui Frenet pentru curbe plane

Să considerăm un arc de curbă plană (C) dat în reprezentarea parametrică $x = x(t)$, $y = y(t)$. Deoarece coordonatele unui punct $M \in (C)$ sunt componentele vectorului de poziţie $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$, avem

$$\overrightarrow{r}\,(t) = x\,(t)\,\overrightarrow{i} + y\,(t)\,\overrightarrow{j}\,, \quad t \in (a,b)\,, \tag{1.95}$$

sau pe scurt

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}\,(t)\,, \quad t \in (a,b)\,. \tag{1.96}$$

Ecuaţia 1.96 poartă numele de **ecuaţia vectorială** a arcului de curbă plană (C), cu t drept **parametru** al curbei. Funcţia $\vec{r}(t)$ introdusă de aceasta este o funcţie vectorială de un argument scalar.

Dacă $M \in (C)$ este un punct regulat, atunci definiţia 1.2, ne asigură că funcţia

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t) = \dot{x}\,(t)\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,(t)\,\overrightarrow{j}$$

există şi este diferită de zero în acest punct.

Dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}\,(t^*)$ este o altă reprezentare vectorială a aceluiaşi arc, cu t^* drept parametru, trebuie să avem pe de o parte, o legătură între parametrii t şi t^*, să spunem de forma

$$t = t\,(t^*)\,, \quad t^* \in (a,b)\,, \tag{1.97}$$

iar pe de altă parte, pentru un punct regulat $M \in (C)$ trebuie să avem îndeplinită continuitatea lui 1.97 şi condiţia

$$\frac{dt}{d\,t^*} \neq 0, \tag{1.98}$$

aşa cum se constată din relaţia

$$\frac{d\,\overrightarrow{r}}{d\,t^*} = \frac{d\,\overrightarrow{r}}{d\,t} \cdot \frac{dt}{d\,t^*},$$

şi din faptul că neglijăm posibilitatea ca un punct să apară drept punct regulat într-o reprezentare şi drept punct singular în alta.

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc regulat al curbei (C) date în reprezentarea vectorială 1.95 cu t drept parametru; expresia 1.11 a lungimii arcului $\overset{\frown}{AB}$ se scrie vectorial

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,t} \right\| dt = \int_{t_A}^{t_B} \left\| d\overrightarrow{r} \right\|,$$

iar pentru un arc regulat oarecare $\overset{\frown}{M_0M} \subset (C)$, cu M_0 corespunzător valorii t_0 a parametrului, iar M, corespunzător valorii t, aceasta se scrie

$$s\,(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,\widetilde{t}} \right\| d\widetilde{t} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\dot{\overrightarrow{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} \right)} d\widetilde{t} \qquad \left(\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,\widetilde{t}} \right). \tag{1.99}$$

Deoarece funcţia $s = s\,(t)$ este continuă, monoton crescătoare şi

$$\dot{s}\,(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,t} \right\| \neq 0 \tag{1.100}$$

rezultă că funcţia sa inversă există şi este continuă, să o notăm cu $t = t\,(s)$. Această funcţie respectă condiţia 1.98 $\left(\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} \neq 0 \right)$ şi deci s poate fi luat drept parametru pe curbă, obţinând pentru arcul regulat respectiv ecuaţia vectorială

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}\,(s), \tag{1.101}$$

cu s drept parametru. s se numeşte **parametru natural** pe curba (C).

Derivând 1.101 în raport cu parametrul s prin intermediul parametrului t, avem:

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{d\,s} = \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,t} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\overrightarrow{r}}}{\dot{s}}, \tag{1.102}$$

relaţie care în conformitate cu 1.32, ne arată că vectorul $\frac{d\overrightarrow{r}}{d\,s}$ este un vector tangent în punctul regulat $M \in (C)$. Mai mult, din 1.100 şi 1.102, avem:

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,s} \right\| = 1, \tag{1.103}$$

ceea ce ne arată că $\frac{d\overrightarrow{r}}{d\,s}$ este un vector tangent unitar în M la (C).

Definitia 1.50 *Vectorul* $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{d\,s}$ *îl vom nota cu* $\overrightarrow{\tau}$ *şi-l vom numi* ***versor tangent*** *la arcul de curbă* (C) *în punctul regulat* $M \in (C)$.

Avem, deci

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{r}}{d\,s}. \tag{1.104}$$

Deoarece

$$\overrightarrow{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{r}\,(s + \Delta s) - \overrightarrow{r}\,(s)}{\Delta s} \quad \text{şi } s + \Delta s > s,$$

tot din teorema 1.3. §.1, rezultă că $\overrightarrow{\tau}$ este orientat în M de la $\overrightarrow{r}\,(s)$ spre $\overrightarrow{r}\,(s + \Delta s)$, adică, în sensul pozitiv de parcurs pe curbă (fig. 1.22).

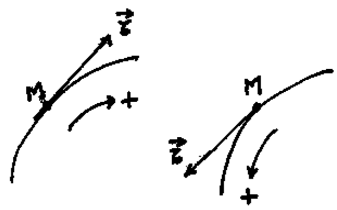


fig. 1.22

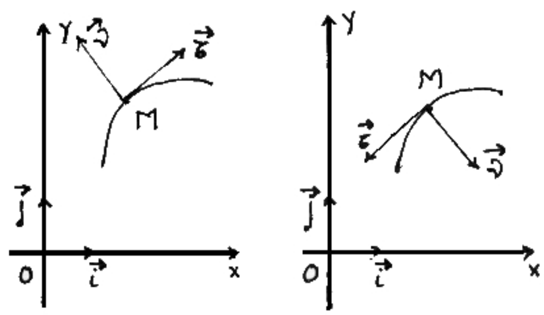


fig. 1.23

Să notăm cu $\overrightarrow{\nu}$ un vector unitar perpendicular pe $\overrightarrow{\tau}$, cu proprietatea că în punctul M, ansamblul $\{M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}\}$ formează un reper orientat ca şi reperul $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ (orientat drept) (fig. 1.23).

Definitia 1.51 *Versorul* $\overrightarrow{\nu}$ *introdus mai sus poartă numele de* ***versor normal*** *la arcul de curbă* (C) *în punctul regulat* $M \in (C)$.

Definitia 1.52 *Ansamblul* $\{M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}\}$ *se numeşte* ***reperul mobil al lui Frenet*** *în punctul regulat* $M \in (C)$.

Din $\|\overrightarrow{\tau}\|^2 = \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\tau} = 1$, prin derivare în raport cu s, deducem că

$$\overrightarrow{\tau} \cdot \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = 0,$$

deci $\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{\tau}$; de aici rezultă că $\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}$ este coliniar cu $\overrightarrow{\nu}$, adică versorul normal $\overrightarrow{\nu}$ respectă relaţia:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s} = \lambda\overrightarrow{\nu} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})\,, \tag{1.105}$$

sau

$$\overrightarrow{\nu} = \varepsilon\frac{\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}\right\|} = \varepsilon\frac{\dfrac{d^2\overrightarrow{r}}{d\,s^2}}{\left\|\dfrac{d^2\overrightarrow{r}}{d\,s^2}\right\|}, \tag{1.106}$$

ε fiind ± 1, semn ce va fi precizat în cele ce urmează.

Ne propunem să determinăm scalarul λ din relaţia 1.105.

În acest scop, mai întâi derivăm 1.102 în raport cu s prin intermediul lui t :

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{d\,s^2} = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s} = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,t}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\ddot{\overrightarrow{r}}\dot{s} - \dot{\overrightarrow{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}, \tag{1.107}$$

şi apoi efectuăm produsul scalar între $\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}$ şi el însuşi, obţinând:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}\cdot\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s} = \frac{\left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|^2\left\|\ddot{\overrightarrow{r}}\right\|^2 - \left(\dot{\overrightarrow{r}}\cdot\ddot{\overrightarrow{r}}\right)^2}{\left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|^6},$$

unde am ţinut cont că din 1.100 urmează

$$\dot{s}^2 = \left(\dot{\overrightarrow{r}}\cdot\dot{\overrightarrow{r}}\right) = \left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|^2, \quad \dot{s}\ddot{s} = \dot{\overrightarrow{r}}\cdot\ddot{\overrightarrow{r}}.$$

Acum, din $\dot{\overrightarrow{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,\overrightarrow{j}$, $\ddot{\overrightarrow{r}} = \ddot{x}\,\overrightarrow{i} + \ddot{y}\,\overrightarrow{j}$, rezultă

$$\left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \left\|\ddot{\overrightarrow{r}}\right\|^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2,$$

$$\dot{\overrightarrow{r}}\cdot\ddot{\overrightarrow{r}} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y};$$

printr-un calcul direct, ţinând cont de 1.105, obţinem

$$|\lambda| = \left\|\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}\right\| = \sqrt{\left(\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}\cdot\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s}\right)} = \left|\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Comparând expresia lui λ cu 1.57, avem $\lambda = \dfrac{1}{R}$, unde R este raza de curbură. Deci

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s} = \frac{1}{R}\overrightarrow{\nu} \tag{1.108}$$

relaţie care reprezintă **prima formulă a lui Frenet** pentru o curbă plană.

Printr-un raţionament analog celui aplicat lui $\overrightarrow{\tau}$, din $|\overrightarrow{\nu}| = 1$, obţinem că $\dfrac{d\overrightarrow{\nu}}{d\,s}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{\nu}$ şi deci $\dfrac{d\overrightarrow{\nu}}{d\,s}$ este coliniar cu $\overrightarrow{\tau}$:

$$\frac{d\overrightarrow{\nu}}{d\,s} = \mu\overrightarrow{\tau}. \tag{1.109}$$

Deoarece $\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\nu} = 0$, avem prin derivare în raport cu s :

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s} \cdot \overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\tau} \cdot \frac{d\overrightarrow{\nu}}{d\,s} = 0,$$

de unde, prin 1.108 şi 1.109, obţinem $\mu = -\dfrac{1}{R}$ şi, în consecinţă,

$$\frac{d\overrightarrow{\nu}}{d\,s} = -\frac{1}{R}\overrightarrow{\tau}, \tag{1.110}$$

relaţie care reprezintă **a doua formulă a lui Frenet** pentru curba plană.

În acest fel am obţinut:

Teorema 1.53 *În orice punct regulat şi neinflexionar M al unei curbe plane de clasă cel puţin doi, se poate ataşa reperul lui Frenet $\{M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}\}$, ai cărui versori, derivaţi în raport cu parametrul natural s, respectă* ***formulele lui Frenet****:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{d\,s} = \dfrac{1}{R}\overrightarrow{\nu}, \\ \dfrac{d\overrightarrow{\nu}}{d\,s} = -\dfrac{1}{R}\overrightarrow{\tau}. \end{cases} \tag{1.111}$$

Din 1.108 şi 1.106 rezultă evident

$$\varepsilon = sgn\ R. \tag{1.112}$$

În cele ce urmează, vom pune în evidenţă două consecinţe ale formulelor lui Frenet.

O primă consecinţă importantă a formulelor 1.111 o vom avea în **interpretarea geometrică a semnului curburii.**

Înainte de aceasta, reamintim că dreapta tangentă într-un punct M_0 al unei curbe (C) de clasă cel puţin doi în vecinătatea lui M_0 fiind trasată, avem versorul tangent $\overrightarrow{\tau}_0$ la (C) în M_0 fixat în sensul pozitiv pe curbă şi versorul normal $\overrightarrow{\nu}_0$ bine determinat de condiţia ca reperul $\{M_0, \overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0\}$ să fie orientat drept.

Deoarece o dreaptă împarte planul în două regiuni, convenim a spune că **partea pozitivă** a dreptei tangente este partea lui $\overrightarrow{\nu}_0$, iar **partea negativă**, partea lui $-\overrightarrow{\nu}_0$.

Teorema 1.54 *Dacă M_0 este un punct al unei curbe (C) de clasă cel puţin doi, atunci, dacă $\left(\dfrac{1}{R}\right)_{M_0} > 0$, curba părăseşte dreapta tangentă pe partea pozitivă a sa, iar dacă $\left(\dfrac{1}{R}\right)_{M_0} < 0$, curba părăseşte dreapta tangentă pe partea sa negativă.*

Demonstratie. Fie 1.101 reprezentarea lui (C) cu s drept parametru şi $M_0 \in (C)$ corespunzător la $s = s_0$. În cele ce urmează, convenim să notăm cu accente derivatele lui $\overrightarrow{r}$ în raport cu lungimea de arc s, spre deosebire de cele în raport cu un parametru oarecare t, pe care le vom nota cu puncte: $\overrightarrow{r}' = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$, $\dot{\overrightarrow{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Deoarece (C) este de clasă cel puţin doi într-o vecinătate suficient de mică a lui M_0, putem dezvolta funcţia vectorială $\overrightarrow{r}(s)$ după formula Taylor şi avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}(s) &= \overrightarrow{r}(s_0) + (s - s_0)\,\overrightarrow{r}'(s_0) + \\ &+ \frac{(s-s_0)^2}{2!}\overrightarrow{r}''(s_0 + \theta(s - s_0)), 0 < \theta < 1.\end{aligned} \tag{1.113}$$

Fie P un punct oarecare al dreptei tangente la (C) în M_0, de vector de poziţie $\overrightarrow{R}(s)$ şi $M \in (C)$ oarecare (fig. 1.24).

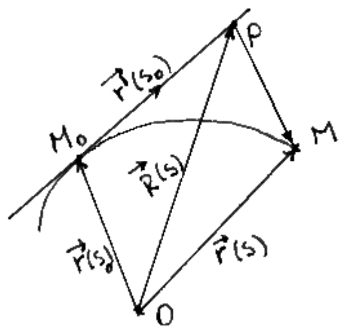


fig. 1.24

Avem

$$\overrightarrow{R}(s) = \overrightarrow{r}(s_0) + (s - s_0)\overrightarrow{r}'(s_0) \tag{1.114}$$

ecuaţia vectorială a dreptei tangente în M_0 la (C).

Din fig. 1.27 şi 1.114, deducem:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{R}(s) = \overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{r}(s_0) - (s - s_0)\overrightarrow{r}'(s_0),$$

relaţie care, prin 1.113, conduce la

$$\overrightarrow{PM} = \frac{(s - s_0)^2}{2}\overrightarrow{r}''(s_0 + \theta(s - s_0)).$$

Cei doi vectori din ultima egalitate au acelaşi sens, deoarece $\frac{(s - s_0)^2}{2} > 0$.

Dacă s se apropie de s_0 $(s > s_0)$, atunci $\overrightarrow{PM}$ păstrează prin continuitate sensul lui $\overrightarrow{r}''(s_0)$ într-o vecinătate suficient de mică a lui s_0.

Dar

$$\overrightarrow{r}''(s_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\right)_{s_0} = \left(\frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}\right)_{s_0} = \left(\frac{1}{R}\right)_0 \overrightarrow{\nu}_0,$$

adică $\overrightarrow{PM}$ are sensul lui $\left(\frac{1}{R}\right)_0 \overrightarrow{\nu}_0$:

$$\lim_{s\to s_0} \overrightarrow{PM} = \left(\frac{1}{R}\right)_0 \overrightarrow{\nu}_0.$$

Dacă $\left(\frac{1}{R}\right)_0 > 0$, $\overrightarrow{PM}$ are acelaşi sens cu $\overrightarrow{\nu}_0$, de unde rezultă că punctele curbei se aşează pe partea pozitivă a dreptei tangente, iar dacă $\left(\frac{1}{R}\right)_0 < 0$, $\overrightarrow{PM}$ are acelaşi sens cu $-\overrightarrow{\nu}_0$, adică punctele curbei se aşează pe partea negativă a dreptei tangente, c.c.t.d. ■

Observaţie: În fig. 1.23, în primul caz, avem curbura $\frac{1}{R} < 0$, iar în cel de-al doilea, curbura $\frac{1}{R} > 0$, în punctul $M \in (C)$.

Ca o a doua consecinţă a formulelor lui Frenet, vom da **legătura între raza de curbură R a unei curbe date şi raza de curbură R^* a evolutei corespunzătoare curbei date.**

Să notăm cu P un punct oarecare al normalei la o curbă dată (C) într-un punct $M \in (C)$ şi cu $\overrightarrow{R}$ vectorul de poziţie al lui P. Avem

$$\left[\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(s)\right] \cdot \overrightarrow{\tau}(s) = 0, \quad s \text{ fixat} \tag{1.115}$$

ecuaţia vectorială a dreptei normale în M la (C), care se mai scrie sub forma:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r}(s) + \gamma \overrightarrow{\nu}(s), \quad \gamma \text{ - scalar oarecare, } s \text{ fixat.} \tag{1.116}$$

Dacă P devine un punct al evolutei (înfăşurătoarea normalelor curbei date) atunci coordonatele sale trebuie să verifice 1.115 şi ecuaţia obţinută prin derivarea lui 1.115 în raport cu parametrul s (s variabil):

$$\left[\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(s)\right] \cdot \overrightarrow{\nu} - R = 0,$$

unde R este raza de curbură a lui (C) în $M \in (C)$ oarecare şi am făcut apel la 1.104 şi formula lui Frenet 1.108.

Substituind 1.116 în ultima egalitate, obţinem $\gamma = R$, adică vectorul de poziţie $\overrightarrow{R}$ al unui punct curent al evolutei respectă ecuaţia vectorială

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\, \overrightarrow{\nu}(s), \quad s \text{ oarecare,} \tag{1.117}$$

numită **ecuaţia vectorială a evolutei.**

Dacă într-un punct $M_0 \in (C)$ avem $\left(\frac{1}{R}\right)_0 = 0$ (ceea ce se întâmplă în cazul unui punct de inflexiune sau dacă M_0 aparţine unui arc segment de dreaptă al curbei), atunci pentru $M \to M_0$, raza de curbură $R \to \infty$, ceea ce ne arată că în acest caz punctul curent P al evolutei descrie o ramură infinită pentru care dreapta normală în M_0 la (C) este o *asimptotă* (fig. 1.25).

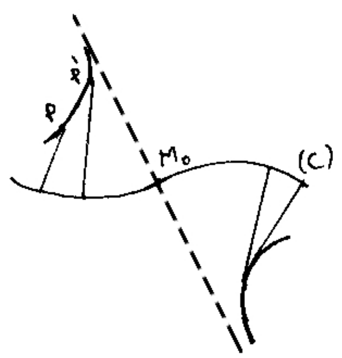


fig. 1.25

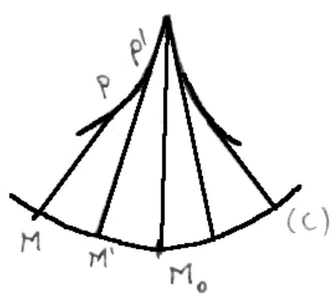


fig. 1.26

Să notăm, în continuare, cu $\overrightarrow{r}^*$ vectorul de poziţie al unui punct curent al evolutei, adică, în conformitate cu 1.117, avem pentru evolută ecuaţia vectorială :

$$\overrightarrow{r}^*(s) = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\, \overrightarrow{\nu}(s). \tag{1.118}$$

Derivând 1.118 în raport cu parametrul s, obţinem:

$$\frac{d\overrightarrow{r}^{*}}{ds}=\frac{dR}{ds}\overrightarrow{\nu}\left(s\right), \tag{1.119}$$

unde am folosit din nou 1.104 şi 1.108.

În acest fel, am demonstrat:

Teorema 1.55 *Oricărui punct M al unei curbe (C) de clasă cel puţin doi în care $\frac{1}{R}\neq 0$ şi $\frac{dR}{ds}\neq 0$, îi corespunde un punct regulat P al evolutei.*

Dacă în $M_0\in(C)$ în care $\left(\frac{1}{R}\right)_0\neq 0$ avem $\left(\frac{dR}{ds}\right)_0=0$, rezultă că R are valoarea extremă (maximă sau minimă) şi prin definiţie, un astfel de punct îl numim **vârf** al curbei (C).

Unui vârf al lui (C) cu $\frac{1}{R}\neq 0$, în general, îi corespunde un punct de întoarcere de prima speţă al evolutei (fig. 1.26).

Să presupunem că (C) în vecinătatea lui $M\in(C)$ este un arc regulat fără vârfuri şi pentru care $\frac{1}{R}\neq 0$. În acest caz, raza de curbură este finită şi **monotonă** de arcul s.

Din 1.119, avem $\left(d\overrightarrow{r}^{*}\right)^{2}=\left(dR\right)^{2}$, adică pentru elementul de arc ds^{*} al evolutei, avem relaţia:

$$\left(ds^{*}\right)^{2}=\left(dR\right)^{2}$$

care ne conduce la

$$ds^{*}=\pm\, dR. \tag{1.120}$$

Mai mult, derivând $\overrightarrow{r}^{*}$ în raport cu arcul s^{*} al evolutei, prin intermediul arcului s al curbei date, avem:

$$\frac{d\overrightarrow{r}^{*}}{ds^{*}}=\frac{d\overrightarrow{r}^{*}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^{*}}=\frac{dR}{ds}\overrightarrow{\nu}\frac{ds}{ds^{*}}=\frac{dR}{ds^{*}}\overrightarrow{\nu},$$

care prin 1.120 conduce la

$$\frac{d\overrightarrow{r}^{*}}{ds^{*}}=\pm\overrightarrow{\nu}, \tag{1.121}$$

adică la faptul cunoscut: **dreapta tangentă la evolută este dreapta normală la curba dată**.

Derivând încă o dată 1.121 în raport cu s^* prin intermediul lui s şi făcând apel la prima formulă Frenet 1.108 şi la 1.120, obţinem:

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}^*}{d^2s^*} = \pm\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*} = \mp\frac{1}{R}\overrightarrow{\tau}\frac{ds}{ds^*} = \mp\frac{1}{R}\frac{ds}{dR}\overrightarrow{\tau} = \mp\frac{1}{R\dfrac{dR}{ds}}\overrightarrow{\tau},$$

relaţie care conduce la

$$\frac{1}{R^*}\overrightarrow{\nu}^* = \pm\frac{1}{R\dfrac{dR}{ds}}\overrightarrow{\tau}.$$

Trecând la norme în ultima egalitate, legătura dorită între raza de curbură R a curbei date şi raza de curbură R^* a evolutei corespunzătoare este

$$R^* = R\left\|\frac{dR}{ds}\right\|.$$

Vom încheia acest paragraf cu câteva consideraţii asupra **ecuaţiei intrinseci a unei curbe plane.**

Faptul că curbura unei curbe plane a fost definită printr-o proprietate geometrică (§1.6), independentă de reperul la care este raportată curba, ne face să avem motivată afirmaţia că, dacă schimbăm reperul, curbura nu se schimbă. Ne exprimăm spunând că: **curbura este un invariant (scalar) al unei curbe plane**.

Mai mult, vom arăta că dacă este dată expresia curburii:

$$\frac{1}{R} = F(s), \tag{1.122}$$

cu F - funcţie derivabilă de arcul s, atunci curba plană este perfect determinată, abstracţie făcând de poziţia ei în plan. Pe baza acestei afirmaţii, ecuaţia 1.122 poartă numele de **ecuaţia intrinsecă** a curbei plane.

Teorema 1.56 *Abstracţie făcând de o rototranslaţie, există o singură curbă plană pentru care curbura este o funcţie derivabilă dată de arcul s.*

Demonstratie. Fie $F(s)$ o funcţie derivabilă de arcul s şi ϕ unghiul dreptei tangente în punctul M al unei curbe cu axa Ox. Dacă $F(s)$ este curbura în M a curbei (C), avem, conform cu cele arătate în §1.6,

$$\frac{d\phi}{ds} = F(s),$$

ecuaţie care integrată conduce la

$$\phi = \int_0^s F(s)ds + \phi_0, \tag{1.123}$$

unde ϕ_0 este o constantă.

Ţinând acum cont că $\dfrac{dx}{ds} = \cos\phi$, $\dfrac{dy}{ds} = \sin\phi$ sunt componentele lui $\vec{\tau}$, obţinem prin integrare

$$x = \int_0^s \cos\phi ds + x_0, \qquad y = \int_0^s \sin\phi ds + y_0, \tag{1.124}$$

x_0, y_0 fiind constante.

Notând în 1.123:

$$\Phi = \int_0^s F(s)ds,$$

avem în 1.124

$$\begin{aligned}\int_0^s \cos\phi ds &= \int_0^s \cos(\Phi + \phi_0)ds = \cos\phi_0 \int_0^s \cos\Phi ds - \sin\phi_0 \int_0^s \sin\Phi ds,\\ \int_0^s \sin\phi ds &= \int_0^s \sin(\Phi + \phi_0)ds = \sin\phi_0 \int_0^s \cos\Phi ds + \cos\phi_0 \int_0^s \sin\Phi ds.\end{aligned}$$

Dacă notăm acum:

$$X = \int_0^s \cos\Phi ds, \qquad Y = \int_0^s \sin\Phi ds, \tag{1.125}$$

obţinem din ultimele egalităţi şi 1.124 ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = X\cos\phi_0 - Y\sin\phi_0 + x_0 \\ y = X\sin\phi_0 + Y\cos\phi_0 + y_0. \end{cases} \tag{1.126}$$

Relaţiile 1.125 reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei curbe (C_0), iar 1.126, ecuaţiile parametrice ale unei curbe (C), anume, toate curbele care au aceeaşi curbură dată $F(s)$. Observăm că 1.126 se deduc din 1.125 printr-o roto-translaţie, [5]. Constantele x_0, y_0, ϕ_0 în 1.126 fiind arbitrare, concludem că 1.126 reprezintă ∞^3 curbe (C), oricare din aceste curbe obţinându-se din una din ele, de exemplu, din (C_0) (care corespunde lui $x_0 = y_0 = \phi_0 = 0$), printr-o rototranslaţie, c.c.t.d. ■

1.10 Reprezentarea grafică a curbelor plane

1.10.1 Ramuri infinite. Asimptote

Fie $I = (a, b)$ un interval deschis (unde a şi b pot lua şi valorile $-\infty$ şi $+\infty$) şi

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \, t \in I,$$

o curbă plană. Fie t_0 unul din capetele intervalului I.

Definitia 1.57 *Spunem despre curba (C) că are o* ***ramură infinită*** *pentru $t \to t_0$ dacă $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ sau $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$.*

Presupunem că $t \to t_0$ defineşte o ramură infinită a lui (C).

Definitia 1.58 *Dreapta (D) este o* ***asimptotă*** *pentru (C) dacă*

$$\lim_{t\to t_0} dist(P, (D)) = 0,$$

unde $P(x(t), y(t))$ este punctul de pe (C) corespunzător valorii t a parametrului.

Sunt posibile următoarele cazuri:

I. $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$ (finit). În acest caz, dreapta $y = y_0$ este **asimptotă orizontală** pentru (C).

II. $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ (finit). În acest caz, dreapta $x = x_0$ este **asimptotă verticală** pentru (C).

III. $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$. În acest caz, căutăm **asimptote oblice** de forma $(D) : y = mx + n$, adică

$$(D) : mx - y + n = 0 \tag{1.127}$$

Să presupunem că (D) din 1.127 este o astfel de asimptotă şi $P(x(t), y(t)) \in (C)$. Avem:

$$\lim_{t\to t_0} dist(P, (D) = \lim_{t\to t_0} \frac{|mx(t) - y(t) + n|}{\sqrt{1 + m^2}} = 0. \tag{1.128}$$

Condiţia ca această limită să fie 0 este echivalentă cu:

$$\lim_{t\to t_0} (mx(t) - y(t) + n) = 0, \tag{1.129}$$

adică

$$\lim_{t\to t_0} x(t)\left(m - \frac{y(t)}{x(t)} + \frac{n}{x(t)}\right) = 0. \tag{1.130}$$

Ţinând cont că $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, din 1.130 rezultă că $m - \dfrac{y(t)}{x(t)} \to 0$ când $t \to t_0$, adică există şi e finită limita

$$m = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}. \tag{1.131}$$

Rescriind acum 1.129 sub forma

$$n = \lim_{t\to t_0} \left(y(t) - mx(t)\right), \tag{1.132}$$

obţinem că:

Dacă $(D) : y = mx + n$ este asimptotă pentru (C), corespunzătoare lui $t \to t_0$, atunci m şi n din 1.131 şi 1.132 există şi sunt finite.

Reciproc, dacă limitele 1.131 şi 1.132 există şi sunt finite, atunci, înlocuind în 1.128, găsim că $\lim\limits_{t\to t_0} dist(P, (D) = 0$, adică (D) este asimptotă pentru (C).

Am demonstrat astfel:

Teorema 1.59 *Dreapta $(D) : y = mx + n$ este asimptotă pentru (C), corespunzătoare lui $t \to t_0$, dacă şi numai dacă există şi sunt finite limitele*

$$m = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad n = \lim_{t\to t_0} \left(y(t) - mx(t)\right).$$

1.10.2 Reprezentarea grafică

Fie $(C) : x = x(t), y = y(t)$ o curbă plană. Pentru a putea desena curba, abordăm următoarele probleme:

1. *Domeniul de definiţie I al funcţiilor x şi y.*

2. *Paritatea/imparitatea, respectiv periodicitatea lui x şi y:*

   (a) Dacă $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, $\forall t$, atunci curba este simetrică faţă de Ox.

   (b) Dacă $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$, $\forall t$, atunci curba este simetrică faţă de Oy.

(c) Dacă $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, $\forall t$, atunci curba este simetrică faţă de O.

În toate aceste cazuri, vom reprezenta porţiunea de curbă care corespunde valorilor pozitive ale lui t, iar restul desenului va fi completat prin simetrie.

(d) Dacă funcţiile x şi y sunt periodice, având perioadele respectiv T_1 şi T_2, şi, în plus,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

atunci, notând cu $T = qT_1 = pT_2$, avem

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t+qT_1) = x(t), \\ y(t+T) &= x(t+pT_2) = y(t); \end{aligned}$$

deci curba (C) este periodică, având perioada T; în acest caz, restrângem studiul asupra unui interval de lungime T, convenabil ales (de exemplu, $(0, T)$).

3. *Limite la capetele domeniului; asimptote.*

4. *Intersecţiile curbei cu axele de coordonate.*

5. *Puncte regulate/singulare ale curbei. Puncte de inflexiune.*

   În punctele singulare, vom determina pantele tangentelor (conform cu cele arătate în §1.7).

   Punctele de inflexiune sunt acele puncte regulate în care $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 0$ (conform cu §1.5).

6. *Punctele multiple* ale curbei şi dreptele tangente la curbă în aceste puncte.

7. *Tabelul de variaţie al funcţiilor x şi y.*

8. *Trasarea curbei.*

Exemplu: Fie curba $y^2x + ay^2 + x^3 - ax^2 = 0$, $a > 0$ (strofoida).

În primul rând, determinăm o parametrizare a curbei. Pentru aceasta, o intersectăm cu dreapta $y = tx$, şi obţinem:

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \; y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}.$$

1. Domeniul de definiţie al funcţiilor x şi y: $I = \mathbb{R}$.

2. Avem $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, ca atare, curba este simetrică faţă de Ox şi studiem variaţia lui x şi y doar pentru $t \in [0, \infty)$.

3. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -a$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -\infty$, de unde deducem că $x = -a$ este asimptotă verticală (pentru $t \to \pm\infty$).

4. Intersecţii cu axele:

   (a) cu Oy : din ecuaţia $x = 0$, obţinem $t = \pm 1$, ambelor valori corespunzându-le punctul $O(0,0)$ (de unde rezultă că O este punct cel puţin dublu);

   (b) cu Ox : din $y = 0$, obţinem $t \in \{0, \pm 1\}$. Pentru $t = 0$, găsim $A(a, 0)$.

5. Calculăm derivatele lui x şi y :

$$\dot{x} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2},\ \dot{y} = \frac{a(1-4t^2-t^4)}{(1+t^2)^2}$$

   (x şi y sunt definite şi continue pe $\mathbb{R}$); din $\dot{x} = 0$, avem $t = 0$, iar $\dot{y}$ se anulează pentru $t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$, în consecinţă, nu avem puncte singulare.

6. Puncte multiple: Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2} = \dfrac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2} \\ \dfrac{at_1(1-t_1^2)}{1+t_1^2} = \dfrac{at_2(1-t_2^2)}{1+t_2^2} \end{cases};$$

   soluţiile sunt $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, caz în care avem punctul dublu $O(0,0)$, respectiv, $t_1 = t_2$ (caz ce nu conduce la puncte multiple), deci, singurul punct multiplu este $O(0,0)$.

7. Tabelul de variaţie al lui x şi y :

t	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1		∞
$\dot{x}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	a	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$
$\dot{y}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	0	$\nearrow$	y_0	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

8. Desenul:

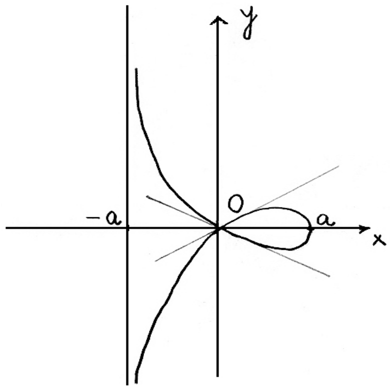


fig. 1.27

1.11 Curbe plane în coordonate polare

Reamintim, pentru început, câteva noţiuni de geometrie analitică.

Un **sistem de coordonate polare** în plan este format dintr-un punct O numit **pol** şi o semidreaptă Ox care trece prin pol, numită **axă polară.**

Presupunând că am fixat un astfel de sistem de coordonate, un punct oarecare M din plan este unic determinat de:

1. distanţa $\rho = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|$ de la O la M şi

2. unghiul θ dintre axa polară Ox şi raza vectoare OM, măsurat în sens trigonometric ($\theta \in [0, 2\pi)$).

Perechea (ρ, θ) poartă numele de **coordonatele polare** ale punctului M. Legătura între coordonatele carteziene (x, y) şi cele polare (ρ, θ) ale lui M este dată de formulele:

$$(x, y) \to (\rho, \theta) : \left\{ \begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \end{array} \right. . \tag{1.133}$$

$$(\rho, \theta) \to (x, y) : \left\{ \begin{array}{c} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right. ; \tag{1.134}$$

Un arc regulat de curbă plană va fi, prin urmare, caracterizat printr-o ecuaţie de forma

$$(C) : \rho = \rho(\theta)$$

(unde θ ia valori într-un interval $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$), numită **ecuaţia curbei în coordonate polare**. În continuare, trecem în revistă principalele probleme studiate pe parcursul acestui capitol, transcriind rezultatele în coordonate polare.

- **Condiţii de regularitate**

  Presupunem că funcţiile x şi y definite prin 1.134 sunt bijective şi de clasă cel puţin 1 pe domeniul de definiţie. Atunci condiţia $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ este echivalentă cu faptul că

  $$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho' \cos\theta - \rho \sin\theta \quad \text{şi} \\ \dot{y} &= \rho' \sin\theta + \rho \cos\theta \end{aligned} \tag{1.135}$$

  nu se anulează simultan. Astfel, un punct $M \in (C)$ este punct singular dacă şi numai dacă

  $$\begin{cases} \rho' \cos\theta - \rho \sin\theta = 0 \\ \rho' \sin\theta + \rho \cos\theta = 0 \end{cases} . \tag{1.136}$$

  Sistemul 1.136 este liniar şi omogen în necunoscutele ρ şi ρ', având determinantul
  $$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1, \ \forall\theta;$$
  astfel, el admite doar soluţia banală $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$. În concluzie, punctul $M \in (C)$, corespunzător unei valori date θ_0 a parametrului este punct singular dacă şi numai dacă

  $$\rho^2 + \rho'^2 = 0, \tag{1.137}$$

  respectiv, M este punct regulat dacă şi numai dacă expresia din membrul stâng al lui 1.137 este nenulă.

- **Elementul de arc. Lungimea arcului de curbă**

  Înlocuind expresiile 1.135 ale lui $\dot{x}$ şi $\dot{y}$ în formula elementului de arc $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\theta$, obţinem printr-un calcul direct:

  $$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta. \tag{1.138}$$

  Lungimea arcului regulat de curbă $\overset{\frown}{AB}$ este

  $$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta. \tag{1.139}$$

- **Dreapta tangentă şi dreapta normală**

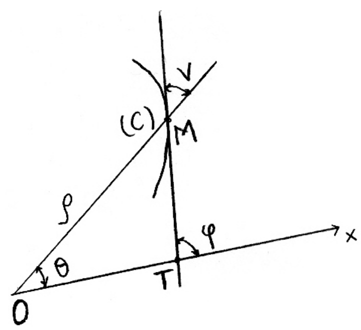
  Înlocuim x şi y din 1.134 în ecuaţia dreptei tangente 1.32 şi, respectiv, în ecuaţia dreptei normale 1.38, fapt lăsat în seama cititorului.

  În cele ce urmează, ne va fi util următorul rezultat:

Teorema 1.60 *Tangenta unghiului V format de raza vectoare cu dreapta tangentă la curbă într-un punct regulat este*

$$tgV = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Demonstratie. Fie $M \in (C)$ un punct regulat, MT tangenta în M la curbă ($T \in Ox$) şi ϕ - unghiul dintre MT şi Ox.



Avem $V = \widehat{OMT}$ şi $\phi = \theta + V$, adică

$$V = \phi - \theta. \tag{1.140}$$

De aici, deducem că

$$tgV = tg(\phi - \theta) = \frac{tg\phi - tg\theta}{1 + tg\phi\, tg\theta}\ .$$

Cum însă, $tg\phi = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ şi $tg\theta = \dfrac{y}{x}$ (conform cu 1.134), obţinem

$$tgV = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x\dot{x} + y\dot{y}}.$$

Ţinând cont de 1.133 şi 1.135, rezultă

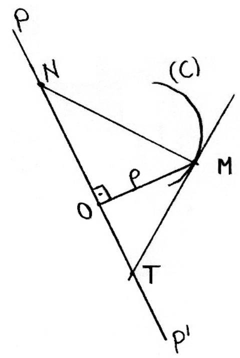
$$x\dot{y} - \dot{x}y = \rho^2, \ \ x\dot{x} + y\dot{y} = \rho\rho'.$$

Înlocuim acum în expresia lui tgV şi găsim

$$tgV = \frac{\rho^2}{\rho\rho'} = \frac{\rho}{\rho'},$$

c.c.t.d. ■

Fie, acum, $M \in (C)$ un punct regulat; notăm cu PP' perpendiculara în O pe raza vectoare OM şi cu T, respectiv, N, intersecţiile dreptei tangente, respectiv, ale dreptei normale în M la curbă cu PP'. Se pun în evidenţă următoarele segmente:



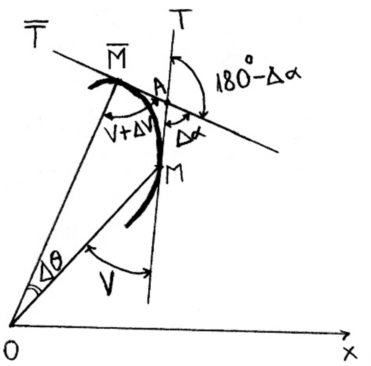
1. **segmentul tangentă polară** $S_{tg_p} = MT$;
2. **segmentul normală polară** $S_{n_p} = MN$;
3. **segmentul subtangentă polară** $S_{stg_p} = OT$;
4. **segmentul subnormală polară** $S_{sn_p} = ON$.

Ţinând cont de teorema demonstrată mai sus, se verifică uşor egalităţile:

$$\begin{aligned} S_{stg_p} &= \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right|, \ S_{sn_p} = |\rho'|, \\ S_{tg_p} &= \left|\frac{\rho}{\rho'}\right| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}, \ S_{n_p} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}. \end{aligned}$$

- **Curbura** curbei $(C) : \rho = \rho(\theta)$ într-un punct regulat este

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.141}$$



Într-adevăr, fie M şi $\overline{M}$ două puncte infinit apropiate ale lui (C). Notăm cu $\Delta\alpha$ unghiul de contingenţă al dreptelor tangente şi cu V, respectiv, $V+\Delta V$, unghiurile formate de razele vectoare cu dreptele tangente în punctele M şi $\overline{M}$ (vezi figura de mai sus).

În patrulaterul $OMA\overline{M}$ avem:

$$\Delta\theta + 180^o - V + 180^o - \Delta\alpha + V + \Delta V = 360^o,$$

de unde

$$\Delta\alpha = \Delta\theta + \Delta V.$$

Aplicând 1.53, 1.54, curbura medie a arcului $\overset{\frown}{M\overline{M}}$ este:

$$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta + \Delta V}{\Delta s} = \frac{1 + \dfrac{\Delta V}{\Delta\theta}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta\theta}},$$

respectiv, curbura în M a lui (C) are expresia:

$$K = \lim_{\theta\to 0} \frac{1 + \dfrac{\Delta V}{\Delta\theta}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta\theta}} = \frac{1 + \dfrac{dV}{d\theta}}{\dfrac{ds}{d\theta}}.$$

Conform cu 1.138, numitorul are valoarea

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Pentru a calcula numărătorul, folosim teorema 1.60, scrisă sub forma

$$V = arctg\frac{\rho}{\rho'}.$$

Avem:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2} \cdot \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$

şi deci

$$K = \frac{1 + \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Observaţie: Formula 1.141 se mai poate obţine şi din formula curburii 1.57, înlocuind expresiile lui $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$ şi $\ddot{y}$.

- **Coordonatele centrului cercului osculator.** Derivând încă o dată 1.135, obţinem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{d\theta^2} = \rho'' \cos\theta - 2\rho' \sin\theta - \rho\cos\theta \\ \ddot{y} &= \frac{d^2y}{d\theta^2} = \rho'' \sin\theta + 2\rho' \cos\theta - \rho\sin\theta. \end{aligned}$$

  Printr-un calcul direct, obţinem

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''.$$

  Rezultă că un punct $M \in (C)$ este punct de inflexiune dacă şi numai dacă $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'' = 0$. Presupunând că M nu este punct de inflexiune, ţinând din nou seama că $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}$ şi de formulele 1.47, obţinem pentru coordonatele centrului cercului osculator expresiile:

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho\cos\theta - \frac{(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)(\rho^2+\rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \\ \beta &= \rho\sin\theta + \frac{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)(\rho^2+\rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}. \end{aligned}$$

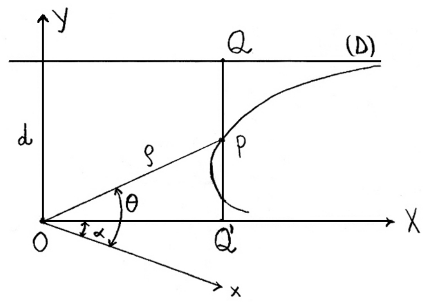
- **Punctele multiple** ale lui (C) sunt date de soluţiile sistemului

$$\begin{aligned} &\rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) \\ &\theta_2 = 2k\pi + \theta_1, \ \text{ pentru un } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- **Asimptote.** Presupunem că pentru $\theta = \theta_0$ se obţine o ramură infinită a curbei (C). Conform cu cele arătate în paragraful precedent, aceasta înseamnă:

(1.142) $$\lim_{\theta\to\theta_0} \sqrt{x^2+y^2} = \lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta) = \infty.$$

Fie (D) o asimptotă a lui (C), corespunzătoare ramurii infinite $\theta = \theta_0$, $P \in (C)$ corespunzător valorii θ a parametrului şi Q proiecţia lui P pe (D).



Notăm cu OX paralela prin O la (D) şi cu OY perpendiculara în acelaşi punct pe OX. Dacă d este distanţa de la polul O la (D), iar α unghiul pe care îl face această dreaptă cu axa polară Ox, atunci dreapta (D) este unic determinată de valorile lui d şi α.

Fie Q' proiecţia lui P pe OX. Avem:

$$dist(P;(D)) = PQ = QQ' - PQ'.$$

Însă $QQ\prime = d$, $PQ' = \rho(\theta)\left|\sin(\theta - \alpha)\right|$, adică

$$dist(P;(D)) = d - \rho(\theta)\left|\sin(\theta - \alpha)\right|.$$

Condiţia ca această distanţă să tindă la zero când $\theta \to \theta_0$ devine astfel echivalentă cu faptul ca limita

$$d = \lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)\left|\sin(\theta - \alpha)\right|$$

să existe şi să fie finită.

Ţinând cont de 1.142 rezultă acum că, dacă (D) e asimptotă, atunci $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \sin(\theta - \alpha) = 0$, adică

$$\alpha = \theta_0 - k\pi, \tag{1.143}$$

cu $k \in \mathbb{Z}$ astfel ales încât $\alpha \in [0, \pi)$. Din ultima egalitate avem că $\sin(\theta - \alpha) = \pm\sin(\theta - \theta_0,)$, adică

$$d = \lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)\left|\sin(\theta - \theta_0)\right|. \tag{1.144}$$

Reciproc, dacă limita 1.144 există şi e finită, atunci $dist(P;(D)) \to 0$ când $\theta \to \theta_0$, prin urmare, dreapta definită de 1.143 şi 1.144 este asimptotă pentru curba (C). Am demonstrat astfel

Teorema 1.61 *Curba $(C) : \rho = \rho(\theta)$ admite asimptotă corespunzătoare ramurii infinite $\theta = \theta_0$ dacă şi numai dacă limita 1.144 există şi este finită.*

1.12 Curbe plane des utilizate în tehnică

În acest paragraf vom deduce ecuaţiile câtorva curbe des utilizate, pornind de la o proprietate a acestora, adică determinându-le ca locuri geometrice.

1.12.1 Cisoida lui Diocles

Considerăm un cerc de rază dată a şi dreapta tangentă într-un punct fixat A de pe cerc. O secantă variabilă dusă prin punctul O, diametral opus lui A, taie cercul în C şi dreapta tangentă, în B (fig. 1.28).

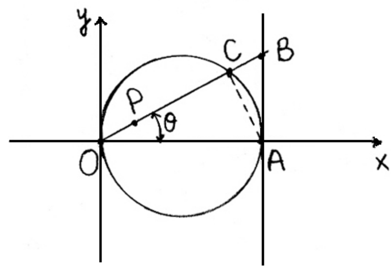


fig. 1.28

Locul geometric al punctelor P cu proprietatea

$$BP = OC \tag{1.145}$$

poartă numele de **cisoida lui Diocles**.

În continuare, ne propunem să determinăm ecuaţia acestui loc geometric. Pentru aceasta, considerăm O originea reperului, iar ca axă Ox, alegem dreapta OA, respectiv, ca axă Oy, perpendiculara în O pe OA.

Fie θ unghiul (variabil) format de secantă cu axa Ox şi ρ, lungimea segmentului OP. Atunci, coordonatele x şi y ale lui P sunt:

$$x = \rho \cos\theta,\ y = \rho \sin\theta.$$

Evident, ρ variază cu θ; mai precis, avem

$$\rho = OP = OB - BP = OB - OC = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta,$$

unde am ţinut cont că, în triunghiurile dreptunghice OAB şi OCA avem respectiv: $OB = \dfrac{2a}{\cos\theta}$, $OC = 2a\cos\theta$.

În consecinţă,

$$\rho = 2a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}, \tag{1.146}$$

relaţie care reprezintă **ecuaţia cisoidei în coordonate polare**.

Înlocuind 1.146 în expresiile lui x şi y, obţinem:

$$\begin{cases} x = 2a\sin^2\theta \\ y = 2a\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta} \end{cases}, \tag{1.147}$$

relaţii ce reprezintă **ecuaţia cisoidei în reprezentare parametrică**.

Ţinând cont că

$$\frac{y}{x} = tg\theta, \qquad \sin^2\theta = \frac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta} = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

din 1.147 deducem că

$$x = 2a\frac{y^2}{x^2+y^2},$$

sau

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0, \tag{1.148}$$

relaţie ce reprezintă **ecuaţia cisoidei în reprezentare implicită**. În reprezentare explicită, avem

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}. \tag{1.149}$$

Merită remarcat că, în reprezentare implicită, avem

$$F'_x = F'_y = 0$$

dacă şi numai dacă $x = y = 0$, deci, singurul punct singular al cisoidei este $O(0,0)$. Acesta este un punct dublu, deoarece $F''_{y^2} = -4 \neq 0$. Determinând pantele dreptelor tangente în acest punct (cf. §7), obţinem că acesta este un punct de întoarcere.

Utilizând algoritmul de reprezentare grafică, fie pentru reprezentarea parametrică, fie pentru cea explicită (studiat în liceu), cisoida arată ca în fig. 1.29.

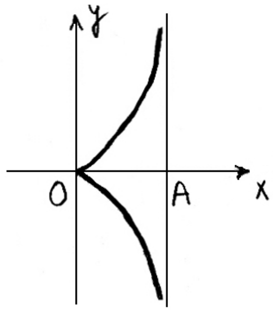
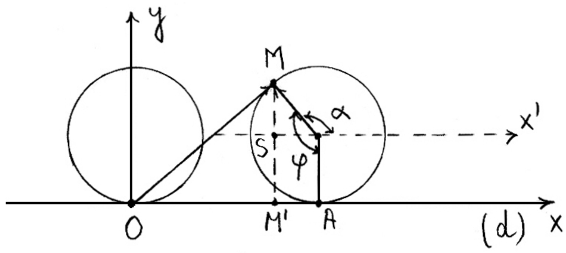


fig. 1.29

1.12.2 Cicloida

Cicloida este curba plană descrisă de un punct fix de pe un cerc care rulează fără să alunece pe o dreaptă fixă.

Fie O un punct fix al unui cerc de rază a tangent în O la dreapta d. Pentru a determina ecuaţia cicloidei, considerăm punctul fix O drept origine a reperului, dreapta tangentă d drept axă Ox şi axa Oy, perpendiculara în O pe d.



Cercul rulând din poziţia O până în poziţia A, punctul care a fost în O a ajuns în M. Avem:

$$OA = \overset{\frown}{AM} = a\phi,$$

unde ϕ este unghiul de rulare.

În triunghiul $O\omega M$ avem

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega M}.$$

Proiectând pe axa Ox, respectiv, Oy, ultima egalitate şi notând cu x, y coordonatele carteziene ale lui M, obţinem:

$$x = pr_{Ox}\overrightarrow{O\omega} + pr_{Ox}\overrightarrow{\omega M}, \quad y = pr_{Oy}\overrightarrow{O\omega} + pr_{Oy}\overrightarrow{\omega M}.$$

Dar

$$\begin{aligned} pr_{Ox}\overrightarrow{O\omega} &= OA = a\phi, \quad pr_{Oy}\overrightarrow{O\omega} = A\omega = a, \\ \alpha + \phi &= 270^o, \end{aligned}$$

$pr_{Ox}\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{\omega M} \cdot \overrightarrow{i} = -AM' = -\omega S = -a\cos(180^o - \alpha) = a\cos\alpha = a\cos(270^o - \phi) = -a\sin\phi$ şi $pr_{Oy}\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{\omega M} \cdot \overrightarrow{j} = SM = a\sin(180^o - \alpha)$ $= a\sin\alpha = a\sin(270^o - \phi) = -a\cos\phi$, de unde

$$x = a\phi - a\sin\phi, \ y = a - a\cos\phi,$$

sau încă

$$x = a(\phi - \sin\phi), \ y = a(1 - \cos\phi), \tag{1.150}$$

ceea ce reprezintă **ecuaţiile parametrice ale cicloidei**. Eliminarea parametrului ϕ din 1.150 conduce la reprezentarea explicită

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

reprezentare ce însă, nu este, în general, utilizată.

Exerciţiu: Ţinând cont de 1.150, reprezentaţi grafic cicloida.

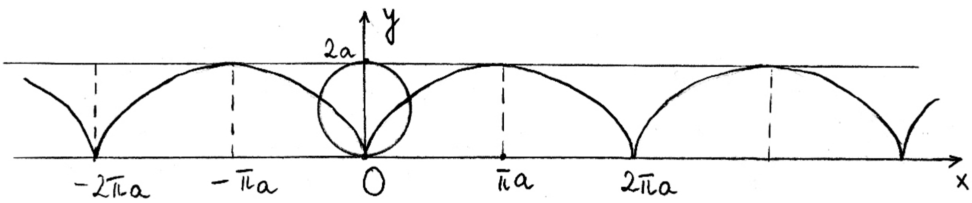


fig. 1.30 - cicloida

1.12.3 Epicicloida. Cardioida

Epicicloida este curba descrisă de un punct de pe un cerc care rulează, fără să alunece, pe un alt cerc exterior fix.

Fie cercul cu centrul în O de rază b care rulează pe cercul fix cu centrul în O şi de rază a. Alegem reperul xOy cu originea în centrul O şi direcţiile axelor a doi diametri perpendiculari, axa Ox trecând prin punctul A, punct iniţial de contact între cercurile considerate.

Să considerăm rularea cercului O din poziţia A într-o poziţie arbitrară, cu N punct de contact. Punctul A va trece în punctul M (fig. 1.31).

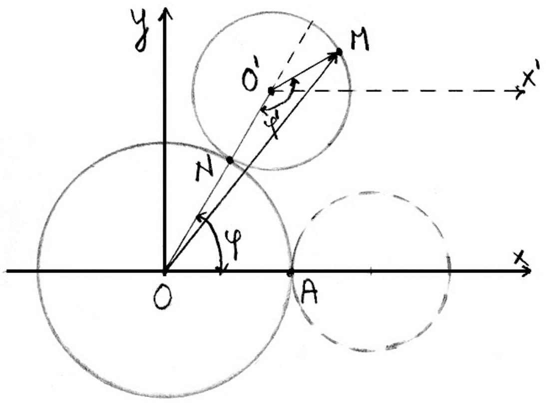


fig. 1.31

Notăm:

$$\phi = \widehat{NOx},\ \phi' = \widehat{NO'M},$$

şi avem $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NM}$, adică

$$a\phi = b\phi',$$

de unde

$$\phi' = \frac{a}{b}\phi$$

şi deci

$$\phi + \phi' = \frac{a+b}{b}\phi,$$

relaţie pe care o vom utiliza în cele ce urmează.

Din triunghiul OMO' avem relaţia:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

care, proiectată pe axele de coordonate, conduce la următoarele expresii pentru coordonatele punctului M de pe epicicloidă:

$$x = pr_{Ox}\overrightarrow{OO'} + pr_{Ox}\overrightarrow{O'M},\ y = pr_{Oy}\overrightarrow{OO'} + pr_{Oy}\overrightarrow{O'M}.$$

Dar:

$$\begin{aligned} pr_{Ox}\overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{i} = (a+b)\cos\phi, \\ pr_{Oy}\overrightarrow{OO'} &= (a+b)\sin\phi \end{aligned}$$

şi $pr_{Ox}\overrightarrow{O'M} = pr_{O'x'}\overrightarrow{O'M} = b\cos\widehat{MO'x'} = b\cos(\phi+\phi'-180^o) = -b\cos(\phi+\phi') = -b\cos\frac{a+b}{b}\phi$, respectiv, $pr_{Oy}\overrightarrow{O'M} = b\sin\widehat{MO'x'} = b\sin(\phi+\phi'-$

$180^o) = -b\sin(\phi+\phi') = -b\sin\dfrac{a+b}{b}\phi$, deoarece $\widehat{MO'N'} = \widehat{MO'x'} + \widehat{x'O'N}$, adică $\phi' = \widehat{MO'x'} + 180^o - \phi$, deci $\widehat{MO'x'} = \phi' + \phi - 180^o$, relaţie ce a fost folosită.

În acest fel, obţinem **ecuaţiile parametrice ale epicicloidei** sub forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x = (a+b)\cos\phi - b\cos\dfrac{a+b}{b}\phi \\ y = (a+b)\sin\phi - b\sin\dfrac{a+b}{b}\phi. \end{array}\right. \tag{1.151}$$

Cardioida este epicicloida în care cele două cercuri, cel fix şi cel mobil, au raze egale.

Luând $a = b$ în 1.151, obţinem **ecuaţiile parametrice ale cardioidei**:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a(2\cos\phi - \cos 2\phi) \\ y = a(2\sin\phi - \sin 2\phi) \end{array}\right. \tag{1.152}$$

şi ea este reprezentată grafic în fig 1.32.

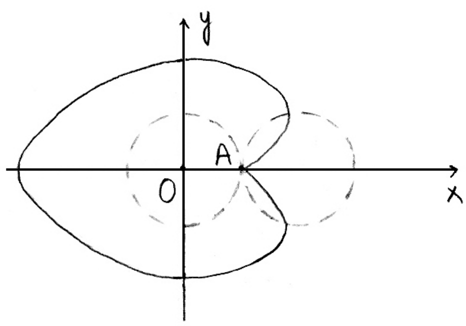


fig. 1.32 - cardioida

Este interesant de determinat ecuaţia cardioidei în coordonate polare. În acest scop, este avantajos să translatăm reperul xOy în punctul A; astfel, avem schimbarea numai a abscisei, care devine $x - a$. În acest reper, avem:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a(2\cos\phi - \cos 2\phi - 1) \\ y = a(2\sin\phi - \sin 2\phi) \end{array}\right.$$

sau

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2a\cos\phi(1-\cos\phi) \\ y = 2a\sin\phi(1-\cos\phi) \end{array}\right. , \tag{1.153}$$

de unde

$$tg\phi = \frac{y}{x},\ \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Înlocuind ultimele relaţii în expresia lui x din 1.153, obţinem:

$$x = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

adică

$$x^2 + y^2 = 2a(\sqrt{x^2+y^2} - x), \tag{1.154}$$

sau, dacă vrem,

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0. \tag{1.155}$$

Ecuaţia 1.154 sau 1.155 reprezintă forma implicită (iraţională, respectiv, raţională) a ecuaţiei cardioidei.

Trecând în coordonate polare, $x^2 + y^2 = \rho^2$ şi $x = \rho\cos\theta$, obţinem

$$\rho = 2a(1 - \cos\theta), \tag{1.156}$$

reperul polar având drept pol punctul de contact al cercurilor, iar drept axă polară, linia centrelor celor două cercuri.

1.12.4 Hipocicloida. Astroida

Hipocicloida este curba descrisă de un punct de pe un cerc care rulează fără să alunece, pe un alt cerc fix, cercurile fiind interioare.

Alegem ca reper xOy doi diametri perpendiculari ai cercului fix de centru O, axa Ox trecând prin punctul A, punct iniţial de contact între cercurile considerate.

Să considerăm rularea cercului O din poziţia A într-o poziţie arbitrară, cu N punct de contact între cercul fix şi cercul mobil. Punctul A va trece în punctul M (fig. 1.33)

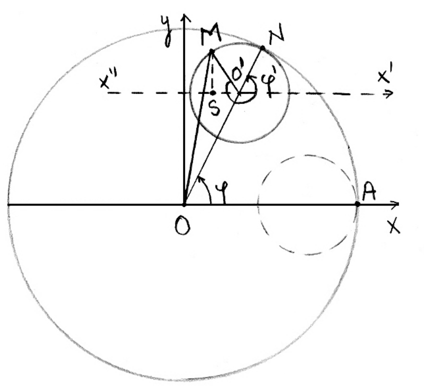


fig. 1.33

Notăm:

$$\phi = \widehat{NOx},\ \phi' = \widehat{MO'N}$$

(în sens trigonometric) şi avem:

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MN}$$

(în sens trigonometric), adică $a\phi = b\phi'$, de unde $\phi' = \dfrac{a}{b}\phi$ şi deci

$$\phi' - \phi = \frac{a-b}{b}\phi,$$

relaţie pe care o vom utiliza în cele ce urmează.

Din triunghiul $OO'M$ avem

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

din care rezultă

$$x = pr_{Ox}\overrightarrow{OO'} + pr_{Ox}\overrightarrow{O'M},\ y = pr_{Oy}\overrightarrow{OO'} + pr_{Oy}\overrightarrow{O'M}.$$

Dar:

$$\begin{aligned} pr_{Ox}\overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{i} = (a-b)\cos\phi, \\ pr_{Oy}\overrightarrow{OO'} &= (a-b)\sin\phi, \end{aligned}$$

$pr_{Ox}\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{i} = -O\prime S = -b\cos\widehat{MO'x''} = -b\cos(\phi - \phi' - 180^o) = b\cos\sin(\phi' - \phi) = b\cos\dfrac{a-b}{b}\phi$, respectiv, $pr_{Oy}\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{j} = SM = b\sin\widehat{MO'x''} = b\sin(\phi' - \phi - 180^o) = -b\sin(\phi - \phi') = -b\sin\dfrac{a-b}{b}\phi$, deoarece $\widehat{MO'x''} + \widehat{xO'O} + 180^o = \widehat{MO'N}$ (în sens trigonometric), adică $\widehat{MO'x''} + \phi + 180^o = \phi'$, de unde $\widehat{MO'x''} = \phi' - \phi - 180^o$, relaţie ce a fost utilizată.

În acest mod, am obţinut **ecuaţiile parametrice ale hipocicloidei** sub forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (a-b)\cos\phi + b\cos\dfrac{a-b}{b}\phi \\ y = (a-b)\sin\phi - b\sin\dfrac{a-b}{b}\phi. \end{array} \right. \tag{1.157}$$

Astroida este hipocicloida care are patru ramuri simetrice.

În acest caz, raza b a cercului mobil trebuie să fie a patra parte din raza cercului fix, pentru ca el să se aştearnă într-o rulare completă pe un sfert de cerc (fig. 1.34)

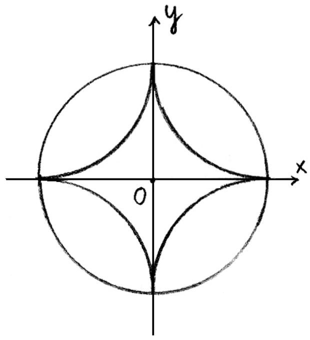


fig. 1.34 - astroida

Luând $a = 4b$ în 1.157, obţinem

$$\begin{cases} x = b(3\cos\phi + \cos 3\phi) \\ y = b(3\sin\phi + \sin 3\phi) \end{cases}, \tag{1.158}$$

ecuaţiile parametrice ale astroidei, care se mai pot scrie şi sub forma:

$$\begin{cases} x = 4b\cos^3\phi \\ y = 4b\sin^3\phi \end{cases},$$

sau

$$\begin{cases} x = a\cos^3\phi \\ y = a\sin^3\phi \end{cases}, \tag{1.159}$$

Eliminând parametrul ϕ din ecuaţiile 1.159, găsim **ecuaţia astroidei în reprezentare implicită**:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Vom da, în continuare, câteva exemple de curbe plane în reprezentarea polară $\rho = \rho(\theta)$.

1.12.5 Ecuaţia unei drepte în coordonate polare

Fie $OP = p$ distanţa de la originea O a reperului xOy la dreapta d, α unghiul de înclinaţie al dreptei d faţă de Ox şi ρ, θ coordonatele polare ale unui punct $M \in d$ (fig. 1.35)

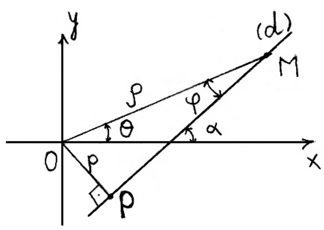


fig. 1.35

Avem:

$$OP = OM \sin \phi,$$

şi, deoarece $\phi = \alpha - \theta$, rezultă din ultima egalitate relaţia

$$p = \rho \sin(\alpha - \theta),$$

adică ecuaţia dreptei în coordonate polare sub forma:

$$\rho = \frac{p}{\sin(\alpha - \theta)}, \tag{1.160}$$

unde $\alpha = arctgm$, m fiind panta dreptei.

1.12.6 Ecuaţiile conicelor în coordonate polare

Se ştie că orice conică nedegenerată poate fi definită ca locul geometric al punctelor din plan care se bucură de proprietatea că au raportul distanţelor la un punct fix, numit focar şi la o dreaptă fixă, numită directoare, constant. Această constantă se notează cu e şi se numeşte **excentricitate.**

Ecuaţiile conicelor raportate la un pol situat într-un focar şi la o axă coincizând cu axa conicei se numesc **ecuaţiile conicelor în coordonate polare.**

Pentru a obţine aceste ecuaţii, considerăm focarul conicei în O, axa polară fiind axa conicei (caz în care dreapta directoare d este perpendiculară pe axa polară (fig. 1.36)).

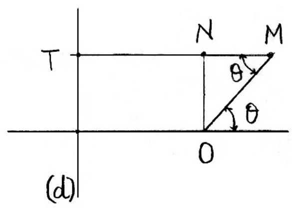


fig. 1.36

Avem

$$\frac{OM}{MT} = e.$$

Însă $MT = MN + NT = \rho \cos\theta + d$ şi deci

$$\frac{\rho}{\rho \cos\theta + d} = e,$$

adică, $\rho = \rho e \cos\theta + de$.

Notând $de = p$, avem

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}, \tag{1.161}$$

ecuaţia conicelor în coordonate polare.

Dacă $e = 1$, avem

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta},$$

ecuaţia parabolei în coordonate polare.

1.12.7 Spirale

Spirala lui Arhimede ia naştere prin deplasarea unui punct cu o viteză uniformă pe o semidreaptă, în timp ce semidreapta se roteşte în jurul unei extremităţi fixe, cu o viteză unghiulară constantă.

Considerăm semidreapta OD care se roteşte cu viteză unghiulară constantă ω în jurul punctului O. Punctul M parcurge dreapta cu o viteză constantă v. Notăm

$$OM = \rho,\ \widehat{xOD} = \theta$$

şi cu t, timpul. Avem

$$\rho = vt,\ \theta = \omega t,$$

de unde

$$\rho = \frac{v\theta}{\omega}$$

sau

$$\rho = k\theta, \tag{1.162}$$

ecuaţia spiralei lui Arhimede în coordonate polare.

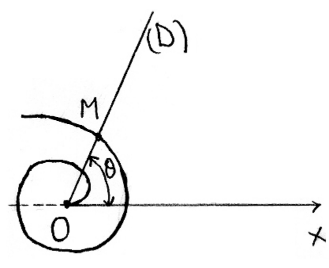


fig. 1.37 - spirala lui Arhimede

Spirala hiperbolică. Construim în jurul polului O o serie de cercuri concentrice, care taie axa polară în punctele A_1, A_2, A_3, ... Ducem din aceste puncte pe cercurile respective arce egale, de lungime dată a. Locul geometric al extremităţilor acestor arce este spirala hiperbolică (fig. 1.38, fig. 1.39)

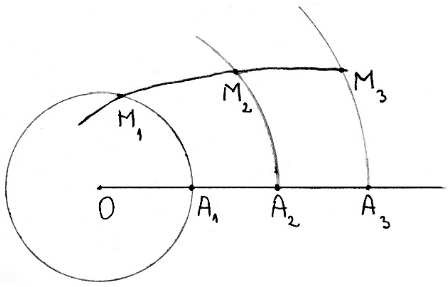


fig. 1.38

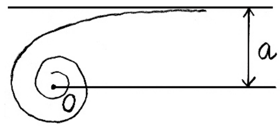


fig. 1.39

Avem:

$$\overset{\frown}{A_1M_1} = \overset{\frown}{A_2M_2} = \overset{\frown}{A_3M_3} = ... = a,$$

sau

$$\rho_1\theta_1 = \rho_2\theta_2 = \rho_3\theta_3 = ... = a.$$

Coordonatele polare ale punctelor M_i verifică deci ecuaţia

$$\rho \cdot \theta = a,$$

de unde

$$\rho = \frac{a}{\theta}, \tag{1.163}$$

ceea ce reprezintă **ecuaţia în coordonate polare a spiralei hiperbolice**.

Din 1.163 rezultă că, dacă $\theta \to \infty$, $\rho \to 0$, adică punctul de pe curbă ajunge la pol după un număr infinit de mare de rotiri complete. Se spune că polul este **punct asimptotic**.

Mai mult, din $y = \rho \sin\theta$ şi $\rho = \dfrac{y}{\sin\theta}$, avem cu 1.163:

$$y = a\frac{\sin\theta}{\theta},$$

de unde

$$\lim_{\theta\to 0} y = \lim_{\theta\to 0} a\frac{\sin\theta}{\theta} = a,$$

ceea ce ne arată că $y = a$ este asimptotă orizontală pentru spirala hiperbolică şi motivează reprezentarea grafică a ei dată în fig. 1.39.

Specificăm că spirala lui Arhimede 1.162 şi spirala hiperbolică 1.163 sunt cazuri particulare ale spiralelor generale de ecuaţie:

$$\rho = k\theta^m.$$

Spirala logaritmică este curba în care argumentul θ este proporţional cu logaritmul razei vectoare (fig. 1.40), adică

$$\theta = \frac{1}{k}\ln\rho,\ (k \in \mathbb{R} - \text{ constant})$$

de unde

$$\rho = e^{k\theta}. \tag{1.164}$$

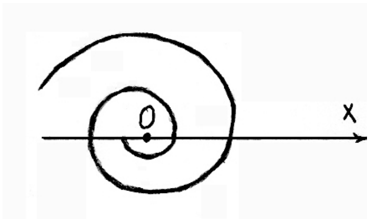


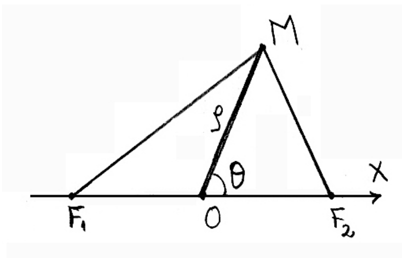
fig. 1.40

1.12.8 Lemniscata

Lemniscata este locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că produsul distanţelor la două puncte fixe este constant şi egal cu pătratul jumătăţii distanţei dintre cele două puncte.

Să considerăm F_1, F_2 - cele două puncte fixe, O - mijlocul segmentului F_1F_2 şi M un punct oarecare al lemniscatei. Alegând reperul polar cu O drept pol şi cu dreapta OF_2 ca axă polară, avem:

$$OM = \rho,\ \widehat{xOM} = \theta,\ OF_1 = OF_2 = a.$$



Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile OMF_1, respectiv, OMF_2, obţinem relaţiile: $MF_1^2 = \rho^2 + a^2 + 2a\rho\cos\theta$, respectiv, $MF_2^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta$.

Înlocuind ultimele egalităţi în definiţia locului geometric,

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2,$$

găsim că:

$$(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2\rho^2 \cos^2\theta = a^4.$$

Ultima egalitate este echivalentă cu:

$$\rho^4 + 2a^2\rho^2 = 4a^2\rho^2 \cos^2\theta,$$

sau cu:

$$\rho^2 = 2a^2(2\cos^2\theta - 1).$$

Înlocuind paranteza, obţinem **ecuaţia lemniscatei în coordonate polare** de forma:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta. \tag{1.165}$$

Trecând din coordonate polare în coordonate carteziene, obţinem ecuaţia:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

adică **reprezentarea sub formă implicită a lemniscatei**.

1.12.9 Concoide

Concoida unei curbe date în reprezentarea polară $\rho = \rho(\theta)$ este curba obţinută din curba dată prin adăugarea unui segment constant razei vectoare. Cu alte cuvinte, concoida curbei $\rho = \rho(\theta)$ este

$$\widetilde{\rho} = \rho(\theta) + k.$$

Concoida cercului. Pentru a determina concoida unui cerc de rază dată a, scriem ecuaţia în coordonate polare a acestui cerc, luând reperul polar cu polul O un punct fixat pe cerc şi axă polară prelungirea unui diametru fixat ce trece prin O (fig. 1.41)

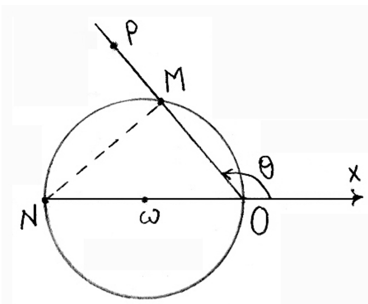


fig. 1.41

În triunghiul OMN avem: $OM = ON\cos(180^o - \theta) = -2a\cos\theta$.

Adăugăm razei vectoare mărimea constantă k şi avem toate concoidele cercului dat, în reprezentare polară:

$$\rho = k - 2a\cos\theta. \tag{1.166}$$

În cazul particular $k = 2a$, obţinem una din concoidele cercului, anume

$$\rho = 2a(1 - 2a\cos\theta);$$

comparând cu 1.156, deducem că această curbă este, de fapt, cardioida.

Concoida unei drepte (concoida lui Nicomede)

Considerăm o dreaptă d perpendiculară pe axa polară, la distanţa a de pol şi dorim să determinăm concoida acestei drepte.

În acest scop, folosind ecuaţia 1.160, cu $\alpha = 90^o$, $p = a$, avem pentru dreapta d ecuaţia în coordonate polare:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Concoida lui d va avea, deci, ecuaţia:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + k, \tag{1.167}$$

având reprezentarea grafică dată în fig. 1.42:

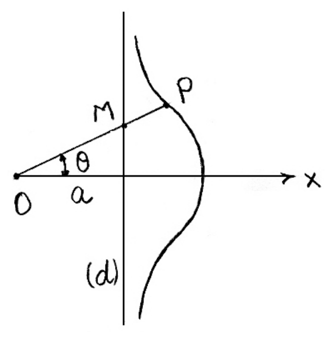


fig. 1.42

Capitolul 2

Curbe în spaţiu

2.1 Reprezentarea analitică a curbelor în spaţiu

Prin **curbă în sens larg** înţelegem o mulţime de puncte (Γ) din $\mathbb{R}^3$, ai căror vectori de poziţie satisfac ecuaţia:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in (a, b) \equiv I, \tag{2.1}$$

care în reperul ortonormat $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ se scrie sub forma

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}, \; t \in I.$$

Ecuaţia 2.1 poartă numele de **reprezentare parametrică** a lui (Γ), iar t este numit **parametrul** acestei reprezentări.

Pentru a putea aplica noţiunile şi rezultatele calculului diferenţial ecuaţiei 2.1, va trebui să o înzestrăm cu presupuneri diferenţiabile şi facem aceasta în cele ce urmează, ordonând riguros introducerea conceptului de curbă în spaţiu în geometria diferenţială.

Definitia 2.1 *Reprezentarea 2.1 este numită* ***reprezentare admisibilă de clasă*** *p dacă ea satisface următoarele presupuneri:*
P_0. Aplicaţia $t \mapsto \overrightarrow{r}(t) : I \to (\Gamma)$ este bijectivă.
P_1. Funcţia vectorială $\overrightarrow{r}$ este de clasă $p \geq 1$ pe I.
P_2. Derivata sa $\dot{\overrightarrow{r}} = \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ este diferită de zero peste tot în I.

Este evident că 2.1 nu este unica reprezentare parametrică posibilă pentru o curbă dată. Putem obţine din ea o altă reprezentare parametrică printr-o transformare de tipul

$$t = t(t^*). \tag{2.2}$$

Deoarece mulţimea punctelor (Γ) din 2.1 este iniţial condiţionată, vom admite numai acele transformări care, aplicate unei reprezentări 2.1 admisibile de clasă p, să conducă la reprezentări admisibile $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t^*)$ tot de clasă p şi să reprezinte întreaga mulţime de puncte (Γ).

Definitia 2.2 *Două reprezentări admisibile de clasă p se spun a fi* ***echivalente*** *dacă există o transformare de parametru $t = t(t^*)$ care să le transforme una în alta, cu următoarele proprietăţi:*

P_0^*. Funcţia $t = t(t^*) : I^* \to I$, unde I^* este un interval, este bijectivă.

P_1^*. Funcţia $t = t(t^*)$ este de clasă $p \geq 1$ peste tot în I^*.

P_2^*. Derivata $\dfrac{dt}{dt^*}$ este diferită de zero peste tot în I^*.

Este uşor de verificat că relaţia definită mai sus îndeplineşte axiomele echivalenţei.

Definitia 2.3 *O clasă de echivalenţă de reprezentări admisibile de clasă p se numeşte* ***arc regulat de curbă de clasă*** *p.*

Cu alte cuvinte, un arc regulat este format din mulţimea de puncte (Γ) (puncte ale arcului) şi un reprezentant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ al clasei de echivalenţă: $\{(\Gamma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in I\}$. În continuare, vom neglija acolada pentru desemnarea arcului regulat, notând simplu:

$$(\Gamma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in I.$$

Condiţiile P_0, P_1, P_2 se numesc **condiţii de regularitate**. Un punct care îndeplineşte aceste condiţii se numeşte **punct regulat**, spre deosebire de **punctul singular**, care nu îndeplineşte cel puţin una din aceste condiţii. Este evident, din cele de mai sus, că un arc regulat este constituit din puncte regulate, abstracţie făcând eventual de extremităţi, şi că un arc regulat nu are intersecţii cu el însuşi (conform presupunerii P_0), adică, nu are **puncte multiple**.

Fie I un interval, nu neapărat mărginit.

Definitia 2.4 *O reprezentare de forma $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) : I \to (C)$ se numeşte* ***reprezentare general admisibilă de clasă*** *p dacă ea satisface P_1 şi P_2 (nu neapărat şi P_0), însă restricţia acesteia la un subinterval $\widetilde{I} = (a, b) \subset I$ este un arc regulat de curbă.*

Definitia 2.5 *Două reprezentări* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) : I \to (C)$ *şi* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t^*) : I^* \to (C)$ *general admisibile de clasă p se spun a fi* ***echivalente*** *dacă pentru orice subinterval* $\widetilde{I} = (a, b)$ *al lui* I, *restricţia lui* $\overrightarrow{r}(t)$ *la* $\widetilde{I}$ *este echivalentă cu restricţia lui* $\overrightarrow{r}(t^*)$ *la un subinterval al lui* I^*, *în sensul definiţiei 2.2.*

Axiomele echivalenţei sunt evident îndeplinite, aşa încât dăm

Definitia 2.6 *Prin* ***curbă de clasă*** p*, înţelegem o clasă de echivalenţă de reprezentări general admisibile de clasă p. Elementele mulţimii de puncte din această clasă sunt numite* ***puncte ale curbei.***

Aşadar, o curbă este ansamblul format de mulţimea de puncte (C) (puncte ale curbei) şi un reprezentant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ al clasei de echivalenţă: $\left\{(C) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in I \subset \overline{\mathbb{R}}\right\}$. În continuare, vom nota, pentru simplitate:

$$(C) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \;\; t \in I.$$

Definiţia de mai sus afirmă că, de fapt, **o curbă de clasă** p **este o reuniune de arce regulate de clasă** p.

Deoarece presupunerea P_0 nu este întotdeauna îndeplinită, o curbă poate admite puncte multiple (autointersecţii). Curbele care nu admit puncte multiple se numesc **curbe simple.**

O curbă se spune a fi **închisă** dacă ea poate fi reprezentată printr-o funcţie vectorială periodică $\overrightarrow{r}(t)$:

$$\overrightarrow{r}(t + w) = \overrightarrow{r}(t), \;\; \forall t \in I$$

(unde $w > 0$ este fixat).

O curbă se numeşte **plană** dacă toate punctele ei sunt conţinute într-un plan; o curbă care nu este plană se numeşte **curbă strâmbă**.

Geometria diferenţială a curbelor în spaţiu se ocupă în mod special de studiul curbelor în vecinătatea unui punct regulat.

Din expresia analitică a funcţiei vectoriale 2.1, avem:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{array} \right. \tag{2.3}$$

pentru un arc regulat cu $t \in (a, b)$ sau pentru o curbă cu $t \in I$, ecuaţii ce poartă numele de **ecuaţiile parametrice** ale arcului sau curbei în spaţiu.

Deoarece într-un punct regulat, $\dot{\overrightarrow{r}} \neq 0$, rezultă că, într-un astfel de punct, cel puţin una din derivatele $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ sau $\dot{z}(t)$ este diferită de zero.

Dacă, de exemplu, $\dot{x}(t) \neq 0$, rezultă că funcţia $x = x(t)$ admite o inversă $t = t(x)$ şi avem pentru un arc regulat (mai general, chiar pentru o curbă) ecuaţiile:

$$y = y(x), \quad z = z(x). \tag{2.4}$$

Astfel, o curbă în spaţiu poate apărea şi în reprezentarea 2.4 cu x drept parametru, ecuaţiile 2.4 reprezentând din punct de vedere geometric intersecţia a doi cilindri, primul cu generatoarele paralele cu Oz şi al doilea, cu generatoarele paralele cu Oy.

La fel, dacă $\dot{y}(t) \neq 0$ sau $\dot{z}(t) \neq 0$, obţinem pentru curbă reprezentările:

$$x = x(y), \quad z = z(y),$$

cu y drept parametru, sau, respectiv,

$$x = x(z), \;\; y = y(z),$$

cu z drept parametru al curbei.

Mai general, o curbă în spaţiu poate fi obţinută şi din sistemul

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

care, în condiţiile teoremei funcţiilor implicite pentru două ecuaţii implicite 1.37, conduce la ecuaţii de tip 2.4. Amintim că funcţiile F şi G trebuie să fie continue, cu derivate parţiale cel puţin de ordin 1 continue şi cel puţin unul din determinanţii funcţionali

$$\begin{aligned} \frac{D(F,G)}{D(y,z)} &= \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \quad \frac{D(F,G)}{D(z,x)} = \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \\ \frac{D(F,G)}{D(x,y)} &= \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.6}$$

să fie diferit de zero. Ecuaţiile 2.5 poartă numele de **reprezentarea carteziană generală** a curbei.

Dacă în 2.5 considerăm x, y ca variabile independente atunci putem, în condiţiile impuse de analiza matematică, explicita 2.5 în forma:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = g(x, y), \end{cases} \tag{2.7}$$

care este o ultimă formă analitică pentru ecuaţiile unei curbe în spaţiu.

Deoarece ecuaţia $z = f(x, y)$ poate fi scrisă sub forma:

$$\left\{\begin{array}{c} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v), \end{array}\right. \tag{2.8}$$

cu u, v drept parametri, aceasta reprezintă o **suprafaţă în sens larg**. Mai mult, ecuaţia

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.9}$$

reprezintă o suprafaţă în sens larg. Până la ordonarea riguroasă a conceptului de suprafaţă (care va fi făcută în capitolul următor), vom admite că funcţia F din 2.9 are proprietatea că cel puţin una din derivatele parţiale de ordinul întâi F'_x, F'_y, F'_z este nenulă în vecinătatea oricăruia din punctele sale, ipoteză necesară trecerii de la ecuaţia 2.9 la ecuaţiile 2.8.

Revenind la ecuaţiile 2.5, observăm că o curbă în spaţiu poate fi obţinută şi ca intersecţia a două suprafeţe.

Observaţie: Nu întotdeauna o curbă în spaţiu este intersecţia completă a două suprafeţe. Putem vedea acest lucru pe exemplul următor:

$$y = x^2,\ xz - y^2 = 0,$$

care, pe lângă punctele curbei $(C) : y = x^2,\ z = x^3$, mai conţine şi axa Oz $(x = 0,\ y = 0)$.

Vom exemplifica reprezentarea analitică a curbelor în spaţiu prin *curba Viviani* (fig. 2.1).

Aceasta este curba de intersecţie dintre sfera $(S)\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ şi cilindrul $(S')\ x^2 + y^2 - rx = 0$.

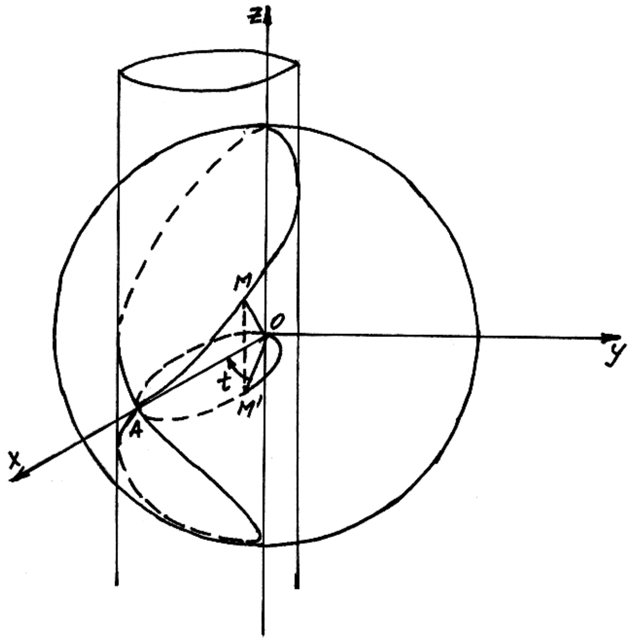


fig. 2.1

Ecuaţiile generale ale curbei sunt:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - rx = 0. \end{cases}$$

Vom da şi o reprezentare parametrică a curbei.

Fie $M(x, y, z) \in (C)$, $M'(x, y, 0)$ - proiecţia lui M pe planul xOy (M' aparţine cercului de diametru OA). Să observăm că triunghiurile $\Delta OAM'$ şi $\Delta OMM'$ sunt dreptunghice şi congruente (OM' comună şi $OA = OM = r$). Prin urmare, $\widehat{AOM'} \equiv \widehat{MOM'}$. Notând cu $t = \widehat{AOM'}$, obţinem:

$$\begin{cases} x = OM' \cos t \\ y = OM' \sin t \\ z = OM \sin t \end{cases} .$$

Dar $OM' = OA \cos t = r \cos t$ şi deci,

$$\begin{cases} x = r \cos^2 t \\ y = r \sin t \cos t \\ z = r \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

constituie o reprezentare parametrică a curbei Viviani.

Alte exemple le vom studia pe parcurs.

În ceea ce urmează, vom prezenta teoria diferenţială a curbelor în spaţiu în reprezentarea parametrică 2.1, iar la finalul capitolului vom prezenta formulele necesare trecerii de la reprezentarea parametrică la reprezentarea carteziană generală.

Încheiem acest paragraf introducând noţiunea de **orientare** pe o curbă în spaţiu, în acelaşi mod ca pentru o curbă plană.

Definitia 2.7 *Numim* ***sens pozitiv*** *de parcurs pentru curba* (C) : $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in I$, *sensul care corespunde creşterii valorilor parametrului* t.

Evident, există două moduri de orientare a lui (C) şi trecerea de la o orientare la orientarea opusă poate fi efectuată printr-o transformare de parametru a cărei derivată este negativă: $t = t(t^*)$, $\dfrac{dt^*}{dt} < 0$ (în particular, putem alege $t = -t^*$).

2.2 Element de arc al unei curbe în spaţiu

Noţiunea de arc rectificabil al unei curbe plane a fost introdusă în §2 al capitolului precedent. Deoarece această noţiune este independentă de reper, ea rămâne valabilă şi pentru curbele în spaţiu.

Fie $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ o curbă reprezentată parametric şi $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) \equiv x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} + z(t)\,\overrightarrow{k}$, ecuaţia vectorială a curbei.

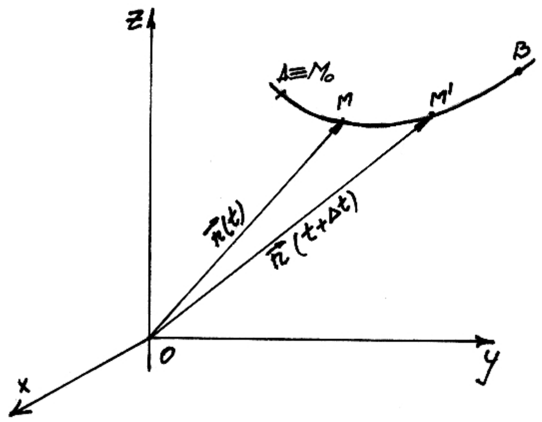


fig. 2.2

Considerăm $\overset{\frown}{AB}$ un arc regulat pe curba (C), cu A corespunzător valorii $t = a$ a parametrului, iar B - lui $t = b$. Avem:

Teorema 2.8 *Arcul regulat $\overset{\frown}{AB}$ este rectificabil. Lungimea sa este:*

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \left\| \dot{\overrightarrow{r}}(t) \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \tag{2.10}$$

Numărul $L_{\overset{\frown}{AB}}$ este independent de reprezentantul clasei de echivalenţă a arcului regulat $\overset{\frown}{AB}$ (adică, $L_{\overset{\frown}{AB}}$ este independent de parametrizarea aleasă).

Demonstratie. Considerăm un poligon Q_n de n coarde cu vârfurile M_s date de vectorii de poziţie

$$\overrightarrow{r_s} = \overrightarrow{r}(t_s), \ s = 0, ..., n,$$

unde $t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$.

Poligonul Q_n are lungimea

$$L(Q_n) = l_1 + l_2 + ... + l_n,$$

unde

$$l_s = \left\| \overrightarrow{M_{s-1} M_s} \right\|$$

este lungimea laturii s a poligonului, adică:

$$\begin{aligned} l_s &= \| \overrightarrow{r}_s - \overrightarrow{r}_{s-1} \| = \\ &= \left\| (x_s - x_{s-1}) \overrightarrow{i} + (y_s - y_{s-1}) \overrightarrow{j} + (z_s - z_{s-1}) \overrightarrow{k} \right\|. \end{aligned}$$

Deoarece $\overrightarrow{r}(t)$ este o funcţie de clasă $p \geq 1$, putem aplica teorema de medie din calculul diferenţial în ultima egalitate, obţinând:

$l_s = (t_s - t_{s-1}) \left\| \dot{x}(t_{s_1}) \overrightarrow{i} + \dot{y}(t_{s_2}) \overrightarrow{j} + \dot{z}(t_{s_3}) \overrightarrow{k} \right\|$, cu $t_{s-1} < t_{s_j} < t_s$, $j = 1, 2, 3$. Să notăm

$$\overrightarrow{v}_s = \dot{x}(t_{s_1}) \overrightarrow{i} + \dot{y}(t_{s_2}) \overrightarrow{j} + \dot{z}(t_{s_3}).$$

Cu această notaţie, avem:

$$l_s = (t_s - t_{s-1}) \| \overrightarrow{v}_s \|.$$

Adunând şi scăzând $\left\| \dot{\overrightarrow{r}}_s \right\|$ în membrul doi al ultimei relaţii, avem:

$$l_s = (t_s - t_{s-1}) \left(\left\| \dot{\overrightarrow{r}}_s \right\| + \eta_s \right),$$

unde $\eta_s = \|\overrightarrow{v}_s\| - \left\|\dot{\overrightarrow{r}}_s\right\|$. Sumând acum după s, obţinem:

$$L(Q_n) = \sum_{s=1}^{n}(t_s - t_{s-1})\left\|\dot{\overrightarrow{r}}_s\right\| + \sum_{s=1}^{n}(t_s - t_{s-1})\eta_s. \tag{2.11}$$

Din inegalitatea triunghiului (proprietăţile normei), însă,

$$\eta_s = \|\overrightarrow{v}_s\| - \left\|\dot{\overrightarrow{r}}_s\right\| \leq \left\|\overrightarrow{v}_s - \dot{\overrightarrow{r}}_s\right\|.$$

Folosind faptul că $\dot{\overrightarrow{r}}_s$ este continuă, avem că, pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta(\varepsilon)$ astfel încât $\left\|\overrightarrow{v}_s - \dot{\overrightarrow{r}}_s\right\| < \varepsilon$ dacă $t_s - t_{s-1} < \delta$. Din această cauză, dacă lungimea corzii maxime este mai mică decât δ, atunci

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}(t_s - t_{s-1})\eta_s &\leq \sum_{s=1}^{n}(t_s - t_{s-1})\left\|\overrightarrow{v}_s - \dot{\overrightarrow{r}}_s\right\| \leq \\ &\leq \varepsilon\sum_{s=1}^{n}(t_s - t_{s-1}) = \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Această ultimă egalitate ne arată că dacă lungimea corzii maxime se apropie de zero când $n \to \infty$, ultima sumă din 2.11 tinde la zero; prima sumă tinde, în acest caz, la integrala 2.10.

În acest fel, prima parte a teoremei este demonstrată.

Fie, acum $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t^*)$ un alt reprezentant al clasei de echivalenţă a reprezentării $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$. Atunci, există o transformare $t = t(t^*)$ definită pe un interval $I^* = (a^*, b^*)$ care duce o reprezentare în alta. Conform presupunerilor P_1^*, P_2^*, avem $\dfrac{dt}{dt^*}$ continuă pe I^* şi substituind în 2.10 pe t^*, avem:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\| dt = \int_{a^*}^{b^*} \left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\| \left|\frac{dt}{dt^*}\right| dt^* = \int_{a^*}^{b^*} \left\|\frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*}\right\| dt^*,$$

ceea ce demonstrează şi cea de-a doua parte a teoremei. ■

Din 2.10, avem:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\| dt = \int_a^b \|d\overrightarrow{r}\| = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{2.12}$$

Expresia $\|d\overrightarrow{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ se notează cu ds şi se numeşte **elementul de arc (elementul liniar)** al curbei (C).

Avem, deci:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|d\overrightarrow{r}\| = d\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r}, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dacă schimbăm capătul fix de integrare b cu o variabilă $t \in [a, b]$, atunci lungimea de arc L devine o funcţie de t, să spunem, $s(t)$. Înlocuind şi valoarea a din 2.10 cu o valoare fixată $t_0 \in [a, b]$, obţinem:

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left\| \dot{\overrightarrow{r}}(t) \right\| dt = \int\limits_{t_0}^{t} \|d\overrightarrow{r}\|, \quad \dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}. \tag{2.14}$$

Funcţia $s(t)$, numită **lungimea arcului** $\overset{\frown}{M_0M}$ al curbei (C) (unde $M_0 \in (C)$ este punctul care corespunde valorii t_0 a parametrului, iar M, punctul corespunzător lui t), are interpretarea geometrică analoagă celei date pentru lungimea arcului unei curbe plane.

Mai mult, teorema 1.8 de la curbe plane se traduce fără dificultate la curbe în spaţiu, obţinând:

Teorema 2.9 *Lungimea de arc $s(t)$ poate fi întrebuinţată ca parametru în reprezentările parametrice ale curbelor în spaţiu. Trecerea de la t la s păstrează clasa reprezentării.*

Avem, din 2.14:

$$\dot{s}^2 = \dot{\overrightarrow{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} > 0,$$

de unde, prin derivare, rezultă

$$\dot{s}\ddot{s} = \dot{\overrightarrow{r}} \cdot \ddot{\overrightarrow{r}}.$$

Substituind inversa funcţiei $s = s(t)$ în reprezentarea parametrică $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, obţinem reprezentarea curbei (C) sub forma:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s), \tag{2.15}$$

cu s drept parametru, numit **parametru natural.**

Utilizarea parametrizării naturale va simplifica unele din calculele făcute în consideraţiile asupra curbei în spaţiu, după cum vom vedea în paragrafele ce urmează.

Specificăm că punctul corespunzător pe (C) lui $s = 0$, adică $t = t_0$ poate fi ales, în 2.14, arbitrar. Sensul pozitiv al reprezentării 2.15 este acelaşi cu cel al reprezentării iniţiale $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, deoarece $s = s(t)$ este o funcţie monoton crescătoare. Utilizând observaţia din finalul paragrafului precedent, pentru a obţine orientarea opusă putem întrebuinţa pe $s^* = -s$, ca un nou parametru.

Facem convenţia ca în continuare, derivatele funcţiei vectoriale $\overrightarrow{r}$ în raport cu parametrul natural s să le notăm cu accente, spre deosebire de derivatele aceleiaşi funcţii în raport cu parametrul t oarecare, pe care ne-am obişnuit să le notăm cu puncte:

$$\overrightarrow{r}' = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds},\ \overrightarrow{r}'' = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2},\ \dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt},\ \ddot{\overrightarrow{r}} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} \qquad \text{etc.}$$

2.3 Dreapta tangentă şi planul normal la o curbă în spa ţiu

Fie $(C)\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ o curbă dată parametric şi $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ - ecuaţia vectorială a curbei.

Dreapta tangentă la curbă într-un punct $M(x, y, z) \in (C)$ regulat, este poziţia limită a dreptelor MM' atunci când $M' \in (C) \to M$. Din raţionamentul făcut la calculul elementului arcului de curbă rezultă că tangenta este de vector director:

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r}} = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{i} + \dot{y}(t)\,\overrightarrow{j} + \dot{z}(t)\,\overrightarrow{k}.$$

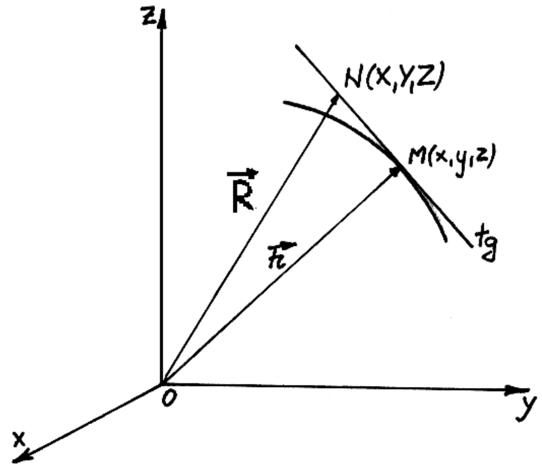


fig. 2.3

Dacă $\overrightarrow{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct arbitrar $N(X,Y,Z)$ de pe tangentă, atunci: $\overrightarrow{R}-\overrightarrow{r}=\overrightarrow{MN}=\lambda\dot{\overrightarrow{r}}$.

Adică:

$$(tg):\ \overrightarrow{R}=\overrightarrow{r}+\lambda\dot{\overrightarrow{r}},\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{2.16}$$

este **ecuaţia vectorială a dreptei tangente** în M la (C).

Pe componente, avem:

$$(tg):\ \frac{X-x}{\dot{x}}=\frac{Y-y}{\dot{y}}=\frac{Z-z}{\dot{z}}, \tag{2.17}$$

ecuaţiile dreptei tangente la (C) în punctul M, **sub formă de rapoarte**.

Versorul dreptei tangente se notează cu $\overrightarrow{\tau}$ şi se obţine împărţind $\dot{\overrightarrow{r}}$ la lungimea sa:

$$\overrightarrow{\tau}=\frac{\dot{\overrightarrow{r}}}{\left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|}=\frac{\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}=\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}. \tag{2.18}$$

Dacă curba este dată de intersecţia a două suprafeţe:

$$(C)\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases},$$

presupunând că $x=x(t)\,,\ y=y(t)\,,\ z=z(t)$ este o parametrizare a curbei, prin derivare în raport cu t, obţinem:

$$\begin{cases} F'_x\dot{x}+F'_y\dot{y}+F'_z\dot{z}\ =0 \\ G'_x\dot{x}+G'_y\dot{y}+G'_z\dot{z}\ =0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Matricea sistemului are rangul doi în punctul regulat $M(x,y,z)$, prin urmare, putem presupune că, spre exemplu, determinantul $\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}$ este diferit de zero.

Rezolvăm sistemul de mai sus prin regula lui Cramer, luând $\dot{z}$ ca parametru. Obţinem:

$$\frac{\dot{x}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}=\frac{\dot{y}}{-\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}=\frac{\dot{z}}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}}.$$

Din 2.17 şi ultimul şir de egalităţi, obţinem **ecuaţiile dreptei tangente în cazul curbei date ca intersecţie de două suprafeţe, sub forma:**

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{-\begin{vmatrix} F_x' & F_z' \\ G_x' & G_z' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}}. \tag{2.20}$$

Definitia 2.10 *Se numeşte* ***plan normal*** (π_N) *la curbă într-un punct regulat* $M \in (C)$, *planul perpendicular în* M *pe dreapta tangentă.*

Notând cu $\overrightarrow{R}$ vectorul de poziţie al unui punct din planul normal (π_N), ecuaţia vectorială a planului normal este:

$$\dot{\overrightarrow{r}} \cdot \left[\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t)\right] = 0. \tag{2.21}$$

Pe componente, (π_N) se scrie:

$$\dot{x}(t)\left[X - x(t)\right] + \dot{y}(t)\left[Y - y(t)\right] + \dot{z}(t)\left[Z - z(t)\right] = 0, \tag{2.22}$$

sau:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{vmatrix} = 0. \tag{2.23}$$

2.4 Reperul Frenet

Fie $(C) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in I$ o curbă de clasă cel puţin 2 şi M_0 un punct al lui (C), corespunzător valorii t_0 a parametrului. Presupunem că M_0 este punct regulat. Avem

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \neq 0$$

şi, după cum am văzut mai sus, vectorul $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0)$ ne dă direcţia dreptei tangente în M_0 la curbă. Luăm în considerare şi vectorul $\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$. Dacă

$$\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0) \neq 0,$$

punctul M_0 se numeşte **neinflexionar** (în caz contrar, el poartă numele de **punct inflexionar** al lui (C)).

Mai mult, dacă

$$\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0) \neq 0,$$

adică, dacă vectorii $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$ nu sunt coliniari, atunci punctul M se numeşte **nestaţionar** (în caz contrar, el poartă numele de **punct staţionar** al lui (C)).

Presupunând că M_0 este neinflexionar şi nestaţionar, direcţiile vectorilor $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$, împreună cu punctul M_0, determină în mod unic un plan.

Definitia 2.11 *Se numeşte* ***plan osculator*** (π_0) *la curba* (C) *într-un punct neinflexionar şi nestaţionar* $M_0(t_0) \in (C)$, *planul care trece prin* M_0 *şi conţine direcţiile vectorilor* $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0)$ *şi* $\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$.

Direcţia normală la acest plan este, evident, $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$. De aici, deducem ecuaţia sa vectorială:

$$(\pi_0) : \left(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t_0)\right) \cdot \left[\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)\right] = 0, \tag{2.24}$$

unde $\overrightarrow{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare din planul (π_0).

Pe componente, obţinem ecuaţia planului osculator sub forma:

$$(\pi_0) : \begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.25}$$

Observaţii:

1. Planul osculator (π_0) conţine dreapta tangentă la curbă în M_0 şi este perpendicular pe planul normal (π_N) în M_0.

2. În punctele inflexionare sau staţionare ale lui (C) nu putem ataşa planul osculator. De aceea, în cele ce urmează, vom lua în considerare numai punctele $M \in (C)$, neinflexionare şi nestaţionare.

3. Planul osculator nu depinde de parametrizarea aleasă pe curbă (de reprezentantul $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ al clasei de echivalenţă). Într-adevăr, dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t^*)$ este un alt reprezentant al clasei de echivalenţă, atunci:

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt},$$

deci, $\dot{\overrightarrow{r}}$ este coliniar cu $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt^*}$. Mai mult,

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt}\right) = \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^{*2}} + \frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*} \cdot \frac{d^2t^*}{dt^2},$$

de unde rezultă că

$$\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}} = \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*} \times \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^{*2}}\right) \cdot \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^3, \tag{2.26}$$

adică direcţia lui $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*} \times \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^{*2}}$ coincide cu cea a normalei planului osculator. Ca atare, planul definit de punctul $M \in (C)$ şi direcţiile $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt^*}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^{*2}}$ coincide cu planul osculator în M la (C).

4. Dacă punctul M este staţionar într-o parametrizare, el este astfel în toate parametrizările, fapt ce rezultă imediat din 2.26.

5. Să presupunem curba (C) situată în planul xOy. Fie $\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$, $x \in I$, reprezentarea ei explicită. Atunci, o reprezentare parametrică a lui (C) este
$$(C): \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = 0 \end{cases}, x \in I.$$
Rezultă $\dot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{i} + f'(t)\overrightarrow{j}$, $\ddot{\overrightarrow{r}} = f''(t)\overrightarrow{j}$ şi $\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}} = f''(t)\overrightarrow{k}$, ceea ce înseamnă că pentru o curbă plană, noţiunile de punct inflexionar, respectiv, punct staţionar, coincid, aceste puncte fiind date de soluţiile ecuaţiei $f''(x) = 0$, fapt cunoscut din liceu.

Deoarece planele (π_N) şi (π_0) au în comun punctul de studiu $M_0 \in (C)$, ele vor avea în comun şi o dreaptă.

Definitia 2.12 *Dreapta de intersecţie dintre planul normal* (π_N) *şi planul osculator* (π_0) *se numeşte* ***dreaptă normală principală*** (n_p).

Ca intersecţie de două plane, avem:

$$(n_p): \begin{cases} \pi_0 = 0 \\ \pi_N = 0 \end{cases}.$$

Rezultă că vectorul director al normalei principale este dat de produsul vectorial al vectorilor normali la planele în discuţie, adică $\left(\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}}\right) \times \dot{\overrightarrow{r}}$. Ecuaţia vectorială a dreptei normale principale este:

$$(n_p): \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{r}(t_0) + \lambda\left[\left(\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)\right) \times \dot{\overrightarrow{r}}(t_0)\right]. \tag{2.27}$$

Pe componente, obţinem ecuaţiile de mai sus sub formă de rapoarte:

$$(2.28)\qquad (n_p)\ :\ \frac{X-x(t_0)}{\begin{vmatrix} B & C \\ \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{Y-y(t_0)}{-\begin{vmatrix} A & C \\ \dot{x}(t_0) & \dot{z}(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{Z-z(t_0)}{\begin{vmatrix} A & B \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \end{vmatrix}},$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \dot{z}(t_0) & \dot{x}(t_0) \\ \ddot{z}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix}.$$

Aşadar, în $M_0 \in (C)$ am obţinut două drepte perpendiculare şi anume, dreapta tangentă şi dreapta normală principală. Acum, este uşor de obţinut, în M_0, o a treia dreaptă, perpendiculară pe acestea.

Definitia 2.13 *Dreapta perpendiculară pe planul osculator* (π_0) *în* M_0 *se numeşte **dreaptă binormală*** (b_n).

Conform cu cele arătate mai sus, dreapta binormală este conţinută în planul normal şi este de direcţie $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$.

Ecuaţia vectorială a dreptei binormale este:

$$(2.29)\qquad (b_n)\ \overrightarrow{R} = \overrightarrow{r}(t_0) + \lambda \left[\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)\right].$$

Pe componente, obţinem ecuaţiile dreptei binormale sub formă de rapoarte:

$$(2.30)\qquad \frac{X-x(t_0)}{A} = \frac{Y-y(t_0)}{B} = \frac{Z-z(t_0)}{C},$$

unde A, B, C sunt date mai sus.

Definitia 2.14 *Se numeşte **plan rectificator** în* $M_0 \in (C)$ *planul ce trece prin* M_0 *şi este perpendicular pe dreapta normală principală.*

Ecuaţia vectorială a planului rectificator este:

$$(2.31)\qquad (\pi_r)\left(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{r}(t_0)\right) \cdot \left[\left(\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) \times \ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)\right) \times \dot{\overrightarrow{r}}(t_0)\right] = 0.$$

Ecuaţia scalară a lui (π_r) este:

$$(2.32)\begin{vmatrix} B & C \\ \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \end{vmatrix}(X-x(t_0)) - \begin{vmatrix} A & C \\ \dot{x}(t_0) & \dot{z}(t_0) \end{vmatrix}(Y-y(t_0)) + $$
$$+\begin{vmatrix} A & B \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \end{vmatrix}(Z-z(t_0)) = 0$$

Vom încheia acest paragraf cu câteva consideraţii asupra versorilor dreptelor introduse.

1. Prin 2.18, am văzut că versorul dreptei tangente este:

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\left\| \dot{\vec{r}} \right\|} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Deoarece $\|\vec{\tau}\| = 1$, avem $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, care, prin derivare, conduce la $\vec{\tau} \cdot \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$, adică,

$$\vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Cu alte cuvinte, $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ este o direcţie din planul normal (π_N).

2. Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right) \\ &= \ddot{\vec{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\vec{r}}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right). \end{aligned}$$

Cum $\ddot{\vec{r}}$ şi $\dot{\vec{r}}$ sunt două direcţii din planul osculator (π_0), rezultă că $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \in (\pi_0)$.

Din observaţiile 1) şi 2), obţinem că $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ este o direcţie pe dreapta normală principală (n_p). Din 2), mai rezultă că $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ nu depinde de orientarea pe curbă, deoarece prin schimbarea $s^* = -s$ obţinem acelaşi lucru. Vectorul $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ se numeşte **vector de curbură.**

Versorul vectorului de curbură se notează cu

$$\vec{\nu} = \frac{\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left\| \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \right\|} \tag{2.33}$$

şi este un versor pentru dreapta normală principală, numit **versor normal principal.**

Definitia 2.15 *Se numeşte* ***curbură*** *a curbei* (C) *în punctul regulat* $M \in (C)$, *scalarul*

$$K = \left\| \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \right\|. \tag{2.34}$$

Inversul curburii se numeşte ***rază de curbură:*** $R = \dfrac{1}{K}$.

Merită remarcat faptul că, pentru o curbă în spaţiu, curbura este tot timpul nenegativă: $K \geq 0$.

Definitia 2.16 *Versorul dreptei binormale* (b_n) *într-un punct regulat* $M \in (C)$, *notat cu* $\overrightarrow{\beta}$, *orientat astfel încât* $\left\{M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\beta}\right\}$ *să formeze un reper direct orientat, se numeşte* ***versor binormal.***

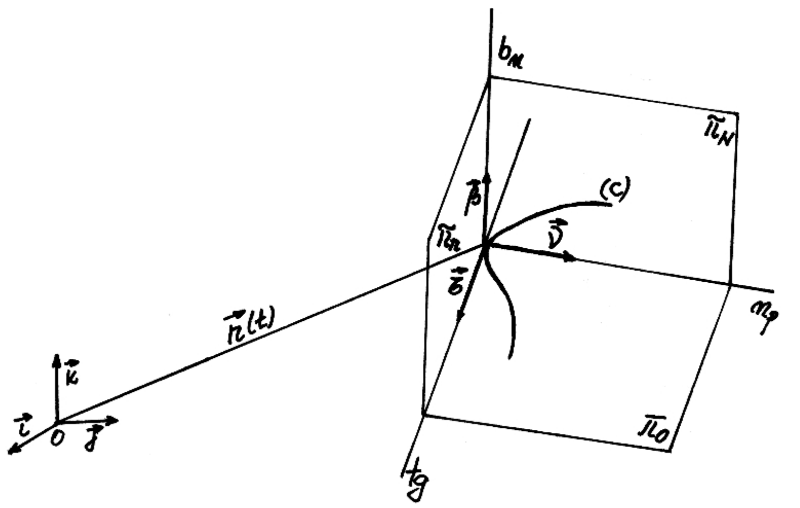


fig. 2.4

Din definiţia de mai sus, rezultă

$$\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{\nu}. \tag{2.35}$$

Să remarcăm că în fiecare punct regulat $M \in (C)$ am format un reper mobil $\left\{M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\beta}\right\}$ ataşat curbei, reper ortonormat şi direct orientat.

Reperul obţinut se numeşte **reperul (triedrul) lui Frenet** în punctul M.

În raport cu parametrul t al curbei, versorii reperului sunt:

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|};\ \vec{\nu} = \frac{\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right) \times \dot{\vec{r}}}{\left\|\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right) \times \dot{\vec{r}}\right\|};\ \vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|}.$$

Planele reperului $(\pi_N), (\pi_0), (\pi_r)$ se numesc **feţele** triedrului.

Dreptele $(tg), (n_p), (b_n)$ se numesc **muchiile** triedrului.

Exemplu: Fie curba: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht,\ t \in \mathbb{R}$ (*elicea cilindrică).* Să se determine triedrul Frenet al curbei într-un punct oarecare.

Avem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\sin t, \quad \dot{y} = a\cos t, \quad \dot{z} = h, \\ \ddot{x} &= -a\cos t, \quad \ddot{y} = -a\sin t, \quad \ddot{z} = 0. \end{aligned}$$

Ecuaţiile dreptei tangente sunt:

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - ht}{h},$$

iar ecuaţia planului normal,

$$-a\sin t(X - a\cos t) + a\cos t(Y - a\sin t) + h(Z - ht) = 0.$$

Versorul dreptei tangente $\vec{\tau}$ este dat de:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}}(-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + h\vec{k}).$$

Ecuaţia planului osculator este

$$\begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - ht \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, după dezvoltarea determinantului,

$$h\sin t(X - a\cos t) - h\cos t(Y - a\sin t) + a(Z - ht) = 0,$$

de unde citim vectorul binormal $\vec{b}(h\sin t, -h\cos t, a)$ şi deducem ecuaţiile dreptei binormale:

$$\frac{X - a\cos t}{h\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-h\cos t} = \frac{Z - ht}{a}.$$

Versorul $\vec{\beta}$ al acestei drepte este dat de:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}}(h \sin t \, \vec{i} - h \cos t \, \vec{j} + a\vec{k}).$$

Vectorul director al dreptei normale principale este $\vec{n}_p = (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{b}} \times \dot{\vec{r}}$ sau

$$\vec{n}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h \sin t & -h \cos t & a \\ -a \sin t & a \cos t & h \end{vmatrix} = -(h^2 + a^2)(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}),$$

prin urmare, ecuaţiile dreptei normale principale sunt:

$$\frac{X - a \cos t}{\cos t} = \frac{Y - a \sin t}{\sin t} = \frac{Z - ht}{0},$$

iar versorul normal principal $\vec{\nu}$ are componentele $\vec{\nu}(-\cos t, -\sin t, 0)$ ($\vec{\nu}$ se putea găsi şi direct, din egalitatea $\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$). Planul rectificator are, atunci, ecuaţia:

$$(X - a \cos t) \cos t + (Y - a \sin t) \sin t = 0.$$

2.5 Formulele lui Frenet

În paragraful precedent am descris modul de construcţie al triedrului Frenet pentru curba (C) $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$.

Ţinând cont de Definiţia 2.15, formula 2.33 se poate scrie:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}. \tag{2.36}$$

Ne propunem să calculăm derivatele în raport cu s şi pentru ceilalţi doi versori. Deoarece lungimea lor este constantă (unitatea), derivatele lui $\overrightarrow{\nu}$ şi $\overrightarrow{\beta}$ sunt vectori perpendiculari pe ei şi deci, avem următoarea descompunere după versorii triedrului:

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} &= a_2\overrightarrow{\beta} + b_2\overrightarrow{\tau}, \\ \frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} &= a_3\overrightarrow{\tau} + b_3\overrightarrow{\nu}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Din $\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\nu} = 0$, prin derivare, avem $\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \cdot \overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\tau} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = 0$, adică $\dfrac{1}{R}\overrightarrow{\nu} \cdot \overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\tau} \cdot \left(a_2\overrightarrow{\beta} + b_2\overrightarrow{\tau}\right) = 0$. Obţinem că $b_2 = -\dfrac{1}{R}$.

Analog, din $\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$, prin derivare, avem:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \cdot \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\tau} \cdot \frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\tau} \cdot (a_3\overrightarrow{\tau} + b_3\overrightarrow{\nu}) = 0 \Rightarrow a_3 = 0.$$

Din $\overrightarrow{\nu} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$, prin derivare obţinem:

$$\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} \cdot \overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\beta} \cdot \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = 0 \Rightarrow b_3 + a_2 = 0.$$

Notăm $a_2 = \frac{1}{T}$ şi deci, $b_3 = -\frac{1}{T}$.

Scalarul $\chi = \frac{1}{T}$ se numeşte **torsiunea curbei** (C) în punctul M, iar T se numeşte **rază de torsiune.**

Am dedus următoarele formule:

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} &= \frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}, \\ \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} &= -\frac{1}{R}\overrightarrow{\tau} + \frac{1}{T}\overrightarrow{\beta}, \\ \frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} &= -\frac{1}{T}\overrightarrow{\nu}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

sau, matriceal,

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \overrightarrow{\tau} \\ \overrightarrow{\nu} \\ \overrightarrow{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{T} \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\tau} \\ \overrightarrow{\nu} \\ \overrightarrow{\beta} \end{pmatrix},$$

numite **formulele lui Frenet.**

2.6 Curbură şi torsiune. Interpretări geometrice

2.6.1 Interpretarea geometrică a curburii şi torsiunii. Semnul torsiunii

Fie curba $(C) : x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, dată în parametrizare naturală şi $\overrightarrow{\tau}(s)$, versorii săi tangenţi.

Construim sfera cu centrul în O, de rază 1 şi translatăm versorii $\overrightarrow{\tau}(s)$, cu originea în O. Vârfurile acestora vor descrie în acest caz o curbă pe sferă, numită **indicatoarea sferică a tangentelor** curbei (C) (fig. 2.5). În mod analog, translatând în O versorii binormali $\overrightarrow{\beta}(s)$, se obţine noţiunea de **indicatoare sferică a binormalelor.**

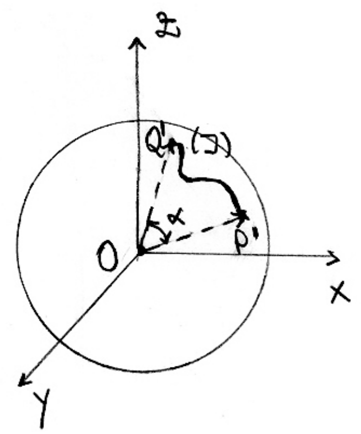


fig. 2.5

Fie (I) indicatoarea sferică a tangentelor. Ecuaţia ei vectorială este

$$\overrightarrow{r}^*(s) = \overrightarrow{\tau}(s),$$

cu menţiunea că, pentru I, s nu mai este parametru natural.

Fie $P(s)$ şi $Q(s + \Delta s)$ (cu $\Delta s > 0$) două puncte vecine ale lui (C) şi P', Q' corespondentele lor pe indicatoarea sferică (I) (fig. 2.5). Numim **unghi de contingenţă al tangentelor**, unghiul $\Delta\alpha$ dintre OP' şi OQ'.

Teorema 2.17 *Are loc egalitatea:*

$$K(s) = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

Demonstratie. Lungimea segmentului $P'Q'$ este:

$$\left\|\overrightarrow{P'Q'}\right\| = \left\|\overrightarrow{\tau}(s + \Delta s) - \overrightarrow{\tau}(s)\right\|.$$

Conform teoremei de medie, $\left\|\overrightarrow{\tau}(s + \Delta s) - \overrightarrow{\tau}(s)\right\| = \left\|\dot{\overrightarrow{\tau}}(s_0)\right\| \Delta s$, cu $s_0 \in (s, s + \Delta s)$, adică

$$\left\|\overrightarrow{P'Q'}\right\| = K(s_0)\Delta s.$$

Împărţind prin Δs şi trecând la limită cu $\Delta s \to 0$, obţinem:

$$K(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left\|\overrightarrow{P'Q'}\right\|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{\overrightarrow{P'Q'}}{\Delta s} \right\|. \tag{2.39}$$

Pe de altă parte, din triunghiul isoscel $OP'Q'$, avem

$$\frac{\left\|\overrightarrow{P'Q'}\right\|}{2} = \left|\sin \frac{\Delta\alpha}{2}\right|.$$

Înlocuim în 2.39:

$$K(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

Cum însă, $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \left| \dfrac{\sin \dfrac{\Delta\alpha}{2}}{\dfrac{\Delta\alpha}{2}} \right| = 1$, obţinem relaţia căutată. ∎

În concluzie, **curbura unei curbe este dată de variaţia unghiului de contingenţă al tangentelor, raportată la variaţia lungimii de arc.**

Analog, putem construi unghiul de contingenţă al binormalelor $\Delta\phi$; raţionând ca în teorema precedentă, modulul torsiunii este

$$|\chi(s)| = \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|.$$

În continuare, ne propunem să studiem ce informaţii ne oferă curbura şi torsiunea unei curbe despre forma acesteia în vecinătatea unui punct al ei.

Pentru aceasta, să presupunem că funcţia $K(s)$ se anulează pentru toţi s dintr-un interval I. Din formula de definiţie a curburii, avem $K(s) = 0$ $\Rightarrow \dfrac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2} = 0$, adică $\overrightarrow{r}(s) = s\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, altfel spus, curba este o dreaptă. Reciproca este evidentă. Am demonstrat astfel

Propozitia 2.18 *O curbă este o dreaptă dacă şi numai dacă are curbura identic nulă.*

Mai mult, din cele arătate mai sus, am putea afirma că, *pentru o curbă în spaţiu, curbura într-un punct măsoară abaterea acesteia de la o dreaptă şi anume, dreapta tangentă la curbă în punctul considerat* (vezi şi cazul curbelor plane, Teorema 1.23).

Propozitia 2.19 *O curbă (C) de clasă cel puţin 3 şi curbură nenulă este plană dacă şi numai dacă torsiunea sa este identic nulă.*

Demonstratie. Dacă curba este plană cu $K > 0$, atunci $\overrightarrow{\beta}$ va avea direcţie, sens şi modul constant şi deci, $\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = 0$. Din 2.38 obţinem că $\frac{1}{T} = 0$.

Reciproc, dacă $\frac{1}{T} = 0$, atunci $\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = 0$ şi prin integrare obţinem $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{c}$. Cum $\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$, prin integrare, obţinem $\overrightarrow{c} \cdot \int \overrightarrow{\tau} ds = const.$, adică $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{r}(s) = k =$ constant. Rezultă că toate punctele curbei (C) cu torsiunea nulă satisfac ecuaţia $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{r}(s) = k$, adică aparţin unui plan care trece prin M_0, fixat şi perpendicular pe $\overrightarrow{c}$. Curba este, deci, plană. ■

Definitia 2.20 *O curbă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ este **drept orientată** în punctul $M_0 \in (C)$ corespunzător valorii s_0 a parametrului natural s, dacă pentru $s > s_0$ punctele $M(s)$ ale curbei (C) părăsesc planul osculator (π_0) în M_0 pe partea dată de $\overrightarrow{\beta}_0$. În caz contrar, ea se numeşte **stâng orientată**.*

Teorema 2.21 *Fie (C) o curbă de clasă cel puţin trei în vecinătatea unui punct $M_0 \in (C)$, cu curbura şi torsiunea nenule.*

Dacă torsiunea în M_0 este pozitivă, atunci curba este drept orientată în M_0, iar dacă torsiunea în M_0 este negativă, curba este stâng orientată în M_0.

Demonstratie. Deoarece curba (C) este de clasă cel puţin trei, funcţiile $\overrightarrow{r}(s), \overrightarrow{r}'(s), \overrightarrow{r}''(s), \overrightarrow{r}'''(s)$ sunt continue. Aplicăm formula lui Taylor şi avem:

$$\overrightarrow{r}(s) = \overrightarrow{r}(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\overrightarrow{r}'(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\overrightarrow{r}''(s_0) + \frac{(s-s_0)^3}{3!}\overrightarrow{r}'''(s_0) + \overrightarrow{\mathcal{O}},$$

unde $\overrightarrow{\mathcal{O}} \to \overrightarrow{0}$ când $s \to s_0$.

Din formulele lui Frenet, rezultă:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'(s_0) &= \overrightarrow{\tau}_0,\ \overrightarrow{r}''(s_0) = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}|_{s_0} = K_0\overrightarrow{\nu}_0 \\
\overrightarrow{r}'''(s_0) &= \frac{d}{ds}\left(K(s)\overrightarrow{\nu}(s)\right)|_{s_0} = K_0'\overrightarrow{\nu}_0 - K_0^2\overrightarrow{\tau}_0 + K_0\chi_0\overrightarrow{\beta}_0,
\end{aligned}$$

unde $K_0 = K(s_0)$, $K_0' = K'(s_0)$ etc.. Avem, deci:

$$\overrightarrow{r}(s) = \overrightarrow{r}(s_0) + \left[(s-s_0) - \frac{(s-s_0)^3}{6}K_0^2\right]\overrightarrow{\tau}_0 + \tag{2.40}$$

$$\left[\frac{(s-s_0)^2}{2}K_0 + \frac{(s-s_0)^3}{6}K_0'\right]\overrightarrow{\nu}_0 + \frac{(s-s_0)^3}{6}K_0\chi_0\overrightarrow{\beta}_0 + \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Ţinând seama că produsul mixt $\left(\overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0, \overrightarrow{\beta}_0\right) = 1$, din 2.40, obţinem:

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0) = \frac{(s - s_0)^3}{6} K_0 \chi_0 + \varepsilon, \tag{2.41}$$

unde $\varepsilon \to 0$ când $s \to s_0$.

Dacă $\chi_0 > 0$, produsul mixt $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0) > 0$, în consecinţă, curba este drept orientată în M_0. Dacă $\chi_0 < 0$, produsul mixt este negativ şi astfel, curba este stâng orientată. Astfel, teorema este demonstrată. ■

2.6.2 Forma locală a unei curbe în vecinătatea unui punct regulat. Reprezentarea canonică. Ecuaţiile intrinseci

Să presupunem că am ales un sistem de coordonate x, y, z cu originea în M_0, astfel ca $\overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0, \overrightarrow{\beta}_0$ să dea direcţiile axelor. Atunci, avem:

$$\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{0}, \ \overrightarrow{\tau}_0 = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{\nu}_0 = \overrightarrow{j}, \ \overrightarrow{\beta}_0 = \overrightarrow{k}, \ \overrightarrow{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_1 \overrightarrow{i} + \mathcal{O}_2 \overrightarrow{j} + \mathcal{O}_3 \overrightarrow{k}$$

şi 2.40 scrisă după componente, capătă forma:

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{1}{6} K_0^2 s^3 + \mathcal{O}_1, \\ y(s) &= \frac{1}{2} K_0 s^2 + \frac{1}{6} K_0' s^3 + \mathcal{O}_2, \\ z(s) &= \frac{1}{6} K_0 \cdot \chi_0 s^3 + \mathcal{O}_3. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ecuaţiile 2.42 poartă numele de **reprezentarea canonică** a curbei.

Dacă în 2.42 reţinem în membrul doi respectiv fiecare prim termen, obţinem funcţia vectorială:

$$\overrightarrow{r}^*(s) = s \overrightarrow{i} + \frac{1}{2} K_0 s^2 \overrightarrow{j} + \frac{1}{6} K_0 \cdot \chi_0 s^3 \overrightarrow{k}, \tag{2.43}$$

care reprezintă ecuaţia vectorială a unei curbe (C^*), numită **curbă aproximantă de ordinul întâi** a curbei (C) în vecinătatea punctului M_0.

Proiecţiile pe planele de coordonate ale aproximantei sunt:

- pe planul osculator $(\pi_0) : y = \dfrac{1}{2} K_0 x^2$ (fig. 2.6 a));

- pe planul rectificator $(\pi_r) : \ z = \dfrac{1}{6} K_0 \cdot \chi_0 x^3$ (fig. 2.6 b));

- pe planul normal $(\pi_N) : \ z = \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{2}{K_0}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_0 y^{\frac{3}{2}}$ (fig. 2.6 c)).

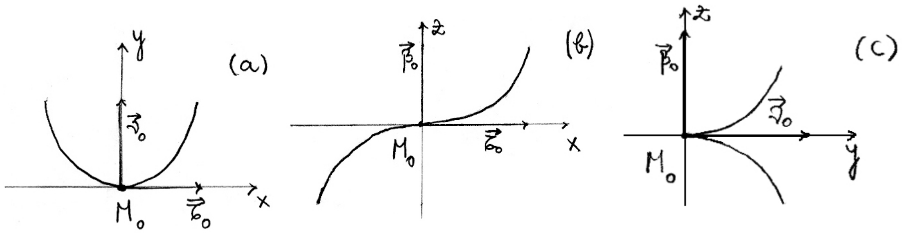


fig. 2.6

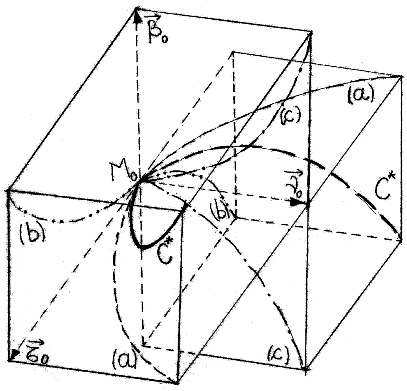


fig 2.6'- aproximanta

Curba (C^*) reprezintă o bună aproximare a lui (C) în vecinătatea punctului regulat M_0. Dacă (C) este drept orientată în M_0 ($\chi_0 > 0$), atunci, şi curba (C^*) este drept orientată în M_0.

Acest lucru se constată uşor din reprezentarea vectorială 2.43 şi $s > 0$, $K_0 > 0$ ((C) părăseşte planul xM_0y pe partea sa pozitivă).

Din cele arătate mai sus, concluzionăm că putem cunoaşte forma unei curbe în vecinătatea unui punct regulat studiind curbura şi torsiunea acesteia în punctul respectiv. Mai mult, se poate demonstra, [2], următoarea teoremă (datorată lui Euler):

Teorema 2.22 *Fie $F(s) > 0$ şi $G(s)$ două funcţii de o variabilă reală, definite şi continue într-un interval închis $I : 0 \leq s \leq a$. În aceste condiţii, există un arc al unei curbe (C) a cărui lungime de arc este s, a cărui curbură şi torsiune sunt date, respectiv, de:*

$$K = F(s), \qquad \chi = G(s). \tag{2.44}$$

Acest arc este unic, abstracţie făcând de poziţia sa în spaţiu.

Ecuaţiile 2.44 poartă numele de **ecuaţiile intrinseci** ale curbei (C), denumirea fiind justificată prin faptul că lungimea de arc, curbura şi torsiunea sunt cantităţi caracteristice lui (C), ele nedepinzând de reperul ales.

2.6.3 Calculul curburii şi torsiunii cu t - parametru oarecare

Deoarece în practică, parametrizarea naturală nu este întotdeauna uşor de determinat, este util să dăm formulele de calcul pentru curbură şi torsiune în funcţie de un parametru oarecare t.

Avem:

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \overrightarrow{\tau} \cdot s', \tag{2.45}$$

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot s' + \overrightarrow{\tau} \cdot s'' = \frac{1}{R} s'^2 \cdot \overrightarrow{\nu} + \overrightarrow{\tau} \cdot s''. \tag{2.46}$$

Calculăm

$$\dddot{\overrightarrow{r}} = \left(\frac{1}{R}\right)' s'^2 \cdot \overrightarrow{\nu} + \frac{1}{R} \cdot 2s' \cdot s'' \cdot \overrightarrow{\nu} + \frac{1}{R} s'^2 \cdot \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds}\frac{ds}{dt} + s'''\overrightarrow{\tau} + s''\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} =$$
$$= \left(\frac{1}{R}\right)' s'^2\overrightarrow{\nu} + \frac{2}{R}s's''\overrightarrow{\nu} + \frac{1}{R}s'^3\left(-\frac{1}{R}\overrightarrow{\tau} + \frac{1}{T}\overrightarrow{\beta}\right) + s'''\overrightarrow{\tau} + \frac{s's''}{R}\overrightarrow{\nu}, \text{ adică}$$

$$\dddot{\overrightarrow{r}} = \left(s''' - \frac{1}{R^2}s'^3\right)\overrightarrow{\tau} + \left(\frac{3s's''}{R} + \left(\frac{1}{R}\right)' s'^2\right)\overrightarrow{\nu} + \frac{s'^3}{R \cdot T}\overrightarrow{\beta}. \tag{2.47}$$

Calculăm pe $\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}}$, ţinând seama de 2.45 şi 2.46:

$$\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}} = \frac{s'^3}{R}(\overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{\nu}) = \frac{s'^3}{R}\overrightarrow{\beta}.$$

De aici, rezultă că

$$\left(\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}}\right) \cdot \dddot{\overrightarrow{r}} = \frac{s'^6}{R^2T}.$$

Dar $s' = \left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|$, astfel că din ultimele două relaţii deducem:

$$\frac{1}{R} = \frac{\left\|\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}}\right\|}{\left\|\dot{\overrightarrow{r}}\right\|^3} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{T} = \frac{\left(\dot{\overrightarrow{r}}, \ddot{\overrightarrow{r}}, \dddot{\overrightarrow{r}}\right)}{\left\|\dot{\overrightarrow{r}} \times \ddot{\overrightarrow{r}}\right\|^2}. \tag{2.48}$$

Exemplu: Pentru curba $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + \dfrac{t^3}{3}\vec{k}$, să se determine curbura şi torsiunea în $O(0,0,0)$ şi aproximanta acesteia în vecinătatea originii.

Originea corespunde valorii $t = 0$ a parametrului şi avem:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(0) &= (2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k})_{|t=0} = 2\vec{i}, \\ \ddot{\vec{r}}(0) &= (2\vec{j} + 2t\vec{k})_{|t=0} = 2\vec{j}, \quad \dddot{\vec{r}}(0) = 2\vec{k}, \end{aligned}$$

$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})(0) = 4\vec{k}$, $(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})(0) = 8$. Deducem de aici, prin 2.48, că, în punctul considerat, $K_0 = \dfrac{1}{R}|_{t=0} = \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{X}_0 = \dfrac{1}{T}|_{t=0} = \dfrac{1}{2}$. Uzând acum de relaţiile 2.43, obţinem ecuaţia vectorială a aproximantei:

$$\vec{r}^*(s) = s\vec{i} + \frac{s^2}{4}\vec{j} + \frac{s^3}{24}\vec{k}.$$

2.7 Contactul între două curbe în spaţiu

Fie

$$(2.49) \qquad \begin{array}{c} (C): \ \overrightarrow{r}(t) = x_1(t)\overrightarrow{i} + y_1(t)\overrightarrow{j} + z_1(t)\overrightarrow{k}, \\ (C^*): \ \overrightarrow{r}(t^*) = x_2(t^*)\overrightarrow{i} + y_2(t^*)\overrightarrow{j} + z_2(t^*)\overrightarrow{k}, \end{array}$$

două curbe în spaţiu.

Să presupunem că M_0 este un punct comun celor două curbe. Apar două posibilităţi (fig. 2.7):

a) dreptele tangente în M_0 să fie distincte;

b) curbele au dreaptă tangentă comună în M_0.

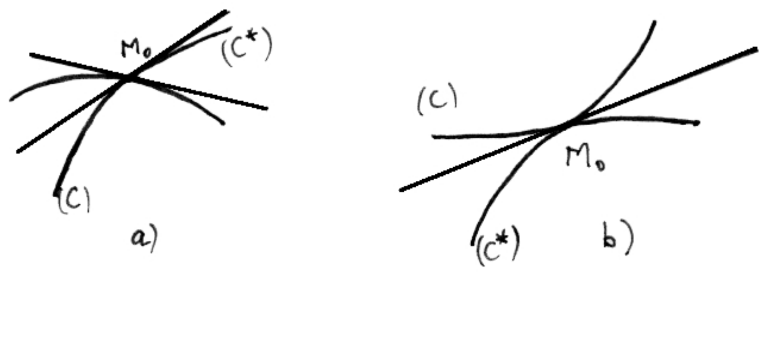


fig. 2.7

În cel de-al doilea caz, avem pe lângă $\overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}(t_0^*)$ şi faptul că versorii dreptelor tangente sunt coliniari (de acelaşi sens, sau de sensuri opuse). Schimbând eventual orientarea pe una din curbe, putem presupune că versorii tangenţi coincid: $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau}^*$, adică $\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt_0} = \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt_0^*}$.

Definitia 2.23 *Două curbe, (C) şi (C^*), de clasă $k \geq n$, au un* ***contact de ordin*** *n într-un punct $M_0 \in (C) \cap (C^*)$, dacă în raport cu reprezentările 2.49, avem:*

$$\overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}(t_0^*), \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}|_{t_0} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt_0^*}|_{t_0^*}, ..., \frac{d^n\overrightarrow{r}}{dt^n}|_{t_0} = \frac{d^n\overrightarrow{r}}{dt^{*n}}|_{t_0^*} \tag{2.50}$$

şi

$$\frac{d^{n+1}\overrightarrow{r}}{dt^{n+1}}|_{t_0} \neq \frac{d^{n+1}\overrightarrow{r}}{dt^{*n+1}}|_{t_0^*},$$

unde t_0 şi t_0^* sunt valorile parametrilor de pe (C), respectiv, (C^*), corespunzătoare lui M_0.

Evident, relaţiile respective se traduc pe fiecare componentă a vectorilor.

Contactul de ordin 0 este cel din situaţia (a) (punct comun).

Contactul de ordin unu se numeşte **contact ordinar**. O dreaptă tangentă în M_0 la curbă are un contact de ordin cel puţin unu cu curba.

Contactul de ordin doi se numeşte **contact osculator** sau **staţionar**, iar contactul de ordin trei, **contact osculator staţionar** sau **supercontact.**

Este interesant de remarcat o interpretare geometrică simplă a noţiunii de contact a două curbe în spaţiu. Dezvoltând în serie Taylor pe $\overrightarrow{r}(t)$ şi $\overrightarrow{r}(t^*)$ în $t = t_0$, toţi coeficienţii lui $(t - t_0)^i$ vor coincide pentru $i \leq n$ în cazul contactului de ordin n. Curba reprezentată de puterile comune o vom numi **curbă aproximantă de ordin** n. Astfel, două curbe care au într-un punct un contact de ordinul n, au în acel punct aceeaşi aproximantă de ordinul n.

Fie

$$\begin{array}{l} (C): \ \overrightarrow{r}(t) \equiv x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} + z(t)\,\overrightarrow{k}, \\ (S): \ F(x, y, z) = 0 \end{array} \tag{2.51}$$

o curbă şi respectiv o suprafaţă din spaţiu, ambele de clasă $p \geq m$ şi M_0 punct de intersecţie al curbei cu suprafaţa, corespunzător lui $t = t_0$.

Definitia 2.24 *Curba (C) şi suprafaţa (S) au în M_0 un contact de ordinul m (exact) dacă există pe (S) o curbă (C^*) de clasă cel puţin m care are cu (C) un contact de ordin m, însă nu există pe (S) nici o curbă care să aibă cu (C) un contact de ordin mai mare ca m.*

Caracterizarea analitică a noţiunii de contact definite mai sus o vom da în teorema care urmează:

Teorema 2.25 *Curba* (C) *şi suprafaţa* (S) *din 2.51 au în* $M_0(t_0)$ *un* ***contact de ordin*** m *dacă şi numai dacă funcţia* $\Phi(t) = F(x(t), y(t), z(t))$ *verifică ecuaţiile:*

$$\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = ... = \Phi^{(m)}(t_0) = 0, \quad \Phi^{(m+1)}(t_0) \neq 0. \tag{2.52}$$

Demonstratie. Necesitatea. Presupunem că (C) şi (S) au în M_0 un contact de ordinul m (exact). Atunci, în conformitate cu definiţia de mai sus, există o curbă (C^*) pe (S) care are cu (C) un contact de ordinul m exact. Să presupunem că (C^*) este reprezentată prin

$$\overrightarrow{r}(t^*) = x^*(t^*)\overrightarrow{i} + y^*(t^*)\overrightarrow{j} + z^*(t^*)\overrightarrow{k}.$$

Presupunem că, pe (C^*), punctul M_0 corespunde valorii t_0^* a parametrului şi că în M_0 curbele (C) şi (C^*) au aceeaşi orientare. Deoarece (C^*) este conţinută în (S), avem identitatea

$$F(x^*(t^*), y^*(t^*), z^*(t^*)) = 0.$$

Derivând-o în raport cu t^*, obţinem identităţile:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{dx^*}{dt^*} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy^*}{dt^*} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{dz^*}{dt^*} & = & 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\left(\dfrac{dx^*}{dt^*}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{d^2x^*}{dt^{*2}} + ... + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{d^2z^*}{dt^{*2}} & = & 0, \\ .... & & \\ \dfrac{\partial^{m+1} F}{\partial x^{m+1}}\cdot\left(\dfrac{dx^*}{dt^*}\right)^{m+1} + ... + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{d^{m+1}z^*}{dt^{*m+1}} & = & 0. \end{array} \tag{2.53}$$

Deoarece (C) şi (C^*) au un contact de ordinul m (exact) în M_0, avem:

$$\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & x^*(t_0^*),\ y(t_0) = y^*(t_0^*),\ z(t_0) = z^*(t_0^*), \\ \dfrac{d^ix}{dt^i}|_{t_0} & = & \dfrac{d^ix^*}{dt^{*i}}|_{t_0^*},\ \dfrac{d^iy}{dt^i}|_{t_0} = \dfrac{d^iy^*}{dt^{*i}}|_{t_0^*},\ \dfrac{d^iz}{dt^i}|_{t_0} = \dfrac{d^iz^*}{dt^{*i}}|_{t_0^*},\ i = 1, ..., m, \\ \dfrac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}}|_{t_0} & \neq & \dfrac{d^{m+1}x^*}{dt^{*m+1}}|_{t_0^*},\ \dfrac{d^{m+1}y}{dt^{m+1}}|_{t_0} \neq \dfrac{d^{m+1}y^*}{dt^{*m+1}}|_{t_0^*},\ \dfrac{d^{m+1}z}{dt^{m+1}}|_{t_0} \neq \dfrac{d^{m+1}z^*}{dt^{*m+1}}|_{t_0^*}. \end{array} \tag{2.54}$$

Luând acum în relaţiile 2.53, $t^* = t_0^*$ şi utilizând 2.54, obţinem 2.52.

Suficienţa. Prin ipoteză, cel puţin una din derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei F este nenulă în M_0, să spunem, de exemplu, $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$

Atunci putem reprezenta (S) într-o vecinătate a lui M_0 în forma $z = f(x, y)$. Deoarece 2.52 sunt îndeplinite, avem pentru $\Phi(t) = z(t) - f(x(t), y(t))$ identităţile:

$$\begin{aligned}
z(t_0) - f(x(t_0), y(t_0)) &= 0, \\
\frac{dz}{dt}|_{t_0} - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}|_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}|_{t_0}\right] &= 0, \\
\frac{d^2 z}{dt^2}|_{t_0} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 |_{t_0} + ... + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}|_{t_0}\right] &= 0, \\
&..., \\
\frac{d^m z}{dt^m}|_{t_0} - \left[\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^m |_{t_0} + ... + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^m y}{dt^m}|_{t_0}\right] &= 0,
\end{aligned}$$

derivata de ordin $m+1$ a lui Φ fiind diferită de zero în t_0. Alegând $t^* = t$, $x^*(t^*) = x(t)$, $y^*(t^*) = y(t)$, $z^*(t^*) = f(x(t), y(t)$, obţinem pe (S) o curbă (C^*) care îndeplineşte identic condiţiile de contact de ordin m (exact) cu curba (C).

Arătăm că nu există nici o curbă pe (S), care să aibă cu (C) un contact de ordin $m+1$ în M_0. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că există o curbă $(\bar{C}) \subset (S)$, dată de $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t})$, $\bar{y} = \bar{y}(\bar{t})$, $\bar{z} = \bar{z}(\bar{t})$, care are în $M_0(\bar{t}_0)$ un contact de ordin $m+1$ cu (C). Atunci, am avea $\frac{d^k \bar{x}}{d\bar{t}^k}(\bar{t}_0) = \frac{d^k x}{dt^k}(t_0)$, $\frac{d^k \bar{y}}{d\bar{t}^k}(\bar{t}_0) = \frac{d^k y}{dt^k}(t_0)$, $\frac{d^k \bar{z}}{d\bar{t}^k}(\bar{t}_0) = \frac{d^k z}{dt^k}(t_0)$, $k = 1, ..., m+1$ şi, înlocuind în expresia lui Φ, am obţine $\Phi^{(m+1)}(t_0) = 0$, contradicţie, adică, (C) şi (S) au în M_0 un contact de ordinul m (exact). Cu aceasta, teorema este complet demonstrată. ■

Teorema care urmează caracterizează geometric contactul între o curbă şi o suprafaţă.

Teorema 2.26 *Fie (S) o suprafaţă care are un contact de ordinul m (exact) cu o curbă de clasă $p \geq m+1$ într-un punct M_0. Dacă m este par, atunci (C) străpunge suprafaţa (S) prin M_0. Dacă m este impar, atunci într-o vecinătate suficient de mică a lui M_0, curba (C) rămâne de aceeaşi parte a suprafeţei.*

Demonstratie. Fie (C) reprezentată prin:

$$(C): \ \overrightarrow{r}(t) \equiv x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$$

şi (S), prin

$$(S): \ F(x, y, z) = 0.$$

Presupunem că M_0 corespunde lui $t = 0$. Atunci, din formula lui Taylor şi în conformitate cu condiţiile de contact de ordin m, 2.52, care sunt prin ipoteză îndeplinite, avem:

$$F\left(x(t), y(t), z(t)\right) = \Phi(t) = \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\Phi^{(m+1)}(\theta t), \;\; 0 < \theta < 1.$$

Pentru $t = 0$, derivata de ordin $(m+1)$ a lui Φ nu este zero. Deoarece Φ este de clasă cel puţin $(m+1)$, avem că $\Phi^{(m+1)}$ este continuă şi nenulă pentru toţi t cu $|t|$ suficient de mic, şi are semn constant.

Dacă m este par, atunci t^{m+1} este pozitiv când t este pozitiv şi este negativ, când t este astfel. Concludem că punctele curbei din vecinătatea lui M_0 stau de o parte şi de alta a lui (S), deci (C) străpunge suprafaţa.

Dacă m este impar, atunci t^{m+1} este pozitiv pentru toate valorile lui t, ceea ce completează demonstraţia teoremei. ■

Vom prezenta în continuare cazurile de contact între o curbă şi suprafeţele simple.

I. Mai întâi, considerăm **plane** $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$ care au contact cu o curbă (C), raţionând în sensul definiţiei de mai sus.

Dacă contactul este de ordin 0, planul trebuie să conţină punctul M_0, obţinând ∞^2 plane cu această proprietate (steaua de plane ce trece prin M_0).

Dacă contactul este de ordin 1, planul trebuie să conţină aproximanta de ordin 1 a curbei (C) în M_0, adică trebuie să conţină dreapta tangentă la (C) în acest punct (contactul de ordin 1 echivalează, prin urmare, cu două puncte confundate în M_0). Evident, există ∞^1 plane cu această proprietate, şi anume, fascicolul de plane ce trece prin dreapta tangentă; acest fascicol conţine şi planul osculator al lui (C) în M_0.

Teorema 2.27 *Planul osculator al unei curbe într-un punct M_0 are un contact de ordin 2 (cel puţin) cu curba în M_0.*

Demonstratie. Fie $(C) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ reprezentarea curbei (C) şi fie M_0 corespunzător lui $t = t_0$. Atunci:

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \frac{t - t_0}{1!}\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0) + \overrightarrow{0}.$$

Suma primilor trei termeni reprezintă o curbă (C^*) care are un contact de ordin cel puţin 2 cu (C) în M_0 şi aparţine planului osculator al lui (C) în M_0, deoarece acest plan este construit de $\dot{\overrightarrow{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\overrightarrow{r}}(t_0)$, c.c.t.d. ■

Observaţii: 1. Dacă (C) este de clasă cel puţin 3 şi are torsiunea nenulă, atunci contactul este de ordin exact 2, fapt de se poate uşor constata folosind 2.52.

2. Revăzând teorema de mai sus, concludem că un contact de ordinul doi este echivalent cu trei puncte confundate în M_0.

Mai mult, putem afirma că: unicul plan care are cu (C) un contact de ordin doi într-un punct fixat $M_0 \in (C)$, dacă există, este planul osculator în M_0 la (C). Într-adevăr, să presupunem că (C) este dată în reprezentarea $\overrightarrow{r} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, iar M_0 corespunde valorii $t = t_0$. Căutăm planele

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.55}$$

care au un contact de ordin cel puţin doi cu (C) în M_0.

Formând funcţia

$$\Phi(t) = Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D,$$

condiţiile de contact de ordin 2 sunt: $\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = \Phi''(t_0) = 0$. Din $\Phi(t_0) = 0$, deducem că $D = -[Ax(t_0) + By(t_0) + Cz(t_0)]$, care, înlocuit în 2.55, conduce la steaua de plane

$$A[x - x(t_0)] + B[y - y(t_0)] + C[z - z(t_0)] = 0. \tag{2.56}$$

Calculând $\Phi'(t_0)$ şi $\Phi''(t_0)$, condiţiile de contact de ordin doi devin

$$\begin{cases} A[x - x(t_0)] + B[y - y(t_0)] + C[z - z(t_0)] = 0 \\ A\dot{x}(t_0) + B\dot{y}(t_0) + C\dot{z}(t_0) = 0 \\ A\ddot{x}(t_0) + B\ddot{y}(t_0) + C\ddot{z}(t_0) = 0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Sistemul 2.57 admite soluţie nebanală numai dacă

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce reprezintă tocmai ecuaţia planului osculator.

II. Să considerăm acum **sfere** care au contact cu o curbă $(C) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$ (cu s- parametru natural). O sferă (S) de rază ρ, cu centrul în $\omega(a_1, a_2, a_3)$ poate fi reprezentată sub forma

$$(S) : \overrightarrow{r}(x, y, z) \equiv (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a})^2 - \rho^2 = 0,$$

unde $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O\omega}$ este vectorul de poziţie al lui ω. Pentru ca (C) şi (S) să aibă un **contact de ordin zero** într-un punct M corespunzător valorii s a parametrului, funcţia $\Phi(s) = (\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a})^2 - \rho^2$ trebuie să îndeplinească, în M, condiţia:

$$(\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a})^2 - \rho^2 = 0, \tag{2.58}$$

ceea ce exprimă faptul că M aparţine sferei şi ne arată că avem ∞^3 sfere cu această proprietate (ecuaţia de mai sus leagă 4 parametri: a_1, a_2, a_3 şi ρ şi explicitează cel mult unul). Pentru **contact de ordinul 1** trebuie să mai avem, pe lângă 2.58, şi $\Phi'(s) = 0$, adică

$$2(\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}) \cdot \dot{\overrightarrow{r}}(s) = 2[\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}] \cdot \overrightarrow{\tau}(s) = 0, \tag{2.59}$$

ceea ce ne arată (ţinând cont de ecuaţia vectorială a planului normal) că centrul ω al sferei căutate trebuie să aparţină planului normal (π_N) în M la (C). Presupunând că M este punct neinflexionar şi nestaţionar, vectorii $\overrightarrow{\nu}$ şi $\overrightarrow{\beta}$ există (şi determină pe (π_N)), şi avem pentru vectorul de poziţie al lui ω :

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{r}(s) + \lambda\overrightarrow{\nu}(s) + \mu\overrightarrow{\beta}(s), \tag{2.60}$$

raza ρ corespunzătoare fiind dată de 2.58.

Avem, evident, ∞^2 sfere care au un contact de ordinul 1 cu (C) în M (aceste sfere depind de parametrii arbitrari λ şi μ).

Pentru **contact de ordinul 2**, trebuie să mai avem în M şi $\Phi''(s) = 0$, adică:

(2.61)

$$2\{\overrightarrow{\tau}(s) \cdot \overrightarrow{\tau}(s) + [\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}] \cdot \overrightarrow{\tau}'(s)\} = 2\{1 + [\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}] \cdot K(s)\overrightarrow{\nu}(s)\} = 0,$$

unde am făcut apel la prima formulă Frenet 2.38. Înlocuind 2.60 în ultima egalitate, obţinem că $1 - \lambda K(s) = 0$, sau

$$\lambda = \frac{1}{K(s)} = R(s),$$

R fiind raza de curbură a lui (C) în M. Rezultă de aici că centrul unei astfel de sfere aparţine unei drepte date de:

$$\overrightarrow{a}(\mu) = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s) + \mu\overrightarrow{\beta}(s), \tag{2.62}$$

(unde μ este arbitrar, iar s este fixat, corespunzător lui M). Această dreaptă poartă numele de **axa polară** a lui (C) în M.

Axa polară este normală la planul osculator (π_o) al lui (C) în M şi intersectează acest plan într-un punct Q, numit **centrul de curbură** al lui (C) în M, punct care are vectorul de poziţie dat de

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s) = \overrightarrow{r}(s) + R^2(s)\overrightarrow{\tau}'(s). \tag{2.63}$$

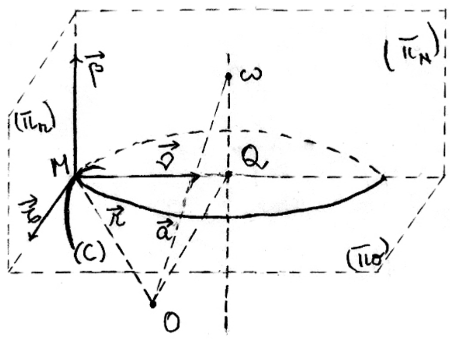


fig. 2.8

Cercul de rază $R(s)$ cu centrul în Q din planul osculator este numit **cercul de curbură** sau **cercul osculator** al lui (C) în M (fig. 2.8). El are un contact de ordin cel puţin 2 cu (C) în M. În acest fel, am obţinut ∞^1 sfere care au un contact de ordin 2 cu (C) în M, anume, fasciculul de sfere cu centrele pe axa polară, ce au în comun cercul de curbură.

În fine, pentru ca sfera să aibă un **contact de ordinul 3** (cel puţin) cu (C) în M, pe lângă 2.58, 2.59, 2.61, trebuie să mai avem şi $\Phi'''(s) = 0$, adică:

$$2\{K(s)\overrightarrow{\tau}(s)\cdot\overrightarrow{\nu}(s) + [\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}]\cdot[K'(s)\overrightarrow{\nu}(s) + K(s)\overrightarrow{\nu}'(s)]\} =$$
$$2[\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}][K'(s)\overrightarrow{\nu}(s) - K^2(s)\overrightarrow{\tau}(s) + K(s)\cdot\mathcal{X}(s)\overrightarrow{\beta}(s)] = 0,$$

unde am ţinut seama de cea de-a doua formulă Frenet. Înlocuind acum 2.62 în egalitatea de mai sus, obţinem condiţia

$$R(s)K'(s) + K(s)\cdot\mathcal{X}(s)\mu = 0.$$

Dacă $K(s) \neq 0$, $\mathcal{X}(s) \neq 0$, atunci $\mu = \dfrac{-R(s)K'(s)}{K(s)\cdot\mathcal{X}(s)}$. Deoarece $R(s) = \dfrac{1}{K(s)}$, obţinem prin derivare $R'(s) = -\dfrac{K'(s)}{K^2(s)} = -\dfrac{R(s)K'(s)}{K(s)}$, de unde,

$$\mu = \frac{R'(s)}{\mathcal{X}(s)},$$

sau

$$\mu = R'(s)T(s),$$

unde T este raza de torsiune a lui (C) în M. Urmează că această sferă are centrul ω de vector de poziţie $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O\omega}$ dat de

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s) + R'(s)T(s)\overrightarrow{\beta}(s) \tag{2.64}$$

şi raza ρ dată de

$$\rho = \|\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{a}\| = \sqrt{R^2(s) + [R'(s)T(s)]^2}. \tag{2.65}$$

Această sferă se numeşte **sfera osculatoare** a curbei (C) în punctul M.

În cazul particular în care $K'(s) = 0$, atunci $R'(s) = 0$ şi centrul sferei osculatoare aparţine planului osculator (π_o) în M şi coincide cu centrul de curbură, deoarece $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O\omega} = \overrightarrow{OQ}$. Din 2.65 se observă că acele curbe care au curbura constantă, au razele sferelor osculatoare constante.

Aşadar, am demonstrat

Teorema 2.28 *Centrele sferelor care au un contact de ordin 1 (cel puţin) cu o curbă (C) într-un punct M al acesteia aparţin planului normal (π_N) al lui (C) în M. Centrele sferelor care au un contact de ordin 2 (cel puţin) cu (C) în M aparţin axei polare a lui (C) în M şi aceste sfere intersectează planul osculator al curbei de-a lungul cercului de curbură al lui (C) în M. Acest cerc are contact de ordinul 2 (cel puţin) cu (C) în M. Sfera osculatoare, cu centrul de vector de poziţie 2.64 şi raza 2.65 are contact de ordin (cel puţin) 3 cu curba (C) în punctul M.*

Exerciţiu. Să se determine ecuaţia sferei osculatoare şi, respectiv, ecuaţiile cercului osculator în origine la curba: $\vec{r} = t\vec{i} + \dfrac{t^2}{2}\vec{j} + \dfrac{t^3}{6}\vec{k}$.

Vectorul de poziţie $\overrightarrow{O\omega}$ al centrului sferei osculatoare este dat de 2.64, în care s este parametrul natural al lui (C). Originea corespunde valorii $t = 0$ (deci, şi lui $s = 0$, şi atunci, $\overrightarrow{r}(s) = 0$). În plus, avem:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}(s) &= \overrightarrow{r}'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} = \frac{2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k}}{2+t^2}, \\
\vec{\nu}(s) &= \overrightarrow{r}''(s) = \frac{1}{\dot{s}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}}\right) = \\
&= \frac{(2\vec{j} + 2t\vec{k})(t^2+2) - 2t(2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k})}{2+t^2} \cdot \frac{2}{2+t^2}.
\end{aligned}$$

În $O(s = 0)$, ultimele două egalităţi se transcriu: $\vec{\tau}(0) = \vec{i}$, $\vec{\nu}(0) = \vec{j}$, de unde rezultă $\vec{\beta}(0) = (\vec{\tau} \times \vec{\nu})(0) = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. În plus, $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \dfrac{t^2}{2}\vec{i} - t\vec{j} + \vec{k}$,

$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = 1$, de unde găsim, conform cu 2.48:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{K} = \frac{(t^2+2)^2}{4}, \quad T = \frac{(t^2+2)^2}{4}, \\
R' &= \frac{\frac{dR}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = t(t^2+2) \cdot \frac{2}{2+t^2} = 2t.
\end{aligned}
$$

În $t = 0$, obţinem: $R(0) = T(0) = 1$, $R'(0) = 0$, şi, înlocuind în 2.64, centrul sferei osculatoare este dat de:

$$\overrightarrow{O\omega} = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s) + R'(s)T(s)\overrightarrow{\beta}(s) = \vec{j},$$

sau $\omega(0,1,0)$. Raza acesteia este $\rho = d(O,\omega) = 1$.

Cercul osculator al curbei se obţine prin intersecţia sferei osculatoare cu planul osculator în punctul respectiv. Deoarece planul osculator al curbei în O este xOy (el fiind generat de $\vec{\tau} = \vec{i}$ şi $\vec{\nu} = \vec{j}$), ecuaţiile acestuia sunt:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Centrul cercului osculator coincide (în acest caz!) cu centrul sferei osculatoare, anume, $\omega(0,1,0)$.

2.8 Studiul curbelor în reprezentarea carteziană generală

Fie (C) o curbă în spaţiu, de clasă cel puţin 1, dată în reprezentarea carteziană generală

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

Dacă M este un punct regulat al lui (C), atunci măcar unul din determinanţii funcţionali

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \frac{D(F,G)}{D(z,x)}, \frac{D(F,G)}{D(x,y)}$$

este diferit de zero în M. Pentru a face o alegere, presupunem că $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)} \neq 0$ şi atunci, în conformitate cu teorema funcţiilor implicite, avem definite două şi numai două funcţii $y = y(x)$, $z = z(x)$, care satisfac identic 2.66, adică

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

pentru orice x dintr-un anumit interval.

Derivând 2.67 în raport cu x, prin intermediul lui y şi z, obţinem identităţile:

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \dfrac{dy}{dx} + F'_z \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ G'_x + G'_y \dfrac{dy}{dx} + G'_z \dfrac{dz}{dx} = 0, \end{cases} \tag{2.68}$$

din care putem explicita derivatele de ordinul întâi $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, sub forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}} \tag{2.69}$$

şi rezolva problemele **de clasă 1** (lungimea de arc, dreapta tangentă şi planul normal), într-un punct regulat al unei curbe date în reprezentarea carteziană generală, considerând-o redusă la reprezentarea parametrică

$$x = t,\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{2.70}$$

şi folosind 2.69 în formulele corespunzătoare. Un exemplu de rezolvare a problemelor de clasă 1 a fost dat în §3, când am dedus ecuaţiile dreptei tangente şi planului normal într-un punct regulat al curbei 2.66.

Dacă M este un punct regulat al lui (C), presupusă acum de clasă $p \geq 2$, atunci, derivând 2.68 în raport cu x, obţinem identităţile:

$$\begin{cases} F''_{x^2} + 2F''_{xy}\dfrac{dy}{dx} + 2F''_{xz}\dfrac{dz}{dx} + 2F''_{yz}\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dz}{dx} + F''_{y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \\ \qquad + F''_{z^2}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 + F'_y\dfrac{d^2y}{dx^2} + F'_z\dfrac{d^2z}{dx^2} = 0 \\ G''_{x^2} + 2G''_{xy}\dfrac{dy}{dx} + 2G''_{xz}\dfrac{dz}{dx} + 2G''_{yz}\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dz}{dx} + G''_{y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \\ \qquad + G''_{z^2}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 + G'_y\dfrac{d^2y}{dx^2} + G'_z\dfrac{d^2z}{dx^2} = 0, \end{cases} \tag{2.71}$$

care conduc, prin 2.69, la determinarea derivatelor de ordinul 2 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ şi $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ şi ne rezolvă, împreună cu 2.69, **problemele de clasă 2** (curbură, plan osculator, dreaptă normală principală şi dreaptă binormală).

În fine, dacă M este un punct regulat al lui (C), presupusă de clasă $p \geq 3$, putem deduce prin procedeul de mai sus şi derivatele de ordin 3, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ şi $\dfrac{d^3z}{dx^3}$, care ne rezolvă, împreună cu 2.69 şi 2.71, **problemele de clasă 3** (torsiune, formulele lui Frenet etc.). Procedând astfel, obţinem formule care cuprind numai funcţiile F şi G şi derivatele lor până la, cel mult, ordinul 3.

2.9 Curbe speciale

2.9.1 Înfăşurătoarea unor familii de curbe strâmbe

1. Familii de curbe date în reprezentarea carteziană generală. Înfăşurătoarea acestei familii

Fie ecuaţiile:

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,\alpha)=0 \\ G(x,y,z,\alpha)=0, \end{array}\right. \tag{2.72}$$

în care α este un parametru şi să presupunem că, pentru orice α aparţinând unui interval sau unei reuniuni de intervale, sunt îndeplinite condiţiile ca ecuaţiile 2.72 (cu α fixat) să reprezinte o curbă în spaţiu. Spunem că mulţimea curbelor date de 2.72 reprezintă o **familie de curbe strâmbe depinzând de un parametru.**

Ca şi în cazul curbelor plane (§1.8), ne întrebăm dacă există o curbă (I) la care toate curbele familiei 2.72 să fie tangente. Dacă o astfel de curbă există, ea se numeşte **înfăşurătoarea** curbelor familiei date. Dacă 2.72 admite înfăşurătoare, atunci **punctul caracteristic** (de contact între curba (C_α) a familiei corespunzătoare unei valori α a parametrului şi înfăşurătoarea (I)), să-i spunem M, trebuie să aibă coordonatele funcţii de α, în consecinţă, ecuaţiile parametrice ale înfăşurătoarei sunt:

$$x = x(\alpha),\ y = y(\alpha),\ z = z(\alpha), \tag{2.73}$$

cu $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ funcţii ce se cer determinate.

Presupunând că M **nu este punct singular** pentru nici una din curbele (C_α) şi (I), condiţia de tangenţă, ţinând cont de cele arătate în paragraful anterior, este:

$$\frac{\dfrac{dx}{d\alpha}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{\dfrac{dy}{d\alpha}}{\dfrac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{\dfrac{dz}{d\alpha}}{\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}}. \tag{2.74}$$

Din relaţiile 2.74 şi din identităţile de mai jos (ce se pot verifica printr-un calcul direct)

$$\begin{aligned} F'_x\frac{D(F,G)}{D(y,z)} + F'_y\frac{D(F,G)}{D(z,x)} + F'_z\frac{D(F,G)}{D(x,y)} &= 0 \\ G'_x\frac{D(F,G)}{D(y,z)} + G'_y\frac{D(F,G)}{D(z,x)} + G'_z\frac{D(F,G)}{D(x,y)} &= 0, \end{aligned}$$

deducem relaţiile:

$$\begin{aligned} F'_x\frac{dx}{d\alpha} + F'_y\frac{dy}{d\alpha} + F'_z\frac{dz}{d\alpha} &= 0 \\ G'_x\frac{dx}{d\alpha} + G'_y\frac{dy}{d\alpha} + G'_z\frac{dz}{d\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Deoarece $M \in (C_\alpha)$, coordonatele sale $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ verifică identic relaţiile 2.72, identităţi care prin derivare conduc la:

$$\begin{aligned} F'_x\frac{dx}{d\alpha} + F'_y\frac{dy}{d\alpha} + F'_z\frac{dz}{d\alpha} + F'_\alpha &= 0 \\ G'_x\frac{dx}{d\alpha} + G'_y\frac{dy}{d\alpha} + G'_z\frac{dz}{d\alpha} + G'_\alpha &= 0, \end{aligned}$$

relaţii care, împreună cu 2.75, conduc la

$$F'_\alpha(x,y,z,\alpha) = 0,\ G'_\alpha(x,y,z,\alpha) = 0. \tag{2.76}$$

În acest fel, am obţinut: **coordonatele unui punct curent al înfăşurătorii verifică sistemul:**

$$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha) = 0,\ G(x,y,z,\alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x,y,z,\alpha) = 0,\ G'_\alpha(x,y,z,\alpha) = 0. \end{cases} \tag{2.77}$$

Facem observaţia că sistemul de mai sus, de patru ecuaţii în necunoscutele x, y, z, nu are, în general, soluţii, cu alte cuvinte, o familie de curbe în spaţiu nu are în general înfăşurătoare.

Să considerăm acum problema inversă: arătăm că eliminarea parametrului α în din sistemul 2.77 conduce la ecuaţiile unei curbe care este tangentă tuturor curbelor familiei 2.72.

Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile ca ecuaţiile 2.72, să reprezinte o curbă (C_α), respectiv, 2.76, să reprezinte o curbă, să-i spunem (Γ_α) şi că, în plus, curbele (C_α) şi (Γ_α) au un punct comun $M(x, y, z)$ pentru care cel puţin unul din determinanţii funcţionali

$$\frac{D(F, G, F'_\alpha)}{D(x, y, z)}, \frac{D(F, G, G'_\alpha)}{D(x, y, z)} \tag{2.78}$$

este diferit de zero şi cel puţin una din derivatele F''_{α^2}, G''_{α^2} este diferită de zero în M. Pentru a face o alegere, fie, de exemplu,

$$\frac{D(F, G, F'_\alpha)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ F''_{\alpha x} & F''_{\alpha y} & F''_{\alpha z} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.79}$$

$$F''_{\alpha^2}(x, y, z, \alpha) \neq 0. \tag{2.80}$$

Ţinând cont de 2.79, în primul rând, putem afirma că cel puţin una din derivatele $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$, $F''_{\alpha z}$ este nenulă în M, afirmaţie adevărată simultan şi pentru determinanţii funcţionali

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)}, \frac{D(F, G)}{D(z, x)}, \frac{D(F, G)}{D(x, y)}. \tag{2.81}$$

Rezultă că punctul M este **punct regulat pentru curbele** (C_α) şi (Γ_α).

În al doilea rând, putem aplica teorema de existenţă a funcţiilor implicite sistemului

$$F(x, y, z, \alpha) = 0,\ G(x, y, z, \alpha) = 0,\ F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{2.82}$$

obţinând explicitarea coordonatelor x, y, z ale punctului M sub forma

$$x = x(\alpha),\ y = y(\alpha),\ z = z(\alpha), \tag{2.83}$$

unde funcţiile $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ sunt de clasă cel puţin 1 şi verifică identic sistemul 2.82:

$$\begin{aligned} F(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha) &= 0 \\ G(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha) &= 0 \\ F'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Dacă α variază, curbele (C_α) şi (Γ_α) variază, şi, de asemenea, variază şi punctul M, descriind o curbă reprezentată prin 2.83, pentru care avem identităţile 2.75, obţinute acum prin derivarea primelor două relaţii 2.84, ţinând seama de 2.76, şi identitatea

$$F''_{\alpha x}\frac{dx}{d\alpha} + F''_{\alpha y}\frac{dy}{d\alpha} + F''_{\alpha z}\frac{dz}{d\alpha} = -F''_{\alpha^2}, \tag{2.85}$$

obţinută prin derivarea în raport cu α a ultimei identităţi 2.84. Formând din 2.75 şi 2.85 un sistem de ecuaţii în necunoscutele $\frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha}$ şi ţinând cont de 2.79 şi 2.80, concludem că acesta nu poate admite soluţia banală. Aceasta ne arată că punctul M este punct regulat pentru curba 2.83.

Deoarece determinanţii funcţionali 2.81 nu sunt toţi nuli, din 2.75 deducem 2.74, ceea ce ne arată că tangenta în M la curba (C_α) coincide cu tangenta în M la curba 2.83 care este, deci curba (I), înfăşurătoarea familiei 2.72, iar M este punct caracteristic.

În cazul în care familia (C_α) are puncte singulare, analog ca în teoria curbelor plane, se demonstrează că aceste puncte verifică sistemul 2.77 ca şi punctele caracteristice.

Am demonstrat astfel:

Teorema 2.29 *Locul geometric al punctelor comune curbelor 2.72 şi 2.76, numit* ***curbă discriminantă*** *a familiei 2.72, este format din înfăşurătoarea acestei familii şi din locul geometric al punctelor singulare ale acestor curbe. Înfăşurătoarea familiei 2.72 există dacă sistemul 2.77 este compatibil, oricare ar fi α şi dacă pentru o soluţie a acestui sistem , determinanţii funcţionali 2.78 nu sunt amândoi nuli şi, de asemenea, derivatele F''_{α^2} şi G''_{α^2} nu sunt ambele nule.*

2. Înfăşurătoarea unei familii de curbe date vectorial parametric

Fie

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t,\alpha) \tag{2.86}$$

o familie de curbe strâmbe depinzând de un parametru.

Dacă această familie admite o înfăşurătoare (I), vectorul de poziţie al punctului caracteristic M, care aparţine curbei (C_α) corespunzătoare valorii α a parametrului, este dat de 2.86, unde t este o anumită funcţie de α, şi astfel, înfăşurătoarea (I) este dată de ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t(\alpha),\alpha), \tag{2.87}$$

unde funcţia $t(\alpha)$ trebuie determinată.

Curbele (C_α) şi (I) având aceeaşi dreaptă tangentă în M, deducem că vectorii $\dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t}$ şi $\dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} \cdot \dfrac{dt}{d\alpha} + \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha}$ sunt coliniari, ceea ce conduce la:

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} \times \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha} \right) = \vec{0},$$

de unde rezultă condiţia necesară şi suficientă

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \alpha} = \vec{0}. \tag{2.88}$$

Această condiţie este verificată şi de vectorii de poziţie ai punctelor singulare, dacă curbele 2.86 au astfel de puncte. Pe componente, 2.88 devine:

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial t}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial t}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial t}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}}, \tag{2.89}$$

şi prin una din aceste relaţii se determină funcţia dorită $t = t(\alpha)$, cealaltă relaţie rămânând să fie verificată identic de această funcţie. Astfel se încheie determinarea înfăşurătoarei (I) în acest caz.

Facem observaţia că relaţia 2.88 este simetrică în variabilele de derivare t şi α, de unde concludem că înfăşurătoarea familiei 2.86 cu α drept parametru este aceeaşi cu înfăşurătoarea familiei pentru care rolul de a determina curbele familiei îl are t, dacă cele două familii nu au puncte singulare.

2.9.2 Evoluta unei curbe în spaţiu

Fie (C) o curbă în spaţiu, de clasă $p \geq 3$, dată în reprezentarea $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$, cu s - parametru natural, M un punct regulat al ei şi (π_N) planul normal în M la curba (C).

Să considerăm P un punct arbitrar în (π_N), de vector de poziţie $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{R}$ (fig. 2.9).

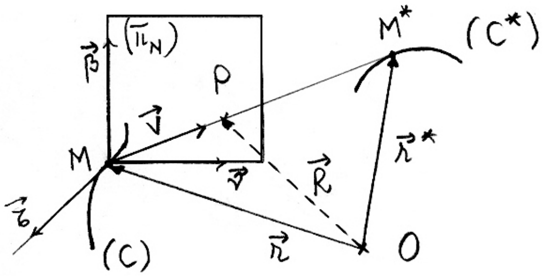


fig. 2.9

Dreapta (MP) (conţinută în (π_N)) va avea ecuaţia vectorială $\overrightarrow{R}(\lambda) = \overrightarrow{r} + \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}$, unde $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ este versorul lui (MP). Avem, evident, $\lambda = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|$.

Ţinând cont că $\overrightarrow{r}$ depinde de s, iar $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ depinde de unghiul α pe care îl face cu sensul pozitiv al dreptei normale principale, rezultă că dreptele normale ale unei curbe în spaţiu (C) constituie o familie de curbe (drepte) depinzând de doi parametri, s şi α, ai căror vectori de poziţie $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{R}$ respectă ecuaţia

$$\overrightarrow{R}(\lambda, s, \alpha) = \overrightarrow{r}(s) + \lambda[\cos\alpha\overrightarrow{\nu}(s) + \sin\alpha\overrightarrow{\beta}(s). \tag{2.90}$$

Apare întrebarea dacă putem extrage din familia 2.90 a dreptelor normale la o curbă în spaţiu, o familie dependentă de un singur parametru (s sau α), care să admită înfăşurătoare. Ca şi la curbe plane, înfăşurătoarea unei familii de drepte normale depinzând de un parametru, o vom numi **evoluta** sau **desfăşurata** curbei date.

Presupunând că dreptele normale MP înfăşoară o curbă (C^*), când M descrie curba (C), să notăm cu M^* punctul caracteristic - de contact cu evoluta (C^*) - al acestor drepte normale şi $\left\|\overrightarrow{MM^*}\right\| = q(s)$ (fig. 2.9). Atunci, în raport cu triedrul lui Frenet în M, avem pentru vectorul $\overrightarrow{MM^*}$ componentele $(0, q(s)\cos\alpha, q(s)\sin\alpha)$, iar dacă $\overrightarrow{r}^*$ notează vectorul de poziţie al lui $M^* \in (C^*)$, avem din 2.90 ecuaţia vectorială a lui (C^*), de forma

$$\overrightarrow{r}^*(s) = \overrightarrow{r}(s) + q(s)\cos\alpha\overrightarrow{\nu}(s) + q(s)\sin\alpha\overrightarrow{\beta}(s), \tag{2.91}$$

în care $q = q(s)$ şi $\alpha = \alpha(s)$ trebuie determinaţi.

În acest scop, derivăm 2.91 în raport cu s şi ţinem seama de formulele lui Frenet. Obţinem:

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{r}^*}{ds} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds} + \frac{dq}{ds}(\cos\alpha\overrightarrow{\nu}(s) + \sin\alpha\overrightarrow{\beta}(s)) + q(-\sin\alpha\overrightarrow{\nu} + \cos\alpha\overrightarrow{\beta})\frac{d\alpha}{ds}+ \\ +q\left(\cos\alpha\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} + \sin\alpha\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds}\right) = \\ = \overrightarrow{\tau} + \frac{dq}{ds}(\cos\alpha\overrightarrow{\nu}(s) + \sin\alpha\overrightarrow{\beta}(s)) + q(-\sin\alpha\overrightarrow{\nu} + \cos\alpha\overrightarrow{\beta})\frac{d\alpha}{ds}+ \\ +q[\cos\alpha(-K\overrightarrow{\tau} + \mathcal{X}\overrightarrow{\beta}) - \mathcal{X}\sin\alpha\overrightarrow{\nu}],\end{aligned}$$

sau încă

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{r}^*}{ds} &= (1 - qK\cos\alpha)\overrightarrow{\tau} + \left(\frac{dq}{ds}\cos\alpha - q\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} - q\mathcal{X}\sin\alpha\right)\overrightarrow{\nu} + \\ &\left(\frac{dq}{ds}\sin\alpha + q\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} + q\mathcal{X}\cos\alpha\right)\overrightarrow{\beta}.\end{aligned}$$

Deoarece am presupus că M^* este punct de contact al dreptei normale MP cu evoluta (C^*), trebuie să avem că vectorii $\overrightarrow{MM^*}$ şi $\dfrac{d\overrightarrow{r}^*}{ds}$ sunt coliniari, cu alte cuvinte, componentele lor trebuie să fie proporţionale. Impunând aceasta, obţinem:

$$1 - qK\cos\alpha = 0,$$

$$\frac{\dfrac{dq}{ds}\cos\alpha - q\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{ds} - q\mathcal{X}\sin\alpha}{q\cos\alpha} = \frac{\dfrac{dq}{ds}\sin\alpha + q\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{ds} + q\mathcal{X}\cos\alpha}{q\sin\alpha},$$

de unde rezultă relaţiile:

$$q(s)\cos\alpha = R(s), \tag{2.92}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\mathcal{X}(s), \tag{2.93}$$

$R(s)$ fiind raza de curbură, iar $\mathcal{X}$ - torsiunea lui (C) în M.

Comparând 2.92 cu 2.62, putem formula:

Teorema 2.30 *Punctul de contact M^* al dreptei normale MP cu evoluta (C^*) aparţine axei polare a lui (C) în M.*

Corolarul 2.31 *Evoluta (C^*) (la care rămâne tangentă MP, când M descrie (C)) este situată pe* ***suprafaţa polară****, suprafaţă formată din toate axele polare ale curbei (C).*

Din relaţia 2.93, obţinem

$$\alpha(s) = -\int_0^s \mathcal{X}(u)du + \alpha_0 \quad (\alpha_0\text{- constant}), \tag{2.94}$$

ceea ce ne arată că există ∞^1 familii de drepte normale ale curbei strâmbe (C), care admit înfăşurătoare, fiecare familie corespunzând la o valoare anumită atribuită lui α_0.

Avem deci:

Teorema 2.32 *O curbă în spaţiu, de clasă $p \geq 3$, admite o familie de evolute depinzând de un parametru α_0, evolute situate pe suprafaţa polară.*

Dacă α' şi α'' sunt valori ale lui α, corespunzătoare la două valori α_0' şi α_0'' ale lui α_0, pentru aceeaşi valoare a capătului superior din integrala 2.94, adică:

$$\alpha' = -\int_0^s \mathcal{X}(u)du + \alpha_0',\ \alpha'' = -\int_0^s \mathcal{X}(u)du + \alpha_0'',$$

obţinem:

$$\alpha' - \alpha'' = \alpha'_0 - \alpha''_0,$$

ceea ce ne permite să formulăm

Teorema 2.33 *O familie de drepte normale, tangente unei evolute a unei curbe* (C)*, se obţine rotind în jurul dreptelor tangente ale curbei, cu acelaşi unghi, familia de drepte normale tangente altei evolute.*

Remarcăm, în final, că o familie de drepte normale care fac unghiuri egale cu dreptele normale principale ($\alpha =$ constant) - în particular, familia dreptelor normale principale ($\alpha = 0$) - are înfăşurătoare dacă şi numai dacă torsiunea este identic zero, în conformitate cu 2.93, adică, dacă şi numai dacă curba este **plană**. În acest caz, dreptele normale principale sunt dreptele normale ale curbei (C), situate în planul curbei, iar înfăşurătoarea este evoluta curbei plane, dată de ecuaţia vectorială

$$\overrightarrow{r}^*(s) = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s).$$

Alte evolute (în spaţiu) pentru curba plană (C) se obţin considerând familii de drepte normale nesituate în planul curbei, care fac acelaşi unghi cu dreptele normale situate în planul curbei. Aceste evolute sunt reprezentate prin **ecuaţia generală a evolutelor**:

$$\overrightarrow{r}^*(s) = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s) + R(s)tg\alpha_0\overrightarrow{\beta}(s),$$

unde am ţinut cont de 2.91.

2.9.3 Evolventa unei curbe strâmbe

Ca şi în teoria diferenţială a curbelor plane, are sens să introducem noţiunea de **evolventă** a unei curbe în spaţiu ca o curbă care admite curba dată drept evolută.

Din această definiţie rezultă că evolventa (D) a unei curbe (C) aparţine unei suprafeţe (Σ), formate cu toate dreptele tangente la (C), numită **suprafaţă tangentă** a lui (C) şi (D) este ortogonală la dreptele tangente care generează (Σ). Mai mult, nu există o singură evolventă pentru (C).

Dacă (C) este reprezentată prin $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$, urmează că (Σ) poate fi reprezentată prin ecuaţia vectorială

$$\overrightarrow{R}(s,\alpha) = \overrightarrow{r}(s) + \alpha\overrightarrow{\tau}(s), \tag{2.95}$$

unde $\overrightarrow{\tau}(s)$ este versorul tangent al lui (C) şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Din această egalitate, vedem că o evolventă a lui (C) poate fi reprezentată vectorial prin funcţia vectorială

$$\overrightarrow{R}(s) = \overrightarrow{r}(s) + \alpha(s)\overrightarrow{\tau}(s), \tag{2.96}$$

unde $\alpha(s)$ trebuie să îndeplinească condiţia de definiţie, adică, versorul tangent la evolventă

$$\overrightarrow{R}'(s) = \overrightarrow{\tau}(s) + \alpha'(s)\overrightarrow{\tau}(s) + \alpha(s)K(s)\overrightarrow{\nu}(s)$$

să fie ortogonal versorului tangent $\overrightarrow{\tau}$ la (C).

Cu alte cuvinte, $\overrightarrow{R}'(s) \cdot \overrightarrow{\tau}(s) = 0$, ceea ce conduce la $1 + \alpha'(s) = 0$ şi deci, $\alpha(s) = c - s$, unde c este o constantă arbitrară.

Rezultă că o evolventă a lui (C) are reprezentarea vectorială

$$\overrightarrow{R}(s) = \overrightarrow{r}(s) + (c - s)\overrightarrow{\tau}(s), \tag{2.97}$$

existând ∞^1 evolvente, fiecare evolventă corespunzând unei valori precise a constantei c în 2.97.

Comparând 2.97 cu rezultatele referitoare la evoluta unei curbe plane, rezultă aceeaşi construcţie mecanică a evolventei, dar pentru o curbă în spaţiu.

2.10 Clase remarcabile de curbe în spaţiu

2.10.1 Curbe elice

Definitia 2.34 *Se numeşte **elice** o curbă în spaţiu pentru care dreapta tangentă în orice punct al curbei face un unghi constant cu o direcţie dată.*

Notăm cu $\overrightarrow{\tau}$ versorul tangentei şi cu $\overrightarrow{e}$ versorul dreptei date.

Condiţia din definiţia curbei elice se scrie:

$$\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{e} = \cos\alpha \ \text{(constant)}. \tag{2.98}$$

Derivăm această condiţie în raport cu s şi obţinem:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \cdot \overrightarrow{e} + \overrightarrow{\tau} \cdot \frac{d\overrightarrow{e}}{ds} = 0.$$

Cum $\overrightarrow{e}$ este vector constant, rezultă $K\overrightarrow{\nu} \cdot \overrightarrow{e} = 0$. Dacă curba are curbura nenulă, obţinem:

$$\overrightarrow{\nu} \cdot \overrightarrow{e} = 0, \tag{2.99}$$

condiţie ce caracterizează o curbă elice.

Dacă torsiunea este nenulă, amplificăm 2.99 cu $-\frac{1}{T}$ şi obţinem: $\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds}\cdot\overrightarrow{e}=0$, care prin integrare ne dă:

$$\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{e}=\cos\beta \quad \text{(constant)}, \tag{2.100}$$

adică dreapta binormală la o elice face unghi constant cu dreapta dată.

Teorema 2.35 *Condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie elice este ca raportul între curbura şi torsiunea curbei în orice punct să fie constant.*

Demonstratie. Dacă (C) este elice, atunci $\overrightarrow{\nu}\cdot\overrightarrow{e}=0$ şi, prin derivare, avem: $\frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds}\cdot\overrightarrow{e}=0$. Utilizăm a treia formulă Frenet şi obţinem: $\frac{T}{R}=\frac{\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{e}}{\overrightarrow{\tau}\cdot\overrightarrow{e}}=$ constant (în baza lui 2.98 şi 2.100).

Reciproc, dacă $\frac{T}{R}=\text{constant}=\frac{1}{c}$, din $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}=\frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}$ şi $\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds}=-\frac{1}{T}\overrightarrow{\nu}$, rezultă $R\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}+T\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds}=0$, adică $c\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}+\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds}=0$. Prin integrare, se obţine:

$$c\overrightarrow{\tau}+\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{e} \quad \text{(constant)},$$

relaţie care înmulţită cu $\overrightarrow{\nu}$ ne conduce la $\overrightarrow{\nu}\cdot\overrightarrow{e}=0$, adică, curba este elice.
■

Exemple

1) Elicea cilindrică:

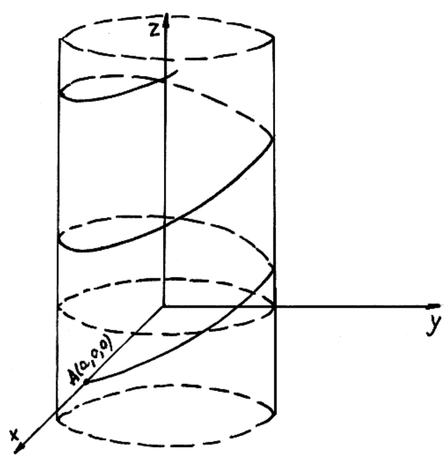


fig. 2.10

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}^*,$$

se găseşte pe cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$.

2) Elicea conică:

$$\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \\ z = bt \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}^*,$$

se găseşte pe conul $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}z^2$.

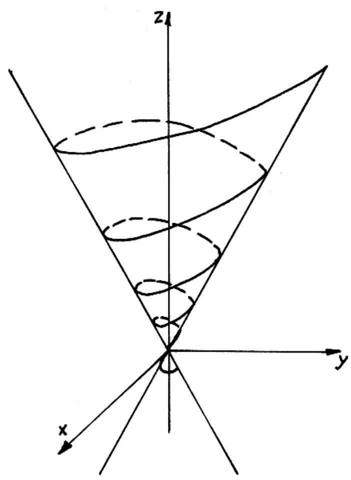


fig 2.11

2.10.2 Curbe Ţiţeica

Se numeşte **curbă Ţiţeica** o curbă în spaţiu pentru care $T \cdot d^2 =$ constant, unde T este raza de torsiune şi d este distanţa de la un punct fix la planul osculator (π_0).

Condiţia dată se traduce vectorial prin:

$$\frac{\left(\overrightarrow{R}_0 - \overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, \ddot{\overrightarrow{r}}\right)^2}{\left(\dot{\overrightarrow{r}}, \ddot{\overrightarrow{r}}, \dddot{\overrightarrow{r}}\right)} = \text{constant},$$

$\overrightarrow{R}_0$ fiind vectorul de poziţie al punctului fix.

Exerciţii. Să se arate că:
1) $x = at$, $y = bt^2$, $z = \dfrac{1}{abt^3}$;
2) $xyz = 1$, $y^2 = x$,
sunt curbe Ţiţeica.

Capitolul 3

Geometria diferenţială a suprafeţelor

3.1 Definiţia analitică a unei suprafeţe

Prin **suprafaţă în sens larg**, înţelegem o mulţime (Σ) de puncte din $\mathbb{R}^3$ ai căror vectori de poziţie satisfac o ecuaţie de tipul

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in A \times B,\ A, B \subset \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

care în reperul ortonormat $\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ se scrie sub forma:

$$\overrightarrow{r}(u^1, u^2) = x(u^1, u^2)\overrightarrow{i} + y(u^1, u^2)\overrightarrow{j} + z(u^1, u^2)\overrightarrow{k},\ (u^1, u^2) \in A \times B. \tag{3.2}$$

Ecuaţia 3.1 poartă numele de **reprezentarea parametrică** a lui (Σ), perechea (u^1, u^2), pe cel de **parametri** ai reprezentării, iar planul $\langle u^1, u^2\rangle$ este numit **planul parametric**.

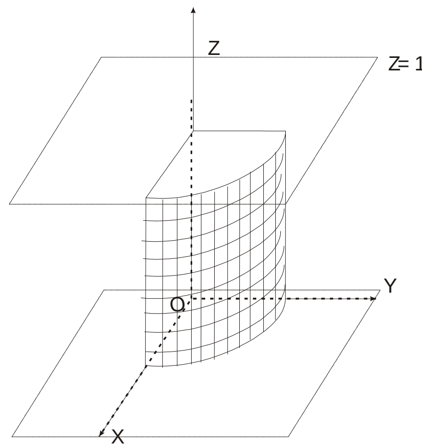
Pentru a putea aplica calculul diferenţial ecuaţiei 3.1, va trebui să o înzestrăm cu presupuneri diferenţiabile, lucru pe care îl vom face în cele ce urmează, ordonând riguros conceptul de suprafaţă în geometria diferenţială.

În continuare, vom presupune că domeniul de definiţie al lui $\overrightarrow{r}$ este o mulţime G deschisă din $\mathbb{R}^2$.

Exemplu: $\overrightarrow{r}(u^1, u^2) = R\cos u^1\overrightarrow{i} + R\sin u^1\overrightarrow{j} + u^2\overrightarrow{k},\ u^1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $u^2 \in (0, 1)$, reprezintă porţiunea din cilindrul circular

$$x^2 + y^2 = R^2$$

situată în primul octant, între planele xOy $(z = 0)$ şi $z = 1$ (vezi figura de mai jos).



Vom nota derivatele parţiale ale funcţiei $\overrightarrow{r}(u^1, u^2)$ prin indici, adică:

$$\overrightarrow{r}_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^1},\ \overrightarrow{r}_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^2},\ \overrightarrow{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta},\ \alpha, \beta = 1, 2, \text{ etc.}$$

Definitia 3.1 *Reprezentarea 3.1 este numită* ***reprezentare admisibilă de clasă*** p *dacă aplicaţia* $\overrightarrow{r} : G \to (\Sigma)$ *definită de aceasta satisface următoarele condiţii:*

P_0. $\overrightarrow{r}$ *este bijectivă;*

P_1. $\overrightarrow{r}$ *este de clasă* $p \geq 1$ *pe domeniul de definiţie;*

P_2. *produsul vectorial* $\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2$ *este diferit de vectorul nul, peste tot în* G.

Este evident că 3.1 nu este unica reprezentare posibilă pentru o suprafaţă în sens larg dată. Putem obţine alte funcţii vectoriale care să reprezinte mulţimea de puncte (Σ), prin impunerea unor transformări de tipul

$$u^1 = u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2),\ u^2 = u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2). \tag{3.3}$$

Notăm cu $\overline{G}$ domeniul de definiţie al transformării 3.3. Deoarece mulţimea punctelor (Σ) care satisfac 3.1 este iniţial condiţionată, vom admite numai acele transformări 3.3 care, aplicate unei reprezentări admisibile de clasă p de tip 3.1, conduc tot la reprezentări admisibile de clasă p şi reprezintă întreaga mulţime (Σ) dată de 3.1. Pentru a atinge acest scop, dăm definiţia care urmează:

Definitia 3.2 *Transformarea 3.3 se numeşte* ***transformare parametrică admisibilă de clasă*** p *dacă:*

$\overline{P}_0$. *Aplicaţia 3.3, definită pe* $\overline{G}$, *cu valori în* G, *este bijectivă.*

$\overline{P}_1$. *Funcţiile* u^1 *şi* u^2 *sunt de clasă* $p \geq 1$ *în* $\overline{G}$.

$\overline{P}_2$. Jacobianul transformării

$$D = \frac{D(u^1, u^2)}{D(\overline{u}^1, \overline{u}^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

este diferit de zero peste tot în $\overline{G}$.

Specificăm că $\overline{P}_0$ şi $\overline{P}_2$ sunt condiţii independente. Într-adevăr, transformarea

$$u^1 = e^{\overline{u}^1} \cos \overline{u}^2,\ u^2 = e^{\overline{u}^1} \sin \overline{u}^2$$

are jacobianul

$$D = e^{2\overline{u}^1} \neq 0,$$

dar nu este bijectivă, în vreme ce transformarea

$$u^1 = (\overline{u}^1)^3,\ \ u^2 = \overline{u}^2$$

este bijectivă pe $\mathbb{R}^2$, dar

$$D = 3(\overline{u}^1)^2$$

este zero, dacă $\overline{u}^1 = 0$.

Folosind transformările parametrice admisibile, putem împărţi reprezentările admisibile de forma 3.1 în clase de echivalenţă.

Definitia 3.3 *Două reprezentări admisibile de clasă p se spun a fi* ***echivalente*** *dacă există o transformare admisibilă de clasă p care să le transforme una în cealaltă.*

Se verifică uşor că sunt îndeplinite axiomele echivalenţei.

Definitia 3.4 *O clasă de echivalenţă de reprezentări 3.1 admisibile de clasă p se numeşte* ***porţiune de suprafaţă de clasă*** *p. Punctele mulţimii de puncte reprezentate în această clasă sunt numite puncte ale porţiunii de suprafaţă.*

Parametrii u^1, u^2 din 3.1 se numesc **coordonate** ale porţiunii de suprafaţă.

Aşadar, o porţiune de suprafaţă este ansamblul format din mulţimea de puncte (Σ) şi un reprezentant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in G$ al clasei de echivalenţă:

$$\{(\Sigma) : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in G\}.$$

În continuare, vom neglija paranteza acoladă pentru desemnarea porţiunii de suprafaţă.

Definitia 3.5 *Prin* ***suprafaţă de clasă*** p*, înţelegem o mulţime de puncte* (S) *din* $\mathbb{R}^3$*, cu proprietatea că fiecare punct are o vecinătate* U *astfel încât* $S \cap U$ *este o porţiune de suprafaţă de clasă* p*.*

Remarcăm că presupunerea P_2, anume $\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2 \neq 0$ este echivalentă cu faptul că matricea

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

are rangul 2.

Vom admite că într-un număr finit de puncte izolate sau de-a lungul unui număr finit de curbe de pe suprafaţa (S), matricea J are rangul mai mic ca 2. Astfel de puncte sau curbe le vom numi **singulare**, celelalte numindu-se puncte **regulate**.

Alte moduri de a descrie analitic o suprafaţă le obţinem dacă observăm că 3.1 se scrie pe componente:

$$\begin{cases} x = x(u^1, u^2), \\ y = y(u^1, u^2), \\ z = z(u^1, u^2), \end{cases} \tag{3.6}$$

Ecuaţiile 3.6 se numesc **ecuaţiile parametrice** ale porţiunii de suprafaţă sau ale suprafeţei.

Deoarece $rang(J) = 2$ într-un punct regulat, avem unul din minorii de ordin 2 ai lui J diferit de zero. Pentru a face o alegere, presupunem

$$\begin{vmatrix} x'_{u^1} & x'_{u^2} \\ y'_{u^1} & y'_{u^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci, primele două ecuaţii 3.6, $x = x(u^1, u^2)$, $y = y(u^1, u^2)$, admit soluţia inversă $u^1 = u^1(x, y)$, $u^2 = u^2(x, y)$, care, înlocuită în ultima egalitate 3.6, conduce la ecuaţia $z = z(u^1(x, y), u^2(x, y))$ sau, pe scurt:

$$z = z(x, y), \tag{3.7}$$

numită **ecuaţia carteziană explicită** a porţiunii de suprafaţă.

Trecerea de la 3.7 la 3.6 se face simplu prin renotarea variabilelor independente x, y, anume:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases},$$

ceea ce sugerează şi faptul că reprezentarea parametrică nu este unică.

În fine, o porţiune de suprafaţă, sau o suprafaţă, poate fi obţinută şi sub forma:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{3.8}$$

numită **ecuaţia carteziană implicită**. Funcţia F trebuie să îndeplinească în punctele regulate condiţia:

$$(F'_x)^2 + (F'_x)^2 + (F'_x)^2 > 0, \tag{3.9}$$

adică, cel puţin una din derivatele parţiale F'_x, F'_y, F'_z să nu se anuleze. Această ipoteză ne asigură că putem trece de la 3.8 la ecuaţia explicită 3.7 în vecinătatea unui punct regulat.

3.2 Elemente de algebră tensorială

Noţiunea de tensor este una din noţiunile de bază ale matematicii, ea fiind folosită cu mult succes în mecanică, electrodinamică, teoria relativităţii etc. Ea apare în secolul al XIX-lea, în legătură cu unele probleme din teoria elasticităţii, dar teoria matematică a acestei noţiuni a fost dezvoltată între 1886 şi 1901 de către geometrul C. G. Ricci (1855-1925) şi matematicianul mecanician T. Levi-Civita (1873-1942). Rolul acestei teorii matematice a crescut considerabil odată cu crearea în 1915-1916, de către savantul A. Einstein (1879-1955), a teoriei relativităţii, teorie care are ca bază matematică, calculul tensorial.

În cele ce urmează, vom prezenta algebra tensorială din punctul de vedere al geometriei suprafeţelor şi al geometriei riemanniene n-dimensionale, geometrie care este o generalizare a teoriei suprafeţelor. Vom face acest lucru într-un mod simplu, prin neimpunerea asupra dimensiunii n, a valorii $n = 2$ din teoria suprafeţelor.

Convenţia indicilor de sumare întrebuinţată în geometria analitică rămâne şi aici valabilă: dacă o literă apare de două ori, o dată ca indice superior şi o dată ca indice inferior, atunci se face sumare după acest indice de la 1 la n, fără a scrie simbolul de sumă $\sum$.

3.2.1 Tensori contravarianţi şi tensori covarianţi de ordinul întâi (Vectori contravarianţi şi covarianţi)

Cunoaştem din paragraful precedent că o suprafaţă (S) poate fi reprezentată printr-o funcţie vectorială $\overrightarrow{r}(u^1, u^2)$ unde parametrii u^1, u^2 sunt coordonate pe (S).

Noile coordonate $\overline{u}^1, \overline{u}^2$ pot fi introduse pe (S) prin intermediul unei transformări admisibile 3.3, care satisface presupunerile definiţiei 3.2.

Generalizând, într-un spaţiu n-dimensional (a cărui structură nu o precizăm), sunt necesare n coordonate $u^1, u^2, ..., u^n$, iar noile coordonate $\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n$, pot fi introduse prin intermediul unei transformări

$$u^j = u^j(\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n), \;\; j = 1, ..., n, \tag{3.10}$$

transformare pe care o presupunem **admisibilă**. Cu alte cuvinte, admitem că 3.10 este bijectivă, are jacobianul

$$D = \frac{\partial(u^1, u^2, ..., u^n)}{\partial(\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial u^n}{\partial \overline{u}^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial \overline{u}^n} \end{vmatrix}$$

diferit de zero pe tot domeniul de definiţie şi, în plus, 3.10 şi inversa sa

$$\overline{u}^j = \overline{u}^j(u^1, u^2, ..., u^n), \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{3.11}$$

sunt de clasă $p \geq 1$.

În acest paragraf, pe lângă ipoteza că toate transformările care apar sunt admisibile, mai considerăm şi că **aceste transformări admisibile formează un grup** $\mathcal{G}$. Această ipoteză ne asigură că atât compusa a două transformări din $\mathcal{G}$, cât şi inversa unei astfel de transformări, rămân în $\mathcal{G}$.

Scriind 3.10 şi 3.11 în forma:

$$u^j = f^j(\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n), \; \overline{u}^j = \overline{f}^j(u^1, u^2, ..., u^n),$$

obţinem identităţile evidente

$$u^j = f^j(\overline{f}^1, \overline{f}^2, ..., \overline{f}^n), \;\; \overline{u}^j = \overline{f}^j(f^1, f^2, ..., f^n),$$

care derivate, prima, în raport cu variabila u^k, a doua, în raport cu variabila $\overline{u}^k$, conduc, respectiv, la identităţile:

$$\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \frac{\partial f^j}{\partial \overline{f}^m} \cdot \frac{\partial \overline{f}^m}{\partial u^k}, \;, \frac{\partial \overline{u}^j}{\partial \overline{u}^k} = \frac{\partial \overline{f}^j}{\partial f^m} \cdot \frac{\partial f^m}{\partial \overline{u}^k}, \; j, k = 1, 2, ..., n, \tag{3.12}$$

indicele m de la 1 la n fiind indice de sumare. Deoarece u^j şi u^k pentru $j \neq k$ sunt independente (analog $\overline{u}^j$ şi $\overline{u}^k$), membrul întâi din fiecare identitate este 0 dacă $j \neq k$ şi 1 dacă $j = k$.

Revenind în 3.12 la notaţiile din 3.10 şi 3.11, obţinem relaţiile:

$$\frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^m} \cdot \frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^k} = \delta^j_k, \; \frac{\partial \overline{u}^j}{\partial u^m} \cdot \frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k} = \delta^j_k, \quad j, k = 1, 2, ..., n, \tag{3.13}$$

unde

$$\delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{dacă } j \neq k \\ 1 & \text{dacă } j = k, \end{cases} \tag{3.14}$$

este numit **simbolul lui Kronecker.**

Deoarece coordonatele $u^1, u^2, ..., u^n$ şi $\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n$ sunt legate printr-o transformare admisibilă 3.10, atunci **diferenţialele** lor $du^1, du^2, ..., du^n$ şi şi $d\overline{u}^1, d\overline{u}^2, ..., d\overline{u}^n$ sunt legate prin formula

$$du^j = \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^m} d\overline{u}^m,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{3.15}$$

şi invers,

$$d\overline{u}^j = \frac{\partial \overline{u}^j}{\partial u^m} du^m,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{3.16}$$

unde m este indice de sumare de la 1 la n.

Ultimele două formule vor fi de bază în definirea noţiunii de tensor.

Fie $\mathcal{G}$ un grup de transformări admisibile de coordonate într-un spaţiu n-dimensional şi fie un n-uplu de numere reale $a^1, a^2, ..., a^n$ asociate cu un punct P de coordonate $u^1, u^2, ..., u^n$. Mai mult, fie asociat cu P un n-uplu de numere reale $\overline{a}^1, \overline{a}^2, ..., \overline{a}^n$ în raport cu orice alt sistem de coordonate $\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n$, care poate fi obţinut din $u^1, u^2, ..., u^n$ printr-o transformare din $\mathcal{G}$. Spunem că $a^1, a^2, ..., a^n$, respectiv, $\overline{a}^1, \overline{a}^2, ..., \overline{a}^n$ constituie în P componentele unui **tensor contravariant de ordinul întâi (vector contravariant)** faţă de $\mathcal{G}$ în sistemul de coordonate respectiv, dacă legătura între ele la schimbarea 3.10 de coordonate respectă legea de transformare a diferenţialelor, adică

$$a^j = \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^m} \overline{a}^m,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{3.17}$$

sau invers,

$$\overline{a}^j = \frac{\partial \overline{u}^j}{\partial u^m} a^m,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{3.18}$$

Vectorul contravariant va fi notat, pe scurt, a^j sau $\overline{a}^j$, în sistemul de coordonate u^j, respectiv, $\overline{u}^j$.Transformarea covariantă 3.17 este indicată prin indici superiori.

Observatia 3.6 *Relaţia 3.18 poate fi obţinută din 3.17 folosind 3.13. Într-adevăr, înmulţind 3.17 cu* $\dfrac{\partial \overline{u}^k}{\partial u^j}$ *şi sumând după* j *de la 1 la* n*, folosind a doua* *egalitate 3.13 şi 3.14, găsim:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{u}^k}{\partial u^j}a^j &= \frac{\partial\overline{u}^k}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial u^j}{\partial\overline{u}^m}\overline{a}^m = \delta^k_m\overline{a}^m = \overline{a}^k \Rightarrow \overline{a}^k = \frac{\partial\overline{u}^k}{\partial u^j}a^j,\\ k &= 1,...,n,\end{aligned}$$

adică relaţia 3.18, scrisă cu alţi indici, ceea ce nu afectează formula, bazat fiind pe convenţia de sumare şi posibilitatea de renotare a indicilor liberi în ambii membri.

Observatia 3.7 *Orice n-uplu ordonat de numere reale poate fi luat drept componente ale unui vector contravariant în P de coordonate $u^1,u^2,...,u^n$, cu condiţia ca, în raport cu coordonatele $\overline{u}^1,\overline{u}^2,...,\overline{u}^n$ ale punctului P, componentele acestui vector să fie obţinute din 3.18. Acest fapt nu exclude posibilitatea ca, în general, componentele unui vector contravariant să nu fie date mereu într-un singur punct, ci în fiecare punct al unei mulţimi de puncte şi vom spune în acest caz că este dat un* ***câmp de vectori contravarianţi*** *sau un* ***câmp de tensori contravarianţi de ordinul întâi****. Pentru a simplifica vocabularul, vom spune tot „tensor” în loc de „câmp de tensori”.*

Vom introduce în continuare noţiunea de vector covariant.

În acest scop, fie a^i un vector contravariant oarecare şi să considerăm forma liniară

$$A = b_ia^i = b_1a^1 + b_2a^2 + ... + b_na^n,$$

în componente ale acestui vector. Să căutăm legea de transformare a coeficienţilor b_i la o transformare admisibilă de coordonate 3.3, făcând presupunerea că forma liniară A are o **semnificaţie geometrică**, adică, A este invariantă la 3.3.

Fie $\overline{b}_s$ coeficienţii formei transformate $\overline{A}$ şi fie $\overline{a}_s$ notat vectorul de coordonate $\overline{u}^1,\overline{u}^2,...,\overline{u}^n$. Atunci avem:

$$\overline{A} = \overline{b}_s\overline{a}^s = b_ia^i = A.$$

Folosind 3.18, obţinem

$$b_ia^i = \overline{b}_s\frac{\partial\overline{u}^s}{\partial u^i}a^i,$$

şi deoarece această relaţie are loc pentru orice vector contravariant, componentele a^i trebuie să aibă aceiaşi coeficienţi în ambii membri şi deci,

$$b_i = \overline{b}_s\frac{\partial\overline{u}^s}{\partial u^i}. \tag{3.19}$$

Multiplicând această relaţie cu $\dfrac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^m}$ şi folosind 3.13, în mod analog, obţinem:

$$\overline{b}_s = \frac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^s} b_i. \tag{3.20}$$

Definitia 3.8 *Fie $\mathcal{G}$ un grup de transformări admisibile de coordonate într-un spaţiu n-dimensional şi fie un n-uplu de numere reale $b_1, b_2, ..., b_n$ asociate cu un punct P de coordonate $u^1, u^2, ..., u^n$. Mai mult, fie asociat cu P un n-uplu de numere reale $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n$ în raport cu orice alt sistem de coordonate $\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n$, care poate fi obţinut din $u^1, u^2, ..., u^n$ printr-o transformare din $\mathcal{G}$. Spunem că $b_1, b_2, ..., b_n$, respectiv, $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n$ constituie în P componentele unui* ***tensor covariant de ordinul întâi (vector covariant)*** *faţă de $\mathcal{G}$, în sistemul de coordonate respectiv, dacă regula de transformare între ele la schimbarea 3.3 a sistemului de coordonate este de forma 3.19, unde derivatele sunt evaluate în P. Vectorul covariant este notat prin b_j sau $\overline{b}_j$ în sistemul de coordonate u^j, respectiv, $\overline{u}^j$. Transformarea covariantă 3.19 este indicată prin indici inferiori.*

Având la dispoziţie tensorii de ordinul întâi (vectorii contravarianţi şi covarianţi), putem uşor introduce tensorii de ordin superior, procedând ca mai sus, adică plecând de la forme multiliniare în tensori de ordinul întâi, forme pe care le presupunem invariante la transformări admisibile de coordonate şi căutând legea de transformare a coeficienţilor acestor forme. Pentru ca procedeul să fie mai uşor de înţeles, vom introduce mai întâi tensorii de ordinul doi, pentru ca apoi generalizarea să se facă fără nici o dificultate. Facem acest lucru şi pentru că tensorii de ordinul doi sunt mai frecvent întâlniţi în teoria diferenţială a suprafeţelor.

3.2.2 Tensori de ordinul doi

În primul rând, pornim de la doi vectori covarianţi oarecare b_j şi c_k într-un punct P de coordonate $u^1, u^2, ..., u^n$ şi considerăm forma biliniară

$$B = a^{jk} b_j c_k,$$

în componente ale acestor vectori, formă pe care o presupunem invariantă la transformări admisibile de coordonate 3.3.

Notând cantităţile corespunzătoare în coordonatele $\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n$ printr-o bară, trebuie să avem:

$$\overline{B} = \overline{a}^{pq} \overline{b}_p \overline{c}_q = a^{jk} b_j c_k = B.$$

Din această egalitate şi 3.20, obţinem

$$a^{jk}b_jc_k = \overline{a}^{pq}\frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^p}b_j\frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^q}c_k,$$

şi deoarece această relaţie are loc pentru orice pereche de vectori covarianţi, produsul b_jc_k trebuie să aibă aceiaşi coeficienţi în ambii membri şi deci:

$$a^{jk} = \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^p}\frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^q}\overline{a}^{pq}, \;\; j,k = 1,...,n. \tag{3.21}$$

În mod analog, folosind 3.19, obţinem transformarea inversă:

$$\overline{a}^{sm} = \frac{\partial \overline{u}^s}{\partial u^j}\frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^k}a^{jk}, \;\; s,m = 1,...,n. \tag{3.22}$$

Definitia 3.9 *Mulţimea ordonată de n^2 numere reale a^{jk}, respectiv, $\overline{a}^{jk}$ $(j,k = 1,...,n)$ date în P, care la o transformare 3.3 respectă legea 3.21, poartă numele de **componente ale unui tensor contravariant de ordinul doi** în raport cu $\mathcal{G}$, în sistemul de coordonate u^j, respectiv, $\overline{u}^j$, derivatele în 3.21 fiind evaluate în P.*

Observaţii: 1. Relaţia 3.22 poate fi obţinută şi din 3.21 prin multiplicarea cu $\frac{\partial \overline{u}^s}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^k}$, sumând după j şi k de la 1 la n şi folosind definiţia simbolului lui Kronecker. Într-adevăr:

$$\frac{\partial \overline{u}^s}{\partial u^j}\frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^k}a^{jk} = \overline{a}^{pq}\frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^p}\frac{\partial \overline{u}^s}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^q}\frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^k} = \overline{a}^{pq}\delta_p^s\delta_q^m = \overline{a}^{sm}.$$

2. Componentele tensorului de ordinul doi a^{jk}, în număr de n^2, pot fi aranjate în forma unei matrici pătratice în care elementele sunt notate cu indici superiori (de contravarianţă)

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & ... & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & ... & a^{2n} \\ ... & & & \\ a^{n1} & a^{n2} & ... & a^{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Dacă v^j şi w^k sunt vectori contravarianţi în punctul P, putem forma n^2 produse

$$a^{jk} = v^jw^k, \;\; j,k = 1,...,n,$$

care sunt componente ale unui tensor contravariant de ordinul doi (lăsăm în seama cititorului verificarea acestui fapt). Acest tensor de numeşte **produsul tensorial** al celor doi vectori.

Să remarcăm că, invers, nu orice tensor de ordinul doi poate si reprezentat ca produs tensorial de doi vectori.

În al doilea rând, plecăm de la doi vectori contravarianţi oarecare b^j şi c^k într-un punct P şi considerăm forma biliniară:

$$C = a_{jk} b^j c^k,$$

în componente ale acestor vectori, formă pe care o presupunem invariantă la 3.3.

Notând cantităţile corespunzătoare în coordonatele $\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n$ printr-o bară, trebuie să avem:

$$\overline{C} = \overline{a}_{pq} \overline{b}^p \overline{c}^q = a_{jk} b^j c^k = C.$$

Din această egalitate şi 3.18, obţinem

$$a_{jk} b^j c^k = \overline{a}_{pq} \frac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^j} b^j \frac{\partial \overline{u}^q}{\partial u^k} c^k,$$

şi deoarece această relaţie are loc pentru orice pereche de vectori covarianţi, produsul $b^j c^k$ trebuie să aibă aceiaşi coeficienţi în ambii membri şi deci:

$$a_{jk} = \overline{a}_{pq} \frac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^j} \frac{\partial \overline{u}^q}{\partial u^k}, \; j,k = 1, ..., n. \tag{3.23}$$

În mod analog, folosind 3.17, obţinem transformarea inversă:

$$\overline{a}_{sm} = \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^s} \frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^m} a_{jk}, \; s,m = 1, ..., n. \tag{3.24}$$

Definitia 3.10 *Mulţimea ordonată de n^2 numere reale a_{jk}, respectiv, $\overline{a}_{jk}$ $(j,k = 1, ..., n)$ date în P, care la o transformare 3.3 respectă legea 3.23, poartă numele de* ***componente ale unui tensor contravariant de ordinul doi*** *în raport cu $\mathcal{G}$, în sistemul de coordonate u^j, respectiv, $\overline{u}^j$, derivatele în 3.23 fiind evaluate în P.*

Analoagele celor trei observaţii referitoare la tensorii covarianţi de ordinul doi sunt uşor de transpus şi de aceea nu le mai dăm.

În fine, în al treilea rând, plecând de la doi vectori arbitrari, daţi în P, unul contravariant b^j şi altul covariant c_k şi considerând forma biliniară

$$F = a_j^{\ k} b^j c_k,$$

în componente ale acestor vectori, formă pe care o presupunem invariantă la 3.3, adică

$$\overline{F} = \overline{a}_p^{\ q} \overline{b}^p \overline{c}_q = a_j^{\ k} b^j c_k,$$

prin 3.18 şi 3.20 obţinem:

$$a_j^{\ k} b^j c_k = \overline{a}_p^{\ q} \frac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^j} b^j \frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^q} c_k,$$

şi, deoarece această egalitate are loc pentru orice pereche de vectori, produsul tensorial $b^j c_k$ trebuie să aibă aceiaşi coeficienţi în ambii membri şi deci:

$$a_j^{\ k} = \overline{a}_p^{\ q} \frac{\partial \overline{u}^p}{\partial u^j} \frac{\partial u^k}{\partial \overline{u}^q}, \ j, k = 1, ..., n. \tag{3.25}$$

Prin 3.17 şi 3.19 găsim legătura inversă:

$$\overline{a}_s^{\ m} = \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^s} \frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^k} a_j^{\ k}, \ m, s = 1, ..., n. \tag{3.26}$$

Definitia 3.11 *Mulţimea ordonată de n^2 numere reale $a_j^{\ k}$, respectiv, $\overline{a}_j^{\ k}$ $(j, k = 1, ..., n)$ date în P, care la o transformare 3.3 respectă legea 3.25, poartă numele de* ***componente ale unui tensor mixt de ordinul doi*** *în raport cu $\mathcal{G}$, în sistemul de coordonate u^j, respectiv, $\overline{u}^j$, derivatele în 3.25 fiind evaluate în P.*

De asemenea, şi în acest caz au loc analoagele observaţiilor pe care le-am făcut referitor la tensorii covarianţi.

3.2.3 Tensori de ordin arbitrar. Operaţii cu tensori

Vom introduce acum noţiunea de tensor de ordin arbitrar, care va include definiţiile precedente drept cazuri particulare, iar în finalul paragrafului vom indica operaţiile cu aceşti tensori.

Pentru aceasta, vom considera forma multiliniară

$$M = a_{j_1 ... j_r}^{\qquad k_1 ... k_s} b^{j_1} c^{j_2} ... f^{j_r} g_{k_1} h_{k_2} ... w_{k_s},$$

în componente a r vectori contravarianţi $b^{j_1}, c^{j_2}, ..., f^{j_r}$ şi a s vectori covarianţi $g_{k_1}, h_{k_2}, ..., w_{k_s}$, arbitrari, daţi într-un punct P, pe care o considerăm invariantă la transformările grupului $\mathcal{G}$. Scriind aceasta şi folosind 3.18 şi 3.20, obţinem:

$$a_{j_1 ... j_r}^{\qquad k_1 ... k_s} = \frac{\partial \overline{u}^{p_1}}{\partial u^{j_1}} ... \frac{\partial \overline{u}^{p_r}}{\partial u^{j_r}} \frac{\partial u^{k_1}}{\partial \overline{u}^{q_1}} ... \frac{\partial u^{k_s}}{\partial \overline{u}^{q_s}} \overline{a}_{p_1 ... p_r}^{\qquad q_1 ... q_s}, \tag{3.27}$$

relaţie care multiplicată cu

$$\frac{\partial u^{j_1}}{\partial \overline{u}^{t_1}} ... \frac{\partial u^{j_r}}{\partial \overline{u}^{t_r}} \cdot \frac{\partial \overline{u}^{m_1}}{\partial u^{k_1}} ... \frac{\partial \overline{u}^{m_s}}{\partial u^{k_s}}$$

conduce la legătura inversă

$$\overline{a}_{t_1...t_r}{}^{m_1...m_s} = \frac{\partial u^{j_1}}{\partial \overline{u}^{t_1}} ... \frac{\partial u^{j_r}}{\partial \overline{u}^{t_r}} \cdot \frac{\partial \overline{u}^{m_1}}{\partial u^{k_1}} ... \frac{\partial \overline{u}^{m_s}}{\partial u^{k_s}} a_{j_1...j_r}{}^{k_1...k_s}, \tag{3.28}$$

toţi indicii luând valori de la 1 la n.

Definitia 3.12 *Fie $\mathcal{G}$ un grup de transformări admisibile de coordonate şi fie $a_{j_1...j_r}{}^{k_1...k_s}$ o mulţime ordonată de n^{s+r} numere reale date în punctul P în sistemul de coordonate $u^1, u^2, ..., u^n$. Mai mult, fie $\overline{a}_{t_1...t_r}{}^{m_1...m_s}$ o mulţime ordonată de n^{s+r} numere reale date în P în sistemul de coordonate $\overline{u}^1, ..., \overline{u}^s$, obţinut din $u^1, u^2, ..., u^n$ printr-o transformare din $\mathcal{G}$. Dacă relaţiile de transformare 3.27-3.28 sunt îndeplinite, atunci spunem că în P sunt date* ***componentele unui tensor de ordin s+r, sau de tipul (s,r), sau de s ori contravariant şi de r ori covariant în raport cu*** *$\mathcal{G}$.*

Este uşor de văzut că definiţia de mai sus le include pe cele ale tensorilor de ordinul întâi şi doi.

Nu excludem posibilitatea ca, în general, componentele unui tensor să fie date nu numai într-un singur punct, ci în fiecare punct al unei mulţimi de puncte din spaţiul considerat. Aceste componente vor fi atunci funcţii de coordonatele din acea mulţime şi în cest caz vom spune că în acea mulţime este dat un **câmp de tensori**. Pentru simplitate, vom spune tot „tensor" în loc de „câmp de tensori" în acest caz.

Înainte de a trece la operaţii cu tensori, sunt necesare câteva precizări.

Scalarii îi numim tensori de ordin 0 (zero).

Un tensor se spune a fi **simetric în raport cu doi indici** de contravarianţă sau doi indici de covarianţă, dacă componentele obţinute prin schimbarea indicilor respectivi între ei, sunt egale. Un tensor contravariant sau covariant se spune a fi **simetric** dacă el este simetric în raport cu fiecare pereche de indici. Un asemenea tensor nu poate fi mixt.

Pentru un tensor simetric de ordin doi, din cele n^2 componente, cel mult $\frac{n(n+1)}{2}$ sunt distincte.

Tensorul antisimetric (strâmb simetric sau alternat) **în raport cu doi indici** de contravarianţă sau doi indici de covarianţă, este acel tensor ale cărui componente obţinute prin schimbarea indicilor respectivi între ei diferă numai prin semn. Un tensor contravariant sau covariant se spune a fi **antisimetric** dacă el este antisimetric în raport cu fiecare pereche de indici.

În cazul unui tensor, să spunem, covariant de ordinul doi, antisimetric t_{ij}, trebuie să avem $t_{ij} = -t_{ji}$, în particular, $t_{ii} = -t_{ii}$, de unde rezultă că $t_{ii} = 0$.

Doi tensori se numesc **de acelaşi tip** dacă ei au acelaşi număr de indici de covarianţă şi acelaşi număr de indici de contravarianţă. Vom nota cu $\mathcal{T}_r^s$ mulţimea tensorilor de tip (s, r) (de s ori contravarianţi şi de r ori covarianţi).

1. **Adunarea** se defineşte numai pentru tensorii de acelaşi tip. Suma între $a_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s}$ şi $b_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s}$ este tensorul de tip (s, r)

$$c_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s} = a_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s} + b_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s}.$$

2. **Înmulţirea** tensorilor este definită fără restricţii. Prin produsul (**produsul tensorial**) a doi tensori $a_{h_1 \dots h_p}{}^{i_1 \dots i_q}$ şi $b_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s}$, primul de tip (q, p), al doilea de tip (s, r), înţelegem un tensor de tip $(q + s, p + r)$, de componente

$$c_{h_1 \dots h_p j_1 \dots j_r}{}^{i_1 \dots i_q k_1 \dots k_s} = a_{h_1 \dots h_p}{}^{i_1 \dots i_q} \cdot b_{j_1 \dots j_r}{}^{k_1 \dots k_s}.$$

Pe scurt, are loc egalitatea

$$\mathcal{T}_p^q \otimes \mathcal{T}_s^r = \mathcal{T}_{p+r}^{q+s}.$$

Deoarece un scalar este un tensor de ordinul 0 (zero), are sens înmulţirea unui tensor cu un scalar şi concludem că: **mulţimea tensorilor de acelaşi tip formează spaţiu vectorial.**

3. **Contracţia indicilor**. În cazul unui tensor mixt, putem egala un indice de contravarianţă (superior) cu un indice de covarianţă (inferior) şi efectua sumarea în raport cu această pereche de indici. Această operaţie se numeşte **contracţie**. Din 3.27 şi 3.13 rezultă că această operaţie conduce la un tensor cu un indice de contravarianţă şi un indice de covarianţă mai puţin, adică

$$\mathcal{C} : \mathcal{T}_p^q \to \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}.$$

De exemplu, dacă $a_j{}^k \in \mathcal{T}_1^1$, atunci $a_j{}^j = a_1{}^1 + a_2{}^2 + \dots + a_n{}^n \in \mathcal{T}_0^0 = \mathbb{R}$. Într-adevăr,

$$\overline{a}_m{}^m = \frac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^m} \cdot \frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^j} a_i{}^j = \delta_j{}^i a_i{}^j = a_j{}^j.$$

Analog, dacă $a_{ij}{}^{klm} \in \mathcal{T}_2^3$, putem avea

$$\overset{1}{\underset{1}{C}} a_{ij}{}^{klm} := a_{ij}{}^{ilm} \in \mathcal{T}_1^2,\ \overset{2}{\underset{1}{C}} a_{ij}{}^{klm} := a_{ij}{}^{kim} \in \mathcal{T}_1^2 \text{ etc.},$$

sau să repetăm contracţia:

$$\overset{1}{\underset{1}{C}}\left(\overset{1}{\underset{1}{C}} a_{ij}^{\ \ klm}\right) = a_{ij}^{\ \ ijm} \in \mathcal{T}_0^1, \ \overset{2}{\underset{1}{C}}\left(\overset{2}{\underset{1}{C}} a_{ij}^{\ \ klm}\right) = a_{ij}^{\ \ kij} \in \mathcal{T}_0^1 \text{ etc.}$$

Dacă contractăm un produs tensorial în raport cu indici în ambii factori ai produsului, tensorul rezultat este numit **produsul interior** al acestor tensori.

De exemplu, dacă $a_j \in \mathcal{T}_1^0$ şi $b^k \in \mathcal{T}_0^1$, atunci ştim că $a_j b^k \in \mathcal{T}_1^1$, iar produsul lor interior este $a_j b^j \in \mathcal{T}_0^0 = \mathbb{R}$. Sau încă, dacă $a_{ij} \in \mathcal{T}_2^0$ şi $b^{klm} \in \mathcal{T}_0^3$, atunci ştim că $a_{ij} b^{klm} \in \mathcal{T}_2^3$, iar produsele lor interioare pot fi de forma $a_{ij} b^{jlm} \in \mathcal{T}_1^2$, $a_{ij} b^{kim} \in \mathcal{T}_1^2$, $a_{ij} b^{ijm} \in \mathcal{T}_0^1$ etc.

4. **Simetrizarea unui tensor.** Operaţia de simetrizare a unui tensor, în raport cu anumiţi indici (de acelaşi fel) constă în construcţia următoare a unui tensor simetric, plecând de la tensorul dat: se consideră suma tuturor componentelor tensorului dat obţinute permutându-se în toate modurile posibile indicii în raport cu care simetrizăm şi se împarte această sumă la numărul permutărilor.

   Tensorul obţinut se notează punând în paranteze rotunde indicii simetrizaţi. De exemplu:

$$t^{(ij)} = \frac{1}{2}(t^{ij} + t^{ji}), \tag{3.29}$$

   şi în general,

$$t^{(i_1 \ldots i_p)} = \frac{1}{p!}(t^{i_1 \ldots i_p} + t^{i_2 i_1 \ldots i_p} + \ldots). \tag{3.30}$$

   Dacă între indicii în raport cu care simetrizăm sunt intercalaţi indici în raport cu care nu simetrizăm, aceştia se despart prin bare. De exemplu:

$$t_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}(t_{ijk} + t_{kji}). \tag{3.31}$$

5. **Alternarea.** Operaţia de alternare a unui tensor în raport cu anumiţi indici dă un procedeu de a construi, plecând de la un tensor dat, un tensor antisimetric în raport cu aceşti indici.

Pentru aceasta vom proceda ca şi la simetrizare, numai că în sumă vom lua componentele ce se obţin din primul termen printr-o permutare pară a indicilor cu semnul plus, iar cele care se obţin printr-o permutare impară a indicilor, cu semnul minus.

Indicii alternanţi se vor nota cu paranteze pătrate. De exemplu:

$$t^{[ij]} = \frac{1}{2}(t^{ij} - t^{ji}), \tag{3.32}$$

$$t^{[ijk]} = \frac{1}{6}(t^{ijk} - t^{ikj} + t^{jki} - t^{jik} + t^{kij} - t^{kji}), \tag{3.33}$$

$$t^{[i_1...i_p]} = \frac{1}{p!}(t^{i_1...i_p} + t^{i_2...i_p i_1} + t^{i_3...i_p i_1 i_2} + ... - t^{i_2 i_1 ... i_p} - ...), \tag{3.34}$$

sau încă,

$$t_{[i|j|k]} = \frac{1}{2}(t_{ijk} - t_{kji}),$$

unde intercalarea indicilor între bare semnifică faptul că în raport cu ei nu alternăm sau nu simetrizăm.

3.2.4 Tensori afini şi tensori euclidieni. Operaţia de ridicare şi coborâre a indicilor

Până acum, în acest paragraf nu am precizat structura spaţiului n-dimensional în care am considerat grupul transformărilor admisibile de coordonate $\mathcal{G}$, în raport cu care am definit tensorii de ordin arbitrar. Luând cazuri particulare de astfel de spaţii vom obţine cu uşurinţă cazurile particulare ale tensorilor afini şi euclidieni, tensori ce se întâlnesc frecvent în mecanică, fizică şi alte discipline.

Pentru început, vom considera spaţiul n-dimensional drept **spaţiu liniar n-dimensional** E_n (ale cărui elemente le numim vectori) peste un corp K (ale cărui elemente poartă numele de scalari). Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază a acestui spaţiu, [5].

Un vector oarecare se descompune unic în această bază, să spunem, sub forma:

$$x = x^i e_i,$$

unde $(x^1, ..., x^n)$ sunt numite **componente** ale vectorului x în baza $e_1, ..., e_n$.

Dacă schimbăm baza, să spunem, $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n$, atunci trebuie să avem o legătură între baza nouă şi baza veche, de forma

$$\overline{e}_m = A^i_m e_i, \quad m = 1, ..., n, \tag{3.35}$$

unde $\det(A^i_m) \neq 0$.

Atunci, vectorul x se scrie în baza nouă:

$$x = \overline{x}^m \overline{e}_m,$$

unde $(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n)$ sunt noile componente ale vectorului x. Prin 3.35 rezultă:

$$x = x^i e_i = \overline{x}^m \overline{e}_m = \overline{x}^m A_m^i e_i,$$

şi, cum $e_1, ..., e_n$ sunt liniar independenţi, avem:

$$x^i = A_m^i \overline{x}^m, \ i = 1, , ., n, \tag{3.36}$$

legătura între vechile componente x^i şi noile componente $\overline{x}^i$.

Dacă legătura între baza veche şi baza nouă este de forma

$$e_i = B_i^m \overline{e}_m, \ \ i = 1, , ., n, \tag{3.37}$$

un calcul analog conduce la legătura dintre componentele noi $\overline{x}^i$ şi cele vechi x^i, de forma:

$$\overline{x}^m = B_i^m x^i, \tag{3.38}$$

unde $\det(B_i^m) \neq 0$.

Avem, evident,

$$A \cdot B = (A_m^i B_j^m) = (\delta_j^i) = I, \ B \cdot A = (B_i^m A_m^j) = (\delta_j^i) = I, \tag{3.39}$$

unde I desemnează matricea unitate, iar δ_j^i este simbolul lui Kronecker, pe scurt

$$A_m^j B_k^m = \delta_k^j, \ A_m^k B_j^m = \delta_k^j, \ j, k = 1, ..., n.$$

Dacă $E_n \equiv \mathbb{R}^n$ este mulţimea sistemelor ordonate de n numere reale (elementele acesteia le mai putem numi „puncte"), atunci 3.36 şi 3.38 reprezintă formulele de transformare ale coordonatelor unui punct $P(x^1, ..., x^n)$, respectiv, $P(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n)$, la schimbarea reperului, prin păstrarea originii (**rotaţie**).

Dacă schimbăm şi originea reperului, obţinem formulele:

$$x^i = A_m^i \overline{x}^m + A_0^i, \tag{3.40}$$

$$\overline{x}^m = B_i^m x^i + B_0^m, \tag{3.41}$$

unde $(A_0^1, \ \ , A_0^n)$, respectiv, $(B_0^1, \ \ , B_0^n)$ reprezintă coordonatele noilor origini, în sistemele respective. Formulele 3.40, 3.41 formează grupul, să-l notăm tot cu $\mathcal{G}$, al **transformărilor afine**.

Acest grup $\mathcal{G}$ este un caz particular de grup de transformări admisibile de coordonate şi deci, are sens să calculăm din 3.40 şi 3.41 (mai particular, din 3.36 şi 3.38) cantităţile:

$$\frac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^m} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m} = A^i_m, \ \frac{\partial \overline{u}^m}{\partial u^j} = \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j} = B^m_j, \tag{3.42}$$

cantităţi necesare definirii **tensorilor afini**, prin particularizări ale definiţiilor de mai sus.

De exemplu, n^2 numere a^{ij}, respectiv, $\overline{a}^{ij}$, date în $P(x^1, ..., x^n)$, respectiv, în $P(\overline{x}^1, ..., \overline{x}^n)$, constituie componentele unui **tensor afin contravariant de ordinul doi** dacă legea lor de schimbare la transformările afine $\mathcal{G}$ date de 3.40 este:

$$a^{jk} = A^j_p A^k_q \overline{a}^{pq}, \ (j, k = 1, ..., n) \tag{3.43}$$

sau invers,

$$\overline{a}^{sm} = B^s_j B^m_k a^{jk}, \ (s, m = 1, ..., n). \tag{3.44}$$

În mod analog, n^3 numere reale a_i^{jk}, respectiv, $\overline{a}_i^{jk}$, aparţin spaţiului liniar al tensorilor afini de tipul $(2, 1)$, $\mathcal{T}^2_1(E_n)$, dacă la o transformare afină din $\mathcal{G}$, se modifică după legea

$$a_i^{jk} = B^m_i A^j_p A^k_q \overline{a}_m^{pq} \ \ (i, j, k = 1, ..., n), \tag{3.45}$$

sau invers,

$$\overline{a}_m^{pq} = A^i_m B^p_j B^q_k a_i^{jk} \ \ (m, p, q = 1, ..., n), \tag{3.46}$$

cum se constată prin particularizarea lui 3.27, la care aplicăm 3.42 şi, respectiv, din 3.45, cu relaţiile 3.13.

Observatia 3.13 *Din 3.42, observăm că x^i sunt componente afine contravariante ale vectorului x. Din acest motiv, elementele unui spaţiu vectorial sunt numite* ***vectori contravarianţi****.*

Dacă considerăm doi vectori $x, y \in E_n$, putem defini **produsul scalar** al lor în baza $e_1, ..., e_n$, notat cu $x \cdot y$, dat de

$$x \cdot y = x^j y^k e_j e_k,$$

care este un **invariant afin**. Într-adevăr, din 3.38, 3.35 şi 3.13, avem:

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{y} &= \overline{x}^p \overline{y}^q \overline{e}_p \overline{e}_q = B^p_j x^j B^q_k y^k A^r_p e_r A^s_q e_s = \delta^r_j \delta^k_s x^j y^k e_r e_s = \\ &= x^j y^k e_j e_k = x \cdot y. \end{aligned}$$

Produsele scalare între vectorii bazei le vom nota pe scurt:

$$g_{ij} = e_i e_j \tag{3.47}$$

şi este uşor de văzut că $g_{ij} \in \mathcal{T}_2^0(E_n)$. Într-adevăr, din egalitatea de mai sus şi 3.35, avem:

$$\overline{g}_{pq} = \overline{e}_p \overline{e}_q = A_p^j e_j A_q^k e_k = A_p^j A_q^k e_j e_k = A_p^j A_q^k g_{jk}, \tag{3.48}$$

adică, tocmai legea de transformare a unui tensor afin covariant de ordinul al doilea. Mai mult, el este simetric: $g_{ij} = g_{ji}$.

Multiplicând, descompunerea vectorului x în baza $e_1, ..., e_n$:

$$x = x^i e_i,$$

cu un vector e_j oarecare din bază, obţinem produsul scalar xe_j de forma

$$xe_j = x^i g_{ij}, \tag{3.49}$$

unde am ţinut cont de notaţia 3.47.

Să notăm membrul al doilea al acestei egalităţi cu

$$x_j = x^i g_{ij} \tag{3.50}$$

şi să căutăm legea de transformare a lui x_j prin grupul $\mathcal{G}$.

Avem, din 3.50, 3.49 şi 3.48, relaţia

$$\overline{x}_q = \overline{x}^p \overline{g}_{pq} = \bar{x}\bar{e}_q = B_i^p x^i A_p^j A_q^k g_{jk} = \delta_i^j A_q^k x^i g_{jk} = A_q^k x^i g_{ik} = A_q^k x_k,$$

ceea ce arată că x_j sunt componente de vector covariant, $x_j \in \mathcal{T}_1^0(E_n)$.

Numim x_j **componentele covariante ale vectorului** x, în baza aleasă, spre deosebire de componentele contravariante x^i ale vectorului x.

Dacă matricea (g_{ij}) este nesingulară, adică

$$\det(g_{ij}) \neq 0, \tag{3.51}$$

are sens matricea inversă, notată cu (g^{ij}) a lui (g_{ij}) :

$$g_{ij} g^{ki} = \delta_j^k. \tag{3.52}$$

Atunci, din 3.50, prin înmulţire cu g^{jk} şi 3.52, obţinem:

$$x^k = g^{kj} x_j. \tag{3.53}$$

Formulele 3.50, respectiv, 3.53, ne arată modul de trecere de la componentele contravariante x^i ale vectorului x la componentele covariante x_i ale aceluiaşi vector x. Acest procedeu de **coborâre şi ridicare a indicilor** poate fi extins la tensori oarecare prin formule de tipul:

$$t_{i_1}^{\ i_2...i_q} = g_{i_1j_1}t^{j_1i_2...i_q}, \tag{3.54}$$

pentru coborârea indicelui de contravarianţă, sau

$$t^{i_1}_{\ i_2...i_q} = g^{i_1j_1}t_{j_1i_2...i_q}, \tag{3.55}$$

pentru ridicarea indicelui de covarianţă. Putem repeta operaţia de mai multe ori:

$$t_{i_1i_2...i_q} = g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}...g_{i_qj_q}t^{j_1j_2...j_q}, \tag{3.56}$$

$$t^{i_1i_2...i_q} = g^{i_1j_1}g^{i_2j_2}...g^{i_qj_q}t_{j_1j_2...j_q}, \tag{3.57}$$

sau operaţia poate fi aplicată unui tensor mixt, formulele fiind analoage cu cele de mai sus.

Caracterul tensorial al membrului întâi din 3.54-3.57 se verifică uşor, efectuând în fiecare câte o schimbare a bazei.

În fine, dacă în spaţiul liniar E_n peste corpul K $(= \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C})$ alegem o bază ortonormată $e_1, e_2, ..., e_n$ şi definim **produsul scalar** a doi vectori x şi y prin:

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i,$$

atunci spaţiul liniar se numeşte **spaţiu euclidian n-dimensional**, pentru care avem, evident,

$$g_{ij} = e_i e_j = \delta_{ij},$$

simbolii lui Kronecker cu ambii indici notaţi jos.

Dacă $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ este o altă bază ortonormată, avem:

$$\overline{\delta}_{pq} = \overline{e}_p\overline{e}_q = \overline{g}_{pq} = A_p^j A_q^k \delta_{jk} = \sum_{i=1}^{n} A_p^k A_q^k,$$

ceea ce exprimă faptul că matricea A_m^i din 3.35 este ortogonală.

Aceasta înseamnă că toate definiţiile tensorilor afini se particularizează la **tensori euclidieni** în scrierea de mai sus, numai cu suplimentarea

$$\det(A_i^j) = 1.$$

Deoarece

$$\det(g_{ij}) = \det(\delta_{ij}) = 1 \neq 0,$$

rezultă că g_{ij} admit reciprocii g^{ji} şi operaţia de ridicare şi coborâre a indicilor într-un spaţiu euclidian n-dimensional este totdeauna posibilă.

Atragem atenţia că, pentru a putea coborî sau ridica un indice, trebuie ca locul pe care aducem acel indice să fie liber. Prin urmare, atunci când vom lucra cu tensori afini, ne vom îngriji de păstrarea locului indicilor coborâţi şi ridicaţi. Astfel, de exemplu, nu vom scrie imprecis t_i^j, ci vom scrie $t^j{}_i$ sau $t_i{}^j$ şi, în general, aceşti doi tensori sunt diferiţi. Numai dacă aceştia coincid, vom putea scrie fără ambiguitate t_i^j.

3.3 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe

3.3.1 Curbe pe suprafaţă

Fie (S) o suprafaţă de clasă $p \geq 1$ dată în reprezentarea

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u^1, u^2), \tag{3.58}$$

şi P un punct regulat al ei.

O curbă (C) trasată pe (S) poate fi reprezentată sub forma

$$u^1 = u^1(t),\ u^2 = u^2(t), \tag{3.59}$$

unde t este un parametru real, funcţiile $u^1(t)$, $u^2(t)$ fiind de clasă $p \geq 1$ şi îndeplinind condiţia ca pentru orice t, cel puţin una din derivatele $\dot{u}^1$ şi $\dot{u}^2$ să fie diferită de zero:

$$(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 > 0. \tag{3.60}$$

Înlocuind 3.59 în 3.58, obţinem pentru curba (C) de pe suprafaţa (S) reprezentarea parametrică

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u^1(t), u^2(t)). \tag{3.61}$$

În condiţiile de mai sus, reprezentarea 3.61 este general admisibilă (în sensul definiţiei 2.4).

În particular, dacă alegem $u^1 = t$, respectiv, $u^2 = t$, găsim pentru curba (C) de pe (S) reprezentările:

$$u^2 = u^2(u^1) \quad \text{sau} \quad u^1 = u^1(u^2) \tag{3.62}$$

şi reprezentarea implicită:

$$h(u^1, u^2) = 0. \tag{3.63}$$

Mai mult, să remarcăm că u^1=constant şi u^2=constant sunt curbe pe (S), anume, **familia curbelor coordonate** (sau **familia curbelor parametrice**), ce formează o reţea (fig. 3.1): prin fiecare punct $P_0(u_0^1, u_0^2)$ al lui (S) trece cel puţin câte o curbă din fiecare familie, anume:

$$\begin{aligned}(C_1) &\quad : \quad u^2 = u_0^2 \\ (C_2) &\quad : \quad u^1 = u_0^1.\end{aligned}$$

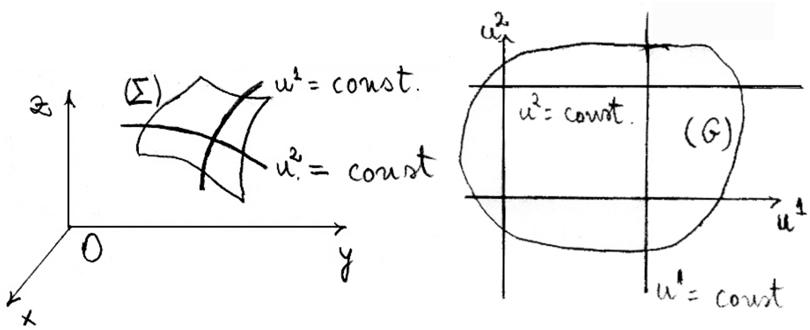


fig. 3.1

Mai mult, ţinând cont că aplicaţia $(u^1, u^2) \mapsto \overrightarrow{r}(u^1, u^2)$ este bijectivă, are loc

Propozitia 3.14 *Printr-un punct P al unei suprafeţe regulate trece exact câte o curbă coordonată din fiecare familie.*

Astfel, P se află la intersecţia curbelor coordonate $u^2 = u_0^2$ şi $u^1 = u_0^1$; avem, astfel, o situaţie analoagă celei dintr-un plan raportat la un reper xOy, caz în care un punct $M(x_0, y_0)$ se află la intersecţia dreptelor $x = x_0$ şi $y = y_0$, (x_0,y_0) numindu-se coordonate rectangulare (sau carteziene). Din acest motiv, parametrii u^1, u^2 mai poartă numele de **coordonate curbilinii** pe suprafaţa (S).

Fie acum P un punct al unei curbe oarecare (C), trasate pe (S). Presupunem că (C) este reprezentată prin 3.59. Atunci, vectorul tangent în P la (C), cu notaţiile $\overrightarrow{r}_1 = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^1}$, $\overrightarrow{r}_2 = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^2}$, este:

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt} = \overrightarrow{r}_1\dot{u}^1 + \overrightarrow{r}_2\dot{u}^2, \tag{3.64}$$

relaţie care ne arată că acest vector este o combinaţie liniară de vectorii $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$. Pentru curbele coordonate, avem:

$$(C_1) : (u^1 = t,\ \ u^2 = const.,\ \ \dot{u}^1 = 1,\ \ \dot{u}^2 = 0),$$

respectiv,

$$(C_1) : (u^1 = const., \ u^2 = t, \ \dot{u}^1 = 0, \ \dot{u}^2 = 1),$$

şi relaţia 3.64 ne permite să formulăm:

Propozitia 3.15 *Vectorul tangent la curba coordonată* $u^2 = const$ *este* $\overrightarrow{r}_1 = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^1}$, *iar vectorul tangent la curba coordonată* $u^1 = const$ *este* $\overrightarrow{r}_2 = \dfrac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u^2}$.

Presupunem că $P \in (S)$ este punct regulat. Dacă ţinem cont de condiţia de regularitate $\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2 \neq 0$, urmează că:

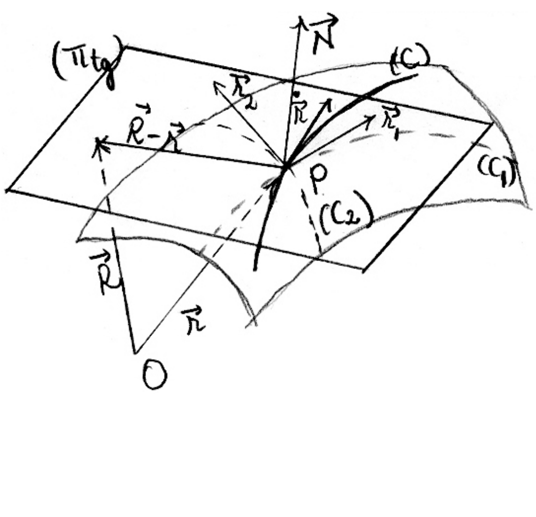
Propozitia 3.16 *Cele două curbe coordonate care trec printr-un punct P al unei suprafeţe regulate au în P drepte tangente distincte.*

Cu alte cuvinte, dacă P este punct regulat, atunci vectorii $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$ sunt liniar independenţi, ceea ce înseamnă, ţinând cont de 3.60, că $\dot{\overrightarrow{r}} \neq 0$

Mai mult, din 3.64 deducem că vectorul tangent la orice curbă pe (S) este o combinaţie liniară de $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$. Prin urmare, el descrie planul determinat de punctul P şi direcţiile $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$), fapt ce va fi folosit în paragraful următor

3.3.2 Planul tangent şi dreapta normală la o suprafaţă într-un punct regulat. Orientarea unei suprafeţe

Definitia 3.17 *Numim* ***plan tangent*** *în punctul regulat P la suprafaţa (S), planul care conţine tangentele în P ale tuturor curbelor de pe (S) ce trec prin P.*



Notând cu $\overrightarrow{R}$ vectorul de poziţie al unui punct oarecare din acest plan şi cu $\vec{r}$, vectorul de poziţie al lui P, avem:

$$(\overrightarrow{R}-\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}_1,\overrightarrow{r}_2)=0 \tag{3.65}$$

sau

$$\overrightarrow{R}(\alpha^1,\alpha^2)=\overrightarrow{r}+\alpha^1\overrightarrow{r}_1+\alpha^2\overrightarrow{r}_2,\ \alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{R}\ \ (\overrightarrow{r}_1\times\overrightarrow{r}_2\neq 0), \tag{3.66}$$

pentru **ecuaţia vectorială a planului tangent** în P la (S).

Relaţia 3.65 se scrie pe componente:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{vmatrix}=0, \tag{3.67}$$

unde X,Y,Z sunt componentele lui $\overrightarrow{R}$, iar x,y,z, cele ale lui $\overrightarrow{r}$.

Definitia 3.18 *Numim **dreaptă normală** în punctul regulat P la suprafaţa (S), dreapta ce trece prin P şi este perpendiculară pe planul tangent în P la (S).*

Cum vectorul

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{r}_1\times\overrightarrow{r}_2 \tag{3.68}$$

este perpendicular pe planul tangent în P la (S), $(\pi_{tg})_P$, notând cu $\overrightarrow{R}$ vectorul de poziţie al unui punct oarecare de pe dreapta normală, avem:

$$\overrightarrow{R}=\overrightarrow{r}+\lambda\overrightarrow{N},\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{3.69}$$

pentru **ecuaţia vectorială a dreptei normale** în P la (S).

Ecuaţiile sub formă de rapoarte ale dreptei normale sunt, conform cu 3.68:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^1} \\ \frac{\partial z}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u^2} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{vmatrix}}. \tag{3.70}$$

Remarcăm că **vectorul unitar normal** la (S) în P este dat de:

$$\overrightarrow{n}=\frac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|}=\frac{\overrightarrow{r}_1\times\overrightarrow{r}_2}{\|\overrightarrow{r}_1\times\overrightarrow{r}_2\|}. \tag{3.71}$$

Exemplu. Fie suprafaţa (*elicoidul*) $x = u^1 \cos u^2$, $y = u^1 \sin u^2$, $z = hu^2$. Să se determine planul tangent şi dreapta normală în $A(1, 0, 0)$.

Punctul A corespunde valorilor $u^1 = 1$, $u^2 = 0$. În acest punct, avem: $\vec{r}_1 = \cos u^2 \vec{i} + \sin u^2 \vec{j}|_A = \vec{i}$, $\vec{r}_2 = -u^1 \sin u^2 \vec{i} + u^1 \cos u^2 \vec{j} + h\vec{k}|_A = \vec{j} + h\vec{k}$. Planul tangent are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = 0,$$

sau $-hY + Z = 0$. Vectorul normal la plan în A are, astfel, componentele $\vec{N}(0, -h, 1)$, iar versorul lui este $\vec{n}\left(0, \dfrac{-h}{\sqrt{1+h^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right)$. Ecuaţiile dreptei normale sub formă de rapoarte sunt uşor de scris.

Observaţii:

1. Dacă punctul P este dat, vectorii $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$ sunt unic determinaţi şi necoliniari şi atunci, ansamblul $\{P, \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2\}$ constiuie un reper fixat în planul tangent. În acest reper, vectorul tangent la o curbă arbitrară de pe (S), ce trece prin P, în conformitate cu 3.64, are componentele $\dot{\overrightarrow{r}}(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$, adică $\left(\dfrac{du^1}{dt}, \dfrac{du^2}{dt}\right)$, **direcţia tangentă** fiind de componente (du^1, du^2) sau $(1, \dfrac{du^2}{du^1})$, prin coliniaritate.

2. Remarcăm că în fiecare punct regulat al unei suprafeţe putem ataşa un triplet de vectori liniar independenţi $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$ şi $\overrightarrow{n}$, care, spre deosebire de reperul Frenet al curbelor în spaţiu nu este neapărat ortonormat, deoarece, în general, $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$ nu sunt unitari şi nu sunt perpendiculari. Reperul mobil format din punctul regulat $P \in (S)$ şi tripletul $\{\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{n}\}$ poartă numele de **reperul lui Gauss.**

3. Planul tangent şi dreapta normală într-un punct regulat $P \in (S)$ sunt invariante la transformările admisibile de coordonate (reparametrizări). Într-adevăr, dacă $u^i = u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $i = 1, 2$, atunci:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^1} = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^1}\vec{r}_{\bar{\imath}}, \\ \vec{r}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^j}\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^2} = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^2}\vec{r}_{\bar{\jmath}}, \end{aligned}$$

   de unde deducem că vectorii normali $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ şi $\vec{r}_{\bar{\imath}} \times \vec{r}_{\bar{\jmath}}$ sunt coliniari, ceea ce justifică afirmaţia.

4. Sensul lui $\overrightarrow{n}$ depinde de reprezentarea parametrică a suprafeţei: o transformare parametrică admisibilă al cărei jacobian D este negativ inversează sensul lui $\overrightarrow{n}$, iar o transformare pentru care D este pozitiv păstrează sensul lui $\overrightarrow{n}$.

Într-adevăr, dacă (S) este dată în reprezentarea

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u^1, u^2),$$

avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_{\overline{1}} \times \overrightarrow{r}_{\overline{2}} &= \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \overline{u}^1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \overline{u}^2} = \left(\overrightarrow{r}_1 \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \overrightarrow{r}_2 \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) \times \left(\overrightarrow{r}_1 \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \overrightarrow{r}_2 \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} \right) = \\ &= (\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2) \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} - \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \right), \end{aligned}$$

adică

$$\overrightarrow{r}_{\overline{1}} \times \overrightarrow{r}_{\overline{2}} = D(\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2), \tag{3.72}$$

sau invers, printr-un calcul analog:

$$\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2 = \overline{D}(\overrightarrow{r}_{\overline{1}} \times \overrightarrow{r}_{\overline{2}}), \tag{3.73}$$

unde $\overline{D}$ este inversul lui D :

$$D\overline{D} = 1. \tag{3.74}$$

Relaţiile 3.72-3.73 demonstrează afirmaţia.

Definitia 3.19 *Sensul vectorului unitar normal la suprafaţa (S) în P este numit* ***sensul normal pozitiv*** *al suprafeţei (S) în P.*

Definitia 3.20 *O suprafaţă (S) se spune a fi* ***orientabilă*** *dacă sensul normal pozitiv dat într-un punct arbitrar P al lui (S) poate fi prelungit în mod continuu la întreaga suprafaţă.*

Dacă (S) este orientabilă, atunci nu există pe (S) o curbă închisă (C) care trece prin P, astfel încât sensul pozitiv normal să se schimbe atunci când ne deplasăm continuu de la P de-a lungul lui (C) întorcându-ne la loc în P.

Evident, reprezentările admisibile ale unei porţiuni de suprafaţă pot fi divizate în două clase, fiecare corespunzând la una din cele două posibilităţi de orientare a acestei porţiuni. Două astfel de reprezentări aparţin la aceeaşi clasă, dacă ele sunt legate printr-o transformare al cărei jacobian este pozitiv.

Definitia 3.21 *Vom spune că unghiul orientat* $(\widehat{\overrightarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2})$ *dintre vectorii directori ai dreptelor tangente în P la două curbe pe (S) este* ***orientat pozitiv*** *dacă triedrul format de vectorii $\overrightarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2, \overrightarrow{n}$ este drept orientat.*

Prin schimbarea sensului vectorului $\overrightarrow{n}$ se schimbă şi orientarea unghiului $(\widehat{\overrightarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2})$.

În cele ce urmează, ne propunem să deducem ecuaţia planului tangent şi expresia vectorului normal într-un punct regulat $P \in (S)$, pentru cazurile în care suprafaţa este dată în reprezentare explicită sau implicită.

Dacă suprafaţa (S) este dată în **reprezentarea carteziană explicită** 3.7, o renotare a variabilelor independente x şi y cu u^1, respectiv, u^2, conduce la ecuaţia vectorială a lui (S) :

$$\overrightarrow{r}(u^1, u^2) = u^1 \overrightarrow{i} + u^2 \overrightarrow{j} + z(u^1, u^2) \overrightarrow{k},$$

de unde deducem că vectorii tangenţi la curbele coordonate sunt:

$$\overrightarrow{r}_1(u^1, u^2) = \overrightarrow{i} + z_1 \overrightarrow{k}, \ \overrightarrow{r}_2(u^1, u^2) = \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}, \ z_j = \frac{\partial z}{\partial u^j}, \ j = 1, 2.$$

Introducând notaţiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

şi efectuând calculele în 3.67, obţinem ecuaţia planului tangent la suprafaţa (S) dată în reprezentarea explicită $z = z(x, y)$ sub forma:

$$-(X - x)p - (Y - y)q + (Z - z) = 0, \tag{3.75}$$

la care remarcăm vectorul normal

$$\overrightarrow{N}(-p, -q, 1) \tag{3.76}$$

şi vectorul unitar normal

$$\overrightarrow{n} = \frac{-p \overrightarrow{i} - q \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{3.77}$$

orientaţi pozitiv faţă de planul xOy.

Dacă suprafaţa (S) este dată în **reprezentarea implicită** 3.8 $F(x, y, z) = 0$, atunci, conform celor arătate în §1, în vecinătatea unui punct regulat $P \in (S)$, există explicitarea $z = z(x, y)$ care satisface 3.8 identic:

$$F(x, y, z(x, y)) = 0.$$

Derivând această identitate în raport cu x, respectiv y, obţinem identităţile:

$$F'_x + F'_z p = 0, \quad F'_y + F'_z q = 0,$$

care ne explicitează p şi q sub forma

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{3.78}$$

Substituind 3.78 în 3.75, suntem conduşi, în acest caz, la ecuaţia planului tangent la (S) în punctul $P(x, y, z)$ sub forma:

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0. \tag{3.79}$$

Distingem vectorul normal $\overrightarrow{N}$, notat câteodată şi cu $gradF$ (şi numit **gradientul funcţiei** F), de componente

$$\overrightarrow{N} \equiv gradF(F'_x, F'_y, F'_z) \tag{3.80}$$

şi vectorul normal unitar

$$\overrightarrow{n} = \frac{F'_x \overrightarrow{i} + F'_y \overrightarrow{j} + F'_z \overrightarrow{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}. \tag{3.81}$$

Ecuaţiile sub formă de rapoarte ale dreptei normale fiind uşor de scris, nu le mai dăm.

3.3.3 Prima formă fundamentală. Măsurarea lungimilor şi unghiurilor. Aria unei porţiuni de suprafaţă

Fie $(S) : \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ o suprafaţă de clasă $p \geq 1$, $(C) : u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$, o curbă trasată pe (S) şi un arc regulat $\overset{\frown}{AB}$ al curbei (C), corespunzător lui $t \in [a, b] : A(t = a)$, $B(t = b)$. Ne propunem să calculăm lungimea arcului regulat $\overset{\frown}{AB}$ de pe suprafaţa (S). În acest scop, ţinând cont de 2.10, vom calcula $\left\| \dot{\overrightarrow{r}} \right\| = \sqrt{\dot{\overrightarrow{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{r}}}$, unde $\dot{\overrightarrow{r}} = \vec{r}_1 \dot{u}^1 + \vec{r}_2 \dot{u}^2$ este vectorul tangent la (C). Produsul scalar fiind distributiv, urmează că:

$$\dot{\overrightarrow{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = (\overrightarrow{r}_1 \cdot \overrightarrow{r}_1)(\dot{u}^1)^2 + 2(\overrightarrow{r}_1 \cdot \overrightarrow{r}_2)\dot{u}^1 \dot{u}^2 + (\overrightarrow{r}_2 \cdot \overrightarrow{r}_2)(\dot{u}^2)^2.$$

Notând:

$$g_{jk} = \overrightarrow{r}_j \cdot \overrightarrow{r}_k, \quad (j,k=1,2), \tag{3.82}$$

adică

$$g_{11} = \overrightarrow{r}_1 \cdot \overrightarrow{r}_1,\ g_{12} = \overrightarrow{r}_1 \cdot \overrightarrow{r}_2,\ g_{22} = \overrightarrow{r}_2 \cdot \overrightarrow{r}_2, \tag{3.83}$$

avem:

$$\dot{\overrightarrow{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{r}} = g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k, \tag{3.84}$$

prin convenţia de sumare. Atunci, 3.84 şi 2.10, conduc la **formula lungimii unui arc de curbă** pe (S) :

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}dt. \tag{3.85}$$

Mai mult, din 3.84, vedem că elementul de arc 2.13 pe curba (C) capătă forma

$$ds^2 = g_{jk}du^jdu^k, \tag{3.86}$$

pe larg,

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2. \tag{3.87}$$

Definitia 3.22 *Forma pătratică diferenţială 3.86 poartă numele de* ***prima formă fundamentală*** *a suprafeţei* (S).

Deoarece $ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (\dot{\overrightarrow{r}} \cdot \dot{\overrightarrow{r}})dt^2 = (\vec{r}_1du^1 + \vec{r}_2du^2)^2$, prima formă fundamentală se numeşte **pătratul elementului liniar al suprafeţei**.

Observaţie: Ţinând cont de 3.83, rezultă că într-un punct regulat P al lui (S) $(\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2 \neq 0)$, avem $\vec{r}_i \neq 0$, adică

$$g_{ii} > 0, \quad (i=1,2) \tag{3.88}$$

şi, din definiţia coeficienţilor g_{ij}, avem $g_{12} = \|\vec{r}_1\|\,\|\vec{r}_2\|\cos\theta,\ \theta = \widehat{(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}$, sau

$$g_{12} = \sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}\cos\theta, \quad \theta = \widehat{(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}. \tag{3.89}$$

Vom arăta că unghiul α dintre două curbe ce se intersectează (C) şi (C^*), trasate pe (S), se calculează folosind coeficienţii g_{jk} ai acestei forme, unghiul

α fiind definit ca unghiul dintre vectorii tangenţi la (C) şi (C^*) în punctul de intersecţie.

Pentru a realiza aceasta, să considerăm curbele (C) şi (C^*) reprezentate pe (S) prin

$$\begin{aligned}(C) &: \; u^j = h^j(t),\\ (C^*) &: \; u^j = h^{*j}(t^*), \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

respectiv, dacă p este punctul lor de intersecţie, atunci, după 3.64, vectorii tangenţi la (C) şi (C^*) vor fi daţi, respectiv, de:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_1\dot{h}^1 + \vec{r}_2\dot{h}^2 = \vec{r}_j\dot{h}^j, \; \dot{\vec{r}}^{\,*} = \vec{r}_1\dot{h}^{*1} + \vec{r}_2\dot{h}^{*2} = \vec{r}_k\dot{h}^{*k}. \tag{3.90}$$

Ţinând cont de notaţia 3.82, obţinem că **unghiul a două curbe trasate pe suprafaţa** (S) are cosinusul dat de formula:

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}^{\,*}}{\sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}\sqrt{\dot{\vec{r}}^{\,*} \cdot \dot{\vec{r}}^{\,*}}} = \frac{g_{jk}\dot{h}^j\dot{h}^k}{\sqrt{g_{lm}\dot{h}^l\dot{h}^m}\sqrt{g_{rs}\dot{h}^{*r}\dot{h}^{*s}}}. \tag{3.91}$$

Caz particular. Dacă alegem drept (C) şi (C^*) curbele coordonate $u^1 = const.$ şi $u^2 = const.$, avem $\dot{h}^1 = 0$, $\dot{h}^{*2} = 0$, adică, $\dot{\vec{r}} = \vec{r}_2\dot{h}^2$ şi $\dot{\vec{r}}^{\,*} = \vec{r}_1\dot{h}^{*1}$. De aici, urmează că:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\| \, \|\vec{r}_2\|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \tag{3.92}$$

formulă din care putem enunţa:

Teorema 3.23 *Curbele coordonate sunt ortogonale (reţeaua curbelor parametrice este ortogonală) dacă şi numai dacă*

$$g_{12} = 0. \tag{3.93}$$

Folosirea reţelelor parametrice ortogonale simplifică multe consideraţii şi evident, formule corespunzătoare.

Să remarcăm o proprietate importantă a primei forme fundamentale. O formă pătratică

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

de două variabile reale x şi y se spune a fi **pozitiv definită** dacă $F > 0$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$. Este clar că forma este pozitiv definită dacă şi numai dacă $a_{11} > 0$ şi **discriminantul** ei

$$a = -\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

În cazul primei forme fundamentale, conform cu 3.88:

$$g_{11} = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \|\vec{r}_1\|^2 > 0, \tag{3.94}$$

$\vec{r}_1$ fiind diferit de vectorul nul, conform condiţiei de regularitate. Discriminantul formei este, ţinând cont de 3.89:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g_{11}g_{22}(1 - \cos^2\theta), \tag{3.95}$$

sau $g = g_{11}g_{22}\sin^2\theta = (\|\vec{r}_1\|\,\|\vec{r}_2\|\sin\theta)^2$; de aici, deducem că

$$g = \|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\| > 0. \tag{3.96}$$

Am obţinut în acest fel:

Teorema 3.24 *În punctele regulate ale unei suprafeţe, prima formă fundamentală este pozitiv definită.*

Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că nu există nici o direcţie reală (du^1, du^2) tangentă suprafeţei pentru care prima formă fundamentală să se anuleze.

Ecuaţia

$$g_{jk}du^j du^k = 0$$

defineşte, în fiecare punct al suprafeţei, o pereche de direcţii (du^1, du^2) imaginar conjugate, numite **direcţii izotrope**; curbele tangente la aceste direcţii formează **reţeaua izotropă a suprafeţei**. Curbele acestei reţele sunt linii (curbe) minimale ale suprafeţei, deoarece lungimea unui segment arbitrar de curbă aparţinând unei linii izotrope este zero ($ds = 0$).

Observatia 3.25 *Unghiul α între două curbe (C) şi (C^*) trasate pe (S), care se intersectează într-un punct regulat P, poate fi determinat şi prin sinusul său.*

Pentru aceasta, plecăm de la egalitatea

$$\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}^* = \left(\left\|\dot{\vec{r}}\right\| \left\|\dot{\vec{r}}^*\right\| \sin\alpha\right)\vec{n},$$

egalitate care, înmulţită scalar cu $\vec{n}$, conduce la

$$\sin\alpha = \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|}, \frac{\dot{\vec{r}}^*}{\left\|\dot{\vec{r}}^*\right\|}, \vec{n}\right), \tag{3.97}$$

sau încă,

$$\sin\alpha = (\vec{\tau}, \vec{\tau}^*, \vec{n}), \tag{3.98}$$

unde am notat cu $\vec{\tau}$ şi $\vec{\tau}^*$ versorii tangenţi la (C) şi (C^*) respectiv.

Formula 3.97 ne arată că, dacă facem o schimbare de parametri cu jacobian negativ, atunci semnul valorii lui $\sin\alpha$ se schimbă, deoarece sensul lui $\vec{n}$ se schimbă şi atunci se schimbă şi orientarea unghiului $(\widehat{\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}^*})$.

Avem, din 3.97 sau 3.98:

$$(\vec{\tau}, \vec{\tau}^*, \vec{n}) = \frac{(\vec{r}_j \dot{h}^j, \vec{r}_k \dot{h}^{*k}, \vec{n})}{\sqrt{g_{em}\dot{h}^e\dot{h}^m\sqrt{g_{rs}\dot{h}^{*r}\dot{h}^{*s}}}} = \frac{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n})(\dot{h}^1\dot{h}^{*2} - \dot{h}^{*1}\dot{h}^2)dt^2}{ds \cdot d^*s}, \tag{3.99}$$

unde ds şi d^*s notează elementele de arc ale curbelor (C) şi respectiv, (C^*). Ţinând cont de expresia versorului normal 3.71, scrisă sub forma $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\| \, \vec{n}$ şi de 3.96 scris sub forma

$$\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\| = \sqrt{g},$$

obţinem $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}\sqrt{g}$, relaţie care, înmulţită scalar cu $\vec{n}$, conduce la

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}) = \sqrt{g}. \tag{3.100}$$

Cu 3.100, egalitatea 3.98 conduce la formula dorită:

$$\sin\alpha = \frac{(\dot{h}^1\dot{h}^{*2} - \dot{h}^{*1}\dot{h}^2)\sqrt{g}}{\sqrt{g_{em}\dot{h}^e\dot{h}^m\sqrt{g_{rs}\dot{h}^{*r}\dot{h}^{*s}}}}. \tag{3.101}$$

Dacă considerăm câte o pereche de curbe infinit vecine din fiecare familie de curbe coordonate

$$C_1(u^1),\ \ \tilde{C}_1(u^1 + \Delta u^1),\ \ C_2(u^2),\ \tilde{C}_2(u^2 + \Delta u^2),$$

atunci aria $\Delta\sigma$ a patrulaterului curbiliniu de pe (S) ce se formează cu aceste curbe, se poate aproxima cu ajutorul ariei paralelogramului construit pe vectorii tangenţi ai acestor curbe, adică, pe $\vec{r}_1\Delta u^1$ şi $\vec{r}_2\Delta u^2$ (fig. 3.2);

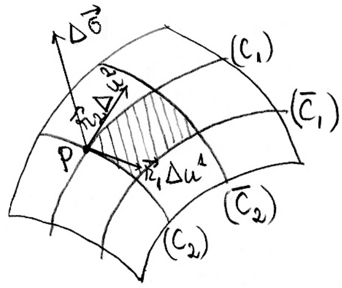


fig. 3.2

mai precis,

$$\Delta\sigma = \|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\| \, \Delta u^1 \Delta u^2,$$

şi atunci, ţinând cont de 3.96, putem da

Definitia 3.26 *Aria $A(\Sigma)$ a unei porţiuni regulate (Σ) din suprafaţa (S) este dată de integrala dublă*

$$A(\Sigma) = \iint_U \sqrt{g}du^1 du^2, \tag{3.102}$$

unde U este domeniul din planul parametric $\langle u^1, u^2\rangle$ corespunzător porţiunii de suprafaţă (Σ). Expresia

$$d\sigma = \sqrt{g}du^1 du^2 \tag{3.103}$$

este numită ***elementul de arie*** *al suprafeţei (S).*

Deoarece cu ajutorul primei forme fundamentale avem posibilitatea de a măsura lungimile, unghiurile şi ariile pe o suprafaţă, spunem că ea defineşte o **„metrică”** pe suprafaţa (S). O metrică definită printr-o formă diferenţială pătratică pozitiv definită este numită **metrică riemanniană**, geometria care îi corespunde fiind numită **geometrie riemanniană,** iar spaţiile cu astfel de metrici sunt numite **spaţii** (sau **varietăţi**) **Riemann.** Din cele de mai sus concludem că suprafeţele sunt spaţii riemanniene bidimensionale.

În **reprezentarea explicită** $(S) : z = z(x, y)$, alegând parametrizarea $u^1 = x$, $u^2 = y$, avem, în notaţiile lui Monge $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\vec{r}_1 = \vec{i} + z'_x\vec{k} = \vec{i} + p\vec{k}, \;\; \vec{r}_2 = \vec{j} + z'_y\vec{k} = \vec{j} + q\vec{k},$$

de unde obţinem coeficienţii primei forme fundamentale:

$$g_{11} = 1 + p^2, \;\; g_{12} = pq, \;\; g_{22} = 1 + q^2. \tag{3.104}$$

În **reprezentarea implicită** $F(x, y, z) = 0$, cu substituţiile

$$p = z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q = z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

găsim că

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2, \; g_{12} = \frac{F'_x F'_y}{(F'_z)^2}, \; g_{22} = 1 + \left(\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2. \tag{3.105}$$

În final, specificăm că pentru coeficienţii primei forme fundamentale se mai folosesc şi **notaţiile lui Gauss**

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G,$$

matematicianul şi astronomul german K.F. Gauss (1777-1855) fiind primul care a dat formele fundamentale ale suprafeţelor.

Exemplu. Să se scrie elementul de arie al paraboloidului $z = x^2 + y^2$.

În notaţiile lui Monge, avem: $p = z'_x = 2x$, $q = z'_y = 2y$ şi

$$g_{11} = 1 + p^2 = 1 + 4x^2, \ g_{12} = pq = 4xy, \ g_{22} = 1 + q^2 = 1 + 4y^2,$$

de unde rezultă, conform cu 3.103,

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

(deoarece $u^1 = x$, $u^2 = y$).

3.4 Tensori speciali pe o suprafaţă

3.4.1 Tensorul metric covariant şi tensorul metric contravariant

Teorema 3.27 *Coeficienţii g_{jk} ai primei forme fundamentale sunt componente de tensor covariant de ordinul doi, în raport cu grupul transformărilor admisibile de coordonate.*

Demonstratie. Fie două reprezentări $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ şi $\vec{r} = \vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ale unei suprafeţe, legate între ele printr-o transformare admisibilă 3.3 şi g_{jk}, $\bar{g}_{jk}$, coeficienţii corespunzători:

$$g_{jk} = \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k, \quad \bar{g}_{lm} = \vec{r}_{\bar{l}} \cdot \vec{r}_{\bar{m}}, \qquad (\vec{r}_{\bar{m}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^m}, \ m = 1, 2).$$

Avem:

$$\begin{aligned} g_{jk} &= \vec{r}_j \cdot \vec{r}_k = (\vec{r}_{\bar{1}}\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^j} + \vec{r}_{\bar{2}}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^j}) \cdot (\vec{r}_{\bar{1}}\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^k} + \vec{r}_{\bar{2}}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^k}) = \\ &= \vec{r}_{\bar{l}} \cdot \vec{r}_{\bar{m}}\frac{\partial \bar{u}^l}{\partial u^j}\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial u^k}, \end{aligned}$$

şi deci,

$$g_{jk} = \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial u^j}\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial u^k}\bar{g}_{lm}, \tag{3.106}$$

adică tocmai legea de transformare a componentelor unui tensor contravariant de ordinul doi. Multiplicând această egalitate cu $\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^s}\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^p}$, obţinem legătura inversă:

$$\bar{g}_{sp} = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^s}\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^p} g_{jk}, \tag{3.107}$$

adică legea de transformare 3.24, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Din acest fapt şi din acela că prima formă fundamentală introduce o metrică pe suprafaţă, $g_{jk} \in \mathcal{T}_2^0$ se numeşte **tensor metric covariant**.

Din formulele 3.72 şi din relaţiile de mai sus se obţine următoarea teoremă, a cărei demonstraţie o lăsăm ca exerciţiu.

Teorema 3.28 *Discriminanţii g şi $\bar{g}$ ai formelor fundamentale din teorema 3.27 sunt legaţi prin formulele:*

$$g = \bar{D}^2 \bar{g}, \quad \bar{g} = D^2 g, \tag{3.108}$$

unde D este jacobianul 3.4 al transformării parametrice $u^i \to \bar{u}^i$ şi $\bar{D}$ este jacobianul transformării inverse.

Fie $a_{ij} \in \mathcal{T}_2^0$ şi $b^{kl} \in \mathcal{T}_0^2$ tensori de ordinul doi, pentru care determinantul tuturor componentelor este diferit de zero, adică

$$\det(a_{ij}) \neq 0, \det(b^{kl}) \neq 0.$$

Prin definiţie, aceşti doi tensori se numesc **conjugaţi**, dacă

$$a_{ij} b^{jl} = \delta_i^l = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq l \\ 1 & \text{dacă } i = l \end{cases}. \tag{3.109}$$

Ţinând cont de definiţia înmulţirii matricelor, rezultă că matricea (b^{jl}) este inversa matricei (a_{ij}) şi 3.109 poate fi scrisă sub forma:

$$(a_{ij})(b^{jl}) = I,$$

unde I este matricea unitate.

Cunoaştem că inversa matricei

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

este

$$\frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}, \quad (g = \det(g_{jk}) > 0).$$

De aici, conjugatul tensorului metric covariant $g_{jk} \in \mathcal{T}_2^0$ al unei suprafeţe (S) este tensorul g^{lm} cu componentele:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \tag{3.110}$$

Tensorul $g^{lm} \in \mathcal{T}_0^2$ este numit **tensorul metric contravariant** al suprafeţei (S). Determinantul său corespunzător este

$$g^* = g^{11}g^{22} - (g^{12})^2 = \frac{1}{g}. \tag{3.111}$$

Pentru tensorii metrici $g_{jk} \in \mathcal{T}_2^0$ şi $g^{lm} \in \mathcal{T}_0^2$, are loc egalitatea 3.109 şi astfel,

$$g_{ij}g^{jl} = \delta_i^l. \tag{3.112}$$

Tensorul cu componentele δ_i^l, simbolul lui Kronecker, este numit şi δ-**tensorul mixt**. Acest tensor are aceleaşi componente în orice sistem de coordonate admisibil. Într-adevăr, fie $\bar{a}_r^s$ notate componentele acestui tensor în raport cu coordonatele $\bar{u}^j$. Avem, conform cu cele arătate în §2,

$$\bar{a}_r^s = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^r}\frac{\partial \bar{u}^s}{\partial u^k}\delta_i^k = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^r}\frac{\partial \bar{u}^s}{\partial u^i} = \delta_r^s.$$

Cu ajutorul coeficienţilor primei forme fundamentale se poate introduce pe (S) tensorul de componente

$$\varepsilon_{11} = 0, \ \varepsilon_{12} = \sqrt{g}, \ \varepsilon_{21} = -\sqrt{g}, \ \ \varepsilon_{22} = 0, \tag{3.113}$$

numit ε-**tensorul covariant de ordinul doi**, care este antisimetric. În raport cu un alt sistem de coordonate, ε-tensorul covariant are componentele:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = 0, \ \bar{\varepsilon}_{12} = \sqrt{\bar{g}}, \ \bar{\varepsilon}_{21} = -\sqrt{\bar{g}}, \ \ \bar{\varepsilon}_{22} = 0. \tag{3.114}$$

Demonstraţia acestui fapt o lăsăm cititorului ca exerciţiu.

În fine, tensorul

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{rs}g^{ir}g^{js} \in \mathcal{T}_0^2 \tag{3.115}$$

este numit ε-**tensorul contravariant de ordinul doi** al lui (S). Din 3.113, obţinem:

$$\varepsilon^{ij} = \sqrt{g}(g^{i1}g^{j2} - g^{i2}g^{j1}), \tag{3.116}$$

şi de aici, componentele acestui tensor sunt:

$$\varepsilon^{11} = 0, \ \varepsilon^{12} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{g^*} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \ \varepsilon^{21} = -\frac{1}{\sqrt{g}}, \ \varepsilon^{22} = 0. \tag{3.117}$$

Din această ultimă egalitate şi 3.113 mai găsim (exerciţiu) relaţiile:

$$\varepsilon^{ij}\varepsilon_{kj} = \delta_k^i, \ \varepsilon^{ij}\varepsilon_{jk} = -\delta_k^i. \tag{3.118}$$

3.4.2 Vectori în planul tangent al unei suprafeţe

Cunoaştem că planul tangent $\pi_{tg}(P)$, într-un punct regulat P al unei suprafeţe (S), este determinat de vectorii $\vec{r}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$ şi $\vec{r}_2 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}$, derivatele fiind evaluate în P. Lungimile acestor vectori, prin notaţiile scalare 3.82, sunt date de

$$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1} = \sqrt{g_{11}}, \ \ \|\vec{r}_2\| = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2} = \sqrt{g_{22}}. \tag{3.119}$$

Un vector în planul tangent al unei suprafeţe este de asemenea cunoscut sub numele de **vector pe suprafaţă**. Un astfel de vector $\vec{v}$ în planul $\pi_{tg}(P)$, urmează că este o combinaţie liniară de $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$, să spunem,

$$\vec{v} = a^j \vec{r}_j = a^1 \vec{r}_1 + a^2 \vec{r}_2 \quad (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \neq 0). \tag{3.120}$$

Dacă coordonatele u^1, u^2 ale punctului $P \in (S)$ sunt menţinute fixe, atunci vectorul $\vec{v}$ este unic determinat prin numerele a^1 şi a^2. Această corespondenţă între perechea ordonată de numere (a^1, a^2) şi vectorii $\vec{v}$ pe (S) în P este bijectivă. Dacă introducem acum noi coordonate $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$ pe (S) printr-o transformare admisibilă de coordonate, obţinem o nouă reprezentare a lui (S) $\vec{r} = \vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ şi reprezentarea corespunzătoare a lui $\vec{v}$, să spunem:

$$\vec{v} = \bar{a}^m \vec{r}_{\bar{m}}, \quad \text{unde } \vec{r}_{\bar{m}} = \frac{\partial r}{\partial \bar{u}^m}.$$

Aplicând acest procedeu şi folosind 3.74, obţinem:

$$\vec{v} = \bar{a}^m \vec{r}_{\bar{m}} = a^j \vec{r}_j = a^j \vec{r}_{\bar{m}} \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial u^j}. \tag{3.121}$$

Deoarece ultima egalitate are loc pentru orice vector de pe (S), coeficienţii lui $\vec{r}_{\bar{m}}$ din ambii membri trebuie să fie egali şi astfel,

$$\bar{a}^m = \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial u^j} a^j,$$

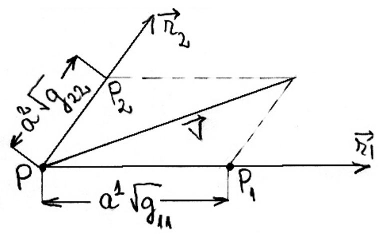
relaţie care ne arată că perechile (a^1, a^2) şi $(\bar{a}^1, \bar{a}^2)$ sunt **componentele contravariante** ale vectorului $\vec{v}$ de pe (S).

Ne propunem să dăm o interpretare geometrică componentelor contravariante ale vectorului $\vec{v}$ de pe (S).

În acest scop, să notăm cu $\mathcal{R}$ reperul $\{P, \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$.

Teorema 3.29 *Componentele contravariante (a^1, a^2) ale unui vector $\vec{v}$ de pe o suprafaţă (S), într-un punct regulat P ale acesteia, abstracţie făcând de semn şi de multiplicarea cu $\sqrt{g_{11}}$ şi, respectiv, $\sqrt{g_{22}}$, reprezintă lungimile proiecţiilor paralele ale lui $\vec{v}$ pe axele sistemului de coordonate $\mathcal{R}$.*

Demonstratie. Afirmaţia rezultă imediat din 3.119, 3.120 şi figura alăturată,



de unde deducem:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = a^1\vec{r}_1 + a^2\vec{r}_2 = a^j\vec{r}_j, \\ \overrightarrow{PP_1} &= a^1\vec{r}_1 \\ \overrightarrow{PP_2} &= a^2\vec{r}_2 \end{aligned}$$

şi atunci,

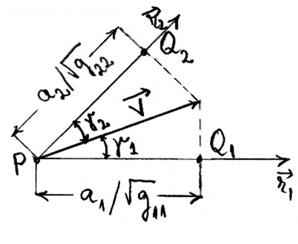
$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PP_1}\right\| &= \pm a^1 \left\|\vec{r}_1\right\| = \pm a^1\sqrt{g_{11}} > 0 \\ \left\|\overrightarrow{PP_2}\right\| &= \pm a^2 \left\|\vec{r}_2\right\| = \pm a^2\sqrt{g_{22}} > 0, \end{aligned}$$

q.e.d. ■

Observaţie: În cazul configuraţiei din desenul nostru, semnele din faţa lui a^1 şi a^2 sunt pozitive:

$$a^1 = \frac{\left\|\overrightarrow{PP_1}\right\|}{\sqrt{g_{11}}}, \quad a^2 = \frac{\left\|\overrightarrow{PP_2}\right\|}{\sqrt{g_{22}}}.$$

În loc de a considera proiecţiile paralele ale lui $\vec{v}$ pe axele reperului $\mathcal{R}$, putem lua proiecţiile ortogonale ale lui $\vec{v}$ pe aceste axe.



Notând cu γ_j unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{r}_j$, $(j = 1, 2)$, proiecţiile ortogonale ale lui $\vec{v}$ pe axa $\vec{r}_j$ au lungimile date de

$$(3.122) \quad \left\|\overrightarrow{PQ_j}\right\| = L_j = \|\overrightarrow{v}\|\cos\gamma_j = \frac{\|\overrightarrow{r}_j\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\gamma_j}{\|\overrightarrow{r}_j\|} = \frac{\overrightarrow{r}_j \cdot \vec{v}}{\sqrt{g_{jj}}}, \quad j = 1, 2,$$

unde atragem atenţia că **nu** însumăm după j.

Să considerăm numărătorul din 3.122:

$$a_j = \overrightarrow{r}_j \cdot \vec{v}, \quad (j = 1, 2). \tag{3.123}$$

Cantităţile care corespund la un nou sistem de coordonate $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$ pe (S) sunt:

$$a_{\bar{m}} = \overrightarrow{r}_{\bar{m}} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^m} \overrightarrow{r}_j \cdot \vec{v} = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^m} a_j,$$

cu alte cuvinte, perechile de numere reale (a_1, a_2) şi $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ sunt legate prin legea 3.19. Din această cauză, ele sunt numite **componentele covariante** ale vectorului $\vec{v}$ de pe (S), în sistemul de coordonate u^j, respectiv, $\bar{u}^j$. Din 3.122, obţinem următoarea interpretare geometrică a acestor componente:

Teorema 3.30 *Componentele covariante (a_1, a_2) ale unui vector $\vec{v}$ de pe o suprafaţă (S), într-un punct regulat $P \in (S)$, abstracţie făcând de semn şi de multiplicarea cu $\dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ şi respectiv, $\dfrac{1}{\sqrt{g_{22}}}$, sunt proiecţiile ortogonale ale lui $\vec{v}$ pe axele $\overrightarrow{r}_1$ şi $\overrightarrow{r}_2$ ($a_1 = L_1\sqrt{g_{11}}$, $a_2 = L_2\sqrt{g_{22}}$).*

Legătura dintre componentele contravariante a^j şi componentele covariante a_j ale unui vector $\vec{v}$ de pe (S) este simplă, ea obţinându-se din 3.120 introdus în 3.123:

$$a_j = \overrightarrow{r}_j \cdot \vec{v} = \overrightarrow{r}_j \cdot a^k \vec{r}_k,$$

şi avem:

$$a_j = g_{jk} a^k. \tag{3.124}$$

Invers, prin 3.112, avem:

$$a^i = g^{ij} a_j. \tag{3.125}$$

Relaţiile 3.124, 3.125 şi 3.115 ne arată că $g_{jk} \in \mathcal{T}_2^0$ şi $g^{jk} \in \mathcal{T}_0^2$ servesc la operaţia de ridicare şi coborâre a indicilor tensorilor definiţi pe (S) (analog formulelor 3.50, 3.53, 3.54 din cazul tensorilor afini şi euclidieni).

Dacă sistemul de coordonate u^1, u^2 al unei suprafeţe (S) într-un punct regulat $(P) \in (S)$ respectă condiţiile

$$g_{11} = 1, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = 1,$$

atunci sistemul de coordonate se spune a fi **cartezian** în (P) ($\|\overrightarrow{r}_1\| = \|\overrightarrow{r}_2\| = 1$, $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$).

În acest caz, din 3.124 rezultă $a_1 = g_{11}a^1 + g_{12}a^2 = a^1$, $a_2 = g_{21}a^1 + g_{22}a^2 = a^2$, fapt ce decurge şi din aceea că proiecţiile paralele coincid cu cele ortogonale. Din această cauză, algebra vectorială a vectorilor liberi nu menţionează conceptul de covarianţă şi contravarianţă şi are, deci, loc

Teorema 3.31 *În cazul coordonatelor carteziene într-un spaţiu euclidian nu există nici o diferenţă între componentele contravariante şi componentele covariante ale unui vector.*

Specificăm că, dacă $\phi(u^1, ..., u^n)$ reprezintă o funcţie de n variabile de clasă $p \geq 1$ şi dacă notăm $a_i = \dfrac{d\phi}{du^i}$, atunci faţă de un sistem de noi coordonate $\bar{u}^i$, avem:

$$\frac{d\phi}{du^i} = \frac{d\phi}{d\bar{u}^m}\frac{d\bar{u}^m}{du^i}, \quad \text{adică} \quad a_i = \frac{d\bar{u}^m}{du^i}\bar{a}_m,$$

ceea ce înseamnă că, în conformitate cu 3.80, vectorul normal $\vec{N} = gradF(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z})$ este şi el un exemplu de vector covariant, în teoria suprafeţelor.

În fine, dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt vectori pe (S) în punctul P, reprezentaţi în forma

$$\vec{a} = a^j \vec{r}_j, \ \ \vec{b} = b^k \vec{r}_k,$$

atunci produsul lor scalar este

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{jk} a^j b^k.$$

Prin coborârea şi ridicare indicilor, obţinem:

$$g_{jk} a^j b^k = g_{jk} g^{js} a_s b^k = \delta^s_k a_s b^k = a_k b^k = g^{kl} a_k b_l,$$

adică

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{jk} a^j b^k = a_k b^k = g^{jk} a_j b_k. \tag{3.126}$$

Urmează că lungimea unui vector este

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{g_{jk} a^j a^k} = \sqrt{a_k a^k} = \sqrt{g^{jk} a_j a_k}, \tag{3.127}$$

iar unghiul α dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este dat de

$$\cos\alpha = \frac{g_{jk} a^j b^k}{\sqrt{g_{is} a^i a^s}\sqrt{g_{pq} b^p b^q}} = \frac{a_j b^j}{\sqrt{a_k a^k}\sqrt{b_r b^r}} = \frac{g^{jk} a_j b_k}{\sqrt{g^{is} a_i a_s}\sqrt{g^{pq} b_p b_q}}. \tag{3.128}$$

3.5 A doua formă fundamentală. Secţiuni normale

Prima formă fundamentală ds^2 nu ne dă informaţii asupra configuraţiei suprafeţei în vecinătatea unui punct regulat. Spre exemplu, considerând suprafeţele

$$\vec{r}(u^1, u^2) = u^1\vec{i} + u^2\vec{j} \quad \text{(planul } xOy\text{)}$$

şi

$$\vec{r}(u^1, u^2) = \cos u^1\vec{i} + \sin u^1\vec{j} + u^2\vec{k},$$

(cilindrul circular drept, de rază 1, cu generatoarele paralele cu Oz), observăm că, deşi ele sunt distincte, prima lor formă fundamentală este aceeaşi, şi anume,

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

Din acest motiv, s-a introdus cea de-a doua formă fundamentală, care, prin legătura sa cu prima formă, ne dă informaţii asupra curbelor ce trec printr-un punct $P \in (S)$ (forma locală a suprafeţei (S) o cunoaştem cu atât mai bine, cu cât cunoaştem pe (S) mai multe curbe ce trec prin P). Dintre aceste curbe, cele mai importante sunt secţiunile normale.

3.5.1 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie (S) o suprafaţă de clasă $p \geq 2$, dată în reprezentarea $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, (C) o curbă trasată pe (S), de clasă $p^* \geq 2$, dată prin

$$u^1 = u^1(s), \quad u^2 = u^2(s),$$

cu s - lungimea de arc drept parametru şi $P \in (C) \subset (S)$, un punct regulat, în care curbura curbei (C), notată cu $\kappa(s)$, este diferită de zero.

În aceste condiţii, în punctul P, privit ca punct al lui (S), putem ataşa vectorii liniar independenţi $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ şi $\vec{n}$, iar dacă îl privim pe P ca punct al lui (C), îi putem ataşa reperul Frenet (§2.4), cu vectorii $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ (legaţi prin formulele Frenet), curba $(C) \subset (S)$ fiind dată prin ecuaţia sa vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1(s), u^2(s)). \tag{3.129}$$

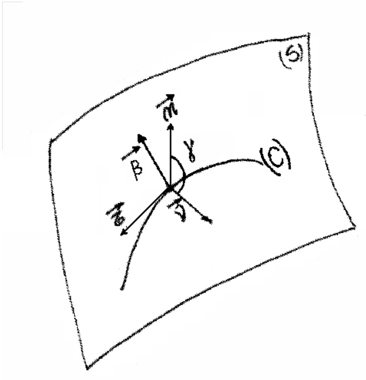


fig. 3.3

Deoarece tangenta în P la (C) aparţine planului tangent în P la (S), rezultă că planul normal în P la (C) conţine normala în P la (S). În general, versorul normal principal $\vec{\nu}$ al lui (C) face cu versorul normal $\vec{n}$ al lui (S) un unghi γ diferit de zero, unghi care variază de-a lungul lui (C) şi depinde atât de curba (C), cât şi de suprafaţa (S) (fig. 3.3).

Ţinând cont că $\vec{\nu}$ şi $\vec{n}$ sunt unitari, avem:

$$\cos\gamma = \vec{\nu}\cdot\vec{n}, \tag{3.130}$$

sau

$$\frac{\cos\gamma}{R} = \vec{n}\cdot\vec{r}\,'', \tag{3.131}$$

dacă, în 3.130 ţinem seama de prima formulă a lui Frenet 2.38, scrisă în forma $\vec{\nu} = \dfrac{1}{\kappa}\vec{r}\,''$, cantitatea $\dfrac{1}{\kappa} = R$ fiind raza de curbură a lui (C) în P.

Membrul doi al relaţiei 3.130, cât şi interpretarea geometrică a legăturii cu membrul întâi, vor fi de importanţă deosebită în cele ce urmează.

Derivând ecuaţia 3.129 a lui (C) în raport cu s, notând derivatele parţiale prin indici şi utilizând convenţia de sumare, avem:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_j(u^j)', \;\; \vec{r}\,'' = \vec{r}_{jk}(u^j)'(u^k)' + \vec{r}_j(u^j)'', \tag{3.132}$$

iar dacă ţinem cont că $\vec{n}$ şi cu $\vec{r}_j$ $(j = 1,2)$ sunt perpendiculari, atunci membrul doi al relaţiei 3.131 devine, prin a doua egalitate 3.132, de forma

$$\vec{n}\cdot\vec{r}\,'' = \vec{n}\cdot\vec{r}_{jk}(u^j)'(u^k)', \tag{3.133}$$

expresie care, în diferenţiale, se scrie sub forma:

$$\vec{n}\cdot d^2\vec{r} = \vec{n}\cdot\vec{r}_{jk}du^j du^k. \tag{3.134}$$

Introducem notaţiile:

$$b_{jk} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{jk}, \tag{3.135}$$

adică:

$$b_{11} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{11}, \quad b_{12} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{12}, \quad b_{22} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{22}.$$

Definitia 3.32 *Forma pătratică diferenţială*

$$b_{jk} du^j du^k = \vec{n} \cdot d^2\vec{r}, \tag{3.136}$$

adică,

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2,$$

poartă numele de ***forma a doua fundamentală*** *a unei suprafeţe.*

Discriminantul ei este:

$$b = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2. \tag{3.137}$$

Deoarece din 3.71 şi 3.96 avem pentru versorul normal la (S) expresia

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\sqrt{g}}, \tag{3.138}$$

rezultă din 3.135, pentru coeficienţii b_{jk} ai celei de-a doua forme fundamentale, formulele de calcul:

$$b_{jk} = \frac{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{jk})}{\sqrt{g}}. \tag{3.139}$$

Observatia 3.33 *Deoarece* $\vec{n} \cdot \vec{r}_j = 0$, *obţinem prin derivare în raport cu* u^k *relaţia* $\vec{n} \cdot \vec{r}_{jk} + \vec{n}_k \cdot \vec{r}_j = 0$, *care, prin 3.135, conduce la formulele echivalente:*

$$b_{jk} = -\vec{n}_k \cdot \vec{r}_j, \tag{3.140}$$

şi avem atunci, pentru a doua formă fundamentală, definiţia echivalentă

$$b_{jk} du^j du^k = -d\vec{n} \cdot d\vec{r}. \tag{3.141}$$

Amintim că prima formă fundamentală este dată de

$$g_{jk} du^j du^k = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = ds^2. \tag{3.142}$$

Cu ajutorul relaţiei 3.133 şi a definiţiilor lui b_{jk} 3.135, formula 3.131 devine:

$$\frac{\cos\gamma}{R} = b_{jk}(u^j)'(u^k)' \tag{3.143}$$

derivatele fiind calculate în raport cu lungimea de arc s pe curba (C), drept parametru.

Dacă t este un parametru oarecare al curbei (C), atunci, ţinând cont de

$$(u^j)' = \frac{du^j}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{u}^j}{\dot{s}},$$

relaţia 3.143 devine:

$$\frac{\cos\gamma}{R} = \frac{b_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}{\dot{s}^2} = \frac{b_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}{g_{lm}\dot{u}^l\dot{u}^m} = \frac{b_{jk}du^j du^k}{g_{lm}du^l du^m}, \tag{3.144}$$

care ne arată **legătura dintre prima formă fundamentală şi cea de-a doua formă fundamentală ale unei suprafeţe** şi va fi de bază în consideraţiile ce urmează.

Facem următoarele observaţii:

1. Legătura dintre coeficienţii b_{jk} şi $\bar{b}_{jk}$ ai formei a doua fundamentale a lui (S) date în reprezentările $\vec{r}(u^1, u^2)$ şi, respectiv, $\vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, reprezentări legate printr-o transformare admisibilă de coordonate, este dată de formulele (**exerciţiu**):

$$\begin{aligned} b_{jk} &= \pm\frac{\partial\bar{u}^l}{\partial u^j}\frac{\partial\bar{u}^m}{\partial u^k}\bar{b}_{lm}, \quad (j,k=1,2),\\ \bar{b}_{lm} &= \pm\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^l}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^m}b_{jk}, \quad (l,m=1,2), \end{aligned}$$

   unde semnul „+” corespunde la o transformare admisibilă cu jacobianul $D > 0$ (care păstrează sensul lui $\vec{n}$), iar semnul „−” corespunde la o transformare admisibilă cu jacobianul $D < 0$ (care inversează sensul lui $\vec{n}$). Determinanţii b şi $\bar{b}$ corespunzători sunt legaţi prin formulele (**exerciţiu**):

$$b = \bar{D}^2\bar{b}, \quad \bar{b} = D^2 b, \quad (D\bar{D} = 1).$$

2. Dacă notăm cu $\vec{N}$, $\vec{n}$, Φ_1, Φ_2, respectiv, vectorul normal, versorul normal, prima formă fundamentală, a doua formă fundamentală ataşate

suprafeţei (S) în reprezentarea $\vec{r}(u^1, u^2)$ şi cu $\bar{\vec{N}}$, $\bar{\vec{n}}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ aceleaşi cantităţi, dar ataşate suprafeţei (S) în reprezentarea $\vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, atunci, din 3.139, 3.138 şi observaţia de mai sus, obţinem:

$$\bar{\vec{N}} = \vec{N}D, , \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_1, \ \bar{\vec{n}} = \pm\vec{n}, \ \bar{\Phi}_2 = \pm\Phi_2.$$

Ne exprimăm spunând că $\vec{N}$ este un **invariant relativ**, iar $\vec{n}$, Φ_1, Φ_2 sunt **invarianţi absoluţi** ai transformărilor de coordonate curbilinii, ultimii doi fiind condiţionaţi de $D > 0$.

Dacă facem o transformare de coordonate carteziene ortogonale, suprafaţa în $\mathbb{R}^3$ fiind raportată la un sistem cartezian ortogonal cu originea în O, atunci, notând cu O' noua origine, vectorul de poziţie $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ al unui punct $P \in (S)$ va deveni:

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \overrightarrow{OO'},$$

unde $\vec{r}^* = \overrightarrow{O'P}$, vectorul $\overrightarrow{OO'}$ fiind constant. Avem, evident,

$$\frac{\partial^{p+q}\vec{r}}{\partial(u^1)^p\partial(u^2)^q} = \frac{\partial^{p+q}\vec{r}^*}{\partial(u^1)^p\partial(u^2)^q}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \tag{3.145}$$

de unde concluzionăm că: **vectorul normal şi cele două forme fundamentale sunt invarianţi absoluţi ai transformărilor de coordonate carteziene ortogonale.**

Specificăm folosirea în unele tratate a **notaţiilor lui Gauss:**

$$b_{11} = L, \quad b_{12} = M, \ b_{22} = N,$$

notaţii pe care noi nu le folosim pe motivul convenţiei de sumare.

3.5.2 Secţiuni normale într-o suprafaţă

Deoarece forma geometrică a unei suprafeţe în vecinătatea unuia din punctele sale va fi cunoscută prin curbe care trec prin punct, ne vom întoarce la formula 3.144, pe care o vom interpreta geometric.

Un punct regulat $P \in (S)$ fiind fixat, urmează că g_{jk} şi b_{jk} au valori fixe. Curbura $\dfrac{1}{R} = \kappa$ a unei curbe ce trece prin P, după cum ne arată 3.144, depinde numai de direcţia tangentei în $P \in (C) \subset (S)$, adică, de (du^1, du^2) sau $(1, \dfrac{du^2}{du^1})$ şi de unghiul γ dintre versorul normal principal $\vec{\nu}$ în P la (C) şi versorul normal $\vec{n}$ în P la (S). Dacă planul osculator în P la (C) este fixat (deci, direcţia tangentă la (C) şi $\vec{\nu}$ sunt fixate), şi el nu coincide cu planul tangent în P la (S), avem $\cos\gamma \neq 0$ şi, cum $\vec{n}$ este fixat, putem enunţa:

Teorema 3.34 *Fie (S) o suprafaţă de clasă $p \geq 2$ şi P un punct fixat al lui (S). Toate curbele de clasă $p^* \geq 2$ pe (S) care trec prin P şi au în P acelaşi plan osculator, au de asemenea aceeaşi curbură în punctul P.*

Nulţimea curbelor din teorema de mai sus conţine o curbă plană şi anume, curba de intersecţie dintre (S) şi planul osculator în P la (C). În consecinţă, putem restrânge consideraţiile asupra curburii acestor curbe la curbura unei curbe plane care trece prin P.

Putem trage şi alte concluzii din 3.144. În acest scop, considerăm toate curbele de pe (S) ce trec prin P şi **au în** P **aceeaşi dreaptă tangentă.** Presupunând că această dreaptă tangentă este fixată (ceea ce înseamnă că, direcţia sa este cunoscută, fixă), atunci membrul al doilea din 3.144 are o valoare fixă. Notăm această valoare cu κ_n, adică

$$\frac{b_{jk}du^j du^k}{g_{em}du^e du^m} = \kappa_n. \tag{3.146}$$

Definitia 3.35 *Numărul κ_n dat de 3.146 poartă numele de* ***curbură normală*** *a suprafeţei (S) în punctul P.*

Denumirea de curbură normală rezultă din faptul că, dacă substituim 3.146 în 3.144, avem:

$$\kappa \cos\gamma = \kappa_n, \tag{3.147}$$

relaţie care ne arată că, dacă $\gamma = 0$, atunci $\kappa = \kappa_n$, iar dacă $\gamma = \pi$, avem $\kappa = -\kappa_n$, cu alte cuvinte, $|\kappa_n|$ este curbura curbei de intersecţie dintre (S) şi un plan trecând prin dreapta tangentă şi dreapta normală la (S) în P (pentru o astfel de curbă, $\vec{n} = \varepsilon\vec{\nu}$, $\varepsilon = \pm 1$, în consecinţă, acest plan este planul osculator).

Definitia 3.36 *Curba de intersecţie (C_n) dintre suprafaţa (S) şi planul ce trece printr-un punct regulat $P \in (S)$, determinat de:*

- o direcţie tangentă $\vec{\tau}$ (fixată) pentru o familie de curbe (C) de pe (S) ce trec prin P, şi

- direcţia normală $\vec{n}$ la (S) în P,

poartă numele de ***secţiune normală*** *a lui (S) asociată familiei (C).*

Din cele de mai sus rezultă: **modulul curburii normale κ_n este curbura secţiunii normale a lui (S) corespunzătoare unei direcţii tangente fixate.**

Semnul lui κ_n este egal cu semnul lui $\cos\gamma$ (deoarece κ, fiind curbura unei curbe din spaţiu, este pozitivă) prin urmare, κ_n depinde de orientarea lui (S).

De asemenea, din 3.147 deducem că: dintre toate curbele care trec printr-un punct $P \in (S)$ şi au aceeaşi dreaptă tangentă, secţiunea normală are curbura (în modul) cea mai mică.

Evident, la diverse direcţii tangente în P corespund diverse valori ale lui κ_n. Punctul regulat $P \in (S)$ fiind presupus fix, dacă rotim planul secţiunii normale (C_n) în jurul normalei în P la (S), dreapta tangentă în P la (C_n) se roteşte în jurul lui P, rămânând în planul tangent în P la (S), deci, raportul $\dfrac{du^2}{du^1}$, de care depinde direcţia tangentă, variază, curbura normală κ_n fiind astfel funcţie continuă de $\dfrac{du^2}{du^1}$.

Putem studia variaţia curburii normale κ_n în punctul $P \in (S)$, rotind planul secţiunii normale (C_n) în jurul normalei în P la (S), adică, făcând raportul $\dfrac{du^2}{du^1}$ să varieze. Ne vom da, astfel, seama de forma geometrică locală a lui (S) în vecinătatea lui P, căutând drepte tangente prin P, pentru care curbura normală corespunzătoare are diverse valori.

Să remarcăm un rezultat important care decurge din 3.147. În acest scop, presupunem $\kappa_n \neq 0$ şi notăm $\dfrac{1}{\kappa_n} = R_n$, $|R_n|$ fiind raza de curbură a secţiunii normale corespunzătoare.

Cum $\dfrac{1}{\kappa} = R$, putem rescrie 3.147 sub forma:

$$R = R_n \cos\gamma, \tag{3.148}$$

rezultat cunoscut sub numele de **teorema lui Meusnier.** Presupunând că parametrizarea lui (C) este cea naturală $\vec{r} = \vec{r}(s)$, expresia vectorului de poziţie al centrului de curbură Q al lui (C), conform cu 2.63, este $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s)$, adică

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{r}(s) = R(s)\overrightarrow{\nu}(s) = R_n \cos\gamma\vec{\nu}$$

aşa încât teorema lui Meusnier poate fi formulată după cum urmează:

Teorema 3.37 *Centrele de curbură Q ale tuturor curbelor de pe o suprafaţă (S) care trec printr-un punct $P \in (S)$, având în P aceeaşi direcţie tangentă, şi a căror curbură normală e diferită de zero, aparţin unui cerc de rază $\dfrac{|R_n|}{2}$, situat în planul normal comun tuturor curbelor şi care are contact de ordin cel puţin unu cu (S) în P (fig. 3.4).*

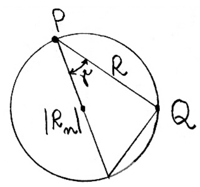


fig. 3.4

Prin teorema de mai sus, avem încă o dată accentuată importanţa secţiunilor normale ale unei suprafeţe.

3.5.3 Direcţii asimptotice. Clasificarea punctelor unei suprafe ţe. Direcţii principale. Curburi principale. Curbura totală şi curbura medie a unei suprafeţe

În continuare, studiem curbele trasate pe o suprafaţă pentru care curbura normală se anulează, respectiv, ia valori extreme (minimă şi maximă).

Definitia 3.38 *Direcţiile tangente ce trec printr-un punct P al unei suprafeţe (S) de clasă $p \geq 2$, pentru care curbura normală este zero, se numesc **direcţii asimptotice** ale lui (S) în P.*

Excluzând cazul în care toţi coeficienţii b_{jk} ai formei a doua fundamentale sunt zero în P (caz în care κ_n este identic 0 în P), rezultă din 3.146 că direcţiile asimptotice (du^1, du^2) sunt date de anularea în P a celei de-a doua forme fundamentale, adică, de

$$b_{jk}du^j du^k = 0, \tag{3.149}$$

pe larg,

$$b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2 = 0,$$

sau încă,

$$b_{22}m^2 + 2b_{12}m + b_{11} = 0, \tag{3.150}$$

în care am notat $\dfrac{du^2}{du^1} = m$.

Deoarece ecuaţia 3.150 este de gradul 2, rezultă că printr-un punct P trec cel mult două direcţii asimptotice.

Acestea pot fi reale şi distincte, reale confundate sau complexe conjugate, după cum realizantul ecuaţiei 3.150: $(b_{12})^2 - b_{11}b_{22}$ este pozitiv, nul sau negativ, adică, după cum discriminantul 3.137 al celei de-a doua forme fundamentale, $b = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2$ este negativ, nul, respectiv, mai mare ca 0.

Are sens, atunci:

Definitia 3.39 *Un punct al unei suprafeţe se numeşte:*

1. ***punct hiperbolic,*** *dacă prin el trec două direcţii asimptotice reale distincte ($b < 0$);*

2. ***punct parabolic,*** *dacă prin el trec două direcţii asimptotice reale confundate ($b = 0$);*

3. ***punct eliptic,*** *dacă direcţiile asimptotice care trec prin el sunt, complexe conjugate ($b > 0$).*

Să analizăm cazul în care toţi coeficienţii b_{jk} sunt zero în P (deci, κ_n este identic nul în acest punct). Dacă P este un punct al unei suprafeţe (S) date în reprezentarea $z = z(x, y)$, pentru care b_{jk} sunt toţi nuli, scriind (S) în forma $\vec{r}(u^1, u^2) = u^1\vec{i} + u^2\vec{j} + z(u^1, u^2)\vec{k}$, va trebui să avem prin 3.139 îndeplinite simultan condiţiile:

$$z''_{xx} = 0, \;\; z''_{xy} = 0, \;\; z''_{yy} = 0,$$

ce reprezintă un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi, care integrat conduce la soluţia:

$$z = Ax + By + C,$$

adică, un plan.

Reciproc, având un plan $z = Ax + By + C$, prin 3.139 avem coeficienţii b_{jk} toţi nuli şi atunci, are sens

Definitia 3.40 *Dacă oricare ar fi direcţia (du^1, du^2) în $P \in (S)$, curbura în P a oricărei secţiuni normale prin P este zero, atunci punctul P se numeşte **punct planar** al suprafeţei (S).*

Observaţie. Se poate întâmpla ca într-un punct $P \in (S)$, să avem aceeaşi curbură normală (nu neapărat nulă) pentru toate direcţiile.

Definitia 3.41 *Dacă oricare ar fi direcţia (du^1, du^2) în $P \in (S)$, curbura în P a oricărei secţiuni normale prin P este aceeaşi, atunci punctul P se numeşte **punct ombilical** sau **punct şa** al suprafeţei (S).*

Este evident că un punct este ombilical dacă şi numai dacă coeficienţii b_{jk} ai celei de-a doua forme fundamentale sunt, respectiv, proporţionali cu coeficienţii g_{jk} ai primei forme, adică

$$b_{jk} = k(u^1, u^2)g_{jk}, \quad (j = 1, 2),$$

după cum rezultă din 3.146. Atunci, $b = k^2 g$ şi, cum $g > 0$, rezultă $b \geq 0$, astfel că, un punct ombilical este fie un punct eliptic (în cazul $k \neq 0$), fie, în cazul în care $k = 0$, atunci, $b = 0$, şi punctul P este planar.

Exemple:

1. **Paraboloidul eliptic:** $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. Considerăm parametrizarea $x = u^1$, $y = u^2$, $z = \dfrac{(u^1)^2}{a^2} + \dfrac{(u^2)^2}{b^2}$, de unde, $\vec{r}_1(1, 0, \dfrac{2u^1}{a^2})$, $\vec{r}_2(0, 1, \dfrac{2u^2}{b^2})$, $\vec{r}_{11}(0, 0, \dfrac{2}{a^2})$, $\vec{r}_{12} = 0$, $\vec{r}_{22}(0, 0, \dfrac{2}{b^2})$ şi
$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{2u^1}{a^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{2u^2}{b^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{a^2\sqrt{g}},\ b_{12} = 0,\ b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{2u^1}{a^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{2u^2}{b^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{b^2\sqrt{g}};$$
obţinem astfel,
$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{4}{a^2b^2g} > 0,$$
adică, toate punctele paraboloidului eliptic sunt eliptice.

2. **Paraboloidul hiperbolic:** $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$. Considerând parametrizarea $x = u^1$, $y = u^2$, $z = \dfrac{(u^1)^2}{a^2} - \dfrac{(u^2)^2}{b^2}$, obţinem:
$$b_{11} = \frac{2}{a^2\sqrt{g}},\ b_{12} = 0,\ b_{22} = \frac{-2}{b^2\sqrt{g}}$$
şi $b = -\dfrac{4}{a^2b^2g} < 0$, adică, toate punctele paraboloidului hiperbolic sunt hiperbolice.

3. **Cilindrul circular drept** (de rază a, cu generatoarele paralele cu Oz): $x^2 + y^2 = a^2$, sau, $\vec{r}(a\cos u^1, a\sin u^1, u^2)$, $a > 0$, este format numai din puncte parabolice, deoarece avem: $b_{11} = \dfrac{-a^2}{\sqrt{g}}$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = 0$, adică, $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$.

În fine, întorcându-ne la 3.146 şi notând $\dfrac{du^2}{du^1} = m$, obţinem exprimarea curburii normale ca funcţie continuă de direcţia tangentă m în $P \in (S)$, sub forma:

$$\kappa_n(m) = \frac{b_{11} + 2b_{12}m + b_{22}m^2}{g_{11} + 2g_{12}m + g_{22}m^2}. \tag{3.151}$$

Presupunând că $P \in (S)$ nu este ombilical (în particular, nici punct planar), are sens să căutăm direcţiile tangente m ce trec prin P şi care realizează extremul funcţiei 3.151, $\kappa_n = \kappa_n(m)$.

Definitia 3.42 *Direcţiile tangente ce trec printr-un punct regulat P al unei suprafeţe (S) de clasă $p \geq 3$, pentru care curbura normală corespunzătoare are valori extreme, se numesc* ***direcţii principale*** *ale lui (S) în P.*

Pentru a găsi direcţiile principale, derivăm în raport cu m funcţia 3.151 şi, egalând rezultatul derivării cu 0, obţinem ecuaţia

$$\frac{b_{12} + b_{22}m}{g_{12} + g_{22}m} = \frac{b_{11} + 2b_{12}m + b_{22}m^2}{g_{11} + 2g_{12}m + g_{22}m^2}, \tag{3.152}$$

ecuaţie ce este echivalentă cu

$$\frac{b_{12} + b_{22}m}{g_{12} + g_{22}m} = \frac{b_{11} + b_{12}m}{g_{11} + g_{12}m}, \tag{3.153}$$

sau cu ecuaţia

$$(g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})m^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})m + g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11} = 0; \tag{3.154}$$

altfel spus,

$$\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.155}$$

fapt ce se poate constata printr-un calcul direct.

Deoarece ecuaţia 3.154 (echivalent, 3.155) este o ecuaţie de grad doi în m, ajungem la concluzia că **printr-un punct al unei suprafeţe trec cel mult două direcţii principale.**

Mai mult, **aceste două direcţii principale sunt reale distincte**, deoarece are loc:

Teorema 3.43 *Ecuaţia 3.154 are rădăcini reale distincte.*

Demonstratie. Nu restrângem generalitatea dacă presupunem curbele coordonate $u^1 = const.$, $u^2 = const.$ ale suprafeţei (S), ortogonale, având în vedere invarianţa curburii normale faţă de transformări de coordonate carteziene ortogonale şi faţă de transformări de coordonate curbilinii, fapt ce rezultă din 3.146 şi din observaţia (2) din finalul paragrafului precedent.

În acest caz, avem $g_{12} = 0$ şi ecuaţia direcţiilor principale devine:

$$g_{22}b_{12}m^2 + (g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22})m - g_{11}b_{12} = 0, \tag{3.156}$$

cu realizantul

$$(g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22})^2 + 4g_{11}g_{22}b_{12}^2 > 0,$$

deoarece, prin 3.83, avem $g = g_{11}g_{22} > 0$. ■

Notând cu m_1, m_2 rădăcinile (reale şi distincte) ale ecuaţiei 3.154, avem, prin înlocuirea lor în formula curburii normale 3.151, valorile extreme ale curburii normale, să spunem,

$$\kappa_n(m_1) = \kappa_1, \quad \kappa_n(m_2) = \kappa_2. \tag{3.157}$$

Definitia 3.44 *Valorile extreme κ_1, κ_2 ale curburii normale κ_n, date de 3.157, poartă numele de **curburi principale** ale lui (S) în P, iar inversele lor se numesc **raze de curbură principale**. Secţiunile normale, având drept direcţii, direcţiile principale m_1 şi m_2, se numesc **secţiuni principale** ale lui (S) în P.*

Conform definiţiei de mai sus, avem pentru curburile principale 3.157, relaţiile:

$$\frac{b_{11} + 2b_{12}m_i + b_{22}m_i^2}{g_{11} + 2g_{12}m_i + g_{22}m_i^2} = \frac{b_{12} + b_{22}m_i}{g_{12} + g_{22}m_i} = \frac{b_{11} + b_{12}m_i}{g_{11} + g_{12}m_i}, \ i = 1, 2, \tag{3.158}$$

ultimele două egalităţi obţinându-se din 3.152 şi, respectiv, 3.153.

Ne propunem să găsim **ecuaţia de gradul doi a curburilor principale** κ_1 şi κ_2. În acest scop, scriem egalităţile pe care le îndeplinesc κ_1 şi κ_2 sub formele convenabile:

$$\kappa_i = \frac{b_{12} + b_{22}m_i}{g_{12} + g_{22}m_i}, \quad \kappa_i = \frac{b_{11} + b_{12}m_i}{g_{11} + g_{12}m_i},$$

care sunt echivalente cu relaţiile:

$$\begin{aligned}(g_{22}\kappa_i - b_{22})m_i + g_{12}\kappa_i - b_{12} &= 0,\\ (g_{12}\kappa_i - b_{12})m_i + g_{11}\kappa_i - b_{11} &= 0.\end{aligned}$$

Eliminând m_i din ultimele două relaţii, obţinem pentru curburile principale κ_i, $i = 1, 2$, ecuaţia de gradul al doilea

$$\begin{vmatrix} g_{22}\kappa - b_{22} & g_{12}\kappa - b_{12} \\ g_{12}\kappa - b_{12} & g_{11}\kappa - b_{11} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.159}$$

care, prin ordonare, se poate scrie sub forma:

$$g\kappa^2 - (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11})\kappa + b = 0. \tag{3.160}$$

Definitia 3.45 *Numim* ***curbură totală (curbura lui Gauss)*** *şi, respectiv,* ***curbura medie*** *ale suprafeţei (S) de clasă $p \geq 3$, într-un punct regulat $P \in (S)$, numerele notate cu K şi respectiv, H, date de*

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \tag{3.161}$$

unde κ_1 şi κ_2 notează curburile principale ale lui (S) în P.

Din definiţia de mai sus şi ecuaţia de gradul doi a curburilor principale 3.160, deducem pentru curburile totală şi medie, respectiv, formulele de calcul:

$$K = \frac{b}{g}, \quad H = \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{2g}. \tag{3.162}$$

Observatia 3.46 *Din prima formulă 3.162, definiţia 3.39 şi din faptul că $g > 0$, rezultă că în punctele eliptice, parabolice şi hiperbolice, curbura totală K este pozitivă, zero şi respectiv, negativă.*

O suprafaţă cu curbura medie H constant nulă se numeşte **suprafaţă minimală**.

Exemplu. Să se calculeze curburile principale, curbura medie şi curbura totală într-un punct curent al elicoidului $x = u^1 \cos u^2$, $y = u^1 \sin u^2$, $z = hu^2$.

Printr-un calcul direct, obţinem : $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = (u^1)^2 + h^2$, $b_{11} = 0$, $b_{12} = \dfrac{-h}{\sqrt{(u^1)^2 + h^2}}$, $b_{22} = 0$. Înlocuind în ecuaţia 3.159, obţinem:

$$\begin{vmatrix} [(u^1)^2 + h^2]\kappa & \dfrac{h}{\sqrt{(u^1)^2 + h^2}} \\ \dfrac{h}{\sqrt{(u^1)^2 + h^2}} & \kappa \end{vmatrix} = 0,$$

de unde rezultă curburile principale

$$\kappa_{1,2} = \pm\frac{h}{(u^1)^2 + h^2}.$$

Curbura medie este $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$ (de unde concluzionăm că elicoidul este o suprafaţă minimală), iar curbura totală, $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{b}{g} = -\frac{h^2}{[(u^1)^2 + h^2]^2} < 0$, adică, elicoidul este format numai din puncte hiperbolice.

Pentru curbura totală K avem **teorema remarcabilă (de aur),** sau **egregium**, datorată lui Gauss:

Teorema 3.47 *Curbura lui Gauss, K, a unei suprafeţe (S) de clasă $p \geq 3$, nu depinde de forma a doua fundamentală, ci numai de coeficienţii g_{jk} ai primei forme fundamentale şi de derivatele de ordinul întâi şi al doilea ale acestor coeficienţi. Mai precis, avem:*

$$K = \frac{1}{g^2}\left\{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \beta_{13} \\ g_{21} & g_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \alpha_{13} \\ g_{21} & g_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{vmatrix}\right\}, \tag{3.163}$$

unde

(3.164)

$$\begin{cases} \alpha_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},\ \alpha_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},\ \beta_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2},\ \beta_{31} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \\ \beta_{13} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \alpha_{23},\ \beta_{32} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \alpha_{13},\ \beta_{33} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial (u^2)^2} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial (u^1)^2}. \end{cases}$$

Demonstratie. Ţinând cont de 3.137 şi 3.139 în expresia curburii totale 3.161_1, obţinem pentru aceasta formula:

$$K = \frac{b}{g} = \frac{1}{g^2}[(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{11})(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{22}) - (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{12})]^2.$$

Efectuând înmulţirile între determinanţii ce apar prin produsele mixte şi întrebuinţând notaţiile 3.82, avem:

(3.165)

$$K = \frac{1}{g^2}\left\{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{22} \\ g_{21} & g_{22} & \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_{22} \\ \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_1 & \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_2 & \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_{22} - \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12} \\ g_{21} & g_{22} & \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_{12} \\ \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_1 & \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_2 & 0 \end{vmatrix}\right\},$$

unde am ţinut cont, în plus, de dezvoltarea ultimilor doi determinanţi după elementele celei de-a treia linii.

Luând acum derivatele parţiale ale lui 3.82 în raport cu u^i, găsim:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \vec{r}_{ji} \cdot \vec{r}_k + \vec{r}_j \cdot \vec{r}_{ki}. \tag{3.166}$$

În particular, pentru $k = j$, obţinem:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial u^i} = \vec{r}_{ji} \cdot \vec{r}_j, \tag{3.167}$$

care ne determină elementele $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \beta_{23}, \beta_{31}$ din enunţul teoremei sub forma 3.164, iar cu 3.166, elementele β_{13} şi β_{32}.

Derivând acum 3.166, scrisă pentru $j = 1$, $k = 2$, $i = 1$, în raport cu u^2, avem:

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} = \vec{r}_{112} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_{11} \cdot \vec{r}_{22} + \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12} + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{122}.$$

În mod analog, din 3.167, obţinem formulele:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} &= \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12} + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{122}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} &= \vec{r}_{112} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12}, \end{aligned}$$

formule care, scăzute din precedenta, conduc la β_{33} din 3.163 (echivalent: 3.165). ■

3.5.4 Linii asimptotice şi linii de curbură. Teorema lui Euler. Indicatoarea lui Dupin

Am văzut mai sus că ecuaţia în $\dfrac{du^2}{du^1}$:

$$b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2 = 0, \tag{3.168}$$

determină în punctul $P(u^1, u^2)$ al suprafeţei (S) de clasă $p \geq 2$, două direcţii tangente, anume, direcţiile asimptotice, cu proprietatea că secţiunile normale în P, prin aceste direcţii tangente, au curbura în P zero.

Direcţiile asimptotice sunt reale distincte dacă P este punct hiperbolic ($b < 0$), reale confundate dacă P este punct parabolic ($b = 0$), şi complexe conjugate dacă P este eliptic ($b > 0$).

Definitia 3.48 *O curbă de pe (S) cu proprietatea că direcţia tangentă este direcţie asimptotică în fiecare din punctele sale, se numeşte* ***curbă asimptotică*** *sau* ***linie asimptotică*** *a lui (S).*

Din această definiţie rezultă că liniile asimptotice sunt date de soluţiile ecuaţiei diferenţiale 3.168. Rezolvând-o în raport cu $\frac{du^2}{du^1}$, obţinem două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi:

$$\frac{du^2}{du^1} = \phi_1(u^1, u^2), \qquad \frac{du^2}{du^1} = \phi_2(u^1, u^2), \tag{3.169}$$

fiecare din aceste ecuaţii determinând, prin integrare, o **familie de linii asimptotice** ale suprafeţei:

$$h_1(u^1, u^2, C_1) = 0, \qquad h_2(u^1, u^2, C_1) = 0. \tag{3.170}$$

Aşadar, totalitatea liniilor asimptotice ale unei suprafeţe (S) de clasă $p \geq 2$, linii definite de ecuaţia diferenţială 3.168, este formată din două familii, printr-un punct regulat $P \in (S)$ trecând două linii asimptotice, câte una din fiecare familie, tangente în P direcţiilor asimptotice. Dacă P este hiperbolic, liniile asimptotice prin P sunt reale şi cu drepte tangente distincte în P; dacă P este parabolic, liniile asimptotice sunt reale, având aceeaşi dreaptă tangentă în P, iar dacă P este eliptic, liniile asimptotice sunt imaginare.

Pe o porţiune a lui (S) formată numai din puncte hiperbolice, curbele asimptotice formează o reţea şi ele pot fi folosite drept curbe coordonate. Atunci, 3.168 trebuie să fie satisfăcută pentru $du^1 = 0$ şi $du^2 = 0$, şi reciproc, fapt ce ne permite a formula

Teorema 3.49 *Curbele coordonate $u^1 = const.$ şi $u^2 = const.$ ale unei reprezentări admisibile $\vec{r}(u^1, u^2)$ de clasă $p \geq 2$ sunt curbe asimptotice dacă şi numai dacă*

$$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0. \tag{3.171}$$

Din 3.130, 3.131, 3.144 şi 3.168, obţinem pentru liniile asimptotice relaţia:

$$\vec{r}\,'' \cdot \vec{n} = \kappa\, \vec{\nu} \cdot \vec{n} = 0. \tag{3.172}$$

Ultima egalitate este îndeplinită pentru orice curbă $\vec{r} = \vec{r}(s)$ care are $\vec{r}\,'' = 0$, adică, $\vec{r} = s\vec{a} + \vec{b}$ ($\vec{a}$ şi $\vec{b}$ - vectori constanţi), cu alte cuvinte, pentru o linie dreaptă. Prin urmare, putem formula

Teorema 3.50 *Orice linie dreaptă a unei suprafeţe (S) de clasă $p \geq 2$ este o curbă asimptotică a lui (S).*

Exemple. **1.** Pentru hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, generatoarele rectilinii sunt curbe asimptotice. Mai mult, deoarece prin fiecare punct al suprafeţei trec exact două generatoare rectilinii, acestea sunt singurele curbe asimptotice ale hiperboloidului.

2. În cazul cilindrului circular $x^2+y^2=a^2$, am arătat în paragraful precedent că toate punctele sale sunt parabolice, prin urmare, prin fiecare punct trece exact câte o direcţie asimptotică. Deducem de aici că singurele linii asimptotice ale cilindrului sunt generatoarele sale rectilinii (prin fiecare punct al acestuia trece exact câte o generatoare). Acest lucru se poate demonstra şi utilizând 3.168-3.169, anume: cu parametrizarea $x=a\cos u^1$, $y=a\sin u^1$, $z=u^2$, avem: $b_{11}=\frac{-a^2}{\sqrt{g}}$, $b_{12}=0$, $b_{22}=0$. Direcţiile asimptotice sunt date de ecuaţia $\frac{-a^2}{\sqrt{g}}(du^1)^2=0$, care conduce la $du^1=0$, adică, $u^1=$constant, ceea ce reprezintă tocmai generatoarele rectilinii ale cilindrului.

De asemenea, 3.172 ne arată că, curbele care îndeplinesc 3.168 au proprietatea că vectorul normal principal $\vec{\nu}$ este ortogonal cu vectorul $\vec{n}$ al suprafeţei şi deci:

Teorema 3.51 *În fiecare punct P al unei curbe asimptotice (C), de pe o suprafaţă (S) de clasă $p\geq 2$, (C) având în P curbura $\kappa\neq 0$, planul osculator al lui (C) coincide cu planul tangent la (S) în P.*

Trecem acum la definirea liniilor de curbură şi evidenţierea unor proprietăţi importante ale acestora.

Am văzut că ecuaţia 3.154 a curburilor principale (în $\frac{du^2}{du^1}$), pe care o scriem acum sub forma

$$(g_{12}b_{22}-g_{22}b_{12})(du^2)^2+(g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11})du^2du^1+ \\ +(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})(du^1)^2=0, \tag{3.173}$$

determină în punctul P al unei suprafeţe, care nu este punct ombilical, două direcţii tangente, numite **direcţiile principale**. Acestora le corespund **curburile principale,** anume, valorile extreme ale curburii normale. Aceste două direcţii principale sunt reale, distincte (teorema 3.43).

Definitia 3.52 *O curbă de pe (S) cu proprietatea că direcţia sa tangentă este direcţie principală în fiecare din punctele sale se numeşte **linie de curbură a lui** (S).*

Din această definiţie rezultă că liniile de curbură sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale 3.173, care este echivalentă cu ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.174}$$

Ecuaţia 3.174, rezolvată în raport cu $\dfrac{du^2}{du^1}$, conduce la două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, distincte:

$$\frac{du^2}{du^1} = \psi_1(u^1, u^2), \quad \frac{du^2}{du^1} = \psi_2(u^1, u^2), \tag{3.175}$$

care integrate determină două familii reale şi distincte, şi anume, **liniile de curbură** ale suprafeţei:

$$q_1(u^1, u^2, C_1) = 0, \quad q_2(u^1, u^2, C_2) = 0. \tag{3.176}$$

Exemplu: Pentru elicoidul $x = u^1 \cos u^2$, $y = u^1 \sin u^2$, $z = hu^2$ (cu: $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = (u^1)^2 + h^2$, $b_{11} = 0$, $b_{12} = \dfrac{-h}{\sqrt{(u^1)^2 + h^2}}$, $b_{22} = 0$), liniile de curbură sunt date de:

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ 1 & 0 & (u^1)^2 + h^2 \\ 0 & \dfrac{-h}{\sqrt{(u^1)^2 + h^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau: $[(u^1)^2 + h^2](du^2)^2 = (du^1)^2$, echivalent, $\dfrac{du^2}{du^1} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{(u^1)^2 + h^2}}$. Prin integrare, obţinem:

$$u^2 = \pm \ln \left| u^1 + \sqrt{(u^1)^2 + h^2} \right| + c.$$

Mai mult, avem:

Teorema 3.53 *Exceptând punctele ombilicale, liniile de curbură ale unei suprafeţe formează o reţea ortogonală.*

Demonstratie. Fie $P \in (S)$ un punct regulat, care nu este ombilical şi (C), (C^*), cele două linii de curbură corespunzătoare lui P, de ecuaţii:

$$(C) : u^i = h^i(t), \ (C^*) : u^i = h^{*i}(t), \quad (i = 1, 2).$$

Atunci, direcţiile tangente în P la (C) şi (C^*) sunt date, respectiv, de

$$\frac{du^2}{du^1} = \frac{\dot{h}^2}{\dot{h}^1}, \quad \frac{du^2}{du^1} = \frac{\dot{h}^{*2}}{\dot{h}^{*1}},$$

şi, cum ele sunt direcţii principale, avem prin 3.175, egalităţile:

$$\psi_1 = \frac{\dot{h}^2}{\dot{h}^1}, \qquad \psi_2 = \frac{\dot{h}^{*2}}{\dot{h}^{*1}}, \tag{3.177}$$

unde ψ_1 şi ψ_2 sunt soluţiile ecuaţiei 3.173, îndeplinind relaţiile:

$$\psi_1 + \psi_2 = -\frac{g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}}{g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}}, \ \psi_1 \cdot \psi_2 = \frac{g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}}{g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}}. \tag{3.178}$$

Pe de altă parte, din 3.91, curbele (C) şi (C^*) de pe (S) sunt ortogonale dacă şi numai dacă

$$g_{11}\dot{h}^1\dot{h}^{*1} + g_{12}(\dot{h}^1\dot{h}^{*2} + \dot{h}^2\dot{h}^{*1}) + g_{22}\dot{h}^2\dot{h}^{*2} = 0, \tag{3.179}$$

relaţie care, împărţită prin produsul $\dot{h}^1\dot{h}^{*1}$, conduce la condiţia de ortogonalitate a lui $(C) : u^i = h^i(t)$ şi $(C^*) : u^i = h^{*i}(t)$ sub forma

$$g_{22}\frac{\dot{h}^2}{\dot{h}^1}\frac{\dot{h}^{*2}}{\dot{h}^{*1}} + g_{12}\left(\frac{\dot{h}^2}{\dot{h}^1} + \frac{\dot{h}^{*2}}{\dot{h}^{*1}}\right) + g_{11} = 0. \tag{3.180}$$

În cazul în care (C) şi (C^*) sunt chiar linii de curbură, prin 3.177 şi 3.180, ele vor fi ortogonale dacă şi numai dacă avem îndeplinită condiţia:

$$g_{22}\psi_1 \cdot \psi_2 + g_{12}(\psi_1 + \psi_2) + g_{11} = 0. \tag{3.181}$$

Făcând apel la 3.178, printr-un calcul direct se arată că 3.181 este identic satisfăcută. Cu aceasta, demonstraţia este completă. ∎

Deoarece liniile de curbură formează o reţea reală şi ortogonală, ele pot fi luate, printr-o transformare admisibilă de coordonate, drept curbe coordonate, aceasta simplificând calculul, după cum rezultă din teorema de mai jos:

Teorema 3.54 *Curbele coordonate $u^1 = const.$ şi $u^2 = const.$ ale unei reprezentări admisibile $\vec{r}(u^1, u^2)$ sunt linii de curbură ale suprafeţei corespunzătoare, dacă şi numai dacă*

$$g_{12} = 0 \ \text{ şi } \ b_{12} = 0. \tag{3.182}$$

Demonstratie. Dacă curbele coordonate sunt linii de curbură, atunci 3.173 este satisfăcută de $du^1 = 0$ şi de $du^2 = 0$, cu alte cuvinte, coeficienţii lui $(du^1)^2$ şi $(du^2)^2$ în 3.173 trebuie să se anuleze simultan:

$$\begin{cases} g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12} = 0 \\ g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11} = 0 \end{cases} \tag{3.183}$$

Privind sistemul 3.183 ca un sistem omogen în necunoscutele g_{12} şi b_{12}, determinantul său:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} b_{22} & -g_{22} \\ b_{11} & -g_{11} \end{vmatrix} = g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22}$$

nu poate fi zero (dacă $\mathcal{D}$ ar fi 0, se obţine printr-un calcul direct că P ar fi ombilical). Rezultă că sistemul considerat admite numai soluţia banală 3.182.

Reciproc, dacă 3.182 are loc , atunci 3.173 se reduce la $\mathcal{D}du^1du^2 = 0$, şi cum $\mathcal{D} \neq 0$, avem soluţia $u^1 = const.$, $u^2 = const.$, cu alte cuvinte, liniile de curbură sunt curbele coordonate. ■

După cum am afirmat mai sus, luând liniile de curbură drept curbe coordonate, calculul se simplifică foarte mult, deoarece relaţiile 3.182 sunt îndeplinite. De exemplu, curbura totală K, curbura medie H, curburile principale κ_1 şi κ_2, date de 3.161 şi 3.160 capătă formele simple:

$$K = \frac{b_{11}}{g_{11}} \cdot \frac{b_{22}}{g_{22}}, \quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}}\right), \quad \kappa_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad \kappa_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}. \tag{3.184}$$

Folosind reţeaua liniilor de curbură drept reţea de curbe coordonate, putem demonstra uşor **teorema lui Euler** referitoare la descompunerea curburii normale κ_n a unei direcţii oarecare în termeni ai curburilor principale κ_1 şi κ_2, lucru pe care-l vom face în continuare, după care vom trage ultimele concluzii asupra formei geometrice a unei suprafeţe.

Teorema 3.55 *(Euler) Fie P un punct oarecare al unei suprafeţe (S), neombilical, şi α - unghiul dintre o direcţie oarecare în P şi direcţia principală în P corespunzătoare lui κ_1. Atunci:*

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha. \tag{3.185}$$

Demonstratie. Alegem pe (S) liniile de curbură drept curbe coordonate. Atunci, în conformitate cu 3.146, 3.182 şi 3.184, avem:

$$\kappa_n = \frac{b_{11}(du^1)^2 + b_{22}(du^2)^2}{ds^2} = \kappa_1 g_{11}(u^{1'})^2 + \kappa_2 g_{22}(u^{2'})^2. \tag{3.186}$$

Amintim că:

1. direcţia tangentă $\dfrac{du^2}{du^1}$ este obţinută din vectorul tangent $\vec{r}\,' = \vec{r}_j u^{j'}$,
2. direcţia corespunzătoare lui κ_1 este dată de $\vec{r}_1$,
3. curbele coordonate sunt ortogonale şi
4. $|\vec{r}\,'| = |\vec{\tau}| = 1$.

Avem atunci relaţiile:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|}\cdot\frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|} = \frac{\vec{r}_1(\vec{r}_1 u^{1'} + \vec{r}_2 u^{2'})}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{g_{11}u^{1'}}{\sqrt{g_{11}}} = \sqrt{g_{11}}u^{1'},\\
\sin\alpha &= \frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|}\cdot\frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|} = \frac{\vec{r}_2(\vec{r}_1 u^{1'} + \vec{r}_2 u^{2'})}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{g_{22}u^{2'}}{\sqrt{g_{22}}} = \sqrt{g_{22}}u^{2'},
\end{aligned}$$

unde α este unghiul specificat în enunţul teoremei. Aceste două relaţii, introduse în 3.186, demonstrează teorema lui Euler. ■

Din 3.185, observăm că extremele lui κ_n corespund direcţiilor principale, date de $\alpha = 0$ şi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, iar 3.185 împreună cu teorema lui Meusnier 3.148 ne dau informaţii complete asupra curburii oricărei curbe de pe suprafaţă.

Vom încheia acest paragraf, dând o interpretare geometrică teoremei lui Euler.

În acest scop, fie z_1, z_2 coordonatele carteziene ortogonale în planul tangent la (S) în P, direcţiile pozitive ale axelor corespunzând direcţiilor principale. În orice direcţie, luăm un segment de lungime $\sqrt{|R_n|} = \dfrac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}$ din originea P a reperului, obţinând punctul de extrem al segmentului, de coordonate

$$z_1 = \sqrt{|R_n|}\cos\alpha,\ \ z_2 = \sqrt{|R_n|}\sin\alpha.$$

Înlocuindu-le în 3.185, obţinem aşa-numita **indicatoare a lui Dupin**, de ecuaţie:

$$\kappa_1 z_1^2 + \kappa_2 z_2^2 = \pm 1, \tag{3.187}$$

care, din punct de vedere geometric, reprezintă o conică situată în planul tangent la (S) în P. Mai precis, ţinând cont de 3.162, vedem că:

1. dacă punctul P este punct eliptic al lui (S), atunci κ_1 şi κ_2 au acelaşi semn şi indicatoarea este o elipsă; în particular, dacă punctul P este ombilical, atunci α este nedefinit, iar indicatoarea este un cerc;

2. dacă P este parabolic, cu $\kappa_1 = 0$, atunci 3.187 se reduce la o pereche de drepte paralele cu axa z_1;

3. dacă punctul $P \in (S)$ este hiperbolic, atunci κ_1 şi κ_2 au semne opuse, şi indicatoarea este formată din două hiperbole conjugate.

Indicatoarea lui Dupin este aproximativ egală (înrudită) cu curba de intersecţie a lui (S) cu un plan paralel şi suficient de apropiat cu planul tangent la (S) în P, fapt ce rezultă din calculul distanţei de la un punct al suprafeţei la planul tangent:

Propozitia 3.56 *Dacă P este un punct al suprafeţei (S), de vector de poziţie $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u^1, u^2)$, punct neplanar, atunci distanţa de la un punct Q al lui (S), de vector de poziţie $\overrightarrow{OQ} = \vec{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$, la planul tangent $\pi_{tg}(P)$ al lui (S) este aproximativ egală cu*

$$\frac{1}{2}\left|b_{jk}h^j h^k\right|,$$

unde „aproximativ" înseamnă că neglijăm termenii de ordin mai mare sau egal cu 3 în $|h^1| + |h^2|$.

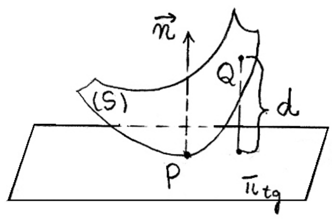


fig. 3.5

Demonstratie. Din formula lui Taylor, avem:

$$\vec{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2) = \vec{r}(u^1, u^2) + h^j \vec{r}_j + \frac{1}{2}h^j h^k \vec{r}_{jk} + \vec{\varepsilon}((\left|h^1\right| + \left|h^2\right|)^2),$$

şi atunci, distanţa $d(Q, \pi_{tg})$ este (fig. 3.5)

$$\begin{aligned} d(Q, \pi_{tg}) &= \left|\{\vec{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2) - \vec{r}(u^1, u^2)\} \cdot \vec{n}\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|h^j h^k \vec{r}_{jk} \cdot \vec{n}\right| + |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{n}| = \frac{1}{2}\left|h^j h^k b_{jk}\right| + |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{n}|, \end{aligned}$$

unde am ţinut cont de $\vec{r}_j \cdot \vec{n} = 0$ şi notaţiile 3.135. Rezultă că planele paralele la $\pi_{tg}(P)$, duse la distanţa $\pm\mu$ de acesta, intersectează (S) aproximativ de-a lungul unei curbe (sau unor curbe) care respectă

$$b_{jk}h^j h^k = \pm 2\mu. \tag{3.188}$$

■

Alegând coordonatele pe (S) astfel încât curbele coordonate să fie linii de curbură, atunci 3.188 devine, prin 3.182 ($b_{12} = 0$) şi 3.184 ($b_{jj} = \kappa_j \cdot g_{jj}$) :

$$\kappa_1 g_{11}(h^1)^2 + \kappa_2 g_{22}(h^2)^2 = \pm 2\mu.$$

Transformarea $z_1 = h^1\sqrt{\dfrac{g_{11}}{2\mu}}$, $z_2 = h^2\sqrt{\dfrac{g_{22}}{2\mu}}$ conduce la 3.187.

Aşadar,

Teorema 3.57 *Intersecţia dintre o suprafaţă (S) de clasă $p \geq 3$ şi un plan care este paralel şi suficient de apropiat cu planul tangent $\pi_{tg}(P)$ al lui (S) într-un punct P neplanar, este aproximativ egală cu o secţiune conică similară cu indicatoarea lui Dupin a lui (S) în P sau, dacă P este punct hiperbolic, similară cu una din cele două hiperbole ale acestei indicatoare.*

Deoarece porţiunile de paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic şi cilindru, sunt formate, respectiv, din puncte eliptice, hiperbolice şi parabolice, rezultă că: în vecinătatea unui punct regulat P al unei porţiuni de suprafaţă, care este eliptic, hiperbolic sau parabolic, porţiunea de suprafaţă se asimilează, respectiv, cu acestea.

3.5.5 Linii geodezice

Definitia 3.58 *Se numeşte* ***linie geodezică*** *(sau, simplu,* ***geodezică****) a unei suprafeţe (S) o curbă $(C) \subset (S)$ cu proprietatea că în fiecare punct al lui (C), normala la suprafaţă se află în planul osculator al curbei.*

Propozitia 3.59 *Secţiunile normale ale unei suprafeţe sunt linii geodezice.*

Justificarea acestui fapt stă în aceea că secţiunile normale sunt curbe plane, prin urmare, planul lor osculator este planul care le conţine, iar acesta conţine, la rândul său, normala la suprafaţă. Astfel,

1. Pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, cercurile obţinute prin intersecţiile cu plane care trec prin origine (cercurile mari) sunt linii geodezice.
2. Pe cilindrul circular drept $x^2+y^2 = 1$, cercurile situate în plane paralele cu xOy ($x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = const.$) sunt linii geodezice.

Fie $(C) : \vec{r} = \vec{r}(u^1(t), u^2(t))$. Normala la suprafaţă $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2$ aparţine planului osculator (determinat de $d\overrightarrow{r}$ şi $d^2\overrightarrow{r}$) dacă şi numai dacă

$$(3.189) \qquad \left(\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2, d\overrightarrow{r}, d^2\overrightarrow{r}\right) = 0,$$

sau, echivalent, dacă $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, (şi ţinând cont că $d\overrightarrow{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, $d^2\overrightarrow{r} = d^2x\,\vec{i} + d^2y\,\vec{j} + d^2z\,\vec{k}$),

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{3.190}$$

ceea ce reprezintă **ecuaţia diferenţială a liniilor geodezice.** Se observă imediat din 3.189:

Propozitia 3.60 *Dreptele conţinute într-o suprafaţă sunt geodezice.*

Fie $\vec{n}$ versorul normal la suprafaţă într-un punct regulat P al acesteia. Deoarece $\vec{n}$ este perpendicular pe vectorul tangent al oricărei curbe trasate pe (S), rezultă că: (C) **este geodezică dacă şi numai dacă dreapta normală principală a curbei coincide cu normala la suprafaţă**, adică:

$$\vec{n} = \pm\vec{\nu}, \tag{3.191}$$

unde $\vec{\nu}$ este versorul normal principal al curbei.

Ţinând cont de prima formulă Frenet, obţinem: $\vec{r}\,'' = \kappa\vec{\nu}$, unde κ este curbura curbei. Comparând cu 3.191, are loc

Teorema 3.61 *O curbă pe (S), de ecuaţie $\vec{r} = \vec{r}(u^1(s), u^2(s))$, cu parametrul s - lungimea de arc, este geodezică dacă şi numai dacă vectorul $\vec{r}\,''$ este coliniar cu normala la suprafaţă în fiecare punct al curbei.*

Definitia 3.62 *Numim **curbură geodezică a curbei** $(C) \subset (S)$ într-un punct regulat $P \in (C)$, şi notăm cu K_g, funcţia $K_g = \kappa \sin\alpha$, unde κ este curbura lui (C) în P şi $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}}\right)$.*

Teorema 3.63 *Curba $(C) \subset (S)$ este o geodezică dacă şi numai dacă ea are curbura geodezică nulă în fiecare punct .*

Demonstratie. Dacă (C) este geodezică, atunci are loc 3.191, adică $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}}\right) \in \{0, 180°\}$, de unde reiese imediat $K_g = \kappa \sin\alpha = 0$. Reciproc, $K_g = 0$ implică $\sin\alpha = 0$, de unde, conform cu 3.191, (C) este geodezică, sau $\kappa = 0$, caz în care (C) este o dreaptă, adică, în conformitate cu propoziţia 3.60, (C) este geodezică. ∎

Interpretarea geometrică a curburii geodezice o obţinem în modul următor: Fie $(C) \subset (S)$ o curbă şi $P \in (C)$. Notăm cu (C') proiecţia ortogonală a acesteia pe planul tangent la suprafaţă în P. Dreptele proiectante fiind perpendiculare pe planul tangent, acestea determină o secţiune normală (a lui (C)) în cilindrul format de aceste proiectante, iar secţiunea normală este tocmai (C'). Aplicând teorema lui Meusnier pe suprafaţa cilindrică, găsim că:

$$\kappa_{C'} = \kappa \cos(\widehat{\vec{n}', \vec{\nu}}),$$

unde $\vec{n}'$ desemnează versorul normal la suprafaţa cilindrică, iar $\vec{\nu}$, versorul normal principal al lui (C).

Generatoarele cilindrului sunt paralele cu normala la suprafaţă $\vec{n}$ (deoarece ele sunt perpendiculare pe $\pi_{tg}(P)$), prin urmare, normala $\vec{n}'$ la cilindru este perpendiculară pe $\vec{n}$; în plus, $\vec{n}$, $\vec{\nu}$ şi $\vec{n}'$ sunt coplanare, ele fiind conţinute în planul normal la (C) în P şi atunci, $(\widehat{\vec{n}', \vec{\nu}}) = 90° - (\widehat{\vec{n}, \vec{\nu}})$, de unde obţinem $\cos(\widehat{\vec{n}', \vec{\nu}}) = \sin(\widehat{\vec{n}, \vec{\nu}})$, şi avem:

$$\kappa_{C'} = \kappa \sin(\widehat{\vec{n}, \vec{\nu}}) = K_g,$$

Putem formula:

Teorema 3.64 *Curbura geodezică a unei curbe într-un punct P este curbura proiecţiei ei ortogonale pe planul tangent la suprafaţă în P.*

Din rezultatul de mai sus şi din teorema 3.63, deducem acum

Teorema 3.65 *Curba $(C) \subset (S)$ este geodezică dacă şi numai dacă proiecţia ei ortogonală pe planul tangent în fiecare punct $P \in (C)$ are curbura în P egală cu zero.*

Se poate demonstra: **drumul cel mai scurt pe o suprafaţă între două puncte ale acesteia este o geodezică** ce trece prin ele. Mai mult, dacă aceste două puncte sunt suficient de apropiate, această geodezică există şi este unică.

Exemplul 3.66 ***Geodezicele planului:*** *Fie planul xOy, definit de $x = u^1, y = u^2, z = 0$. Normala acestuia este $\vec{N} = \vec{k}(0,0,1)$, iar $dx = du^1$, $dy = du^2$, $dz = 0$ etc. Ecuaţia diferenţială a geodezicelor se scrie în acest caz:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ du^1 & du^2 & 0 \\ d^2u^1 & d^2u^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Căutăm geodezicele sub forma $u^2 = u^2(u^1)$; astfel, $d^2u^1 = 0$, şi ecuaţia acestora devine:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ du^1 & du^2 & 0 \\ 0 & d^2u^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

adică, $d^2u^2 = 0$, *ceea ce este echivalent cu*

$$u^2 = au^1 + b, \ \ (a, b - const.),$$

sau $\{y = ax + b, \ z = 0\}$ *adică, geodezicele planului sunt dreptele şi numai ele.*

3.6 Contact între suprafeţe

Definitia 3.67 *O suprafaţă* (S) *de clasă* $p \geq m+1$ *are un* ***contact de ordinul*** m *(exact) cu o suprafaţă* (S^*) *de clasă* $p^* \geq m+1$, *într-un punct comun* M_0, *dacă există cel puţin o reprezentare a suprafeţelor*

$$(S) : \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2); \quad (S^*) : \vec{r} = \vec{r}^*(u^{*1}, u^{*2}),$$

punctul M_0 *corespunzând pe* (S) *valorilor* (u_0^1, u_0^2), *iar pe* (S^*), *valorilor* (u_0^{*1}, u_0^{*2}), *astfel încât să fie satisfăcute condiţiile:*

$$\left[\frac{\partial^{i+j}\vec{r}}{\partial(u^1)^i\partial(u^2)^j}\right]_{M_0} = \left[\frac{\partial^{i+j}\vec{r}^*}{\partial(u^{*1})^i\partial(u^{*2})^j}\right]_{M_0}, \ \ 1 \leq i+j \leq m, \tag{3.192}$$

dar nu există nici o reprezentare parametrică astfel încât aceste condiţii să fie satisfăcute pentru $i + j = m + 1$.

Observaţii:

1. Din observaţia 3.145 cunoaştem că, dacă vectorul $\vec{r}(u^1, u^2)$ este dus în vectorul $\vec{R}(u^1, u^2)$ printr-o transformare ortogonală, atunci $\dfrac{\partial^{i+j}\vec{r}}{\partial(u^1)^i\partial(u^2)^j}$ este dus în $\dfrac{\partial^{i+j}\vec{R}}{\partial(u^1)^i\partial(u^2)^j}$. Din aceasta şi din faptul că egalitatea vectorilor este păstrată la transformări ortogonale, rezultă că relaţiile 3.192 sunt invariante la astfel de transformări. Mai mult, dacă schimbăm parametrizarea suprafeţei (S) cu ajutorul transformărilor admisibile $u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, de clasă cel puţin m, relaţiile 3.192 vor fi păstrate, cu condiţia ca şi pe (S^*) să schimbăm parametrii, derivatele funcţiilor $u^{*1} = u^{*1}(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2})$, $u^{*2} = u^{*2}(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2})$, care realizează schimbarea parametrilor pe (S^*), fiind egale cu cele ale funcţiilor $u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ până la şi inclusiv ordinul m. Aceasta ne arată că 3.192 nu depind de alegerea parametrilor pe (S) şi analog, pe (S^*).

   Cele de mai sus ne permit să spunem că proprietatea a două suprafeţe de a avea contact de ordinul m într-un punct comun este o proprietate geometrică.

2. Ca şi în cazul curbelor, putem da o interpretare geometrică simplă definiţiei de mai sus. Dezvoltăm cu formula lui Taylor pe $\vec{r}(u^1, u^2)$ în serie de puteri ale lui $u^1 - u_0^1$ şi $u^2 - u_0^2$, şi suprafaţa reprezentată prin suma primilor termeni ai acestei dezvoltări până la şi incluzând termenii care conţin puterile $(u^1 - u_0^1)^k$ şi $(u^2 - u_0^2)^k$ o vom numi **suprafaţa aproximantă de ordinul** k a suprafeţei (S) în punctul M_0. Atunci, un contact de ordinul m este echivalent cu coincidenţa suprafeţelor aproximante de ordinul $1, 2, ..., m$ ale suprafeţelor (S) şi (S^*) în punctul M_0.

În cazul în care două suprafeţe reprezentate parametric au în comun un punct, putem decide ordinul contactului prin

Teorema 3.68 *Fiind date două suprafeţe (S) şi (S^*) de clasă cel puţin $m+1$, reprezentate, respectiv, prin*

$$(S) : \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2); \quad (S) : \vec{r} = \vec{r}^*(u^{*1}, u^{*2}), \tag{3.193}$$

având în comun punctul M_0 (cu $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(u_0^1, u_0^2) = \vec{r}^*(u_0^{*1}, u_0^{*2})$, condiţia necesară şi suficientă ca aceste suprafeţe să aibă în M_0 un contact de ordinul m este ca sistemul de ecuaţii:
(3.194)

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^{*1}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^{*2}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0 \\
\left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^{*1}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*2}}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^{*2}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*2}}\right)_0 \\
\left(\dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial (u^1)^2}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial (u^{*1})^2}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial u^{*1}\partial u^{*2}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0 + \\
\left(\dfrac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial (u^{*2})^2}\right)_0 \left(\dfrac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0^2 + \left(\dfrac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^{*1}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial^2 u^{*1}}{\partial (\bar{u}^{*1})^2}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^{*2}}\right)_0 \left(\dfrac{\partial^2 u^{*2}}{\partial (\bar{u}^{*1})^2}\right)_0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}$$

în necunoscutele $\left(\dfrac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0, \left(\dfrac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*1}}\right)_0, \left(\dfrac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*2}}\right)_0, \left(\dfrac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*2}}\right)_0, \left(\dfrac{\partial^2 u^{*1}}{\partial (\bar{u}^{*1})^2}\right)_0,$ $\left(\dfrac{\partial^2 u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*1}\partial \bar{u}^{*2}}\right)_0, \left(\dfrac{\partial^2 u^{*1}}{\partial (\bar{u}^{*2})^2}\right)_0, \left(\dfrac{\partial^2 u^{*2}}{\partial (\bar{u}^{*1})^2}\right)_0, \left(\dfrac{\partial^2 u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*1}\partial \bar{u}^{*2}}\right)_0, \left(\dfrac{\partial^2 u^{*2}}{\partial (\bar{u}^{*2})^2}\right)_0, ...,$ *să fie compatibil, iar sistemul conţinând derivatele de ordinul $m+1$ ale funcţiilor u^{*1}, u^{*2} să nu fie compatibil.*

Demonstratie. Fie (S) şi (S^*) reprezentate prin $\vec{r} = \vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ şi respectiv, $(S^*) : \vec{r} = \vec{r}^*(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2})$, astfel încât în M_0 (cu $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2) =$

$\vec{r}^*(\bar{u}_0^{*1}, \bar{u}_0^{*2})$) sunt îndeplinite condiţiile 3.192, adică avem:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^1} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \bar{u}^{*1}}, \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^2} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \bar{u}^{*2}}, \ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial (\bar{u}^1)^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial (\bar{u}^{*1})^2} \quad \text{etc.,} \tag{3.195}$$

derivatele fiind calculate în M_0, fapt pe care nu-l vom mai menţiona, pentru a simplifica scrierea. Facem aceeaşi transformare de parametri pe (S) şi (S^*), astfel încât pe (S) să obţinem parametrii u^1, u^2 din 3.193, adică:

$$\begin{aligned} \bar{u}^1 &= f^1(u^1, u^2), \quad \bar{u}^{*1} = f^1(u^1, u^2), \\ \bar{u}^2 &= f^2(u^1, u^2), \quad \bar{u}^{*2} = f^2(u^1, u^2). \end{aligned}$$

Condiţiile 3.192 vor fi încă satisfăcute. Într-adevăr, avem:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}, \ \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial u^1} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \bar{u}^{*1}}\frac{\partial \bar{u}^{*1}}{\partial u^1} + \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \bar{u}^{*2}}\frac{\partial \bar{u}^{*2}}{\partial u^1}, \tag{3.196}$$

(şi analoagele),

$$\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} = \frac{\partial f^1}{\partial u^1} = \frac{\partial \bar{u}^{*1}}{\partial u^1}, \ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} = \frac{\partial f^2}{\partial u^1} = \frac{\partial \bar{u}^{*2}}{\partial u^1}$$

(şi analoagele), de unde rezultă prin 3.195 relaţiile:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^1} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \bar{u}^{*1}}, \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}^2} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \bar{u}^{*2}}, \ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial (\bar{u}^1)^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}^*}{\partial (\bar{u}^{*1})^2} \quad \text{etc..}$$

Schimbăm parametrii u^1, u^2 pe (S^*) în $\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2}$ (prin identitate) şi apoi, pe $\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2}$ astfel încât să obţinem parametrii u^{*1}, u^{*2} din 3.193, adică:

$$\bar{u}^{*1} = \bar{u}^{*1}(u^{*1}, u^{*2}), \ \ \bar{u}^{*2} = \bar{u}^{*2}(u^{*1}, u^{*2}).$$

Atunci, 3.196 capătă forma:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{*1}}\frac{\partial u^{*1}}{\partial \bar{u}^{*1}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{*2}}\frac{\partial u^{*2}}{\partial \bar{u}^{*1}} \text{ (şi analoagele),}$$

adică, 3.194, cu valorile necunoscutelor precizate. Rezultă de aici că sistemul 3.194 este compatibil, cu alte cuvinte, condiţia este necesară.

Reciproc, considerăm valorile necunoscutelor date de sistemul 3.194. Schimbăm parametrii pe (S^*) cu ajutorul transformării admisibile

$$u^{*1} = u^{*1}(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2}), \ \ u^{*2} = u^{*2}(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2}),$$

derivatele acestor funcţii până la şi inclusiv ordinul m, având în M_0 valorile date de sistemul 3.194. În noul sistem de coordonate, condiţiile 3.192 sunt satisfăcute.

Dacă sistemul 3.194 ar fi compatibil şi pentru derivatele de ordinul $m+1$, atunci condiţiile 3.192 vor fi satisfăcute până la $m+1$, cel puţin. Astfel, condiţia este şi suficientă. ■

Teorema 3.69 *Fiind date două suprafeţe de clasă $p \geq m$, suprafaţa (S) fiind dată parametric prin $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, iar (S^*) prin ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, având în comun punctul M_0 ($\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(u_0^1, u_0^2) = \vec{r}(x_0, y_0, z_0)$), ordinar pentru suprafaţa (S^*), condiţiile necesare şi suficiente ca aceste suprafeţe să aibă în M_0 un contact de ordin cel puţin m sunt:*

$$F(\vec{r}(u_0^1, u_0^2)) = 0, \quad \frac{\partial^{i+j} F(\vec{r}(u^1, u^2))}{\partial (u^1)^i \partial (u^2)^j}|_{(u_0^1, u_0^2)} = 0, \quad 1 \leq i + j \leq m. \tag{3.197}$$

Demonstratie. Presupunem că în M_0 suprafeţele (S) şi (S^*) au un contact de ordin cel puţin m. Atunci, în conformitate cu definiţia 3.192, există reprezentări parametrice ale lor $(S) : \vec{r} = \vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $(S^*) : \vec{r} = \vec{r}^*(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2})$, pentru care condiţiile 3.192 (echivalent: 3.195) sunt îndeplinite. Pe de altă parte, $F(\vec{r}^*(\bar{u}^{*1}, \bar{u}^{*2})) = 0$, şi prin 3.195, vom avea în M_0 relaţiile:

$$F(\vec{r}(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2)) = 0, \quad \left(\frac{\partial^{i+j} F(\vec{r}(\bar{u}^1, \bar{u}^2))}{\partial (\bar{u}^1)^i \partial (\bar{u}^2)^j}\right)_0 = 0, \quad 1 \leq i + j \leq m. \tag{3.198}$$

Facem acum schimbarea $u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, pe (S), astfel încât să obţinem suprafaţa (S) dată prin $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$. Condiţiile 3.198 conduc la 3.197, deoarece fiecare derivată în u^1, u^2 a funcţiei F se exprimă liniar cu ajutorul derivatelor lui F în $\bar{u}^1, \bar{u}^2$, de ordin mai mic sau egal cu ordinul derivatei respective. Aceasta arată că 3.197 sunt condiţii necesare.

Reciproc, deoarece M_0 este ordinar pentru (S), putem presupune $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ şi vom putea reprezenta (S^*) în vecinătatea lui M_0 prin ecuaţia explicită $z = f(x, y)$. Alegem pentru această suprafaţă reprezentarea:

$$(S^*) : \vec{r} = \vec{r}^*(u^1, u^2) : \; x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2), z = f(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2)),$$

suprafaţa (S) fiind dată, din enunţul teoremei prin:

$$(S) : \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2) : \; x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2), z = z(u^1, u^2).$$

Avem, evident, $F(\vec{r}^*(u^1, u^2)) \equiv 0$. Considerăm funcţia

$$\Phi(z) = F(\vec{r}) - F(\vec{r}^*)$$

şi o dezvoltăm în jurul punctului $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dat de

$$\bar{x} = x; \quad \bar{y} = y; \quad \bar{z} = f(x, y).$$

Obţinem:

$$\Phi(z) = (z - \bar{z}) F'_z(x, y, \bar{z}^*),$$

unde $\bar{z}^* \in (\bar{z}, z)$. Datorită continuităţii, putem presupune $F'_z(x, y, \bar{z}^*) \neq 0$ şi, deci:

$$z - \bar{z} = \frac{\Phi(z)}{F'_z(x, y, \bar{z}^*)}. \tag{3.199}$$

Relaţiile 3.197 fiind satisfăcute, avem $\Phi(z) = A(z - z_0)^{m+1} + ...$ (cu $A \neq 0$) şi $F'_z(x, y, \bar{z}^*) = B + C(z - z_0) + ...$ (cu $B \neq 0$) şi din 3.199, avem:

$$z - \bar{z} = D(z - z_0)^{m+1} + ... \quad (\text{cu } D \neq 0). \tag{3.200}$$

Întrucât $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$ şi are loc 3.200, rezultă că în M_0, reprezentările de mai sus ale lui (S) şi (S^*): $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, $\vec{r} = \vec{r}^*(u^1, u^2)$ satisfac 3.192, de unde rezultă că 3.197 sunt şi condiţii suficiente. ■

Observaţie. Dacă suprafeţele (S) şi (S^*) de clasă $m + 1$, au în punctul comun M_0 un contact de ordinul m, atunci orice curbă (C) de clasă $m + 1$ de pe (S), ce trece prin M_0, are în M_0 un contact de ordin m cu suprafaţa (S^*).

Într-adevăr, dacă suprafeţele sunt date prin $(S) : \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, (S^*) : $\vec{r} = \vec{r}^*(u^{*1}, u^{*2})$ şi sunt îndeplinite 3.192, atunci, la orice curbă de pe (S), să spunem, $(C_1) : u^1 = h^1(t)$, $u^2 = h^2(t)$, ataşăm curba

$$(C_2) : u^{*1} = u_0^{*1} - u_0^1 + h^1(t),\ u^{*2} = u_0^{*2} - u_0^2 + h^2(t)$$

de pe suprafaţa (S^*), punctul M_0 satisfăcând condiţiile $u_0^1 = h^1(t_0)$, $u_0^2 = h^2(t_0)$ şi definiţia contactului a două curbe în spaţiu (cap. 2) este satisfăcută.

Bibliografie

[1] M. Anastasiei: Geometrie: Curbe şi suprafeţe, Ed. Cermi, Iaşi, 2003.

[2] Gh. Atanasiu: Curs de geometrie diferenţială, Univ. Braşov, 1979.

[3] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Păun: Curs de Algebră liniară, Geometrie analitică, Geometrie diferenţială şi Ecuaţii diferenţiale (partea a II-a), Univ. „Transilvania", Braşov, 1993.

[4] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache : Algebră liniară, Geometrie analitică, Geometrie diferenţială şi Ecuaţii diferenţiale - culegere de probleme, Ed. All Educational, Bucureşti, Ediţia I, 1994, Ediţia a II-a, 1998, Ediţia a III-a, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2002.

[5] Gh. Atanasiu, E. Stoica: Algebră liniară, Geometrie analitică, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[6] Gh. Atanasiu, N. Voicu: Geometrie - modulul 4 (curs ID), Univ. „Transilvania", Braşov, 2003.

[7] W. Boskoff: Geometrie diferenţială, Ex Ponto, Constanţa, 1999.

[8] A. Dobrescu: Curs de geometrie diferenţială, E.D.P., Bucureşti, 1961.

[9] O. Em. Gheorghiu, B.D. Crstici, Geometrie analitică şi diferenţială, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

[10] S. Ianuş: Curs de geometrie diferenţială, Univ. Bucureşti, 1981.

[11] E. Murgulescu şi colectiv, Curs de geometrie analitică şi diferenţială, E.D.P., Bucureşti, 1965.

[12] C. Radu: Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, Ed. All, Bucureşti, 1996.

[13] M. Roşculeţ, Algebră liniară, Geometrie analitică şi Geometrie diferenţială, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1987.

[14] C. Udrişte: Geometrie diferenţială. Ecuaţii diferenţiale, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1997.

[15] C. Udrişte, V. Balan: Analytic and Differential Geometry, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1999.

[16] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu: Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale, E.D.P., Bucureşti, 1982.