ROMEO SURDU

# REPREZENTĂRI MATEMATICE ALE CIVILIZAȚIILOR ANTICE

## -MESOPOTAMIA-

EDITURA SFERA
Bârlad

*ROMEO SURDU*

# REPREZENTĂRI MATEMATICE ALE CIVILIZAȚIILOR ANTICE
# -MESOPOTAMIA-

*Editura Sfera*
*Bârlad, 2010*

Tehnoredactare: Romeo Surdu
Copertă: Romeo Surdu

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**
**SURDU, ROMEO**
**Reprezentări matematice ale civilizaţiilor antice : Mesopotamia** /
Romeo Surdu. – Bârlad : Sfera, 2010
Bibliogr.
ISBN 978-606-8056-75-3

51(091)


Str. C. Hamangiu, nr.15, Bârlad
Tel/Fax: 0235415669

## Cuprins

## Cuvânt Înainte

A scrie o carte de Istoria Matematicii este o mare provocare şi asta din mai multe motive. Primul e acela că în ţara noastră, datorită puţinului timp istoric al acestei discipline, sub 150 de ani, istoria matematicii este încă privită ca o Cenuşăreasă. Un al doilea motiv, ce ţine de primul este puţinătatea surselor de documentare; avem, cu caracter general doar câteva traduceri şi o încercare a lui Nicolae Mihăileanu plus ceva monografii, dedicate unor aspecte particulare, datorate Profesoarei ieşene Florica T. Câmpan. Chiar istoria matematicii româneşti stă sub semnul unor slabe apariţii editoriale, cele ale lui S. Andonie fiind evident cu mult depăşite ca perioadă tratată; probabil mai sunt ceva lucrări cu caracter local. Nu putem aici omite monografia impresionantă a Profesorului Dan Papuc în care se pune un accent deosebit pe filozofia matematicii.

Un alt motiv foarte profund este lipsa unor surse româneşti dedicate unei perioade istorice demult apuse respectiv unei culturi îndepărtate ca spaţiu geografic. Datorită tuturor acestor raţiuni, monografia de faţă merită o apreciere deosebită pentru efortul depus în redactarea ei. Mai mult, având în vedere expunerea anterioară recomandăm publicarea într-o editură naţională.

Cititorul va fi fascinat de forţa unor vremuri trecute şi va simţi din plin valoarea raţiunii şi bucuria descoperirii unor legi de gândire profunde.

*Ianuarie 2010*

*Conf. dr. Mircea Crâşmăreanu*
*Facultatea de Matematică*
*Universitatea "Al. I. Cuza"*
*Iaşi*

# Prefață

La începutul istoriei, conceptele matematice au reprezentat o modalitate prin care oamenii primitivi percepeau obiectele și fenomenele din mediul înconjurător, transformându-le apoi în reprezentări care să îi ajute în viața de zi cu zi. Într-o primă etapă, semenii noștri nu reușeau să abstractizeze în totalitate noțiunile matematice, de aceea, până a deveni știință exactă, matematica oferea soluții bazate pe intuiție, percepție, observare, sau experimentare practică.

Începând cu mijlocul secolului al V-lea î.Hr. matematica a cunoscut o amplă dezvoltare în plan teoretic. Delimitarea definitivă a matematicii ca știință teoretică a fost impusă de către vechii greci. Aceștia au fost primii care au introdus demonstrația, justificau riguros soluțiile problemelor, ofereau metode logice ce permiteau generalizări și consecințe fără a face apel la realitatea înconjurătoare. Toate aceste cunoștințe teoretice au fost rodul unor acumulări matematice de-a lungul mileniilor, începând cu simplele determinări pe cale empirică, și terminând cu efectuarea unor calcule a căror precizie au uimit până și pe matematicienii epocii moderne.

Aceste aspecte pragmatice ale matematicii sunt mai puțin abordate la nivel educațional. Astăzi, programele școlare cuprind tot mai multe noțiuni teoretice, trecând în plan secundar caracterul practic-aplicativ al matematicii. Să nu uităm totuși, că matematica a apărut din necesități practice; o desprindere forțată din planul practic în cel teoretic poate duce adeseori la dificultăți în învățare. Cunoașterea de către elevi a cauzelor apariției conceptelor matematice precum și evoluția acestora în timp, poate să conducă la stabilirea unor conexiuni logice între concret și abstract și la o percepție mai bună a noțiunilor teoretice.

Lucrarea de față se adresează unui spectru larg de cititori, fiind utilă atât elevilor sau cadrelor didactice care doresc să-și îmbogățească cunoștințele privind istoria matematicii, cât și pasionaților în domeniul descifrării tăblițelor mesopotamiene cu conținut matematic. Ea are ca obiect prezentarea unor aspecte generale ale istoriei matematicii, în special a celor dezvoltate în Câmpia Mesopotamiei, până la delimitarea definitivă ca știință teoretică. Primele probleme cu caracter teoretic au apărut cu mult timp înainte; ele au fost concepute de către vechii babilonieni și egipteni acum 3000 de ani î.Hr. Egiptul antic a jucat un rol definitoriu în dezvoltarea matematicii ca știință, însă în capitolele cărții ne vom ocupa mai mult de aplicațiile matematice ale mesopotamienilor.

În primul capitol sunt abordate câteva aspecte generale privind apariția noțiunilor fundamentale de matematică, începând cu epoca preistorică și continuând cu epoca antică. În acest capitol sunt introduse conceptele numerologice, evoluția în timp a simbolurilor și semnelor matematice cu privire la numărare și măsurare.

Capitolele doi și trei prezintă particularități ale matematicii mesopotamiene, pornind de la simplele evidențe contabile și ajungând până la o serie de raționamente în plan teoretic și practic. Aplicațiile sunt traduceri ale tăblițelor matematice ale mesopotamienilor, aflate în marile colecții de antichități din lume.

În anexe sunt prezentate fotografiile principalelor tăblițe matematice prezentate în lucrare.

*Bârlad, Ianuarie 2010*

*Autorul*

# Capitolul I

# Apariția matematicii

## ***1.1 Simbolurile numerice din preistorie***

Primele noțiuni elementare de matematică au apărut odată cu dezvoltarea materială și spirituală a umanității. În momentul în care oamenii primitivi au început să-și confecționeze unelte și să-și procure mijloacele de existență, a apărut necesitatea de a evalua cantitativ și calitativ rezultatele muncii. Viața în colectivitate a omului primitiv a impus unele reguli de conviețuire, o anumită ordine și disciplină, respectarea unor ierarhii. Triburile primitive își alegeau un anumit lider, de regulă cel mai experimentat vânător. Acesta trebuia să ia unele hotărâri în privința repartizării bunurilor colective, prin urmare, a apărut nevoia efectuării primelor calcule rudimentare. În privința confecționării armelor, vânătorii au observat că vârful unei sulițe este mai eficace dacă are o anumită formă și este ascuțit sub un anumit unghi. Toate aceste activități ale strămoșilor noștri nu puteau exista și nu puteau evolua dacă nu erau trecute prin filtrul gândirii, fără o percepție asupra noțiunilor elementare de matematică.

Dacă primele semne ale civilizației sunt întâlnite în paleoliticul inferior, primele semne ale culturii umane au apărut acum *70000* de ani. Săpăturile efectuate în caverna *Grotte des Pigeons* (Maroc), au scos la iveală o serie de scoici decorate, din specia *Nassarius gibbosulus*. Pe lângă faptul că aceste scoici erau folosite ca elemente de podoabă, după unii cercetători, acestea erau utilizate și ca valoare de schimb. În multe regiuni de pe continentul african, scoicile au fost folosite până în epoca modernă pe post de monede. O altă descoperire importantă ce a scos la lumina zilei obiecte ce au o vechime de *70000* de ani, a fost făcută în peștera *Blombos* din Africa de Sud. Aici au fost descoperite scoici din aceeași specie cu cele descoperite în caverna *Grotte des Pigeons*, unelte confecționate din oase, precum și figuri geometrice desenate pe pietre.

*Piatră cu modele romboide, peștera Blombos*

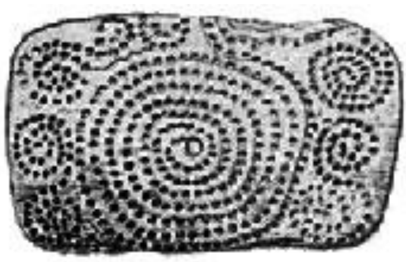
*Forme geometrice, peștera Lascaux*

Izvoarele arheologice atestă încă din paleoliticul superior preocupări ale oamenilor în domeniul picturii, în vestul, estul și sudul Europei, dar și pe continentul African. Dacă în vestul Europei predomină picturile rupestre ale animalelor (mamuți, cai, reni, urși, etc.) în est întâlnim numeroase picturi geometrice (puncte, linii paralele, unghiuri, romburi, spirale, etc.) efectuate pe diferite obiecte. Interesant este faptul că, numărul simbolurilor geometrice de pe anumite piese, interacționează matematic.

Să analizăm câteva dintre obiectele ce conțin desene cu reprezentări geometrice, descoperite în sud-estul Europei.

Prezentam mai jos una din primele opere de acest gen descoperite la *Mitoc*, județul Botoșani, Romania. Piesa reprezintă o amuletă confecționată dintr-un fragment de os, pe care au fost inscripționate grupuri de linii paralele. Amuleta datează din mileniul 27 *î.Hr.* și este împărțită în trei cadrane prin intermediul a trei unghiuri. Unghiul din dreapta cuprinde în deschiderea sa noua linii paralele, iar unghiurile din partea stângă cuprind între laturi trei, respectiv șase linii paralele. Semnele ne indică o relație matematico-geometrică între multiplii numărului trei. Se pare că ne aflăm în fața primei tablete matematice a omenirii unde sunt cunoscute pentru prima dată cifrele 3, 6 și 9, mai mult decât atât, suntem puși în fața primei operații aritmetice .

*Amuleta de la Mitoc-România*



*Plachetă descoperită la nord de lacul Baical- Rusia*

O piesă misterioasă, datată aproximativ *18.000-16.000* î.Hr. a fost descoperită la nord de lacul *Baical*, în Rusia. Placheta are incizată în partea centrală o spirală formată din *243* de puncte, în stânga avem două spirale, cea de jos are *63* de puncte iar cea de sus *45* de puncte, iar în dreapta alte două spirale, cea de jos are *58* de puncte iar cea de sus *53* de puncte. În partea de sus avem o construcție circulară cu *10+4 =14* puncte și o linie ondulată cu *11* puncte. Iată cum interacționează matematic aceste numere: *63+45+14=122, 58+53+11=122, 58+53=111, 243+122=365*.

În stațiunea paleolitică de la *Cosăuți* (*20.000-10.000* î.Hr) a fost descoperit de către arheologul *Ilie Borziac* un os tubular, în interiorul căruia s-a găsit un ac confecționat tot din os. Por-acul este șlefuit pe trei suprafețe exterioare pe care au fost incizate grupuri de crestături.

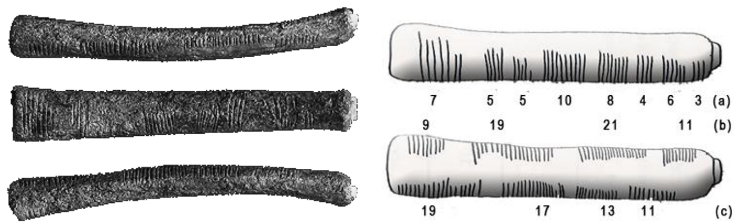
Pe prima suprafață întâlnim grupuri de crestături formate din 14 și 7 liniuțe, pe a doua suprafață grupurile *16* și *10* iar pe a treia *7* și *9*. Se poate observa că suma acestor "numere" este egală cu produsul „numerelor" de pe fața a treia *7×9=63*. *14+7+16+10+7+9=63*, iar perechea de „numere" *7* și *9* o regăsim incizată pe foarte multe piese de artă din paleolitic.

În anul *1937*, în localitatea *Vestinice* din Moravia, a fost descoperit un os de lup provenind din epoca paleolitică pe care sunt vizibile *55* de crestături paralele. Interesant este faptul că aceste crestături sunt grupate după anumite reguli. Primele *25* sunt grupate câte *5*, şirul terminându-se cu o crestătură mai mare, apoi se continuă cu alte *30* de crestături. Este clar că ne aflăm în faţa unei înregistrări numerice pe un original prototip al răbojului, creat de omul de peşteră.

La granița dintre Congo și Uganda, în Africa Centrală, pe malul lacului *Edward*, în localitatea *Ishango,* a fost descoperit un os cu o vechime de *25000* de ani pe suprafața căruia sunt vizibile mai multe crestături grupate.

Oamenii de știință au observat că aceste crestături nu reprezintă o simplă înregistrare numerică, ele scot în evidență o serie de caracteristici ale numerelor. Linia *(a)* din figură, pare să ilustreze metoda dublării, iar pe linia *(b)* sunt reprezentate grupuri de crestături corespunzătore numerelor

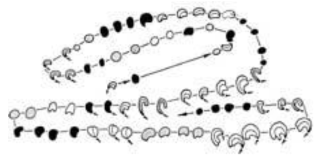
9,19,21 și 11.Se poate observa că la extremități avem valorile *10+1* și *10-1*, în mijloc valorile *20+1* și *20-1*, iar *9+19+21+11=60*. Pe linia *(c)* întâlnim numerele prime cuprinse între *10* și *20* ce interacționează astfel: 19+11=30, 17+13=30




*Os descoperit în localitatea Ishango - Africa Centrală*

Oamenii primitivi au remarcat faptul că viața lor le era influențată de fenomenele temporale: schimbarea zilei și a nopții, alternarea anotimpurilor, mișcarea aparentă a astrelor etc. Pentru a prezice aceste fenomene, ei au simțit nevoia orientării în timp, încercând prin diverse metode să stocheze astfel de informații.

*Os descoperit în Abri Blanchard, Franţa*



*Semne ce ilustrează calendarul lunar*

În situl arheologic *Abri Blanchard* din Franța, a fost descoperit un os ce are o vechime de *25000-30000* de ani pe suprafața căruia sunt incizate mai multe semne de formă circulară și semicirculară. Semnele au diferite dimensiuni, unele dintre ele sunt mai întunecate și alternează asemănător fazelor lunii. După părerea specialiștilor,  pe acest os a fost ilustrat un calendar lunar.

Așadar, simbolurile numerice au fost înregistrate încă din paleolitic, atât pe continentul european cât și pe cel african.  Să fie o simplă întâmplare faptul că numărul acestor simboluri interacționează matematic? Descoperirea unui număr mare de obiecte cu astfel de însemnări, contrazice această ipoteză.  Omul din paleoliticul superior a avut destul timp la dispoziție pentru a studia semnele cerului, rotația Soarelui, a Lunii,  fenomenele repetabile care  influențau viața cotidiană, iar aceste semne au fost memorate și stocate pe diferite obiecte de artă și cult.

Cu toate acestea, nu avem certitudinea că simbolurile descoperite fac parte dintr-un limbaj matematic, însă, construcțiile megalitice care au rămas până în zilele noastre, sunt o dovadă certă că acești oameni cunoșteau astrele, știau să facă măsurători și puteau efectua calcule matematice rudimentare.

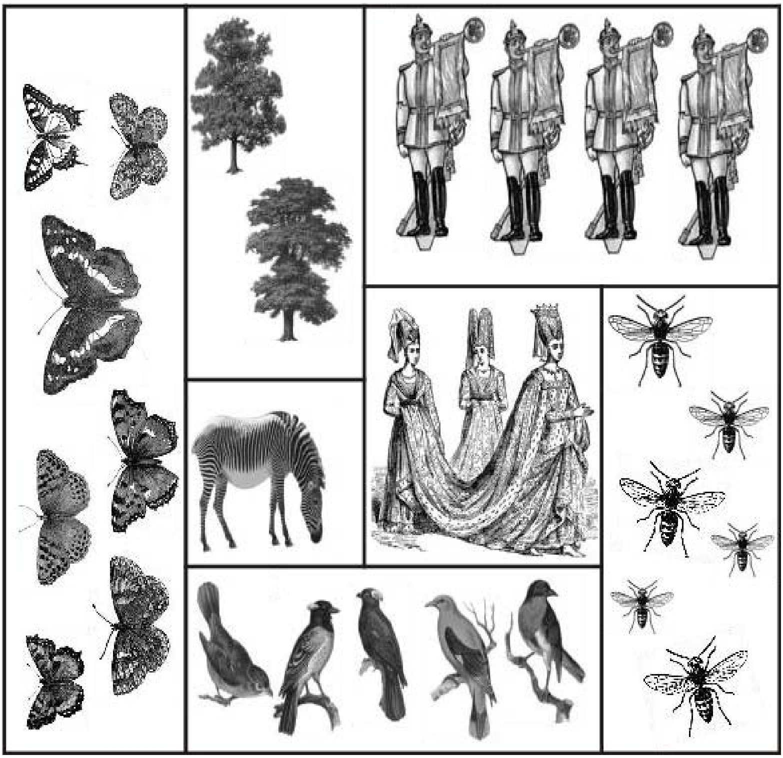
## ***1.2  Apariția numerelor***

Nu putem preciza cu exactitate  când au început oamenii să cunoască numerele, însă până a ajunge aici  a fost nevoie de  numeroase modificări la nivelul judecăţilor  logice precum  şi la nivelul  capacităţii de abstractizare. Ne punem următoarea întrebare:  putem determina  numărul de elementele ale unei mulţimi  fără a o număra? Prin experienţe practice s-a demonstrat  faptul ca animalele nu pot număra, dar ele pot face deosebiri în legătură cu numărul de elemente ale unei mulţimi formate din *4-5* elemente.  Pentru a găsi răspuns la  întrebarea de mai sus, pornim de la o interesantă relatare a matematicianului de origine lituaniană, *Tobias Dantzig*.

„Un nobil francez dorea să scape de un corb ce locuia în turnul castelului, dar de fiecare dată când se apropia de turn pasărea zbura intr-un copac din apropiere, aşteptând până ce proprietarul părăsea turnul. Văzând acest lucru, nobilul a trimis doi servitori în turn, spunându-le ca după o perioadă de timp unul din ei să părăsească turnul, iar celălalt să aştepte zburătoarea. Corbul nu a fost păcălit, a aşteptat până a plecat şi al doilea servitor. Atunci nobilul a repetat experienţa cu trei, apoi cu patru servitori, dar corbul aştepta întotdeauna până plecau toţi servitorii. În momentul în care au fost trimişi cinci servitori şi au plecat patru, corbul nu a mai putut face diferenţa şi a revenit în turn”.

Această relatare ne arată că animalele au abilitatea de a determina numărul de elemente a unor mulţimi cu 4 elemente, abilitate întâlnită şi la om. Prin teste efectuate oamenilor, (testele constau în vizualizarea pentru scurt timp a unor mulţimi de obiecte) s-a constatat că subiecţii, indiferent de vârstă, pot percepe numărul exact de elemente, pentru mulţimi formate din *4 - 5* obiecte. Dacă elementele din mulţime depăşeau cifra *5*, numărarea nu mai era atât de exactă, corectitudinea răspunsurilor fiind aleatorie.

La început, gândirea omului primitiv a fost săracă, limitându-se la activităţile necesare supravieţuirii, fiind pus foarte rar în situaţia de a număra dincolo de limita percepției native, iar atunci când o făcea el compara două mărimi, “puțin’ și „mult”. Pentru el, numărătoarea se reducea la o simplă constatare, ca de exemplu: dacă a văzut puține animale sau multe animale. În funcție de treptele dezvoltării umane și de necesitățile comunității, percepția de “mult” a fost și rămâne în continuare o mărime variabilă, dincolo de care omul nu mai este capabil să efectueze numărătoarea.



*Priviți câteva secunde elementele mulțimilor și precizați numărul lor fără a efectua numărătoarea*

Într-o primă etapă "mult" însemna tot ce depășea cifra *2*, când a început numărarea pe degete această cifră s-a extins la *5, 10, 20,* etc. Grecii au folosit mult timp numerele mai mici de *10.000* (o miriadă), vechii egipteni cunoșteau și foloseau numerele până la *10.000.000*, în general popoarele antice aveau un număr maximal care nu putea fi depăşit, iar în vocabularul lor nu exista o expresie care să reprezinte un număr mai mare. Odată cu trecerea timpului, oamenii de știință au realizat că "mult" este o noțiune relativă, asociată noțiunii de infinit. Primul învățat al antichității care a arătat că omul poate număra oricât de mult, a fost *Arhimede* (*287-212 î.Hr.*). Acesta și-a propus să determine un număr mai mare decât firele de nisip care ar încăpea în Univers. (la acea dată, prin univers se înțelegea o sferă cu centru în Soare și raza egală cu distanța de la Soare până la planeta Saturn). El a reușit să determine un număr destul de mare: *unu urmat de 800 de milioane de zero*, și a arătat ca pot fi găsite și alte numere mai mari ce tind spre infinit. Matematicianul Cantor*(1854-1918)* distingea trei niveluri de infinit: infinitul Absolut (Dumnezeu), infinitul matematic (creat de raționamentele umane) şi infinitul fizic (corespunzător universului).

Pentru a comunica numărul de elemente ale unei mulțimi, oamenii din epoca de piatră au utilizat la început cuvintele, stabilind corespondențe cu modelele din mediul înconjurător. Pentru a exprima numărul unu foloseau cuvinte care erau atribuite elementelor unitare (Soarele, Luna), pentru numărul doi foloseau cuvinte atribuite elementelor pereche (ochi, aripi) etc. În acest mod, oamenii au găsit diferite asocieri între cuvintele uzuale și numere. În zilele noastre, unele triburi au în vocabularul lor astfel de cuvinte, de exemplu pentru a exprima numărul patru ei folosesc expresia „degetele struțului", pentru numărul cinci "o mână", pentru numărul zece "două mâini" etc. Rămășițele culturii primitive s-au păstrat prin intermediul acestor triburi ce pot fi întâlnite în America de Sud, Africa sau Australia, unde numărătoarea a rămas într-o fază incipientă. Iată câteva exemple:

În jungla amazoniană, în nord-vestul Braziliei trăiește tribul Piraha, o comunitate de aproximativ *300* de membri. Conform cercetătorilor, limbajul folosit de acest trib nu conține concepte clare pentru exprimarea noțiunii de număr. Membri tribului folosesc o serie de termeni pentru exprimarea aproximativă a cantităților, ca de exemplu „puțin, câteva, mult".Aceștia au considerat că numerele nu le sunt folositoare în cultura lor și nu au încercat să le folosească, pentru ei numărătoarea se reducea la "unu", "doi" și "mult".

Papuașul din Noua Guinee numără îndoind pe rând fiecare deget și emițând un anumit sunet. Pentru *1*, be pentru *2*, be-be etc. Când ajunge la cinci arată mâna și emite sunetul ibon-be, apoi îndoaie degetele celeilalte mâini repetând be, be, be până când ajunge la *10*, arătând ambele mâini și emite sunetul ibon-albi. Procedeul se repetă ajungând la samba-be, un picior și samba-albi, două picioare. Dacă trebuie să numere mai departe papuașul folosește mâinile și picioarele altui ins.

Tribul *Toba* este o comunitate numeroasă (aprox. *47000* locuitori) răspândită pe teritoriile Argentinei, Boliviei și Paraguayului. Aceștia folosesc patru cuvinte de bază pentru exprimarea numerelor de la 1 la *4*. Numerele mai mari le pronunță prin combinarea numerelor de bază.

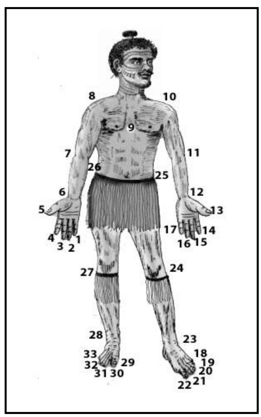
| ***Număr*** | ***Pronunție*** |
|---|---|
| *1* | *nathedac* |
| *2* | *cacayni sau nivoca* |
| *3* | *cacaynilia* |
| *4* | *nalotapegat* |
| $5 = 2 + 3$ | *nivoca cacaynilia* |
| $6 = 2 \times 3$ | *cacayni cacaynilia* |

| | |
|---|---|
| $7 = 1 + 2 \times 3$ | *nathedac cacayni cacaynilia* |
| $8 = 2 \times 4$ | *nivoca nalotapegat* |
| $9 = 2 \times 4 + 1$ | *nivoca nalotappegat nathedac* |
| $10 = 2 + 2 \times 4$ | *cacayni nivoca nalotapegat* |

Populația autohtonă din Republica Vanuatu, numită *New Hebrides* în timpul perioadei coloniale, situată în Oceanul Pacific de Sud, folosește următoarele expresii pentru numerele de la *1* la *10*:

| | *Pronunție* | *Traducere* |
|---|---|---|
| *1* | *tai* | *unu* |
| *2* | *lua* | *doi* |
| *3* | *tolu* | *trei* |
| *4* | *vari* | *patru* |
| *5* | *luna* | *o mână* |
| *6* | *otai* | *adaugă unu* |
| *7* | *olua* | *adaugă doi* |
| *8* | *otolu* | *adaugă trei* |
| *9* | *ovair* | *adaugă patru* |

Băștinașii din insulele aflate în strâmtoarea *Torres*, din nordul Australiei, aveau un mod foarte original de a număra. Pentru a arăta numărul, ei atingeau diferite părți ale corpului omenesc, după cum se poate observa în desenul alăturat. Pentru numere mai mari de 33 se ajutau de bețișoare.

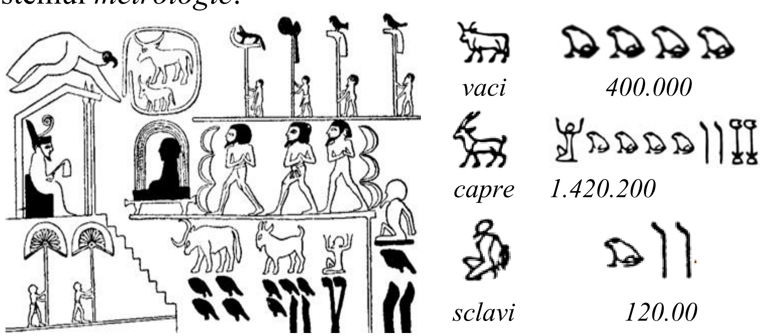



Ca şi celelalte vieţuitoare, oamenii primitivi puteau să distingă mulţimile formate din *5* elemente. La început, strămoșii noștri nu erau preocupați pentru a ţine evidenţa mulţimilor cu un număr mare de elemente, însă odată cu dezvoltarea comunităților oamenii au fost nevoiți să facă progrese în privința noțiunilor de aritmetică elementară. Creşterea populaţiei, dezvoltarea activităţilor productive, diversificarea formelor de proprietate, creşterea valorii produselor de consum, a dus la apariţia comerţului şi a schimbului de mărfuri. Dezvoltarea formelor de schimb dintre triburi a stat la baza evaluării cantitative a mărfurilor. Comerţul în faza incipientă putea fi efectuat prin compararea intuitivă a cantităţilor, fără a număra. Cum efectuau oamenii schimburile de mărfuri dacă nu cunoşteau numerele? Procedeul era simplu: mărfurile erau aşezate în două grămezi distincte, apoi, câte un bărbat din fiecare trib transporta în acelaşi timp produsele de la o grămadă la alta, până când întreaga cantitate era schimbată. În zilele noastre, spunem că între cele două mulţimi de produse s-a realizat o corespondenţă *biunivocă(completă)*.

Toate mulţimile în care se poate stabili o astfel de corespondenţă, au o calitate comună: au acelaşi număr de elemente. În acest mod se formează noţiunea de număr *cardinal.* Aşadar, procesul de numărare a început odată cu punerea în corespondenţă a mărimilor. Dacă corespondenţa nu era completă exista posibilitatea de a compara mulţimile, și anume, dacă una dintre cele două mulțimi rămânea cu elemente nepuse în corespondență, se putea trage concluzia că acea mulțime este mai mare. Așadar, prin aceste corespondențe putem număra fără a cunoaște numerele. Așa se explică faptul că, unele triburi nu au în vocabularul lor noțiunea de număr așa cum îl concepem noi *3,4,5* etc., dar pot ține evidența unei mulțimi formată din mai multe elemente.

Un alt aspect al cunoaşterii cât mai exacte a mulţimilor, îl constituie ordonarea elementelor sale. Omul primitiv trebuia să cunoască care dintre animalele vânate erau cele mai mari, care era vitejia semenilor pe câmpul de luptă - care era primul, al doilea, al treilea etc. Chiar dacă o mulţime poate fi ordonată în mai multe moduri (vânătorii pot fi ordonaţi după vitejie, înălţime, vârstă etc.), rezultatul numărării este acelaşi. Numerele care stabilesc ordinea se numesc numere *ordinale.*

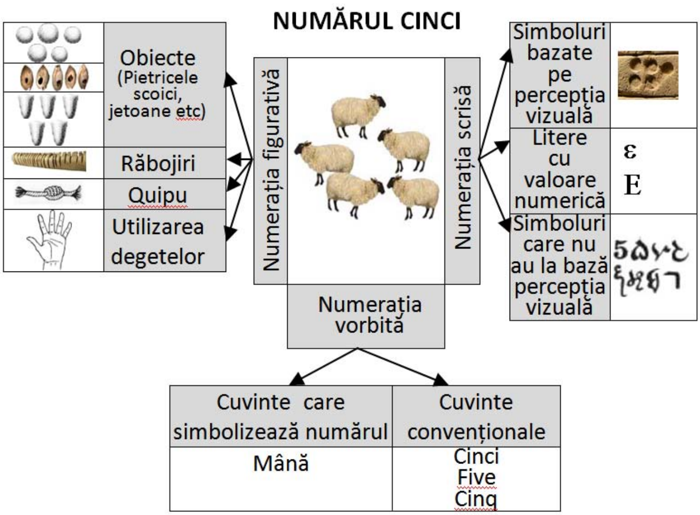
Cea mai mare inovaţie după inventarea scrisului a fost abstractizarea noţiunii de număr, în sensul mulţimii de obiecte de acelaşi fel. Într-o primă etapă, folosind sistemul de numeraţie primitiv, pentru a reprezenta un număr de *3* oi, oamenii desenau prin repetiţie *3* oi. Într-o fază superioară, oamenii au recurs la utilizarea unui sistem mai evoluat, sistemul *metrologic*.




*Scena redă captura de război luată de faraonul Nemer*

Acesta consta în reprezentarea mărimilor cu ajutorul a două simboluri. De exemplu, pentru a reprezenta *3* oi se folosea un simbol pentru numărul *3*, urmat de un simbol pentru oaie. Astfel, simbolul trei nu era în totalitate abstractizat, dar această reprezentare metrologică a stat la baza ideii de număr ca noţiune abstractă.

Abstractizarea noţiunii de număr a fost posibilă numai atunci când omenirea a atins treptele superioare ale dezvoltării. Pentru oamenii primitivi, precum şi pentru unele triburi din zilele noastre, semnificaţia mulţimilor cu acelaşi număr de elemente este diferită şi folosesc expresii verbale diferite pentru a exprima acelaşi număr. Pentru ei nu există noțiunea de *număr de elemente ale unei mulțimi* (ceea ce astăzi numim cardinalul unei mulțimi) deci, nu puteau stabili o legătură între o mulțime formată din cinci cai și o mulțime formată din cinci oi. Cele două mulțimi reprezentau pentru ei concepte total diferite, fără să conștientizeze că mulțimile au același număr de elemente. Chiar dacă realizau corespondențe cu pietricele, bețișoare etc, aveau grijă ca pietrele folosite pentru numărarea cailor să aibă altă formă decât pietrele folosite la numărarea oilor.

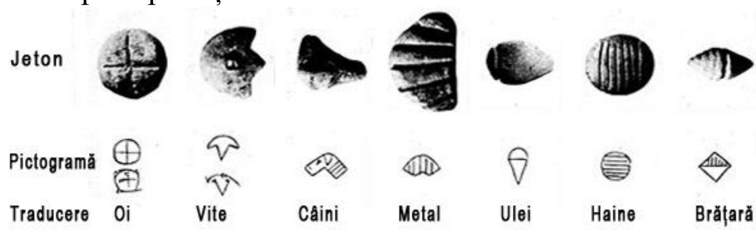


Aşadar, strămoşii noştri au avut diverse posibilităţi pentru a exprima noţiunea de număr, la început prin intermediul limbajului sau cu ajutorul corespondenţelor, mai târziu, când numărul era pe deplin abstractizat, cu ajutorul simbolurilor.

Mult timp numărarea s-a făcut cu ajutorul degetelor de la mâini, însă pentru a ţine minte cantităţile măsurate s-a recurs la unele “instrumente” precum: pietricele, jetoane, noduri făcute pe un şnur, scoici, beţişoare, răbojuri. Cu ajutorul acestor “instrumente” se putea realiza o numărătoare lipsită de specificitate. O grămadă de pietricele indica o cantitate de articole, fără a preciza natura lor, şi nu putea servi ca o modalitate de a stoca informaţii pentru perioade lungi de timp. Prin urmare, exista pericolul ca oamenii să uite dacă grămada de pietricele a fost pusă în corespondență cu o turmă de animale sau cu silozurile cerealiere.

Pentru a avea o evidență care să reziste în timp, oamenii au inventat un sistem original de înregistrare a datelor. Deoarece formele pietricelelor nu satisfăceau pe deplin nevoile numărării, s-a recurs la înlocuirea acestora cu jetoane din lut ars ce erau utilizate pentru a reprezenta, din punct de vedere al formelor, mărfuri specifice: un cilindru pentru animale; conuri, sfere și discuri pentru a indica unităţi de măsură pentru cereale etc. Este logic că numai o agricultură practicată într-o economie dependentă de redistribuirea produselor alimentare, şi planificarea nevoilor de subzistenţă , ar necesita un sistem fiabil de evidenţă contabilă, iar jetoanele de lut au fost o soluţie pentru organizarea și stocarea datelor. Această practică de contabilitate a apărut în Câmpia Mesopotamiei aproximativ în anul *8000 î.Hr*.

Prin anul *6000 î.Hr*. jetoanele de argila erau răspândite în întregul Orient Mijlociu. În toate siturile arheologice importante aflate în Irak, Iran, Siria, Turcia sau Israel erau descoperite de la câteva zeci până la câteva sute de jetoane. Mai târziu, în anul *3300 î.Hr*., conurile, sferele, cilindrii şi discurile, care au apărut cu cinci mii de ani mai devreme, erau încă în uz, apoi, aproape de sfârşitul celui de-al patrulea mileniu î.Hr., au fost folosite jetoane de lut mai complexe, cu forme mai variate, de la simple corpuri geometrice până la reprezentări de obiecte și animale, având marcate pe suprafață numeroase semne.




Cum se explică faptul că jetoanele au căpătat o formă din ce în ce mai complexă? Răspunsul e simplu și este dat de evoluția și complexitatea societății umane. De exemplu, în Sumer au luat naștere primele mari orașe iar jetoanele par să reprezinte numărul tot mai mare de produse finite, caracteristice economiei urbane.

Pentru a veni în sprijinul tranzacțiilor economice, oamenii au stocat și sigilat jetoanele într-o sferă (plic) de lut, pe care erau inscripționate o serie de pictograme, ce au servit ca un fel de semnătură. Aceste ”plicuri” aveau și un mare dezavantaj: nu erau transparente; în cazul în care se uita conținutul, sigiliul trebuia “rupt”, iar acest lucru putea să ducă la anularea tranzacției. Pentru a remedia acest inconvenient, negustorii antici au găsit următoarea soluție:

au imprimat jetoanele de lut ars pe suprafața lutului crud din care era confecționat ”plicul”. În felul acesta urmele jetoanelor din interior erau vizibile pe suprafața plicului. Aceste amprente ale jetoanelor au fost primele semne ale scrierii, așadar, putem afirma că apariția scrierii s-a datorat nevoilor de a efectua înregistrări numerice. Acest mod de stocare și înregistrare a datelor a continuat până ce oamenii și-au dat seama că urmele lăsate pe plic reflectau în totalitate conținutul, așa că jetoanele au devenit de prisos. Astfel, s-a trecut la scrierea pe tăblițe de lut cu ajutorul pictogramelor și a simbolurilor, o fază incipientă a scrisului, de unde va rezulta mai târziu scrierea cuneiformă.

O altă modalitate de înregistrare numerică a valorilor și de contabilizare a datelor, o întâlnim la vechile popoarele din America de Sud. Incașii foloseau un instrument numit *quipu*. Instrumentul este alcătuit din numeroase sfori colorate atârnate vertical sub forma unei draperii. Pe sfori existau noduri aflate la anumite distanțe ce semnificau numere cuprinse între *1* și *1000*. De asemenea, culorile aveau semnificații diferite, sfoara roșie servea la numărarea ostașilor, cea albă pentru număratul argintului, cea verde pentru număratul pâinilor etc.

Exprimarea grafică a simbolurilor numerice s-a făcut la început prin crestarea oaselor şi crengilor, apoi dăltuirea în piatră sau inscripţionarea pe tăbliţe din lut şi mai târziu pe papirusuri.

Răbojul reprezintă prima ”condică” pentru socotit folosită de strămoșii noștri. Aceasta era confecționat din ramura copacilor sau oasele animalelor, pe care omul primitiv inciza semne grafice, de regulă **I.** Iniţial s-a atribuit unui element simbolul grafic **I ,** pentru două elemente simbolul **I I** , pentru 3 elemente simbolul **I I I** etc. Pentru numere foarte mari scrierea era foarte dificilă, prin urmare, s-a introdus un nou simbol pentru cifra *5***.** . Șirul numerelor putea continua în următorul mod:

Când s-a trecut la scrierea pe tăblițe de lut s-au folosit la început pictogramele. Acestea reprezentau un șir de desene simbolice inspirate de formele unor lucruri, obiecte şi fiinţe reale.

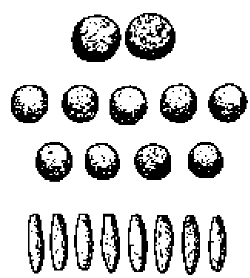
Scrierea pe papirusuri a simbolurilor matematice reprezintă o etapă superioară a scrisului matematic. Egiptenii au trecut la scrierea pe papirusuri odată cu introducerea semnelor hieratice. Aceștia preparau foaia de scris din tulpina trestiei de papirus, pe care scriau folosind două tipuri de pigmenți, negru și roșu.

## ***1.3 Sisteme de numerație***

Odată cu nevoia *contabilizării* produselor și bunurilor de consum, oamenii au recurs la diferite metode pentru a realiza înregistrări numerice cât mai corecte. De exemplu, pentru a calcula numărul oilor dintr-o turmă, păstorul a pus în corespondență fiecare animal cu o pietricică.

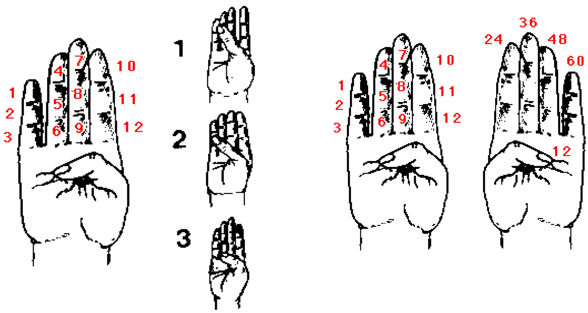
Dacă  se naştea un miel, păstorul avea grijă să adauge la grămadă o pietricică, iar dacă murea sau era sacrificată o oaie, pietricica era înlăturată. În acest mod oamenii primitivi ţineau evidenţa  produselor și bunurilor de consum fără a comite nici o eroare. Nu întâmplător denumirea cuvântului *calcul,* derivă din cuvântul latin *calculus* – pietricică.  Acest procedeu prezenta anumite dezavantaje atunci când mulțimile numărate erau foarte mari. Pentru a evita folosirea unui număr mare de  pietricele, în cazul unei turme numeroase, omul a recurs la următoarea convenţie.

A grupat un număr de pietricele (presupunem că *10*) și le-a înlocuit cu o piatră “ mai valoroasă”, de altă formă sau de altă culoare. După o perioadă de timp, în momentul când a acumulat un număr mare de pietre din categoria celor “mai valoroase” a repetat procedeul, grupându-le câte 10 și înlocuindu-le cu o altă piatră, de o altă formă decât cele folosite până atunci.  În felul acesta a pus în corespondenţă o singură piatră cu un număr mai mare de oi (în cazul nostru cu *100*). În acest mod, fără să conştientizeze, oamenii au introdus sistemele de numeraţie în diferite baze. În figura alăturată avem un calcul primitiv în baza *10,* reprezentând  numărul *298.*

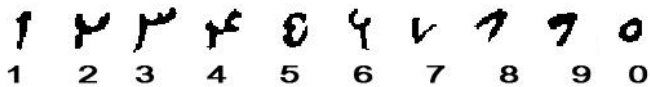


Sistemul de numeraţie folosit  încă din antichitate şi care s-a transmis până în zilele noastre, este  sistemul zecimal, însă popoarele antice foloseau şi alte sisteme de numerație, în baza *5*, în baza *12*, în baza *20* sau în baza *60.* Apariţia sistemelor de numeraţie în baza *5, 10* şi *20* s-a datorat faptului că, prima numărătoare a fost efectuată de către om, pe degete; 5 degete la o mână*, 10* la ambele mâini şi *20* de degete la mâini şi picioare. Dar cum au apărut sistemele de numeraţie în baza *12* sau *60*? Un posibil răspuns la această întrebare îl găsim dacă studiem modul în care anumite popoare făceau numărarea cu ajutorul degetelor.

Acestea foloseau degetul mare pentru a marca falangele fiecărui deget. Deoarece fiecare deget are trei falange, un deget putea fi folosit pentru a indica trei numere, deci, patru degete de la o mână acopereau numerele de la 1 la *12*. Cealaltă mână era folosită pentru a marca multiplii lui *12, 24,36,48, 60.*




Popoarele din antichitate au introdus semne distincte pentru reprezentarea grafică a numerelor, fiecare popor stabilind “baza” de numeraţie (câte simboluri de un anumit ”ordin”, formează un simbol de ordin superior), precum şi propriile reguli de formare a numerelor. Ansamblul regulilor de grupare a elementelor unei mulţimi în scopul numărării lor şi de reprezentare simbolică a numărului obţinut se numeşte sistem de numeraţie. Aici se impune următoarea precizare: nu trebuie confundat semnul (hieroglifa) cu simbolul prin care este reprezentat numărul. De exemplu mayaşii foloseau 3 hieroglife pentru a simboliza numerele de la 0 la 19 şi anume: “”- pentru zero,” • ”- pentru o unitate,” ”pentru cinci unități; babilonienii utilizau 3 hieroglife pentru a simboliza numerele de la 0 la 59: ”” pentru zero”  ”pentru o unitate, ” ”pentru zece unități. În manuscrisele matematicianului arab *al-Biruni's* (*1082*) apar *10* semne pentru scrierea numerelor în baza zece.

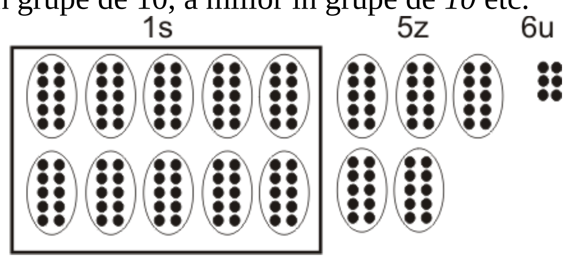



După felul în care sunt grupate, ordonate şi reprezentate semnele matematice, putem distinge două tipuri de sisteme de numeraţie: sistem *poziţional* şi sistem *nepoziţional* (*aditiv*, *aditiv-substractiv*, *multiplicativ*) .

Sistemele *poziţionale* sunt caracterizate prin faptul că, un simbol (cifră) din alcătuirea unui număr are o dublă valoare, o valoare dată de semnificaţia simbolului şi o altă valoare dată de poziţia pe care o ocupă în număr.

*Sistemul în baza 10*, folosește *10* simboluri: *0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9*.

Pentru a efectua numărarea grupăm elementele mulțimii câte *10*, dacă rămân elemente negrupate acestea sunt obligatoriu mai puține de *10* și formează ordinul unităților. Numărul de zeci obținut se grupează câte zece, obținând zeci de zeci, adică sute. Dacă rămân grupe de zeci negrupate, acestea formează ordinul zecilor. Analog se trece la gruparea sutelor în grupe de 10, a miilor în grupe de *10* etc.



*Scrierea numărului 156 în baza 10*

Numerele scrise în baza 10 pot fi descompuse în funcție de puterile numărului 10, de exemplu, numărul *4374* poate fi descompus astfel:

$$4\cdot10^3+3\cdot10^2+7\cdot10^1+4\cdot10^0,$$

adică, patru grupe de ordinul miilor, trei grupe de ordinul sutelor, șapte grupe de ordinul zecilor și patru unități (reamintim  că orice număr natural, nenul, la puterea *0* este *1)*.

Astăzi, pentru scrierea numerelor în baza *10* folosim cifrele arabe. Acestea au fost inventate de către indieni şi au fost introduse prin sec. al VIII-lea în Europa de către arabi.

*Sistemul cu baza 2*, numit și binar, folosește 2 simboluri, 0 și 1, grupând elementele mulțimii în perechi pentru a fi numărate. Numărul *4374* poate fi scris în baza 2 astfel: $(1000100010110)_2$ sau,

$$1\cdot2^{12}+ 0\cdot2^{11}+ 0\cdot2^{10}+ 0\cdot2^9+ 1\cdot2^8+ 0\cdot2^7+ 0\cdot2^6 +0\cdot2^5 +1\cdot2^4 + 0\cdot2^3+ 1\cdot2^2+ 1\cdot2^1+ 0\cdot2^0.$$

Sistemul de numerație în baza doi a fost utilizat de către unele triburi pentru a efectua numărătoarea.  În anul *1889* antropologul A. C. Haddon descrie  un trib din nordul Australiei care folosea numerația în baza doi. Aceștia nu cunoșteau scrierea, însă aveau  în vocabularul lor un set de cuvinte prin care exprimau numerele:

*1  urapun=1*
*2  okosa=2*
*3  okosa- urapun=2+1*
*4  okosa- okosa=2+2*
*5  okosa-okosa- urapun=2+2+1*
*6  okosa -okosa- okosa =2+2+2*

Pentru numerele mai mari de șase foloseau expresia “*mult”*

Prima descriere a sistemului de numerație binar a fost făcută de către matematicianul indian *Pingala* în sec *V î.Hr*. În sec. *XVII* matematicianul german *Gottfried Leibniz* a descris sistemul binar, folosindu-se chiar de simbolurile *0* şi *1*, ca mai târziu în *1937*, inginerul şi matematicianul american, *Claude Shannon*, să pună bazele teoriei informaţiei precum şi cele ale proiectării circuitelor electronice digitale.

*Sistemul în baza 5* folosește *5* simboluri, *0,1,2,3,4*, în corespondență cu numărul de degete de la o mână. Numărul *4374* poate fi scris în baza *5* astfel: $(114444)_5$ sau

$$1\cdot 5^5+ 1\cdot 5^4+ 4\cdot 5^3+ 4\cdot 5^2+ 4\cdot 5^1+4\cdot 5^0.$$

Anumite triburi aborigene din nordul Australiei folosesc numerația vorbită în baza *5*

| Nr | pronunție | Nr | pronunție |
|---|---|---|---|
| *1* | *wanggany* | *11* | *marrma rulu ga wanggany* |
| *2* | *marrma* | *12* | *marrma rulu ga marrma* |
| *3* | *lurrkun* | *13* | *marrma rulu ga lurrkun* |
| *4* | *dambumiriw* | *14* | *marrma rulu ga dambumiriw* |
| *5* | *wanggany rulu* | *15* | *lurrkun rulu* |
| *6* | *wanggany rulu ga wanggany* | *16* | *lurrkun rulu ga wanggany* |
| *7* | *wanggany rulu ga marrma* | *17* | *lurrkun rulu ga marrma* |
| *8* | *wanggany rulu ga lurrkun* | *18* | *lurrkun rulu ga lurrkun* |
| *9* | *wanggany rulu ga dambumiriw* | *19* | *lurrkun rulu ga dambumiriw* |
| *10* | *marrma rulu* | *20* | *dambumiriw rulu* |

| | |
|---|---|
| *25* | *dambumirri rulu* |
| *50* | *marrma dambumirri rulu* |
| *75* | *lurrkun dambumirri rulu* |
| *100* | *dambumiriw dambumirri rulu* |
| *125* | *dambumirri dambumirri rulu* |
| *625* | *dambumirri dambumirri dambumirri rulu* |
| *750* | *dambumirri dambumirri dambumirri ga* |

Sistemele de numeraţie în baza doi şi baza cinci sunt considerate sisteme de numeraţie primitive. Ele au fost primele sisteme care au stat la baza numărării. În zilele noastre sistemele nu mai sunt utilizate pentru a efectua calculele matematice datorită dificultăților de scriere, în schimb sistemul de numerație în baza doi și-a găsit aplicabilitate în domeniul informaticii.

*Sistemul în baza 12* numit și duodecimal folosește *12* simboluri, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11. Numărul *4374* poate fi scris în baza *12* astfel: $(2,6,4,6)_{12}$ sau,

$$2\cdot 12^3+6\cdot 12^2+4\cdot 12^1+6\cdot 12^0.$$

Sistemul duodecimal a apărut din nevoia oamenilor de a grupa obiectele câte *12*. El a fost folosit de către popoarele germanice, astăzi fiind utilizat în astronomie, la împărțirea anului în *12* luni, la împărțirea zilei în $2\times 12$ ore, și în anumite domenii comerciale, la ambalarea produselor (farfurii, batiste, etc.) în duzini sau jumătăți de duzini. În domeniul comercial sunt folosite următoarele ordine: a)unitatea, b)duzina =*12* unități, c)grosul =*12* duzini =*144* unități, d) masul =*12* grosi=*144* duzini=*1728* unități.

*Sistemul în baza 20* folosește 20 simboluri, de la 0 la 19 corespunzător numărului de degete de la mâini și picioare. Numărul 4374 poate fi scris în baza 20 astfel: $(10,18,14)_{20}$ sau,

$$10\cdot 20^2+18\cdot 20^1+14\cdot 20^0.$$

Sistemul a fost utilizat cu precădere în America Centrală de către popoarele precolumbiene, în Alaska și Groenlanda de către eschimoși. În cultura europeană s-a făcut simțită utilizarea sistemului, prin nevoia oamenilor de a grupa elementele câte *20.* O parte din popoare europene, utilizează în vocabular cuvântul *20* pentru a denumi alte numere, de exemplu francezii spun la *90*, *quatre-vingts-dix*, adică $4\times 20+10$. Tot la europeni întâlnim numărul *20* ca diviziune monetară. La englezi *20* de șilingi=1 liră, iar la români, *20* de lei =*1* pol.

Mayașii aveau un sistem pozițional în baza *20*. Citirea numerelor era făcută de sus în jos, în sensul că deasupra erau semnele atribuite ordinelor superioare iar la bază se găsea semnul atribuit unității. Pentru măsurarea timpului aveau un sistem de numerație diferit față de cel utilizat în calculele matematice deoarece, la al treilea ordin, factorul de multiplicitate nu mai era *20*, ci *18*.

*1 Kin=o zi*

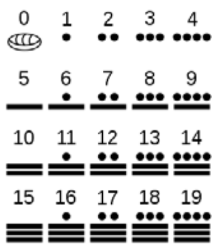
*1 Uinal=20 Kin=20 zile*

*1 Tun = 18 Uinal ~ un an*

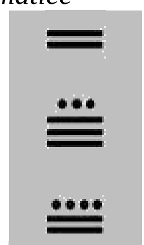
*1 Katun=20 Tun ~ 20 ani*

*1 Baktun=20 Katun~ 400 ani*

*Sistemul de numerație utilizat de mayași pentru calcule matematice*

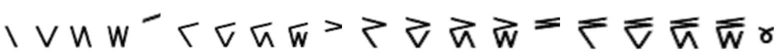



*Simboluri*



*Număr*

| | |
|---|---|
| $10\times 20^2$ | *4000* |
| $18\times 20^1$ | *360* |
| $14\times 20^0$ | *14* |
| | *4374* |



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

*Semne utilizate de eschimoși pentru scrierea numerelor*

*Sistemul în baza* 60 numit și sexagesimal, folosește *60* simboluri, de la *0* la *59*. Sistemul este utilizat în prezent pentru măsurarea timpului prin divizarea orei în *60* minute, a minutului în 60 secunde, precum şi la calcularea măsurilor unghiurilor. Numărul *4374* poate fi scris în baza *60* astfel: $(1,12,54)_{60}$ sau,

$$1 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60^1 + 54 \cdot 60^0,$$

cu alte cuvinte timpul de *4374* secunde poate fi transformat în *1* oră, *12* minute și *54* de secunde.

Sistemul de numerație sexagesimal a fost introdus de către mesopotamieni, terminologia numerației orale păstrând urmele folosirii unor sisteme de numerație mai vechi, în baza 5 și baza 10. De exemplu, pentru numerele de la 1 la 60 se foloseau următoarele expresii:

| | |
|---|---|
| 1 | geš (cuvânt folosit pentru bărbat) |
| 2 | min (cuvânt folosit pentru femeie) |
| 3 | eš (sufixul pluralului) |
| 4 | limmu |
| 5 | ia |
| 6 | aš |
| 7 | imin ( cuvânt compus din i[a]+min, 5+2=7) |
| 8 | issu |
| 9 | ilimmu (cuvânt compus din i[a]+limmu, 5+4=9) |
| 10 | u |
| 20 | niš |
| 30 | ušu |
| 40 | ninim sau nin |
| 50 | ninnú( nin + u, 40+10) |
| 60 | geš sau gešta |

Pentru numere mai mari de 60, în numerația vorbită se foloseau următoarele expresii:

| | |
|---|---|
| 120 | geš + min (60×2) |
| 180 | geš + eš (60×3) |
| 600 | geš + u (60×10) |
| 1200 | geš + u + min (600×2) |
| 1800 | geš +u + eš (600×3) |
| 3600 | šar |
| 7200 | šar + min (3600×2) |
| 36000 | šar + u (3600×10) |

$216000=60^3$= šar + gal

Asupra sistemului de numerație sexagesimal în formă scrisă vom reveni în capitolul II.

Sistemele **nepoziționale** sunt caracterizate prin faptul că simbolul din alcătuirea unui număr are numai valoarea dată de semnificaţia acestuia fără să conteze poziția pe care o ocupă. De exemplu romanii foloseau un sistem nepozițional aditiv – substractiv. Aceștia au preluat atât sistemul de numerație cât și regulile de calcul de la etrusci și le-au adaptat alfabetului lor.

| ***I*** | ***V*** | ***X*** | ***L*** | ***C*** | ***D*** | ***M*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *5* | *10* | *50* | *100* | *500* | *1.000* |

Regulile de scriere sunt următoarele:

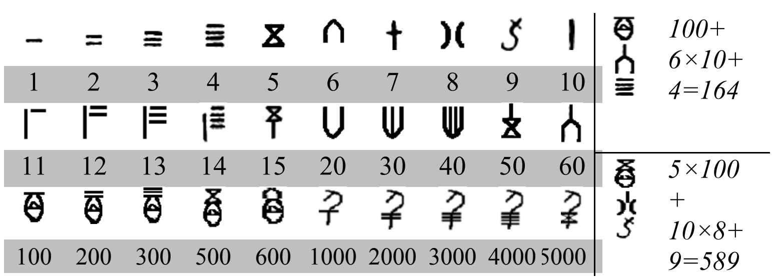
1. Orice semn pus la dreapta altuia de valoare mai mare sau egală decât a lui, se adună.

Exemplu: ***XVI***= *10 +5 +1 = 16*

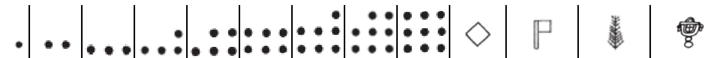
*2.* Orice semn pus la stânga altuia de valoare mai mare decât a lui, se scade.

Exemplu: ***IXC*** *= 100 - (10 - 1) = 100 - 9 = 91*

Un alt exemplu de sistem nepozițional este și cel chinez. Spre deosebire de cel roman acesta este aditiv-multiplicativ, adică pentru obținerea unui ordin trebuie să se înmulțească anumite valori ale perechilor de simboluri. În imaginea de mai jos se poate observa o parte din semnele necesare scrierii numerelor precum şi simbolurile folosite pentru numerele *164* şi *589* .



*Aztecii foloseau un sistem nepozițional cu baza 20.*



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 400 | 800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

*Semne utilizate de azteci pentru scrierea numerelor*

*Fragmet din Codexul Mendoza*

*Codexul conține o listă cu orașele cucerite de Tripla Alianță, precum și tributul plătit de fiecare oraș. Fragmentul din codex redă cantitățile de mărfuri:*

*- 100 de saci cu boabe de cacao*
*- 20 piei de jaguar*
*- 400 tecomates (căni pentru băut ciocolata)*

Matematica vechilor greci s-a bazat pe cunoștințele acumulate de egipteni și mesopotamieni. După o perioadă de timp a avut loc o separare dintre matematica aplicată și cea teoretică. În sec al *V-lea îHr*. matematica era delimitată ca știință teoretică, înlocuindu-se intuiția cu deducția logică.

În sec *X îHr*. a apărut la greci scrierea, concomitent a fost introdus și calculul scris. La început s-a folosit un sistem de numerație acrofonic (denumirea derivă de la faptul că semnele pentru cifre erau reprezentate prin inițiala numelui lor. Ex. $\Delta$ = $\Delta ECA=10$ ). Sistemul folosit era un sistem zecimal aditiv-multiplicativ, nepozițional care utiliza *6* simboluri ( *I, Γ, Δ, H, X, M).* Deoarece nici un simbol nu se repeta mai mult de 4 ori, pentru numerele *50, 500, 5000, 50000* se foloseau semnele 𐅄 𐅅 𐅆 𐅇 . De exemplu numărul *7821* se scria 𐅆XX𐅅HHHΔΔI.

După sec *VI îHr*. s-a introdus un alt sistem de numerație, zecimal aditiv și nepozițional, care folosea *27* de simboluri, dintre care *24* erau ale alfabetului Ionian iar 3 erau împrumutate din alte alfabete: digamma Ϝ, koppa Ϙ și sampi ϡ. Fiecărei litere îi era atribuită o anumită valoare și un anumit ordin, după cum se poate observa în tabelul de mai jos.

| | |
|---|---|
| I | 1 |
| II | 2 |
| III | 3 |
| IIII | 4 |
| Γ | 5 |
| ΓI | 6 |
| ΓII | 7 |
| ΓIII | 8 |
| ΓIIII | 9 |
| Δ | 10 |
| ΔΓ | 15 |
| ΔΔ | 20 |
| Γ^Δ | 50 |
| H | 100 |
| X | 1000 |
| M | 10 000 |

| | unități | zeci | sute |
|---|---|---|---|
| 1 | α alpha | ι iota | ρ rho |
| 2 | β beta | κ kappa | σ sigma |
| 3 | γ gamma | λ lambda | τ tau |
| 4 | δ delta | μ mu | υ upsilon |
| 5 | ε epsilon | ν nu | φ phi |
| 6 | ϝ digamma | ξ xi | χ chi |
| 7 | ζ zeta | ο omicron | ψ psi |
| 8 | η eta | π pi | ω omega |
| 9 | θ theta | ϙ koppa | ϡ sampi |

Pentru reprezentarea numerelor mai mari, cuprinse între *1000* și *9000*, se folosea un apostrof *(')* în fața simbolului, ceea ce însemna multiplicitatea cu *1000*. De exemplu numărul *4567* era scris ͵δφξζ.

## ***1.4 Primele calcule matematice***

Odată cu apariția numerelor și bazelor de numerație, apar și primele calcule matematice. Simplul proces de numărare poate fi considerat un calcul matematic; în felul acesta oamenii primitivi își țineau evidența produselor proprii. În momentul contabilizării averilor colective, procesul de numărare a devenit mai greoi din cauza numărului mare de obiecte, fiind nevoie de introducerea unei noi operații: adunarea, percepută ca reuniunea a două sau mai multe mulțimi de obiecte de același fel. Operația inversă, scăderea, a apărut odată cu adunarea, și simbolizează scoaterea dintr-o mulțime a unui număr de elemente.

Operația de înmulțire a apărut mult mai târziu și a fost legată de reprezentările geometrice. Dezvoltarea agriculturii, construcția edificiilor, a condus inevitabil la nevoia măsurării suprafețelor de teren și implicit la efectuarea produsului. Mesopotamienii denumeau produsul *a-šà*, adică arie, iar popoarele arabe din evul mediu *sath* (suprafață). Având în vedere faptul că înmulțirea este o adunare repetată, popoarele antice au descoperit diferite metode pentru efectuarea operației de înmulțire a două numere. Egiptenii aveau o metodă originală pentru efectuarea operației, și anume, metoda dublării succesive.

După o anumită perioadă de timp apare și operația de împărțire, mai întâi la *2*, apoi la *3; 4* etc. introducând astfel, o nouă categorie de numere, și anume, numerele raționale. Un rezultat foarte valoros obținut în urma aplicării operației de împărțire a fost apariția calendarului. Bineînțeles, împărțirea nu a fost simplă; ea a început în anul *4000 î.Hr.* și a fost finalizată de către europeni în secolul al *XVI-lea.*

Primele calcule matematice au fost efectuate cu ajutorul degetelor. Folosind degetele de la mâini, am putea crede că numărul obiectelor ce pot fi puse în corespondență este zece, însă oamenii au stabilit reguli de numărare folosind combinații ale degetelor sau ale falangelor, astfel încât numărătoarea să se poată face pentru numere mult mai mari.

Dacă aceste combinații erau epuizate, iar numărătoarea nu era finalizată, se utilizau degetele altor persoane.

*Imaginea redă o scenă petrecută în Egiptul antic, unde sunt efectuate calcule cu ajutorul degetelor. Doi muncitori mută cerealele dintr-o grămadă în alta, doi socotitori calculează pe degete numărul vaselor, iar doi scribi înregistrează aceste date.*

De exemplu, în imaginea de mai sus se observă doi socotitori care își țin degetele la vedere. Primul socotitor numără până la zece, în momentul în care arată zece degete al doilea socotitor ridică un deget, când primul socotitor ajunge la douăzeci al doilea ridică două degete iar numărătoarea poate continua până la o sută zece. Trei socotitori pot număra până la o mie o sută zece. Dezavantajul acestor calcule era acela că rezultatele puteau fi uitate ușor, de aceea, numărătoarea pe degete era însoțită și de o înregistrare scrisă.

Degetele puteau fi folosite și pentru efectuarea operației de înmulțire. Prezentăm mai jos o metodă ingenioasă prin care pot fi înmulțite două numere cuprinse între cinci și zece, fără a ști tabla înmulțirii.

$8-5=3$
$6-5=1$
$4\times10=40$ *(4-degete coborâte)*
$2\times4=8$ *(2;4 - degete ridicate)*
$40+8=48.$

$6\times8=48$

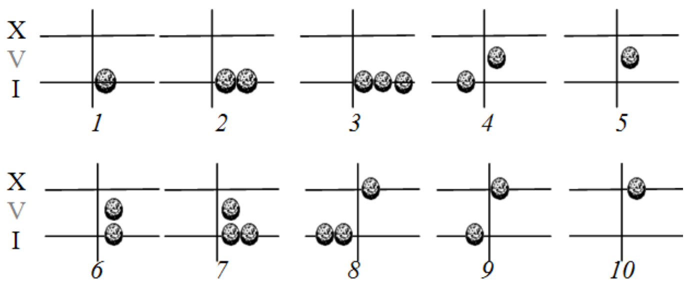
Ideea este următoarea: fixăm cele două numere cuprinse între cinci și zece, de exemplu opt și șase. Efectuăm următoarele diferențe: *8-5=3*, și *6-5=1*, prin urmare vom îndoi la o mână 3 degete iar la cealaltă un deget.

Acum aplicăm următoarea regulă: numărul degetelor coborâte de la ambele mâini îl înmulțim cu *10*, $4\times10=40$, iar numărul degetelor ridicate de la o mână îl înmulțim cu numărul degetelor ridicate de la cealaltă mână $2\times4=8$, în final adunăm rezultatele *40+8=48*.

În afara degetelor, oamenii au folosit diverse obiecte pentru a le pune în corespondență cu mulțimile numărate: bețișoare, scoici, pietre, jetoane etc. Pornind de la acest tip de numărătoare, oamenii au inventat un instrument bazat pe gruparea pietricelelor în clase de ordine, definind astfel și baza de numerație. Abacul este un astfel de instrument, vechimea sa pierzându-se în timp.

Cel mai vechi abac a fost descoperit pe insula *Salamis,* Grecia și a fost datat din anul *300 î. Hr*. La început abacele erau construite dintr-o suprafaţă plană pe care erau trasate linii paralele de-a lungul cărora erau puse o serie de pietre pentru a se executa operaţii aritmetice. Liniile reprezentau ordinele, de exemplu o piatră pusă pe prima linie reprezenta numărul *1*, o piatră pusă pe linia a doua reprezenta un număr de *n* ori mai mare (în funcție de baza de numerație stabilită). Să reprezentăm cu ajutorul abacului numerele romane cuprinse între *1* și *10*.

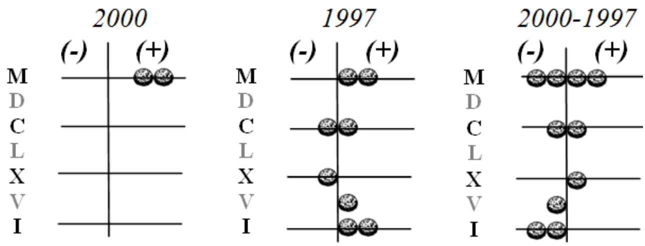
Abacul la romani era împărțit în două, în partea dreaptă erau trecute pietrele care se adunau, iar în partea stângă pietrele care se scădeau. De exemplu, pentru a reprezenta numărul *4*, nu erau puse *4* pietre pe prima linie, ci era așezată o piatră în partea dreaptă între primele două linii (poziția simboliza numărul 5), și o piatră în partea stângă pe prima linie (poziția simboliza minus 1), astfel încât numărul format era, *5-1=4*. Atunci când romanii utilizau abacul aveau grijă ca numerele să fie simbolizate prin cât mai puține pietre. Dacă privim numărul 8 observăm că nu este scris ca *5+3,* ci ca *10-2*. Un număr putea fi format în mai multe feluri, de exemplu numărul 3 putea fi format cu ajutorul a trei pietre puse în partea dreaptă pe prima linie, sau putea fi scris ca o diferența, *5-2*, adică o piatră în partea dreaptă pe linia *V* și două pietre în partea stângă pe linia *I*.



*Reprezentarea numerelor de la 1 la 10 cu ajutorul abacului*

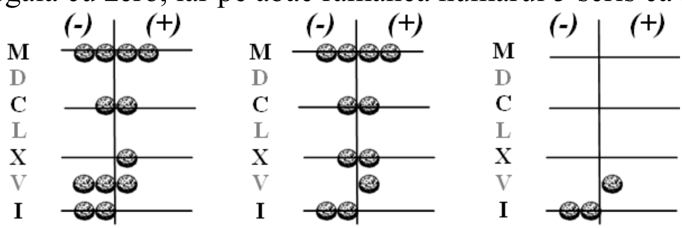
Cu ajutorul abacului puteau fi efectuate și operațiile aritmetice. Să efectuăm scăderea *2000-1997*. În imaginea de mai jos sunt scrise cele două numere ținând cont de regulile amintite. Pentru a efectua scăderea, romanii reprezentau cu ajutorul pietrelor descăzutul *2000*, apoi pe aceiași tăbliță scăzătorul, inversând pietricelele, adică, pietricelele aflate în partea dreaptă erau trecute în partea stângă, iar cele din partea stângă erau trecute în partea dreaptă.

Dacă pe aceeași linie, numărul pietrelor din partea stângă era egal cu numărul pietrelor din partea dreaptă, atunci ele erau îndepărtate de pe abac, deoarece diferența lor este egală cu zero.



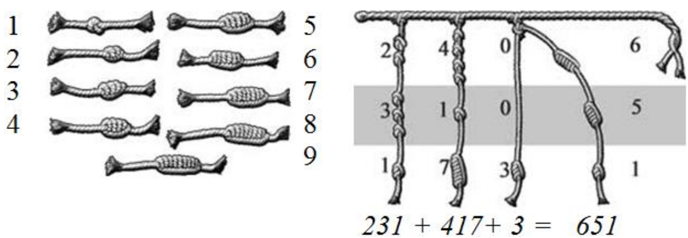

*Așezarea pietrelor pe abac pentru a efectua operația de scădere*

În acest fel pietrele de pe liniile *M* și *C* erau îndepărtate rămânând *4* pietre ce simbolizau numărul *10-7=3*, însă romanii nu lăsau rezultatul sub această formă deoarece numărul trei putea fi scris mai simplu. Pentru aceasta adăugau pe linia *V* o piatră în partea stângă și una în partea dreaptă, apoi transformau cele două pietre din partea stângă într-o singură piatră de ordin superior, pe care o poziționau mai sus. În acest fel obțineau pe linia *X* două pietre a căror diferență era egală cu zero, iar pe abac rămânea numărul *3* scris ca *5-2*.




*Efectuarea operației de scădere*

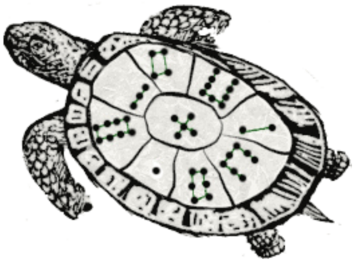
Incașii efectuau calculele matematice cu ajutorul unor abace speciale: *yupana* și *quipu*. Yupana era format dintr-o piatră dreptunghiulară pe care erau dăltuite patru șiruri de cavități în care erau introduse pietricele. Fiecare șir avea un ordin, corespunzător numărului maxim de pietricele aflate în fiecare cavitate și anume: șirul inferior avea valoarea 1 fiindcă fiecare cavitate conținea cel mult o singură pietricică, următorul șir avea valoarea *2*, următorul avea valoarea *3*, iar ultimul șir avea valoarea *5*. Pentru a forma numere și pentru a opera cu ele, incașii stabileau un anumit număr de pietricele pentru fiecare cavitate. Un alt tip de instrument de calcul care funcționează pe același principiu cu abacul, este *quipu*, cu diferența că, un instrument folosește pietricelele, iar celălalt nodurile făcute pe o funie. În imagine poate fi observat un calcul efectuat cu ajutorul *quipului*.




*Reprezentarea numărul 651 cu ajutorul quipului*

Civilizația chineză, una dintre cele mai vechi civilizații ale lumii, a avut o contribuție importantă în dezvoltarea cunoștințelor științifice, ajungând ca la începutul noii ere să se situeze pe primul loc în lume în privința invențiilor și descoperirilor tehnice. Chinezii foloseau sistemul zecimal pentru scrierea numerelor, ei au introdus pentru prima dată *10* simboluri pentru a reprezenta numerele de la *1* la *10*. La început, pentru efectuarea calculelor, se ajutau de noduri pe sfori, asemenea incașilor, iar mai târziu au folosit bețișoarele din bambus cu care formau cifre și apoi numere.

Într-un mit chinezesc de prin anul *3000 î.Hr*. ne este semnalată prezența unei broaște țestoase care avea pe carapace un desen foarte interesant. Desenul cuprindea 9 semne corespunzătoare numerelor de la 1 la 9 așezate după următorul model. Dacă așezăm numerele într-un pătrat împărțit în *9* pătrățele, respectând pozițiile de pe carapacea broaștei țestoase, observăm că suma celor trei numere aflate pe verticală, pe orizontală și pe diagonală este *15*.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *15* | *15* | *15* | *15* | *15* |
| *15* | *4* | *9* | *2* | *15* |
| *15* | *3* | *5* | *7* | *15* |
| *15* | *8* | *1* | *6* | *15* |
| *15* | *15* | *15* | *15* | *15* |

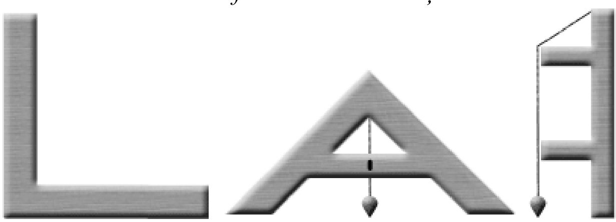
Acest tip de pătrate au fost studiate de matematicieni încă din antichitate, și au fost numite pătrate magice.

Calculele geometrice apar odată cu nevoia efectuării măsurătorilor plane și spațiale. Dezvoltarea reprezentărilor geometrice a evoluat odată cu dezvoltarea îndeletnicirilor: agricultura, vânătoarea, olăritul, tehnica construcțiilor, dezvoltarea artelor etc. Istoricul antic Herodot ne face cunoscut faptul că, în fiecare primăvară după retragerea apelor Nilului, cultivatorii de pământ din Egipt erau nevoiţi să-şi măsoare din nou terenurile agricole, pentru restabilirea vechilor semne de hotar.

Prin convenție, popoarele antichității au stabilit diferite unități de măsură, la început, cele care foloseau diferite părți ale corpului uman: degetul, palma, stânjenul, cotul, talpa, piciorul. În domeniul agriculturii a fost nevoie de introducerea unor unități de măsură cu care să se poată determina suprafețele terenurilor sau volumul cantităților de cereale recoltate.

Construcția locuințelor, a templelor, necesita numeroase cunoştinţe de geometrie. Noţiunile de verticală, orizontală, drepte perpendiculare, drepte paralele, unghiuri drepte, erau pe deplin stăpânite de matematicienii antichității. Aceștia puteau să traseze astfel de figuri geometrice elementare cu ajutorul funiilor; grecii antici au denumit pe egiptenii care se ocupau cu trasarea figurilor geometrice, *harpedonaptai* (întinzători de sfori).

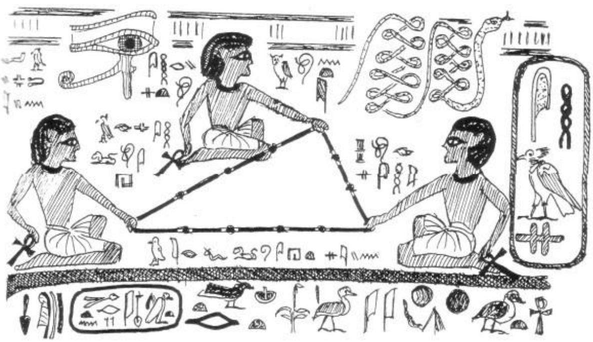
*Instrumente folosite de arhitecții antici*



*Echer* *Nivelă orizontală și verticală*

Dreptele orizontale și verticale puteau fi trasate după o metodă care mai este folosită și în zilele noastre, bazată pe principiul firului cu plumb. Echerul a apărut mai târziu ca instrument de măsură pentru unghiuri drepte, inițial a fost utilizată frânghia cu doisprezece noduri. Funia avea capetele legate, iar cele *12* noduri erau făcute la egală distanţă unul de altul. Pentru a construi un triunghi dreptunghic se proceda astfel: se fixa un nod exact în locul unde trebuia să fie unghiul drept, apoi se întindea funia în două direcţii, după laturile unghiului drept, fixându-se pe o direcție al *3*-lea nod, iar pe cealaltă direcție al *4*-lea nod, obţinând astfel triunghiul dreptunghic cu laturile de *3, 4* şi *5* unităţi măsurabile.

Astăzi putem verifica ușor, cu ajutorul Teoremei lui Pitagora, că un triunghi cu laturile de *3,4* respectiv *5* unități măsurabile, este un triunghi dreptunghic, $3^2+4^2=5^2$. Dar cum au cunoscut egiptenii Teorema lui Pitagora? fiindcă aceste calcule au fost făcute acum *4000* de ani iar Pitagora a trăit între anii *580-500 î.Hr.* Adevărul este că nu Pitagora a descoperit teorema ce-i poartă numele, acesta a dat numai o demonstrație riguroasă a teoremei, însă proprietatea triunghiului dreptunghic de a avea anumite lungimi ale laturilor era cunoscută cu mult timp înainte de către babilonieni și egipteni. Pe tăblițele babilonienilor sunt scrise numeroase tabele ce conțin numere pitagoreice, adică numere de forma $a,b,c,$ ce satisfac relația $a^2+b^2=c^2$ prin urmare, faptul că un triunghi dreptunghic poate fi construit numai dacă laturile sale au anumite dimensiuni, a fost rodul gândirii colective acumulate în decursul istoriei.



*Harpedonaptai*

Matematicienii antici au determinat reguli de calcul pentru ariile figurilor și pentru volumele corpurilor geometrice. Aceste reguli ne duc cu gândul la formulele pe care elevii le învață astăzi în școală. Chiar dacă nu erau date sub formă teoretică, regulile descoperite în papirusurile egiptene uimesc prin exactitatea lor. În papirusul de la Moscova găsim o metodă ce permite calcul cu exactitate a volumului trunchiului de piramidă, ceea ce demonstrează că matematicienii încep să abordeze latura teoretică a problemelor. Dacă unele reguli de calcul au fost stabilite pe cale empirică, ne este greu să credem același lucru și despre regula de calcul a volumului trunchiului de piramidă.

Odată cu începutul civilizației, strămoșii noștri au fost preocupați de studiul unui domeniu aflat în strânsă legătură cu matematica, și anume astronomia. Încă din preistorie oamenii au încercat să împartă cât mai exact timpul, îndeosebi pentru a putea determina apariţia anotimpurilor. La început erau folosite calendarele lunare, calculând cu o oarecare exactitate timpul dintre fazele succesive ale Lunii.

Sumerienii și babilonienii au fost primele civilizații care au introdus și folosit calendarul lunar. Aceștia au împărțit anul în *12* luni, fiecare lună având aproximativ *29,5* zile. Durata unei luni lunare a fost stabilită în funcție de lunaţie, adică intervalul de timp dintre două luni noi consecutive. Însă această perioadă de timp este variabilă, ea variază între *29* de zile *6* ore și *29* de zile și *20* de ore. Făcând o medie putem calcula durata lunii lunare la *29* de zile *12* ore *44* minute *2*,8 secunde, adică aproximativ *29,5* zile. Din cauza faptului că *12* luni Lunare durează mai puţin decât un an astronomic, acest calendar determina anumite decalaje de timp, anul având: $12 \times 29{,}53059 = 354{,}36708$ zile (durata exactă a unei luni astronomice fiind de: *29,53059* zile), adică cu aproape *11* zile și *6* ore mai puțin decât anul solar. Această diferență crea un decalaj de o lună la trei ani, iar la nouă ani decalajul era de un anotimp. Pentru a elimina acest decalaj s-a introdus la diferite perioade de timp o lună în plus. Începând cu sec *IV î.Hr*. calendarele lunare au fost înlocuite treptat cu calendarele luni - solare.

Încă din mileniul III î.Hr., egiptenii au introdus calendarul solar, divizat în trei anotimpuri. După calculele efectuate, egiptenii au stabilit ca durata anului să conţină *12* luni a câte *30* de zile, iar la sfârşitul celor *360* de zile să mai adauge suplimentar *5* zile. Cum au ajuns egiptenii să aibă un calendar atât de precis? Au putut oare să acumuleze atâtea cunoștințe astronomice, astfel încât să stabilească durata anului la 365 de zile? După unii cercetători, anul egiptenilor nu este un an astronomic, ci unul *agricol* (R. Parker), bazat pe revărsările periodice ale Nilului, o dată la 365 de zile. Cum perioadele de timp ale revărsărilor nu erau regulate, (decalajele putând fi de peste șapte săptămâni), aceștia au apelat la un alt fenomen repetabil ce avea o precizie mult mai mare. Ei au adoptat ca răsăritul stelei Sirius să corespundă cu începutul anotimpului inundațiilor. În paralel cu acest calendar solar, egiptenii se foloseau și de calendarul lunar, îndeosebi pentru stabilirea sărbătorilor religioase.

Egiptenii nu aveau standardizate unitățile temporale mari (deceniile, secolele, mileniile), împărțirea timpului era făcută în funcție de perioadele de domnie a regilor. Datele erau stabilite în funcție de anii de domnie, de exemplu:

*Anul 2, luna a 3-a a "Revărsării", prima zi de domnie a regelui Egiptului de Sus și de Jos, Amenemhat al III-lea*

După o bună perioadă de timp, în anul *46 î.Hr.* romanii au determinat durata unui an la *365,25* de zile prin adăugarea unei zile, o dată la patru ani, o aproximare foarte bună, ţinând cont de faptul că anul astronomic are *365* zile, *5* ore, *48* minute¸ şi *46* secunde (ca număr zecimal: *365,2422* zile). Acest calendar, numit și calendarul Iulian, a fost folosit până în anul *1852*, când s-au constatat noi decalaje de timp datorită faptului că anul mediu din calendar era ceva mai lung decât anul astronomic. Așadar, au fost aduse noi modificări prin ștergerea a *10* zile din calendarul solar, și introducerea unei noi reguli: anii divizibili prin *100* vor fi ani bisecţi numai dacă sunt divizibili şi prin *400*, iar noul calendar astfel obținut a fost denumit, calendarul Gregorian.

Dacă europenii au reușit în anul *1852* să calculeze cu o aproximare bună timpul anului astronomic, mayașii au reușit cu mult timp înainte, mai precis în jurul anului *3000 î.Hr*, să întocmească calendare mult mai exacte. Anul mayaș era format din *360* de zile (*18* luni a câte *20* de zile) la care mai adăugau 5 zile pentru a se pune de acord cu anotimpurile, diferențiindu-se de anul astronomic doar prin zecimala a cincea.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1zi* | *20zile* | *360zile* | *7200zile* | *144000zile* |
| *Kin* | *Uinal* | *Tun* | *Katun* | *Baktun* |

Mayașii numărau zilele pornind de la o dată fixată și anume, începând cu anul *3113 î.Hr*. Ei au grupat zilele în unități de ani (așa cum grupăm noi anii în decenii, secole, milenii), fiecărei grupe atribuindu-le câte un simbol specific.

Evenimentele importante din viața mayașilor erau gravate sau pictate pe piatră. La muzeul *Volkenkunde* din Olanda se găsește o placă din jad, numită placa *Leyden*, gravată pe ambele fețe cu hieroglife mayașe. Pe una din fețe sunt înregistrate următoarele date calendaristice:

| | |
|---|---|
| ***8*** | *8×144000=1152.200* |
| ***14*** | *14×7.200 = 100.800* |
| ***3*** | *3×360 = 1080* |
| ***1*** | *1×20 = 20* |
| ***12*** | *12×1 = 12* |
| | ***1.253.912*** |

Pentru a determina data înregistrată vom însuma unitățile temporale:

*8Baktun+14Katun+3Tun+1Uinal+12Kin=1253912* zile.

Pentru determinarea anului împărțim *1253912* la *365.242* (numărul de zile a unui an) și obținem *3433,09*. Acest număr reprezintă anul din calendarul mayaș. Pentru a-l transpune în calendarul gregorian vom scădea *3113,* adică anul de la care au început mayașii înregistrarea timpului. Prin urmare obținem anul *3433-3113=320 î.Hr.*

# Capitolul II.

# Nivelul general al matematicii mesopotamiene

## 2.1 Scurt istoric

Una dintre cele mai mari civilizații ale antichității, civilizația mesopotamiană, s-a format în zonele fertile ale Mesopotamiei, între fluviile Tigru și Eufrat. Mesopotamia este o regiunea din Orientul Apropiat, care în prezent se află pe teritoriile a trei state: Irak, Siria de est şi Turcia de sud. Numele provine din cuvintele greceşti μέσος mesos "*între*" şi ποταμός potamos „*râu*", referindu-se la zona dintre cele două râuri. În acest leagăn al culturii și civilizației, începând cu epoca bronzului, au apărut primele sisteme de scriere. Civilizația mesopotamiană a însumat contribuțiile a trei popoare distincte ce s-au stabilit pe acest teritoriu la anumite intervale de timp: sumerienii, akkadienii (fondatorii Babilonului) și asirienii. Prin fuzionarea celor trei culturi, putem discuta la un moment dat de civilizația mesopotamiană.

Sumerienii, creatorii celei mai vechi civilizații regionale, au venit în sudul Mesopotamiei la începutul mileniului *IV î. Hr*. Arheologii au împărțit perioada proto-sumeriană în trei subperioade ce acoperă întregul mileniu *IV*. Acestea sunt denumite după numele localităților unde s-au desfășurat săpăturile arheologice: *El Obeid*

(5500-4000 î.Hr.), *Uruk* (*Uruk XIV-V*: 4000-3300 î.Hr., *Uruk IV*: 3300-3000 î.Hr) și *Djemet-Nasr* (*Uruk III*: 3000-2900 î.Hr.). Sumerienii sunt cei care au creat primele oraşe state din Mesopotamia (celebrul *Uruk* – considerat a fi fost creat înainte de marele potop, *Ur, Lagaş*).

Acadienii – constituie primul val de populaţie semită care migrează dinspre Peninsula Arabică şi pătrunde în centrul Mesopotamiei unde va întemeia importante oraşe - stat : *Akkad, Kiş, Babilon, Opis*. Aceștia au purtat numeroase războaie cu sumerienii, până când regele *Sargon I* supune Sumerul, întemeind astfel primul mare imperiu din istorie.


Spre sfârşitul mileniului *IV î.H.* s-au înregistrat aici mişcări masive de populaţii nomade (*elamiţi gutti, kasiţi*) care, coborând din regiunile muntoase îşi îndreptau turmele spre bogatele câmpii mesopotamiene. Elamiţii şi-au făcut apariţia pe scena istoriei în jurul anului *3000 î.Hr.* Creându-şi un regat la răsărit de Tigru, cu capitala Susa, elamiţii au intrat în conflict cu regatul mesopotamian al Akkadului, fiind învinşi (în jurul anului *2600 î.Hr.*) şi supuşi regelui *Sargon I*. Acolo s-a format scrierea protoelamită, cunoscută din documentele de la Susa.

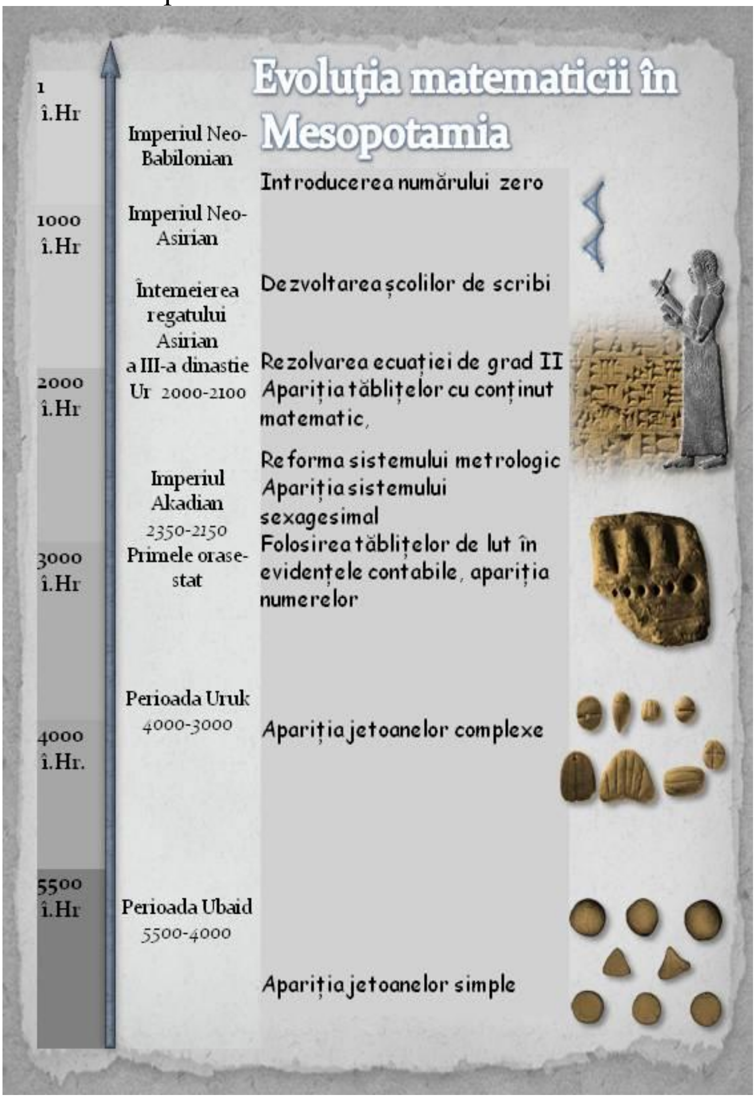
Asirienii, triburi de arameeni veniţi tot din desertul arabic, ocupaseră încă din mileniul al II-lea o regiune restrânsă din nordul Mesopotamiei. La sfârșitul secolului al *XIV-lea î.Hr*. asirienii s-au ridicat ca o mare putere, ajungând ca regele *Salmansar I (1274-1245 î.Hr.)* să supună întreaga Mesopotamie.

Documentele scrise nu scot în evidență faptul că mesopotamienii s-ar fi remarcat prin cuceriri remarcabile în domeniul tehnicii. Cu toate acestea, oamenii de știință atribuie mesopotamienilor o invenție revoluționară, și anume roata. Odată cu dezvoltarea marilor orașe și apariția schimburilor comerciale dintre țări apar mijloacele de transport (carul cu două roți, corăbiile) precum și edificiile monumentale (ziguratele) unele cu înălțimi de peste 50m. Tehnica ceramicii evoluează odată cu descoperirea roții olarului, iar un lucru esențial, este faptul că în perioada proto-sumeriană apar primele pictograme pe plăcuțe de lut, o formă incipientă a scrierii cuneiforme. Se pare că prima formă de scriere a luat naștere în Câmpia Mesopotamiei, ca o necesitate a evidențierii schimburilor comerciale. Scrierea cuneiformă se învăța în școli. Sumerienii și babilonienii aveau o castă specială de scribi, profesie ce se moștenea din tată în fiu. În aceste școli, ce funcționau la început ca anexe ale templelor și curților regale, se învăța la început cititul, scrisul și socotitul, iar mai târziu se studia matematica, metrologia, astronomia, geodezia etc.

În privința cunoștințelor de matematică, mesopotamienii au făcut progrese remarcabile. Ei foloseau în calcule tabele pentru înmulțiri, împărțiri, ridicare la pătrat, ridicare la cub, rădăcina pătrată și rădăcina cubică, relații exponențiale sau logaritmice. Rezolvau ecuații de gradul întâi cu una sau mai multe necunoscute, ecuații de gradul doi, în unele cazuri și ecuații de gradul trei. În domeniul geometriei, cunoșteau relația dintre laturile unui triunghi dreptunghic, cunoscută astăzi sub denumirea de *Teorema lui Pitagora*, calculau suprafața pătratului, dreptunghiului și triunghiului, știau să calculeze volumul unui paralelipiped, a unui cilindru, a unui trunchi de con și a unei piramide.

Problemele de matematică ale mesopotamienilor au fost stocate și păstrate pe tăblițe de lut până în zilele noastre. Arheologii și cercetătorii care au restaurat și descifrat tăblițele cu conținut matematic le-au clasificat astfel: tăblițe cu caracter administrativ, în care sunt înregistrate calcule contabile (evidența cantităților de grâu, a vaselor cu bere, ulei etc.), tăblițe ce conțin tabele ajutătoare pentru efectuarea unor calcule mai complexe (tabla înmulțiții, inversele unor numere, transformări metrologice etc.), tăblițe ce conțin probleme cu caracter practic aplicativ (calculul unor suprafețe de teren, volumul unor corpuri), tăblițe folosite de elevi în școlile mesopotamiene (tăblițele conțin exerciții și calcule matematice cu caracter teoretic). Tăblițele care nu conțin informații științifice (administrative) folosesc o scriere nepozițională a numerelor iar bazele de numerație diferă în funcție de sistemul metrologic utilizat, pe când cele cu caracter științific (matematică, astronomie) folosesc întotdeauna scrierea pozițională în baza 60.

Majoritatea tăblițelor cu conținut matematic provin din arhivele centrelor administrative, a școlilor, sau a templelor aflate în marile orașe-stat din Sumer, Asiria, Elam, sau Babilon, regiuni aflate astăzi pe teritoriile Siriei, Iranului, Irakului și Turciei. Tăblițele pot fi întâlnite astăzi în marile muzee de antichități din lume sau în colecții particulare, ele fiind denumite după numerele de înregistrare ale muzeelor, după numele colecționarilor sau după numele arheologilor care le-au descoperit.

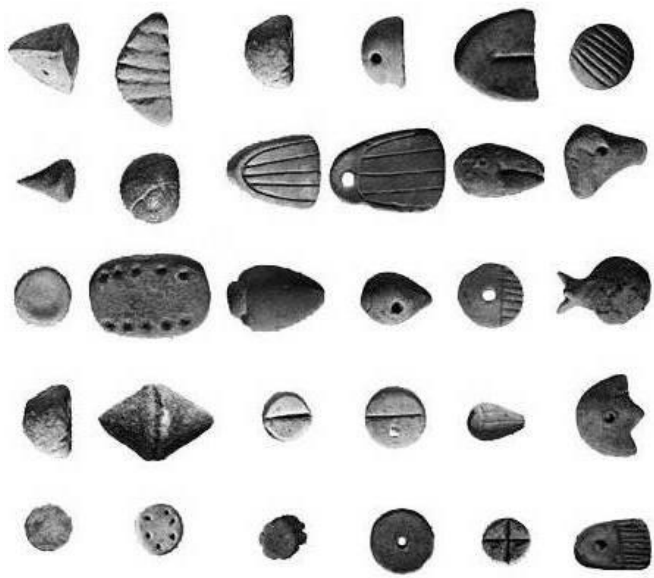


Pentru a permite stocarea, clasificarea și studierea informațiilor oferite de tăblițele mesopotamienilor a fost nevoie de digitalizarea materialelor și prezentarea lor pe diferite web site-uri de specialitate. Un astfel web site îl putem accesa la adresa http://cdli.ucla.edu/.

## 2.2 Scrierea, apariția simbolurilor matematice

Scrierea este una dintre caracteristicile de bază ale civilizației, ea fiind strâns legată de schimburile comerciale efectuate precum și de înregistrările numerice ale acestor tranzacționări. Principala motivație a apariției scrisului a fost de natură economică: dorința de a administra operaţiunile economice şi comerciale. Până acum 8000 de ani oamenii realizau schimburile de mărfuri după principiul: eu „vând” ce am în surplus și „cumpăr” ce îmi trebuie. Pentru a se putea realiza schimbul trebuiau îndeplinite anumite condiții, și anume: cumpărătorul să aibă nevoie de un anumit produs, iar vânzătorul să aibă nevoie de produsul oferit la schimb; de asemenea, cei doi trebuiau să ajungă la o înțelegere în legătură cu valoarea mărfurilor.

Valoarea era o noțiune relativă, percepută în mod diferit, în funcție de interesele comercianților. Acest aspect putea să conducă la îngreunarea efectuării schimbului și la împiedicarea dezvoltării pieței. Mesopotamienii au găsit o soluție pentru a elimina acest inconvenient și anume, au stabilit ca o cantitate standardizată de orz să fie folosită ca unitate de schimb universală. Cu timpul, s-a impus ca mijloc de plată metalele prețioase în lingouri, iar mai târziu, în anul 493 î.Hr., a fost folosit argintul sub formă de monedă bătută. Pentru înregistrarea evidențelor contabile, cantitatea de orz standardizată a fost pusă în corespondență cu un con mic confecționat din lut ars. Un număr mai mare de conuri erau asociate cu o sferă. Aceste jetoane confecționate din lut ars au apărut în câmpia mesopotamiană în jurul anului 8000 î.Hr. și erau folosite pentru înregistrarea mărfurilor. Odată cu dezvoltarea oraşelor se dezvoltă și economia, iar structurile sociale devin tot mai complexe. Această evoluţie socială este reflectată și în jetoane, care încep să apară într-o diversitate mult mai mare de forme şi modele, unele din ele având numeroase incizii şi perforații.



*Jetoane confecționate din lut ars*

Fiecare jeton era pus în corespondență cu marfa pe care o simboliza (cantități de cereale, vase cu ulei, animale, haine,etc.). În momentul contabilizării mărfurilor, jetoanele trebuiau grupate și ordonate în funcție de tranzacția efectuată.

Această grupare a fost efectuată în două moduri: fie prin înșirarea jetoanelor pe o sfoară, fie prin introducerea jetoanelor într-o sferă de lut pe care se aplica un sigiliu.

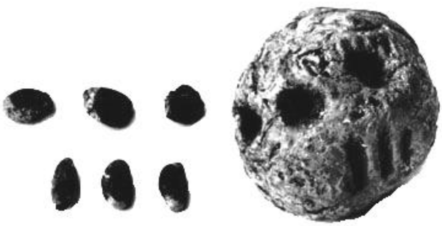
*MS 4632*

*MS 4523*

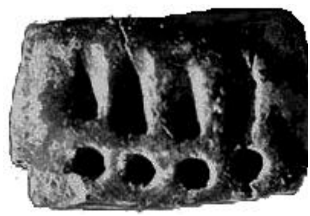
*Sigiliu cilindric confecționat din piatră cu ajutorul căruia, prin rulare, se imprima pe suprafața lutului diferite forme.*

Acesta avea scopul de a proteja conținutul, și de a oferi mai multe informații despre tranzacția efectuată. De exemplu, sfera MS 4632 are imprimată pe suprafață o serie de oameni ce transportă saci pentru a fi descărcați într-un vas mai mare. Având în vedere că în interiorul sferei s-a descoperit mai multe conuri si bile putem trage concluzia că ne aflăm în fața unui „document” contabil cu privire la o cantitate de cereale ce urmează a fi stocată sau tranzacționată. Dezavantajul folosirii unui astfel de „document” era acela că jetoanele din interior nu puteau fi observate decât după spargerea sferei.

Atunci mesopotamienii au imprimat pe suprafața sferei jetoanele, obținând astfel amprentele vizibile ale obiectelor din interior. O altă metodă de stocare a datelor a fost aceea de a înșira jetoanele (perforate) pe o sfoară și sigilarea lor cu ajutorul unei plăcuțe de lut (MS 4523). Și această metodă prezenta anumite dezavantaje, în sensul că jetoanele puteau fi pierdute ușor în timpul tranzacționării.

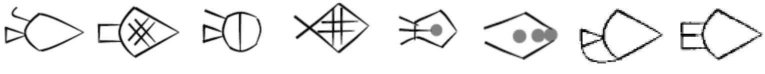


*Sferă cu amprentele jetoanelor din interior*



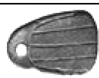
*Amprente cu semne numerice*

Cu timpul, mesopotamienii și-au dat seama de inutilitatea acestor procedee de înregistrare a datelor, de aceea jetoanele din lut ars au fost eliminate și înlocuite cu pictograme asemănătoare, trecându-se astfel la scrierea pe tăblițe de lut. Pentru simbolizarea aceluiași obiect, pictogramele folosite de mesopotamieni aveau forme diferite, în funcție de perioada istorică sau de zonă geografică. De exemplu pentru a simboliza un vas puteau fi folosite următoarele semne:

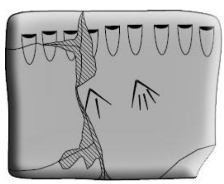


Scrierea s-a dezvoltat la sfârşitul mileniului al *IV-lea î.Hr*. derivând din utilizarea jetoanelor de lut ars folosite în tranzacțiile economice. Trecerea la scrierea cu ajutorul pictogramelor s-a făcut treptat, mai întâi prin imprimarea jetoanelor pe sferele de lut, apoi prin imprimarea jetoanelor pe tăblițe de lut.

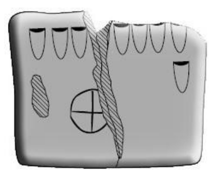
În tabelul de mai jos se poate observa modul cum au evoluat câteva dintre semnele necesare scrierii.

| ***Jeton de lut*** | ***Ideogramă*** | ***Scrierea cuneiformă*** | ***Semnificație*** |
|---|---|---|---|
|  |  |  | *Număr, o unitate de măsură (pentru orz)* |
|  |  |  | *Număr, zece unități de măsură (pentru orz)* |
|  |  |  | *Ovină* |
|  |  |  | *Bovină* |
|  |  |  | *Vas* |
|  |  |  | *Țesătură* |

*Înregistrare numerică a vaselor (cu lapte) și bovinelor*



*Înregistrare numerică a țesăturilor*



*Înregistrare numerică a oilor*

Interesantă este evoluția numărului, ca noțiune abstractă. Inițial, jetonul de forma conului era folosit pentru a exprima o cantitate de cereale, iar jetonul de forma sferei era folosit pentru a exprima o cantitate de zece ori mai mare. De ce au fost alese jetoanele cu care erau măsurate cantitățile de cereale să reprezinte cifrele abstracte? Practicarea agriculturii a fost una dintre cele mai vechi îndeletniciri ale oamenilor. Odată cu dezvoltarea comunităților, cantitățile de cereale recoltate au devenit din ce în ce mai mari, prin urmare a apărut nevoia stocării și contabilizării acestor produse. Printre primele mărfuri care au fost contabilizate cu ajutorul unor semne, au fost tocmai cantitățile de cereale, convenindu-se ulterior ca aceste semne să fie standardizate ca unități de măsură și utilizate pentru înregistrarea altor produse.

Din perioada proto-sumeriană provine cea mai veche formă de scriere, scrierea cu ajutorul pictogramelor, constând într-o succesiune de imagini simbolice a unor fiinţe şi lucruri care prin simpla alăturare sugerau un mesaj. Dacă privim tăblița de mai jos observăm pe primul rând simbolurile:  (cap) și  (rație), o serie de simboluri numerice precum și simbolul  care înseamnă orz. Este clar că ne aflăm în fața unei înregistrări contabile cu privire la consumul de cereale.

*Scrierea cu ajutorul pictogramelor*

*Scrierea cuneiformă*

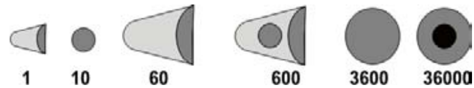
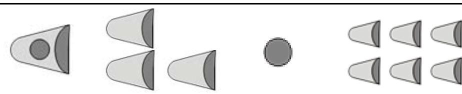
Ulterior, mesopotamienii au simplificat forma pictogramelor folosind ideogramele cuneiforme (lat. cuneus – cui) obţinute prin imprimarea unui semn pe suprafaţa tăbliţei de argilă crudă, cu ajutorul unui bețișor, iar mai târziu cu ajutorul unui vârf metalic denumit stylus.

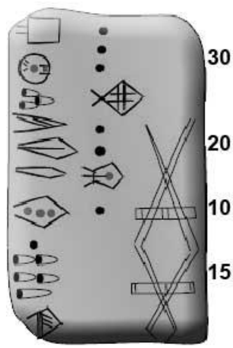
Așadar, până a se ajunge la scrierea cuneiformă au fost parcurse următoarele etape:

- utilizarea jetoanelor simple;
- utilizarea jetoanelor închise în sfere de lut;
- imprimarea jetoanelor pe sfere de lut;
- imprimarea jetoanelor pe tăblițe de lut;
- utilizarea pictogramelor;
- scrierea cuneiformă.

Pentru semnele numerice s-au utilizat la început două simboluri: cercul și conul, derivate din jetoanele de argilă de forma sferei și a conului. Scrierea era relativ ușoară, fiindcă cercul se obținea prin  apăsarea unui bețișor pe tăblița de lut, pe verticală, iar conul era obținut prin apăsarea bețișorului sub un anumit unghi față de verticală. Pentru a scrie numere mai mari era folosit un bețișor mai gros astfel încât urma cercului și a conului să aibă dimensiuni mai mari.  Această formă de scriere este cunoscută sub denumirea de scriere proto-cuneiformă și se estimează că a apărut în jurul anului 3000 î.Hr. Primele  calcule ale sumerienilor efectuate pe tăblițele de lut erau de natură administrativă.  Ele se reduceau la simple evidențe contabile privind cantitatea de grâne, numărul animalelor sau venitul marilor gospodării. Mai târziu apar tăblițe cu caracter pur matematic, unde erau rezolvate probleme de aritmetică sau geometrie.

Pentru a număra,  mesopotamienii au folosit sistemul de numerație sexagesimal. Un obiect era simbolizat cu un con mic, *10* conuri mici erau înlocuite cu un cerc mic, *6* cercuri mici erau înlocuite cu un con mare, *10* conuri mari erau înlocuite cu un con mare cu un cerc mic în interior, iar șase conuri cu un cerc mic în interior erau înlocuite cu un cerc mare. În fine, *10* cercuri mari erau înlocuite cu un cerc mare ce conține în interior un cerc mic. Astfel, ultima unitate număra *10 × 6 × 10 × 6 × 10 = 36.000* obiecte.

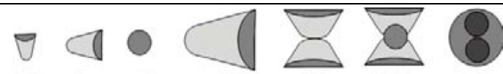
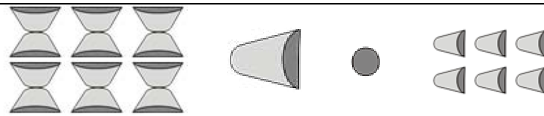
| | |
|---|---|
| *Sistem de numerație sexagesimal* |   |
| *Scriere sexagesimală* |  |
| *796* | *1×600+3×60+1×10+6×1* |




*Scheil(1935 Nr.314), fața*  *Scheil(1935 Nr.314), spate*

Pe *tăblița Scheil (1935 Nr.314)* poate fi observat un calcul sexagesimal cu privire la contabilizarea vaselor cu bere. Pe fața tăbliței sunt scrise numărul vaselor: *30,20,10,15,* iar pe spatele tăbliței suma: 75.

Mesopotamienii foloseau sisteme de numerație diferite, în funcție de mărimile măsurate, perioada istorică sau zona geografică. Cercetătorii au pus în evidență mai multe sisteme de numerație: pentru măsurarea cerealelor, pentru măsurarea cantităților de metal, pentru măsurarea ariilor și pentru măsurarea lungimilor. Semnificația și ordinul de multiplicitate a simbolurilor era diferită în funcție de mărimile măsurate, astfel încât un simbol putea să aibă valori diferite, în funcție de sistemul folosit.

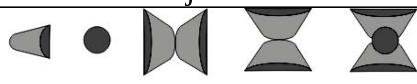
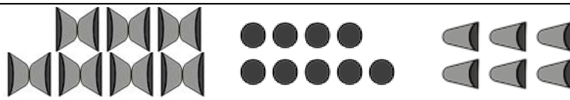
| | |
|---|---|
| *Sistem de numerație bisexagesimal* |  1/2 1 10 60 120 1200 7200 |
| *Scriere bisexagesimala* |  |
| *796* | *6×120+1×60+1×10+6×1* |

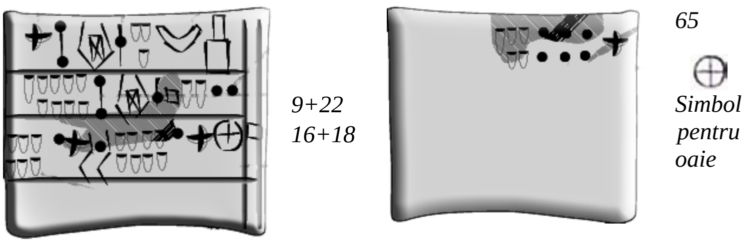

*Tăblița Scheil, 1325, nr. 27*
*față*


*Tăblița Scheil, 1325, nr. 27*
*spate*

Pentru anumite calcule matematice precum și pentru calculul rațiilor, sumerienii foloseau un sistem **bisexagesimal** în care factorii de multiplicare erau *10, 6, 2, 10, 6,* astfel că simbolul pentru cantitatea cea mai mare (un cerc mare cu două cercuri mici interioare) avea valoarea de $6 \times 10 \times 2 \times 6 \times 10 = 7.200$ unităţi de bază.

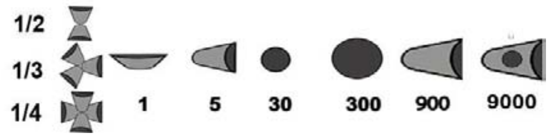
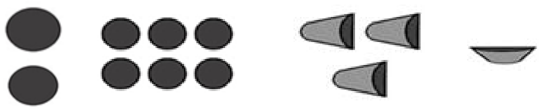
Pe fața tăbliței *Scheil, 1325, nr. 27* sunt contabilizate patru cantități de grâu reprezentate prin numerele 520, 720, 80 și 60 scrise în sistemul de numerație bisexagesimal, iar pe spatele tăbliței avem suma acestor numere, 1380. Simbolurile numerice sunt citite de sus în jos.

| | |
|---|---|
| *Sistem de numerație zecimal* |  1 10 100 1000 10000 |
| *Scrierea zecimală* |  |
| *796* | *7×100+9×10++6×1* |

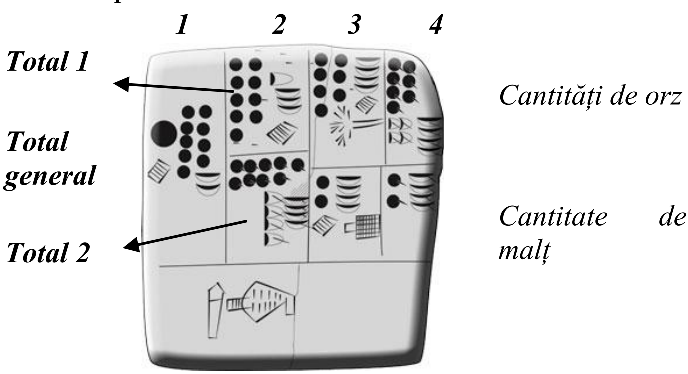



*Tăblița Scheil, 1905, nr. 212 față* *Tăblița Scheil, 1905, nr. 212 spate*

Pe la sfârșitul mileniului al *IV-lea î.Hr*. în câmpia mesopotamiană a circulat și un sistem de numerație **zecimal**, folosit cu precădere la numărarea animalelor domestice și a muncitorilor. Tăblițele pe care erau inscripționate calculele cu numere zecimale au fost descoperite în orașul Ebla pe teritoriul Siriei. Tăblița *Scheil, 1905, nr. 212* este scrisă pe trei rânduri, și conține o înregistrare numerică în sistemul zecimal, a unei turme de oi. Pe rândurile doi și trei sunt trecute grupuri de numere ce semnifică mulțimi formate din 9, 22, 16 și 18 oi, citirea făcându-se de la dreapta la stânga. Pe spatele tăbliței este trecută suma acestor numere și anume 65. Se observă că numărul 65 este scris cu șase cercuri și cinci conuri mici și nu cu un con mare și cinci conuri mici ca în sistemul sexagesimal.

| | |
|---|---|
| *Sistem de numerație pentru măsurarea cerealelor(SE)* |   |
| *Scrierea ( SE)* |  |
| *796* | $2\times300+6\times30+3\times5+1\times1$ |

Pentru măsurarea capacităților, în special a cerealelor era folosit un sistem în care factorii de multiplicitate erau *5, 6, 10*, şi *3*, astfel încât, unitatea cea mai mare avea valoarea de $5 \times 6 \times 10 \times 3 \times 10 = 9000$ unităţi de bază, iar unitatea de bază era de aproximativ 5 *l* .

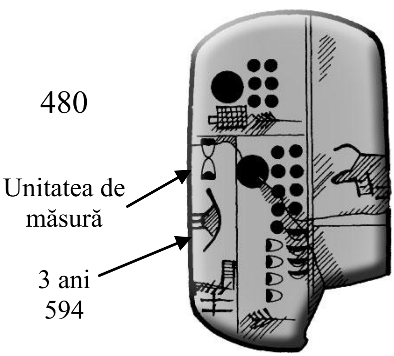


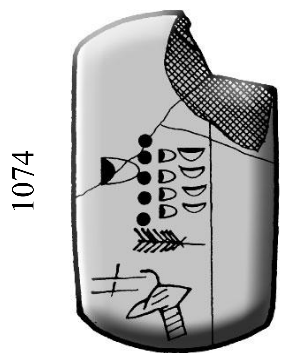

*MSVO 3.51*

Tăblița *MSVO 3.51*, datată din perioada *3500-3100 î. Hr.* conține o serie de date contabile cu privire la cantitățile de orz și malț necesare pentru fabricarea berii. Calculele sunt împărțite în 4 coloane și sunt făcute în sistemul de numerație pentru măsurarea cerealelor. În prima coloană este calculată suma totală, în coloana a doua sunt calculate două cantități de amestec, orz și malț, așezate pe două linii, iar în coloanele trei și patru avem cantitățile de orz și malț. Respectând regulile de calcul ale sistemului de numerație, putem verifica modul în care sumerienii au obținut cantitatea totală de *572* unități măsurabile. De exemplu, totalul *1* este obținut dacă se adună cantitățile din coloana *3*, *7×30+4×5+4=234u.* orz cu *2×30+4=64u.* malț adică *298* unități de amestec, iar totalul 2 este obținut dacă se adună cantitățile din coloana 4 *7×30+4=214u.* orz cu *2×30+4=64u.* malț adică <u>*274*</u> (*278)* unități de amestec. Se observă eroarea de calcul la totalul *2*. Însumând totalul *1* cu totalul *2* se obține totalul general.

Pentru măsurarea timpului sumerienii au folosit un sistem bazat pe împărțirea anului în *12* luni și a lunii în *30* de zile. Simbolurile folosite sunt următoarele:

***1an=12 luni*** ***10 luni*** ***1lună=30zile*** ***10zile*** ***1 zi***



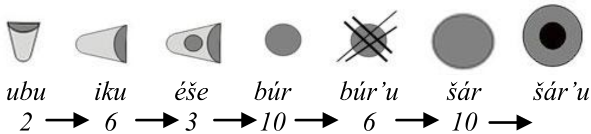




Tăblița OECT 7, Nr. 136 față

Tăblița OECT 7, Nr. 136 spate

Tăblița OECT 7, Nr. 136 conține înregistrarea numerică consumului de orz; în partea din față sus avem înregistrată o cantitate de 480u. , în partea de jos o altă cantitate consumată pe timp de trei ani, și anume 594u., iar pe spatele plăcuței avem totalul, 1074u.

Pentru măsurarea suprafețelor terenurilor, sumerienii utilizau următoarele unități de măsură:




Unde *1* iku =*3600* m$^2$.

La sfârșitul mileniului *al III-lea* s-a introdus sistemul de numeraţie *sexagesimal poziţional.* Babilonienii au preluat sistemul sexagesimal de la sumerieni, pe baza căruia au împărțit cercul în *360* de grade, gradul în *60* de minute și minutul în *60* de secunde.

Pentru a scrie cele *60* de elemente ale sistemului sexagesimal ei foloseau în scrierea cuneiformă două semne. Aveau un semn pentru unu (𒁹) (derivat din conul mic), care repetat dădea doi 𒈫, trei 𒐈 şi aşa mai departe, până la zece, pentru care exista un alt semn (𒌋) (derivat din cercul mic). Pentru şaizeci se folosea acelaşi semn ca pentru unu, dar valoarea sa era dată de coloana în care se găsea.

| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 𒁹 | 𒈫 | 𒐈 | 𒐉 | 𒐊 | 𒐋 | 𒐌 | 𒐍 | 𒐎 | 𒌋 | 𒌋𒁹 | 𒌋𒈫 |
| *13* | *14* | *15* | *16* | *17* | *18* | *19* | *20* | *30* | *40* | *50* | *60* |
| 𒌋𒐈 | 𒌋𒐉 | 𒌋𒐊 | 𒌋𒐋 | 𒌋𒐌 | 𒌋𒐍 | 𒌋𒐎 | 𒎙 | 𒌍 | 𒐏 | 𒐐 | 𒁹 |

Numerele mai mari decât 60 se scriau astfel: 𒐏 𒐉 𒎙𒐋 𒐏

Numărul 𒁹𒎙 𒌍𒐋 𒐏𒁹 poate fi scris și cu cifre arabe astfel: *12,36,41.* Atunci când utilizăm cifre arabe vom folosi următoarele convenții: pentru a despărți ordinele vom folosi virgula « **,** » iar pentru a despărți parte întreagă de partea zecimală vom folosi punct și virgulă « **;** » .

Numărul *12,36,41* poate fi transformat în baza zece astfel:

$12,36,41 = 12\times60^2+36\times60^1+41=2594201$.

Dacă scriem 12;36,41, atunci numărul transformat în baza zece este: $12+\frac{35}{60}+\frac{41}{60^2}$ = *12,011509259*……

Pentru fracțiile uzuale $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ babilonienii foloseau simbolurile .

Acest sistem avea și inconveniente; de exemplu, simbolul  poate reprezenta *1, 60 (6 · 10), 3.600 (60 · 60),* $\frac{1}{60},\frac{1}{60^2}$ etc. valoarea sa depinzând de poziţia pe care o ocupă. Un alt exemplu: datorită faptului că nu exista un semn pentru ordinele absente (lipsa cifrei 0), numărul  poate fi citit $13\times60+6$ sau $13\times60^2+6$ sau $13+\frac{6}{60}$ . De regulă, atunci când în calcule apărea această cifră, mesopotamienii lăsau un loc liber. Dar nu întotdeauna; astfel, nu este clar dacă  înseamnă *2, 61, 3601* sau *3660.*

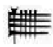
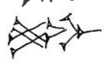
Ulterior a fost eliminat acest inconvenient prin înlocuirea ordinului lipsă cu semnul,  sau  sau  iar numărul $13\times60^2+0\times60+6$ era reprezentat:  , cu alte cuvinte a fost introdusă cifra zero.

***Sisteme metrologice***

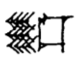
În privința măsurătorilor, mesopotamienii aveau numeroase sisteme metrologice, majoritatea bazate pe sexagesimalitate. În funcție de etapele dezvoltării societății mesopotamiene întâlnim mici diferențe în privința rapoartelor dintre multiplii și submultiplii unităților de măsură. Remarcăm câteva unități de măsură fundamentale: pentru lungime - *kuš (cotul)*, pentru suprafață - *sar (livada)*, pentru capacitate - *sila*, pentru greutăți – *mina.*

În tabelele de mai jos sunt prezentate unitățile de măsură folosite de vechii babilonieni, cu multiplii și submultiplii principali.

Unitățile de măsură pentru lungime :

| Unitatea | Simbol | Valoare aproximativă | Um. | |
|---|---|---|---|---|
| *Sù-ši (degetul)* |  | *1,7 cm* | *1/30* | ↓×30 |
| *kuš (cotul)* |  | *50 cm ~ 30 degete* | *1* | ↓×12 |
| *ninda* |  | *6 m =12 coți* | *12* | ↓×6 |
| *uš* |  | *360 m = 60 ninda* | *72* | ↓×30 |
| *danna* |  | *10,8 km = 30 uš.* | *2160* | |

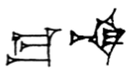
Unitățile de măsură pentru suprafață:

| Unitatea | Simbol | Valoare aproximativă | Um. | |
|---|---|---|---|---|
| *še* |  | *33 cm²* | *1/10800* | ↓×180 |
| *gin* |  | *0,6 m² ~ 180 še* | *1/60* | ↓×60 |
| *Sar (livada)* |  | *36 m² = 60 gin* | *1 ninda²* | ↓×100 |
| *iku(gan)* |  | *3600 m² = 100 sar* | *100* | ↓×18 |
| *bur* | | *64800 m² =18iku* | *1800* | |

Unitățile de măsură pentru capacitate:

| Unitatea | Simbol | Valoare aproximativă | Um. | |
|---|---|---|---|---|
| *gin* |  | *17 ml* | *1/60* | ×60 |
| *Sila(qù)* |  | *1 l ~ 60 gin* | *1* | ×10 |
| *ban* |  | *10l = 10 sila* | *10* | ×6 |
| *ba-ri-ga* |  | *60l = 6ban* | *60* | ×5 |
| *gur* |  | *300l = 5bariga* | *300* | |

Unitățile de măsură pentru masă:

| Unitatea | Simbol | Valoare aproximativă | Um. | |
|---|---|---|---|---|
| *še* |  | *45mg* | *1/10800* | ×180 |
| *gin (shekel)* |  | *8g ~ 180 še* | *1/60* | ×60 |
| *ma-na (mina)* |  | *500g = 60 gin* | *1* | ×60 |
| *gu (talent)* |  | *30kg = 60 ma-na* | *60* | |

Atunci când efectuau calculele metrologice babilonienii lucrau cu o singură unitate de bază; de exemplu pentru lungime erau folosite două sisteme sexagesimale, unul cu unitatea de bază *ninda (Ln)*, iar celălalt avea unitatea de bază *cotul(Lc)*.

| *Um. lungime* | *su.si* | *kuš* | *ninda* | *us* | *danna* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ln* | *0;00,10* | *0;05* | *1* | *1,00* | *30* |
| *Lc* | *0;20* | *1* | *12* | *1,12* | *36,00* |

Pentru ușurarea efectuării operațiilor metrologice, ei aveau deja calculate în tabele aceste transformări. În tabelul de mai jos sunt trecute pe două coloane transformările efectuate de matematicienii babilonieni și inscripționate pe fața tăbliței

*MS 3869* , transformări ce au ca unitate de bază sexagesimală, *ninda.* În partea stângă a fiecărei coloane sunt trecute unitățile de măsură pentru lungime începând cu *1 deget* până la *9 degete*; 10 *degete* sunt scrise ca ⅓ *cot*, apoi 15 degete ca ½ *cot* și *20 degete* ca ⅔ cot. Tabelul continuă cu *30 degete(1cot)* și se încheie cu *4 coți*. În partea dreaptă a fiecărei coloane sunt trecute transformările în *ninda.* Pe spatele tăbliței sunt trecute transformările până la 5 *ninda*. De exemplu:

*½ ninda=6 coți=0;30 ninda;*

*½ ninda 1cot=0;35* ninda;

*1½ ninda=1;30 ninda.*

| *Simbol* | *Traducere* | *Ninda* | *Simbol* | *Traducere* | *Ninda* |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 deget | 0;00,10 | | ½ cot | 0;02,30 |
| | 2 degete | 0;00,20 | | ⅔ cot | 0;03,20 |
| | 3 degete | 0;00,30 | | 1 cot | 0;05,00 |
| | 4 degete | 0;00,40 | | 1⅓ cot | 0;06,40 |
| | 5 degete | 0;00,50 | | 1½ cot | 0;07,30 |
| | 6 degete | 0;01,00 | | 1⅔ cot | 0;08,20 |
| | 7 degete | 0;01,10 | | 2 coți | 0;10,00 |
| | 8 degete | 0;01,20 | | 3 coți | 0;15,00 |
| | 9 degete | 0;01,30 | | 4 coți | 0;20,00 |
| | ⅓ cot | 0;01,40 | | | |

Trebuie specificat faptul că, datorită deficiențelor sistemului de numerație sexagesimal folosit la acea dată (lipsa elementului 0), transformările sexagesimale (din coloana *ninda*) scrise pe tăbliță, nu au aceeași formă ca cele din tabel; de exemplu pentru a transforma *3 degete* babilonienii scriau *ninda*, pentru a transforma *10 degete (⅓ cot)* se folosea notația ninda. Tabele asemănătoare erau folosite și pentru a transforma unitățile de măsură pentru arie, în scriere sexagesimală. Prezentăm câteva transformări ce au ca bază sexagesimală unitatea de măsură *gin*.

| *Unitate de măsură* | *Scriere sexagesimală* | *Unitate de măsură* | *Scriere sexagesimală* |
|---|---|---|---|
| *1se* | *0;00,20* | *25se* | *0;08,20* |
| *1½ se* | *0;00,30* | *27se* | *0;09,00* |
| *2se* | *0;00,40* | *28se* | *0;09,20* |
| *2½se* | *0;00,50* | *29se* | *0;09,40* |
| *3se* | *0;01,00* | *30se* | *0;10,00* |
| *6se* | *0;02,00* | *⅓gin* | *0;20,00* |
| *12se* | *0;04,00* | *½gin* | *0;30,00* |
| *13se* | *0;04,20* | *⅔gin* | *0;40,00* |
| *15se* | *0;05,00* | *5/6gin* | *0;50,00* |
| *20se* | *0;06,40* | *1gin* | *1;00,00* |

## 2.3 Operații aritmetice

### Adunarea și scăderea

Pentru efectuarea operațiilor aritmetice elementare, babilonienii nu ofereau scheme de calcul. Ei precizau numerele și rezultatul operației, probabil considerau că algoritmul de calcul era prea simplu pentru a-l inscripționa pe tăblițe, în schimb avem numeroase tabele cu rezultatele acestor calcule elementare. Operațiile de adunare și scădere erau efectuate ordin cu ordin. Dacă suma unui ordin depășește valoare *60* se scrie diferența, iar valoarea *60* se transformă şi se adună la ordinul superior. În cazul diferenței, dacă descăzutul unui ordin este mai mic decât scăzătorul, ne împrumutăm de la ordinul superior cu *60*. Pentru a înțelege mai bine operațiile de adunare și scădere vom exemplifica, considerând că numerele sunt valori ale unghiurilor măsurate în grade, minute și secunde.

**Adunarea**

$2^{o}34'25''+1^{o}42'15''=$
$4^{o}17'40''$

| | | |
|---|---|---|
| $1^{o}$ | | |
| $2^{o}$ | $34'$ | $25''$ + |
| $1^{o}$ | $42'$ | $15''$ |
| $4^{o}$ | $16'$ | $40''$ |

$34'+42'=76'= 60'+16'$
$=1^{o}+16'$

**Scăderea**

$3^{o}34'25'' - 1^{o}42'15''=$
$1^{o}52'1''$

| | | |
|---|---|---|
| * | $60'$ | |
| $3^{o}$ | $34'$ | $25''$ - |
| $1^{o}$ | $42'$ | $15''$ |
| $1^{o}$ | $52'$ | $10''$ |

$60'+34'=94'$
$94'- 42'=52'$

Pentru a simboliza scăderea mesopotamienii utilizau deseori semnul , de exemplu numărul 37 îl scriau ca o diferență, și anume *40-3,* adică .

### *Înmulțirea și ridicarea la putere*

La fel ca adunarea, înmulțirea o efectuau direct, operând ordin cu ordin. Cu alte cuvinte ei trebuiau să țină minte o tablă a înmulțirii de la *2×2* până la *59×59*, cea ce era practic imposibil. În acest sens ei au introdus tabelele pentru înmulțire. Tabelele nu conțineau 58 de linii (de la *2* la *59*), practic erau scrise produsele de la *2×2* până la *2×20*, apoi produsele *2×30,2×40* și 2×50. În tabelul de mai jos se poate observa, tabla înmulțirii cu *45.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 × 1 | *45* | 45 × 7 | *5,15* | 45 × 13 | *9, 45* | 45 × 19 | *14,15* |
| 45 × 2 | *1, 30* | 45 × 8 | *6,00* | 45 × 14 | *10, 30* | 45 ×20 | *15,00* |
| 45 × 3 | *2, 15* | 45 × 9 | *6, 45* | 45 × 15 | *11, 15* | 45 ×30 | *22, 30* |
| 45 × 4 | *3,00* | 45 × 10 | *7 ,30* | 45 × 16 | *12,00* | 45 ×40 | *30,00* |
| 45 × 5 | *3, 45* | 45 × 11 | *8, 15* | 45 × 17 | *12, 45* | 45 ×50 | *37, 30* |
| 45 × 6 | *4, 30* | 45 × 12 | *9,00* | 45 × 18 | *13, 30* | 45 × 45 | *33, 45* |

Dacă se dorea efectuarea produsului *45×35*, se scria *35* ca *30+5*, apoi se adunau valorile din tabel pentru *45×30* și pentru *45×5,* obținând rezultatul *26,15*. Atunci când erau folosite numere mai mari se proceda la fel, de exemplu:

*25×17,30 = 25×17,00 + 25 ×30 = 7,05,00 + 12,30 = 7,17,30*

În imaginea de mai jos poate fi observată tăblița aflată la muzeul de antichități al universității din Jena, Germania, pe care este scrisă tabla înmulțirii cu *9*.

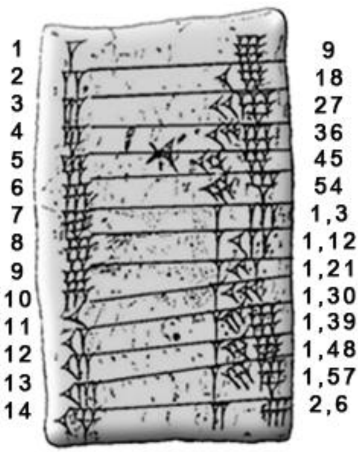



*Tabla înmulțirii cu 9, față*

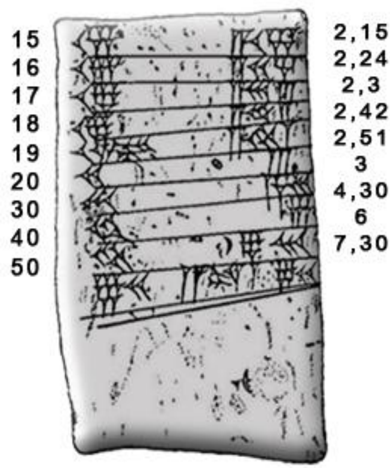
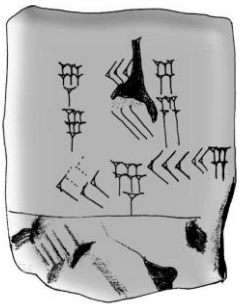



*Tabla înmulțirii cu 9, spate*

Pe fața tăbliței, în partea dreaptă, sunt trecute numerele de la *1* la *14*, iar în parte stângă produsele acestor numere cu *9*. Pe spatele tăbliței sunt scrise numerele de la *15* la *20*, continuând cu *30,40*, *50,* iar în partea dreaptă produsele lor cu *9.* Se poate observa pe revers că numărul 19 a fost scris ca *20-1*, probabil din considerente practice scribul a ales să folosească o astfel de notație.

Dacă numerele folosite nu puteau fi regăsite în tabele, înmulțirea era efectuată ordin cu ordin.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 7 | 35 |
| | | 7 | 35 |
| $5\times5$ | | | 25 |
| $5\times30$ | | 2 | 30 |
| $5\times7$ | | 35 | |
| $30\times5$ | | 2 | 30 |
| $30\times30$ | | 15 | |
| $30\times7$ | 3 | 30 | |
| $7\times5$ | | 35 | |
| $7\times30$ | 3 | 30 | |
| $7\times7$ | 49 | | |
| | 57 | 30 | 25 |



*7,35*

*7,35*

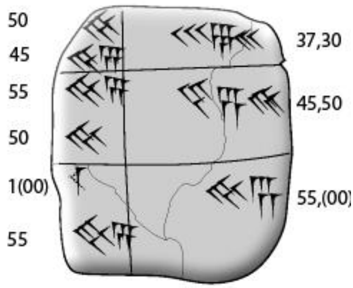
*57,30,25*

*Tăblița Ni 10246*

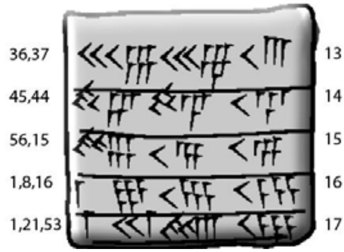
Numeroase tăblițe pe care sunt efectuate calcule matematice le întâlnim în colecția Schøyen, una dintre cele mai mari colecții private din lume. Colecția aparține omului de afaceri de origine norvegiană, *Martin Schøyen*, piesele având codul de înregistrare *MS.*

Pe tăblița *MS2728* se observă o serie de înmulțiri succesive, în partea stângă sunt trecuți factorii, iar în partea dreaptă produsul. Dacă transformăm numerele în baza *10* putem observa următoarele: în primul rând avem înmulțirea $50\times45=2250$, în al doilea rând $55\times50=2750$, iar în al treilea rând $60\times55=3300$.

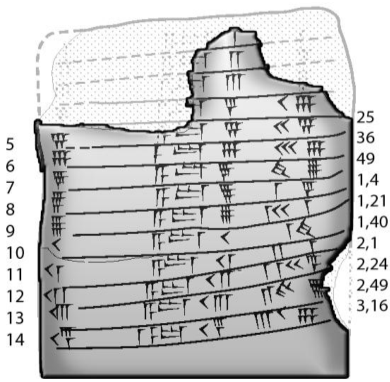
De asemenea, s-au găsit tabele cu pătratele numerelor până la *59* și tabele cu cubul numerelor până la *32*. Pe tăblița *MS2706* sunt calculate pătratele numerelor de la *1* la *14*; de exemplu, pătratul numărului *13* transformat în baza *10*, poate fi calculat astfel: $2,49=2\times60+49=169$



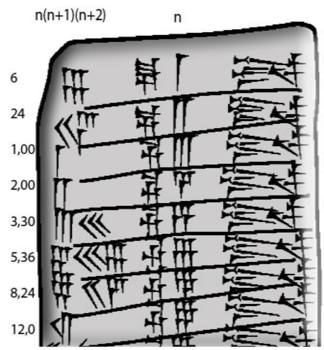

*Tăblița MS. 2728*




*Tăblița MS. 3966*




*Tăblița MS. 2706*



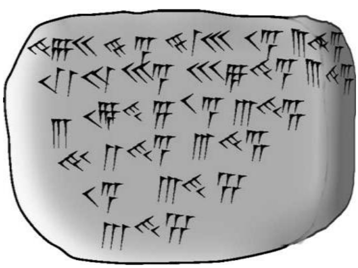

*Tăblița MS. 3048*

Cuburile numerelor de la *13* la *17* le găsim inscripționate pe tăblița *MS. 3966*. În partea dreaptă sunt scrise numerele de la *13* la *17* iar în partea stângă cuburile lor; de exemplu, cubul numărului *16* transformat în baza *10* este: $1\times60^2+8\times60+16=4096$.

Pentru efectuarea unor produse mesopotamienii foloseau formulele: $a\cdot b=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$, sau

$a \cdot b = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$. Unele tabele conțin produse de forma *n·n·(n+1),* unde n ia valori de la *1* la *12*, sau produse a trei numere consecutive de forma *n·(n+1)·(n+2),* unde n ia valori de la *1* la *30*. Fragmentul din tabelul *MS 3048* conține pe coloana *n* numere de la *1* la *9* iar pe coloana *n(n+1)(n+2)* produsele: *1·2·3; 2·3·4; 3·4·5; 4·5·6; 5·6·7; 6·7·8; 7·8·9; 8·9·10.*

Pentru efectuarea calculelor, în afara operației de ridicare la pătrat și cub, întâlnim ridicări la puteri de ordin superior. Pe tăblița *MS 2242* se observă calcule cu puteri, până la ordinul 6.



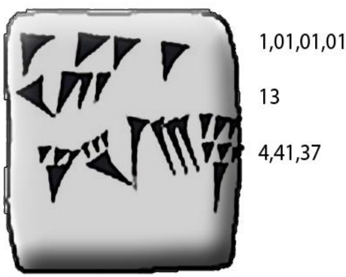
*Tăblița MS 2242*

| Baza 60 | Baza10 |
|---|---|
| *46,20,54,51,30,14,03,45* | $225^6$ |
| *12,21,34,37,44,03,45* | $225^5$ |
| *3,17,45,14,03,45* | $225^4$ |
| *52,44,03,45* | $225^3$ |
| *14,03,45* | $225^2$ |
| *3,45* | *225* |

Unul dintre cele mai mari numere folosite de mesopotamieni îl întâlnim pe tăblița *MS2351*. Pentru scrierea sa a fost nevoie de *2* rânduri, care se continuă până pe spatele tăbliței. În baza *60* numărul este: *13, 22, 50, 54, 59,09, 29, 58, 26, 43,17, 31, 51, 06, 40,* transformat în baza *10* acesta se poate scrie ca *104.857.600.000.000.000.000.000*, sau $20^{20}$.

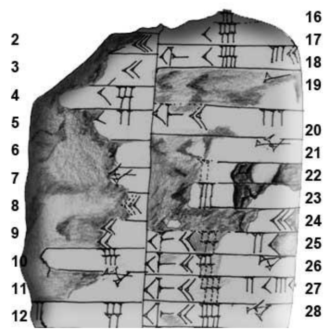
## ***Împărțirea, inversul unui număr***

Operația de împărțire a două numere era efectuată ca o înmulțire dintre un număr și inversul celuilalt număr. În general, prin inversul unui număr natural *a* diferit de *0*, se înțelege numărul $\frac{1}{a}$, însă trebuie să ținem cont de faptul că mesopotamienii foloseau mai rar noțiunea de fracție ordinară. Ei aveau câteva simboluri pentru a ilustra fracțiile ordinare uzuale, însă majoritatea fracțiilor erau scrise sub formă zecimală.




Tăblița MS2317

Pe prima linie este scris deîmpărțitul $1\times60^3+1\times60^2+1\times60+1$, pe linia a doua împărțitorul 13, iar pe linia a treia câtul $4\times60^2+41\times60+37$.




*Fragment din tăblița NI 374*

Dacă notăm cu *n* un număr, vom folosi pentru inversul său notația $\overline{n}$, unde $n\cdot\overline{n}=1$. Valorile numerelor inverse erau gata calculate și se găseau în tabele. Un tabel de acest gen poate fi întâlnit pe tăblița *NI 374* din colecția „*Arkeoloji Müzerlerila*" aflată la muzeul din Istanbul, Turcia. Tăblița, inscripționată pe ambele fețe, conține numerele de la

*1* la *59*. Deoarece numeroase semne au fost deteriorate, specialiștii restauratori au adus la forma inițială simbolurile, prezentându-le în tabelul de mai jos.

| **Nr crt.** | **fața, coloana I** | | **Nr crt.** | **fața, coloana II** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *[1-da igi 2 gal$_2$-bi]* | *;30* | *1* | *[igi]* | *16* | *0;03,45* |
| *2* | *[igi3]* | *0;20* | *2* | *igi* | *17* | *[nu]* |
| *3* | *[igi 4]* | *0 ;15* | *3* | *igi* | *18* | *0;03,20* |
| *4* | *[igi5]* | *0;12* | *4* | *[igi* | *19]* | *[nu]* |
| *5* | *[igi6]* | *0;10* | *5* | *igi* | *20* | *0;03* |
| *6* | *[igi7]* | *nu* | *6* | *igi* | *21* | *nu* |
| *7* | *[igi8* | *0 ;07],30* | *7* | *igi* | *[22]* | *[nu]* |
| *8* | *[igi9* | *0;06],40* | *8* | *[igi]* | *[23]* | *[nu]* |
| *9* | *[igi10]* | *0 ;06* | *9* | *[igi* | *24* | *0;02],30* |
| *10* | *[igi11]* | *nu* | *10* | *igi* | *25* | *[0;02,24]* |
| *11* | *[igi12]* | *0 ;05* | *11* | *igi* | *26* | *nu* |
| *12* | *[igi13]* | *nu* | *12* | *igi* | *27* | *0;02,13,20* |
| *13* | *[igi14]* | *nu* | *13* | *igi* | *28* | *nu* |
| *14* | *[igi15]* | *0 ;04* | *14* | *igi* | *29* | *nu* |
| | | | *15* | *igi* | *30* | *0;02* |
| | | | *16* | *igi* | *31* | *nu* |
| | | | *17* | *igi* | *32* | *0;01,52,30* |

*igi*
*(invers)*

*Nu*
*(negație)*

În afară de simbolurile numerice, în tabel sunt trecute alte două simboluri: *igi* pentru invers și nu pentru negație. De exemplu în coloana *I* linia *3* citim, în stânga *igi4* iar în dreapta *0;15.*Dacă traducem și transformăm în baza *10* putem citi:inversul numărului *4* este $\frac{1}{4}$,deoarece *0;15* $=15\cdot\frac{1}{60}=\frac{1}{4}$*;* sau în coloana a II-a linia 3: inversul numărului *18* este *0;03,20* adică $3\cdot\frac{1}{60}+20\cdot\frac{1}{60^2}=\frac{1}{18}$.

În acest tabel putem observa că unele numere nu au trecute inversele; de exemplu pe linia *6*, în dreptul inversului numărului *7*, este trecută negația „nu”. Mesopotamieni au observat că inversul numărului *7* în baza *60*, nu era număr finit, el fiind de forma *0;8,34,17,8,34,17,……..,* de aceea nu a fost trecut în tabel. În tăblițele babilonienilor întâlnim calcule unde a fost folosit inversul numărului *7*, valoarea atribuită fiind *0;8,34,17,8,34,17* adică:

$$\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{17}{60^3}+\frac{8}{60^4}+\frac{34}{60^5}+\frac{17}{60^6}$$, o valoare foarte apropiată de cea reală.

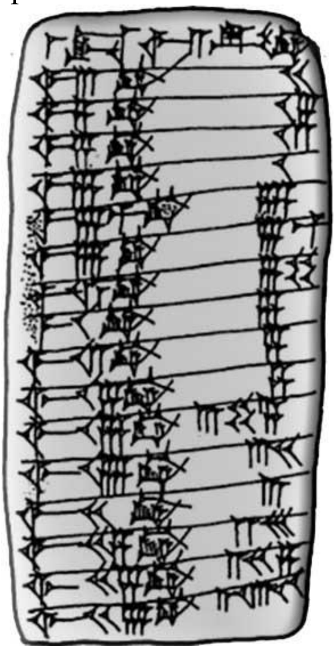
Pentru determinarea numerelor inverse care nu erau trecute în tabele, mesopotamienii au găsit un algoritm de calcul foarte interesant. Pentru a înțelege procedeul de calcul al numerelor inverse vom folosi o mică demonstrație. Fiind dat un număr *n*, ne propunem să găsim inversul acestuia, notat cu $\overline{n}$. Pentru aceasta descompunem numărul *n* într-o sumă *n=a+b*, unde numărul $\overline{b}$ poate fi găsit în tabele.

Efectuăm produsul: $n\overline{b}=(a+b)\overline{b}=a\overline{b}+b\overline{b}=a\overline{b}+1$, dar $\overline{n\overline{b}}=\overline{a\overline{b}+1}$, prin urmare $\overline{n}b=\overline{a\overline{b}+1}$ , de unde rezultă inversul numărului *n*, $\overline{n}=(\overline{a\overline{b}+1})\overline{b}$.

Problema ce urmează se referă la acest algoritm.

*"Care este inversul numărului 17;46,40? Găsește inversul numărului 0;06,40 și vei vedea 9. Înmulțește 9 cu 17;40 și vei vedea 2,39. Adaugă 1 și vei vedea 2,40. Găsește inversul lui 2,40 și vei vedea 0;00,22,30. Înmulțește 0;00,22,30 cu 9 și vei vedea 3;22,30. Inversul este 3;22,30."*

Așadar, mesopotamienii au descompus numărul *n =17;46,40* ca *17;40+ 0;06,40*, prin urmare *b=0;06,40* iar $\overline{b}$ =9. Respectând algoritmul de mai sus matematicienii antici au calculat inversul numărului *n,* $\overline{n}$ *=3;22,30.*

Tăblița *BM106444* conține pe ambele fețe o serie de împărțiri succesive ale numărului *60* în părți cuprinse între *2* și *54*. Pe fața*1*a tăbliței au fost efectuate calculele până la a *27*-a parte a lui *60*.

Tăblița BM106444, fața1

*Șaizeci: a 2-a parte este 30*
*a 3-a parte este 20*
*a 4-a parte este 15*
*a 5-a parte este 12*
*a 6-a parte este 10*
*a 7 (1/2)  - a parte este 8*
*a 8-a parte este 7;30*
*a (10-1)-a parte este 6;40*
*a 12-a parte este 5*
*a 15-a  parte este 4*
*a 16-a  parte este 3;45*
*a 18-a  parte este 3;20*
*a 20-a  parte este 3*
*a 24-a  parte este2;30*
*a 25-a  parte este 2;24*
*a 27-a  parte este 2;13.20*

*Traducere*

## ***Rădăcina pătrată***

Pentru rezolvarea anumitor exerciții babilonienii foloseau valori ale numerelor iraționale; de exemplu pe tăblița *YBC 7289* este trecută cu o aproximație destul de bună, valoarea lui $\sqrt{2}$. Se pare că pentru determinarea valorilor radicalilor, babilonienii foloseau un algoritm de aproximare bazat pe calculul mediei aritmetice, algoritm descris în *sec. I* de către matematicianul grec *Heron din Alexandria* (*10-70d.Hr.*). Nu avem certitudinea că babilonienii au aplicat acest algoritm, deoarece în calcule ei nu ofereau explicații despre valorile radicalilor, pur și simplu le înlocuiau în exerciții fără a face nici un fel de comentarii, însă este cunoscut faptul că matematicienii greci au avut la bază cunoștințele matematice ale babilonienilor și egiptenilor.

După algoritmul dat de *Heron din Alexandria* ce are la bază calculul mediei aritmetice, ne propunem să determinăm valoarea aproximativă a numărului irațional $\sqrt{n}$.

Fie $a_1$, o valoare aproximativă a radicalului. Dacă $a_1 < \sqrt{n}$, atunci $\frac{2}{a_1} > \sqrt{n}$, prin urmare, o aproximare mai exactă a radicalului, notată cu $a_2$, este dată de media aritmetică a celor două valori extreme, $a_1$ și $\frac{2}{a_1}$.

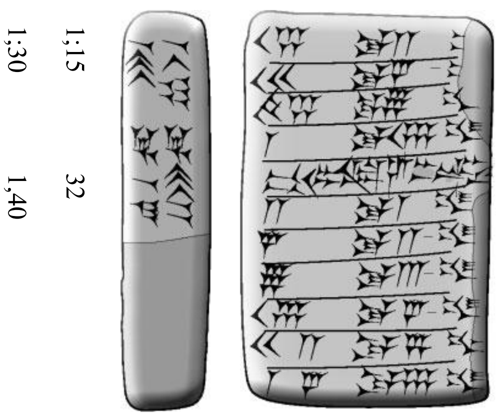
$a_2 = \frac{a_1 + \frac{2}{a_1}}{2}$. Procesul se repetă pentru o aproximare și mai exactă a radicalului, $a_3 = \frac{a_2 + \frac{2}{a_2}}{2}$. Să calculăm valorile aproximative a numărului $\sqrt{2}$. O primă aproximare $a_1$, este numărul 1. Cum $1 < \sqrt{2}$, iar $\frac{2}{1} > \sqrt{2}$, aproximarea $a_2$ va fi: $a_2 = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Repetând procedeul, obținem aproximările:

$$a_3 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{17}{12} = 1{,}4166\ldots, \text{și}$$

$$a_4 = \frac{\frac{17}{12} + \frac{2}{1} \cdot \frac{12}{17}}{2} = \frac{577}{408} = 1{,}414215686\ldots.,$$ o aproximare foarte bună a radicalului.

## Logaritmi

Operația de ridicare la putere era cunoscută de vechii babilonieni, în acest sens existând numeroase tabele ce conțin serii de numere precum și puterile acestora, însă unele dintre aceste tăblițe conțin informații mai complexe decât o simplă ridicare la putere și anume, relații exponențiale sau logaritmice.




| I | II |
|---|---|
| 0;15 | 2 |
| 0;30 | 4 |
| 0;45 | 8 |
| 1 | 16 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |
| 16 | 4 |
| 32 | 5 |
| 1,04 | 6 |

*Tăblița MLC278*

Pe tăblița *MCL278* sunt scrise două coloane ce conțin relații dintre exponenții și puterile unor numere. Cu alte cuvinte tăblița poate fi folosită pentru a răspunde următoarei întrebări: la ce putere trebuie ridicat un anumit număr *a* pentru a obține un număr dat. Această întrebare este identică cu găsirea unui logaritm în bază *a.* Primele patru rânduri ale tăbliței, care sunt continuate pe partea laterală, se referă la logaritmul în baza 16, iar ultimele șase rânduri de referă la logaritmul în baza 2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $16^{0;15}=2$ | $0;15=\log_{16}2$ | $2=2^1$ | $1=\log_2 2$ |
| $16^{0;30}=4$ | $0;30=\log_{16}4$ | $4=2^2$ | $2=\log_2 4$ |
| $16^{0;45}=8$ | $0;45=\log_{16}8$ | $8=2^3$ | $3=\log_2 8$ |
| $16^1=16$ | $1=\log_{16}16$ | $16=2^4$ | $4=\log_2 16$ |
| $16^{1;15}=32$ | $1;15=\log_{16}32$ | $32=2^5$ | $5=\log_2 32$ |
| $16^{1;30}=1,4$ | $1;30=\log_{16}1,4$ | $1,4=2^6$ | $6=\log_2 1,4$ |

## Transformări ale bazelor de numerație

Pentru rezolvarea problemelor de matematică mesopotamienii au folosit atât sistemul de numerație sexagesimal cât și sistemul numerație zecimal. Folosirea în paralel a celor două sisteme de numerație a fost confirmată prin descoperirea unor tabele care cuprind transformări din baza *60* în baza *10*. Un astfel de tabel poate fi găsit pe tăblița *BM36841*. Tabelul este împărțit în două coloane; în coloana *1* sunt trecute transformările pentru numere inverse, iar în coloana *2,* transformări ale numerelor cuprinse între *300* și *1000*. Deoarece numerele în baza *10* au fost scrise cu caractere cuneiforme, pentru a nu avea loc confuzii, babilonienii au făcut următoarele notații: În coloana *1*, numerele scrise în baza *10* sunt urmate de simbolul *ú,* și vor fi citite ca părți din întreg. De exemplu *15 ú* se citește a *15*-a parte, notându-se cu 1/15. Dacă efectuăm calculele pentru rândul 6 vom obține : $0;1,30=1/60+30/60^2=25/1000=1/40.$

În coloana a doua numerele scrise în baza *10* sunt de forma *3me, 4me*…. în traducere, *300, 400*……Calculând linia a șasea *13,20= 13×60+20=800.*

*Tăblița BM36841*

| | Coloana 1 | | Coloana2 | |
|---|---|---|---|---|
| | Baza 60 | Baza 10 | Baza 60 | Baza 10 |
| 1 | [0;4,00 | 15-ú] | 5,00 | [3me] |
| 2 | 0;3,45 | 16-ú | 6,40 | [4me] |
| 3 | 0;3,20 | 18-ú | 8,20 | 5me |
| 4 | 0;3,00 | 20-ú | 10,00 | 6me |
| 5 | 0;2,00 | 30-ú | 11,40 | 7me |
| 6 | 0;1,30 | 40-ú | 13,20 | 8me |
| 7 | 0;1,12 | 50-ú | 15,00 | 9me |
| 8 | 0;1,00 | 60-ú | 16,40 | 10me |

# Capitolul III.

# Aplicații matematice

## *3.1 Generalități*

Primele calcule ale mesopotamienilor se rezumau strict la nevoile practice: numărarea, măsurarea, determinarea lungimilor, suprafețelor, volumelor etc. Mai târziu, calculele matematice depășesc nevoile pragmatice abordând și latura teoretică. În acest mod se justifică folosirea unor numere exagerat de mari, sau calculul unor suprafețe disproporționate (dreptunghiuri cu lungimea de 300 ori mai mare ca lățimea), fără a avea vreo legătură cu realitatea. Dacă citim următoarea problemă "*Am un teren de forma pătratului. Dacă adun de șase ori suprafața terenului cu de trei ori și jumătate latura , obțin 906. Care este latura terenului*", observăm că avem de-a face cu o aplicație teoretică. Această aplicație are un caracter didactic, având ca scop dezvoltarea competențelor pentru aplicarea unor algoritmi de calcul.

Toate problemele de matematică ale babilonienilor erau inscripționate pe tăblițe de lut. Dacă problema sau setul de probleme nu mai putea fi scris, din lipsă de spațiu, scrierea continua pe spatele tăbliței. Numărul mare de texte matematice cuneiforme descoperite, evidențiază faptul ca mesopotamienii acordau o importanță deosebită acestei științe. Trebuie precizat faptul că, aceste texte matematice fac referire la o perioadă istorică foarte mare, aproximativ 1500 de ani. De aceea, atunci când folosim expresia *tăblițe babiloniene,* ne referim în general la tăblițele ce aparțin culturii mesopotamiene.

În funcție de utilitate și aplicabilitate, conținuturile matematice erau prezentate în forme diferite. Unele tăblițe ce tratau probleme de geometrie aveau inscripționate figura geometrică și o serie de numere, fără a face vreo precizare în legătură cu natura acelor numere, lăsând cititorul să descifreze mesajul matematic. De exemplu pe tăblița *MS 3042* este desenat un triunghi în dreptul căruia sunt trecute trei numere, două pe laturi și unul în interior. Se constată că semiprodusul numerelor de pe laturi ne dă numărul din interior, ceea ce ne determină să credem ca babilonienii au calculat pe această tăbliță aria triunghiului dreptunghic.

Pe alte tăblițe întâlnim expunerea problemei, figura geometrică, precum și rezolvarea, iar pe alte tăblițe sunt inscripționate numai conținuturile problemelor. Acestea din urmă seamănă foarte mult cu o „culegere de probleme" în sensul că ele conțin un număr mare de exerciții, separate cu o linie simplă sau dublă, unele dintre ele fiind variante de același tip, adică sunt rezolvabile prin aceleași metode, deosebindu-se numai prin coeficienți.

Aceste aspecte scot în evidență nevoia de teoretizare a cunoștințelor deja învățate, de păstrare și fixare a regulilor care au fost descoperite. Însă până la definirea matematicii ca știință teoretică mai sunt multe etape de parcurs. Chiar dacă babilonienii au reușit să rezolve probleme cu un grad înaintat de dificultate, ei nu au oferit niciun indiciu despre demonstrații, cum și de ce s-a ajuns la un anumit rezultat. Majoritatea exercițiilor gata rezolvate conțineau algoritmul de calcul, erau oferite indicații asupra numerelor și erau specificate ordinea efectuării operațiilor, fără a se preciza de ce anume trebuia făcută o anumită operație. Rezolvările traduse de pe tăblițele babiloniene erau descrise în propoziții scurte și conțineau exprimări de forma: *la x adaugă y, sau din x ia y, sau înmulțește cu x, ridică la pătrat*, etc.

Matematica modernă oferă astăzi explicații clare despre suportul teoretic necesar rezolvării acestor probleme. Acest suport este format dintr-o serie de termeni cum ar fi: serie aritmetică, serie geometrică, radical, exponențială, logaritm, ecuație, sisteme de ecuații etc. Chiar dacă babilonienii nu percepeau aceste noțiuni așa cum sunt percepute în zilele noastre, ele erau pe deplin utilizate și aplicate în problemele cu conținut matematic.

Prezentăm în continuare câteva probleme de matematică, rezolvările date de către matematicienii mesopotamieni, precum și unele interpretări date de matematicienii zilelor noastre.

## ***3.2 Probleme de aritmetică***

În afară de calculele matematice elementare, mesopotamienii s-au ocupat cu rezolvarea unor probleme ce fac referire la împărțirea unor sume de bani, la calculul dobânzilor anuale, utilizând progresiile aritmetice și geometrice.

Tăblița *MS 1844* este scrisă pe *9* rânduri și conține temenii unei progresii geometrice precum și suma acestora. Pe primul rând (scris pe două linii) este calculată suma progresiei, pe rândurile *2-8* sunt scrise numerele aflate în progresie geometrică în ordine descrescătoare, pe rândul *2* este scris numărul *5;02,**41,32**,35,33,20* iar pe rândul *8* numărul *2.* Pe ultimul rând este scrisă rația progresiei, în traducere: “*mai puțin a 7-a parte”* transpus în limbaj matematic $1-\frac{1}{7}$. În tabelele babiloniene nu erau calculate inversele unor numere, ca de exemplu inversului numărului 7, deoarece $\frac{1}{7}$ în baza 60 este un număr infinit. Cum au calculat babilonienii termenii progresiei? fiindcă pentru a găsi un termen al progresiei trebuiau să înmulțească termenul anterior cu rația, adică cu $1-\frac{1}{7}$. Pentru a ieși din acest impas, babilonienii au găsit următoarea soluție. Dacă notăm cu $a_1, a_2, a_3 \ldots a_7$ termenii progresiei, termenul $a_2$ poate fi obținut: $a_2 = \left(1-\frac{1}{7}\right) \times a_1$. De unde $a_1 = a_2 : \left(1-\frac{1}{7}\right)$, sau $a_1 = a_2 \times \left(1+\frac{1}{6}\right)$, în baza *60* $a_1 = a_2 \times 1;10$. Așadar babilonienii au calculat termenii progresiei începând cu termenul $a_7$, pe care l-au înmulțit cu rația, *1;10*.

Tăblița MS 1844

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 23;**15,20,36** **12**,08,53,20 |
| 2 | $a_1$ | 5;02,**41,32**,35,33,20 |
| 3 | $a_2$ | 4;19,**27**,02,13,20 |
| 4 | $a_3$ | 3;42,18,53,20 |
| 5 | $a_4$ | 3;10,33,20 |
| 6 | $a_5$ | 2;43,20 |
| 7 | $a_6$ | 2;20 |
| 8 | $a_7$ | 2 |
| 9 | | *Igi 7 gal bi tur se* |

Datorită unor greșeli de calcul sau de transcriere tăblița conține erori pe rândurile *1, 2* și *3*, valorile corecte fiind:

| | |
|---|---|
| *23;**19,09,48*** | |
| ***10**,08,53,20* | |
| *5;02,35,**42**,35,33,20=* | *4;19,22,02,13,20×1;10* |
| *4;19,**22**,02,13,20=* | *3;42,18,53,20×1;10* |
| *3;42,18,53,20=* | *3;10,33,20×1;10* |
| *3;10,33,20=* | *2;43,20×1;10* |
| *2;43,20=* | *2;20×1;10* |
| *2;20=* | *2×1;10* |
| *2* | |

Rezolvarea acestui exercițiu scoate în evidență superioritatea sistemului de numerație în baza *60*, atunci când lucrăm cu numere ce conțin foarte multe cifre. Dacă am efectua operațiile în baza zece am întâmpina dificultăți de calcul și fără ajutorul unui calculator performant, operațiile ar fi imposibil de efectuat. De exemplu numărul *5;02,35,42,35,33,20* transformat în baza *10* este: *5,04368* după care urmează partea periodică ce conține *81* de cifre .

Problema. ***AO 6484***

*„De la unu la zece fixează mereu un surplus de 2, și adună până la 8,32. De la 8,32 scade până obții 8,31. Adună 8,32 și 8,31 și obții 17,03......”*

La o primă lecturare a textului nu se înțelege mare lucru. Totuși, analizând mai atent conținutul, observăm că în problemă sunt indicate *10* numere, fiecare număr obținându-se prin înmulțirea numărului precedent cu *2*, începând de la *1* până se ajunge la ultimul număr *8,32*, în baza *10, 512*. Ne interesează suma acestor numere. Cu alte cuvinte trebuie să calculăm suma unei progresii geometrice cu rația 2, adică:

$S=1+2^2+2^3+\dots\dots 2^9$ $\qquad\qquad$ $2^9=(512)_{10}=(8,32)_{60}$

Conform calculelor efectuate de mesopotamieni , suma este *8,32+8,31=17,03* adică $(1023)_{10}$. Rezultatul poate fi obținut în felul următor:

$S=1+2^2+2^3+\dots\dots 8,32$

$2\,S=2^2+2^3+\dots\dots 8,32+17,04$

$2S\text{-}S=S=17,04\text{-}1=(8,32+8,32)\text{-}1=8,32+(8,32\text{-}1)$

$=8,32+8,31$

Problema **MS 2830**

Această problemă se referă la împărțirea unei moșteniri, fiecare moștenitor primind o parte din avere ce reprezintă un termen al progresiei geometrice. Traducerea textului de pe tăblița *MS 2830* este următoarea:

"*26 mina 15⅔shekel 15 še arginți. Ei sunt cinci moștenitori. Fratele mai mare printr-o a cincea cotă-parte poate fi peste următorul frate moștenitor. Fratele mai mare - 7⅔mina 8⅔shekel 15 še, al doilea frate - 6 mina 5 shekel, al treilea frate - 5minas , al patrulea frate - 4 mina și ultimul frate - 3 mina 12 shekel*".

Așadar, în problemă este specificată cantitatea totală de arginți: *26 mina 15⅔shekel 15 še*, precum și faptul că partea fratelui mai mare depășește partea următorului moștenitor cu 1/5 din cotă, adică, dacă notăm *cu F* partea fratelui mai mare și cu *f* partea următorului moștenitor, avem relația: $F=f+1/5\ F$, sau $f=(1\text{-}1/5)F$ de unde $f=4/5F$. Cu alte cuvinte, partea fratelui mai mare poate fi obținută prin înmulțirea părții următorului moștenitor cu 5/4, adică rația progresiei geometrice este 5/4. De asemenea în text este dată soluția problemei.

Mesopotamienii au rezolvat această problemă aplicând metoda falsei ipoteze. Ei au pornit de la ipoteza că partea celui mai mare frate este de *5×5×5×5=10,25.* A cincea parte din 10,25 este 2,05.

Următorul frate primește: *10,25-2,05=8,20*. A cincea parte din 8,20 este 1,40.

Următorul frate primește: *8,20-1,40=6,40*. A cincea parte din 6,40 este 1,20.

Următorul frate primește: *6,40-1,20=5,20*. A cincea parte din 5,20 este 1,04.

Fratele cel mai mic primește: *5,20-1,04=4,16.*
Dacă însumăm părțile primite de fiecare frate obținem *10,25+8,20+6,40+5,20+4,16=35,01*, dar suma corectă este *26,15;45 shekel = 26 mina 15 ⅔shekel 15 še.* (vezi unitățile de măsură pentru masă). Pentru a obține părțile corecte, mesopotamienii au înmulțit părțile eronate cu *0;45* unde, (*26,15;45):(35,01)=0;45.*Problema conține și o eroare, fratele al doilea primește *6 mina 15 shekel* și nu *6 mina 5 shekel.*

## ***3.3 Ecuații de gradul I***

Matematicienii mesopotamieni nu cunoșteau noțiunea de ecuație, așa cum o percepem noi astăzi. Ei aplicau un procedeu de rezolvare a problemelor în care necunoscutele erau lungimi, lățimi, arii, volume, greutăți etc. Deși babilonienii nu foloseau formule de calcul, ei rezolvau problemele prin metode algebrice după un anumit plan și urmărind un anumit algoritm.

Tăblița *YBC 4652* conține un set de 22 probleme cu conținut asemănător ce fac referire la determinarea greutății unei pietre. Plăcuța este deteriorată în mare măsură așa că numai 6 probleme au fost traduse. Prezentăm traducerea uneia din probleme: „*Am găsit o piatră, dar nu am cântărit-o, după ce am adăugat a șaptea parte a greutății sale, apoi am* *adăugat a unsprezecea parte din această greutate și am cântărit-o , am găsit 1 mana. Care este greutatea? Rezolvare. Greutatea este de* $\frac{2}{3}$ *mana,8 gin,22* $\frac{1}{2}$ *še."*

Dacă notăm cu x greutatea pietrei, putem forma următoarea ecuație: $\left(x+\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\left(x+\frac{x}{7}\right)=1mana=1{,}00gin$ *.(1)*

Rezolvând ecuația obținem *x=48;07,30gin* sau *(48,125 în baza10).* Rezultatul dat de babilonieni corespunde cu valoarea lui *x* deoarece $\frac{2}{3}$ *din 1,00 =40 și 0;07,30 gin=22* $\frac{1}{2}$ *še.*

1*mana*=60*gin*

1 *gin* = 180 *še*

Cum rezolvau babilonienii ecuația (1). Mai întâi efectuau schimbarea de variabilă $\left(x+\frac{x}{7}\right)=y$ și rezolvau ecuația $y+\frac{1}{11}y=1{,}00$ $sau\frac{12}{11}y=1{,}00$ . Valoarea lui y este găsită prin înmulțirea numărului *1,00* cu inversul numărului *12,* adică cu *0;05* , apoi prin înmulțirea cu *11*. În acest mod era determinată valoarea *y=55*. După efectuarea acestor calcule era rezolvată într-un mod asemănător ecuația $x+\frac{x}{7}=55$, $sau\frac{8}{7}y=55$. Prin înmulțirea numărului *55* cu inversul numărului *8* adică cu *0;07,30* și apoi, prin înmulțirea rezultatului cu *7*, se obține :

*55 · 0;07,30 = 6;52,30*

*x = 7·6;52,30 = 48;07,30*

Ecuațiile de gradul I puteau fi mai complexe. De exemplu, pe aceeași tăbliță întâlnim o problemă ce poate fi pusă în ecuație astfel:

$$(6x+2)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 24(6x+2)=1{,}00gin\ .$$

De asemenea, întâlnim probleme ce puteau fi rezolvate cu ajutorul ecuațiilor cu mai multe necunoscute, probleme ce implică cunoașterea unor reguli de calcul și efectuarea substituirii variabilelor. O astfel de problemă este scrisă pe tăblița *BM 85200.*

*„Se dă un volum săpat. Cât este lungimea, atât este și adâncimea, până la un coeficient egal cu 12. Aduni volumul și secțiunea si obții 1;10. Lungimea este 0;30. Cât este lățimea.*

*Rezolvare*

*Înmulțește 0;30 cu 12. Obții 6 pentru adâncime. Adaugă la șase unu și obții șapte. Cu cât trebuie să-l înmulțim pe 7 pentru a obține 1;10. Cu 0;10.Inversul lui 0;30 este 2. Înmulțește 0;10 cu 2 și obții 0;20. 0.20 este lățimea. ”*

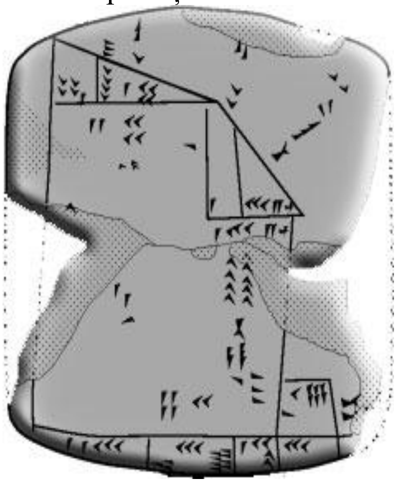
Pentru a înțelege rezolvarea dată de babilonieni vom nota cu x, y și z lungimea, lățimea, respectiv înălțimea unui paralelipiped dreptunghic, în plus avem relațiile: *s=xy* , *z=xyz*, unde *s* este secțiunea iar *v* volumul. Pe de altă parte *z=12x și xyz+xy=1;10 sau xy(z+1)=1;10.* Când s-a înmulțit *0;30 cu 12* s-a calculat valoarea lui *z* , *z= 12·0;30=6* , iar *z+1=7.*Pentru calculul produsului *xy,* babilonienii trebuiau să împartă numărul *1;10 la 7.*

$xy==\frac{1;10}{z+1}=\frac{1;10}{7}=0;10$. Știm din capitolele anterioare că numărul *7* nu are invers finit în baza *60*, de aceea matematicienii au căutat un număr, care înmulțit cu numărul *7* să dea *1;10*. În acest fel au calculat produsul *xy=0;10*. Pentru a determina valoare lățimii y , au înmulțit numărul *0;10* cu inversul numărului *0;30*, adică cu *2*, obținând astfel valoare *0;20.*

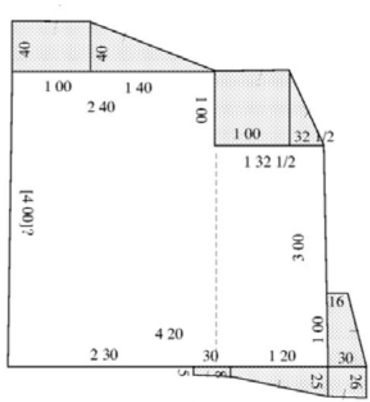
## ***3.4 Arii***

Datorită aplicabilităților practice, calculul suprafețelor, în special a suprafețelor agricole, i-a preocupat în mod deosebit pe matematicienii mesopotamieni. Pentru a putea fi administrate, suprafețele de teren trebuiau împărțite după anumite criterii. În urma parcelării, suprafețele rezultate aveau forme diferite, prin urmare, apare nevoia de a clasifica și de a măsura cât mai exact aceste forme geometrice. De obicei, suprafețele poligonale erau calculate prin descompunerea în triunghiuri și patrulatere. Pentru pătrate, dreptunghiuri, triunghiuri dreptunghice, trapeze dreptunghice și trapeze isoscele, babilonienii foloseau reguli ce conduceau la formulele pe care astăzi le învățăm în școală. Pentru celelalte patrulatere mesopotamienii foloseau „formule” cu care determinau valorile aproximative ale suprafețelor. Un exemplu elocvent în această privință îl constituie tăblița *MS1850*. Tăblița se află într-un grad avansat de deteriorare, practic a fost ruptă în două. Cu toate acestea, în partea din față se poate observa planul unui teren și o serie de numere ce reprezintă dimensiunile unor lungimi. Desenul executat de babilonieni nu respectă întocmai proporțiile conform dimensiunilor date, de aceea prezentăm în partea dreaptă schița corectă.

Terenul este format dintr-un lot mai mare ce poate fi împărțit în două dreptunghiuri, și 8 parcele mai mici de forma triunghiului, pătratului dreptunghiului și trapezului. După unii cercetători, se pare că este vorba de completarea unei moșii mai mari, prin alipirea celor 8 suprafețe. Conform dimensiunilor date, toate suprafețele pot fi măsurate, și anume, suprafața mare are aproximativ 30 bur (194 ha.), iar suma suprafețelor mai mici este de 7 bur (45ha.)



*MS1850*




*Planul terenului*

Pentru calculul suprafețelor, mesopotamienii erau nevoiți să facă unele transformări metrologice. De exemplu, pe tăblița *Ni 18* este calculată aria unui pătrat cu latura dată. În partea dreaptă jos, sunt datele problemei iar în stânga sus, este efectuată o înmulțire.

Mai întâi scribul a efectuat transformarea dimensiunii pătratului, în sistemul sexagesimal*(Sn).*

*⅓cot =1,40 (0;01,40)*

*3degete=30 (0;00,30)* efectuând suma obținem:

*⅓cot 3degete= 2,10 (0;02,10),* număr cate poate fi observat în stânga sus. Apoi se efectuează ridicarea la pătrat a acestei dimensiuni*,* rezultatul dat de scrib fiind *0;04,26,40*. Aici putem remarca o primă greșeală de calcul, fiindcă rezultatul corect este *0;04,41,40.* Acum numărul sexagesimal este transformat din nou în unitatea de măsură pentru arie *(gin)*. Numărul *0;04,26,40* este descompus ca *0;04,20* +0;00,06,40, unde *0;04,20=13 se iar* 0;00,06,40=*⅓se,* (o a doua greșeală comisă de scrib, deoarece rezultatul de pe tăbliță este¼ se). Așadar, prin transformarea numărului sexagesimal *0;04,26,40* se obține*13⅓se.*

*Tăblița Ni 18*

2,10
2,10
4,26,40

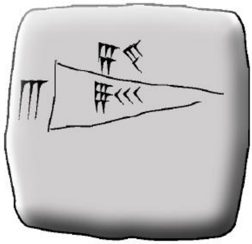
*⅓cot 3degete este dimensiunea. Care este aria? Aria este*13 ¼ se.

*Traducere*

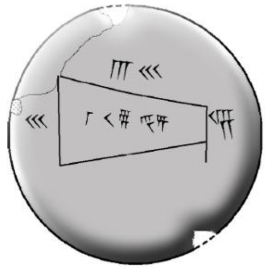
Pe tăblița *MS3042* este desenat un triunghi dreptunghic cu dimensiunile catetelor de *3,00,* respectiv *5,40,* iar în interiorul triunghiului aria, *A=8,30,00*. Așadar, babilonienii cunoșteau formula: $A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

Dacă efectuăm transformările în baza zece, datele problemei devin:

| *Baza de numerație* | *Cateta 1* | *Cateta 2* | *Aria* |
|---|---|---|---|
| *60* | *3,00* | *5,40* | *8,30,00* |
| *10* | *180* | *340* | *30600* |



Tăblița MS 3042



Tăblița MS2107

Pe tăblița *MS2107* avem reprezentat un trapez isoscel cu următoarele dimensiuni: baza mare *B=30*, baza mică *b=15*, înălțimea *i=3,30*, iar în interiorul trapezului este trecută aria *A =1,18,45*.

| *Baza de numerație* | *B* | *b* | *î* | *A* |
|---|---|---|---|---|
| *60* | *30,00* | *15,00* | *3,30* | *1,18,45* |
| *10* | *1800* | *900* | *210* | *283500* |

Pentru trapezele oarecare, aria era calculată folosind o formulă de calcul mai puțin precisă și anume, se efectua produsul dintre semisuma bazelor și semisuma laturilor neparalele.

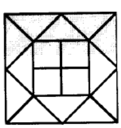
Mesopotamienii calculau aria cercului folosind constanta $\pi \approx 3$. Pe tăblița *YBC7302* avem desenat un cerc pe care sunt trecute o serie de valori numerice, și anume: în partea de sus circumferința $C=3$, lateral $C^2=9$, iar în interior aria cercului $A=0;45$. Cunoscând formula $A=\frac{C^2}{4\pi}$, putem determina valoarea aproximativă a constantei $\pi$ din $\frac{45}{60} \approx \frac{9}{4\pi}$, de unde $\pi \approx 3$.

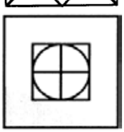
*Tăblița YBC7302*

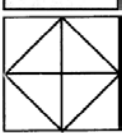
O problemă asemănătoare o întâlnim pe tăblița *YBC11120*, unde *C=1,30* iar *A=0;11,15*, rezultând pentru $\pi$ aceeași valoare aproximativă, *3*.

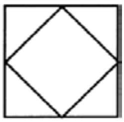
Tăblița *BM 15285* conține o serie de 40 de probleme asemănătoare ce fac referire la aria unor figuri geometrice înscrise într-un pătrat cu latura de *1 uš* (360 m). Datorită degradării tăbliței, numai 31 de probleme au putut fi traduse, o parte din ele fiind vizibile în fragmentul de mai jos ( patru probleme pe prima linie și patru probleme pe linia a doua).

Problemele erau ordonate în tabele, în fiecare căsuță poate fi observată figura precum și conținutul. Pentru o mai bună înțelegere a cerințelor vom prezenta traducerile celor cinci probleme a căror figuri pot fi observate în fragmentul din tăblița BM 15285.

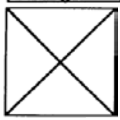
1  *Latura pătratului este de 1 uš. În interior am desenat 12 triunghiuri și 4 pătrate. Care este aria lor?*

2  *Latura pătratului este de 1 uš. În interior am desenat un pătrat în care am desenat 4 pătrate și un cerc. Care este aria lor?*

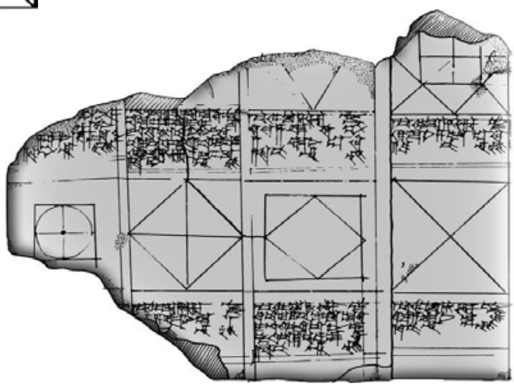
3  *Latura pătratului este de 1 uš. În interior am desenat 8 triunghiuri. Care este aria lor?*

4 

*Latura pătratului este de 1 uš. În interior am desenat un pătrat . Care este aria acestuia?*

5 

*Latura pătratului este de 1 uš. În interior am desenat 4 triunghiuri. Care este aria lor?*



*Fragment din tăblița BM 15285*

Respectând convențiile din desen, matematicienii mesopotamieni puteau calcula cu ușurință ariile cerute (se observă că pentru construcția pătratelor interioare se iau mijloacele laturilor pătratelor exterioare). La problema 2 se impune o precizare. Cele 4 pătrățele ce formează pătratul în care este înscris cercul, corespund cu pătrățelele de la problema 1.

O problemă interesantă ce face referire la împărțirea ariei unui trapez, o întâlnim pe tăblița YBC 4675. Tăblița conține enunțul problemei, figura cu datele corespunzătoare, precum și rezolvarea. Mesopotamienii, ne oferă în ipoteză trapezul cu următoarele dimensiuni: baza mare *B=17 GAR*, baza mică *b=7 GAR*, laturile neparalelele $l_1$*=5,10 GAR* și

*$l_2=4,50$* GAR precum si un segment x, paralel cu bazele, ce împarte trapezul în două trapeze ce au aceeași arie *$A_1=A_2=30,00GAR^2$ (30,00GAR=1bur)*. Matematicienii mesopotamieni și-au propus să calculeze lungimea transversala *x* precum și lungimile segmentelor determinate de transversala *x* pe laturile neparalelele *$y_1,y_2$ și $z_1,z_2$* (vezi Fig.1).

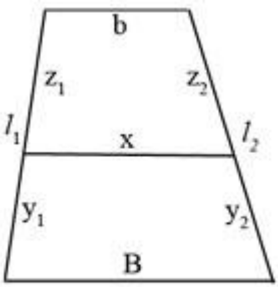



Fig.1

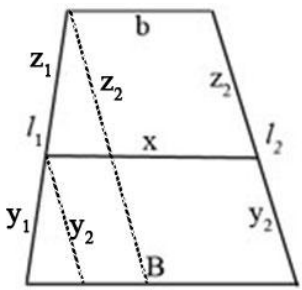



Fig.2

Prezentăm mai jos traducerea enunțului precum și traducerea textului prin care este calculată transversala x.

*”Prima lungime este 5,10 și a doua lungime este 4,50. Partea superioară (B) este17 și partea inferioară (b) este 7. Împarte aria în două astfel ca fiecare parte să aibă 1 bur. Cât de lungă este transversala? Cât ar trebui să fie latura lungă ($y_2$) și cât ar trebui să fie latura scurtă ($y_1$) astfel ca 1bur să mărginească o parte a transversalei. Cât ar trebui să fie latura lungă ($z_2$) și cât ar trebui să fie latura scurtă ($z_1$)astfel ca 1bur să mărginească cealaltă parte a transversalei”.*

Rezolvare.

*„Ambele lungimi trebuiesc adunate și apoi înjumătățite, încât 5,00 să fie rezultatul. Inversul numărului 5,00 trebuie înmulțit cu 10, prin care partea superioară o depășește pe cea inferioară, obținând 2,00. Apoi trebuie*

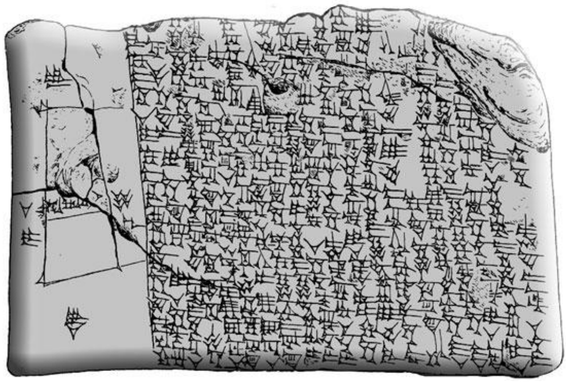
*ridicat la pătrat 17, partea superioară,rezultând 4,49. Din 4,49 scădem 2,00 iar din restul 2,49 calculăm rădăcina pătrată, 13 fiind rezultatul. Transversala este 13".*

Pentru a înțelege logica calculelor de mai sus, vom determina mai întâi lungimea transversalei x, folosind calculele algebrice. Așa cum am amintit, mesopotamienii calculau valoarea aproximativă a ariei trapezului oarecare cu ajutorul formulei : (1) $A = \frac{B+b}{2} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2}$. Ariile $A_1$ și $A_2$ sunt date de formulele (2) $A_1 = \frac{B+x}{2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$, $A_2 = \frac{x+b}{2} \cdot \frac{z_1 + z_2}{2}$.
Ținând cont de rapoartele formate (fig.1) putem scrie următoarele relații: $\frac{y_1}{B-x} = \frac{l_1}{B-b}$, $\frac{y_2}{B-x} = \frac{l_2}{B-b}$, de unde (3) $y_1 + y_2 = (B-x)\frac{l_1 + l_2}{B-b}$, analog, $z_1 + z_2 = (x-b)\frac{l_1 + l_2}{B-b}$.
Deoarece $A_1 = A_2$, din (2) rezultă: $(B+x)(y_1+y_2)=(x+b)(z_2+z_2)$.
Din (2) și (3) rezultă $(B+x)(B-x)=(x+b)(x-b)$ sau $B^2-x^2=x^2-b^2$, de unde $x^2 = \frac{1}{2}\left(B^2 + b^2\right)$, adică $x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(B^2 + b^2\right)}$.

Acum să urmărim calculele babilonienilor. Într-o primă etapă ei calculează $\frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 5{,}00$. Apoi inversul numărului 5,00 adică $\frac{2}{l_1 + l_2}$ îl înmulțesc cu diferența *B-b=10* și cu *A=2bur=1,00,00 GAR*$^2$:

$$\frac{1{,}00{,}00}{5{,}00}10 = 2{,}00 = \frac{2A}{l_1 + l_2}(B-b) = \frac{1}{2}(B^2 + b^2)$$. În text este omisă înmulțirea cu *A*. Apoi se ridică la pătrat *B*,

$B^2=17^2=4{,}49$, se efectuează diferența $4{,}49-2{,}00$ $= B^2 - \frac{1}{2}(B^2 - b^2) = \frac{1}{2}(B^2 + b^2) = 2{,}49$. În final se extrage rădăcina pătrată din *2,49* și se obține *13*.



*Tăblița YBC 4675*

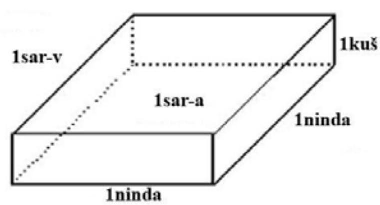
Pentru calculul *laturii mai lungi* $y_2$ *și laturii mai scurte* $y_1$ care să mărginească aria de *1 bur*, scribul calculează mai întâi raportul $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2A_1}{x+B} = 2{,}00$ apoi raportul $\frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{l_2 - l_1}{l_1 + l_2} = 2{,}00 \cdot 0;2 = 4$, iar valorile $y_2$ respectiv $y_1$ se obțin din relațiile:

$y_{2,1} = \frac{y_2 - y_1}{2} \pm \frac{y_2 + y_1}{2} = 2{,}00 \pm 4$ și anume $y_2=2{,}40$ iar $y_1=1{,}56$. Analog sau calculat valorile $z_1$ și $z_2$.

## ***3.5 Volume***

Determinarea volumelor s-a impus ca o necesitate practică în procesul de distribuirea și împărțire a rațiilor alimentare. La început, mesopotamienii s-au limitat la calculul volumelor recipientelor sau hambarelor folosite pentru depozitarea produselor agricole. Mai târziu, problemele matematicienilor abordează și unele calcule necesare în construcții: cantitatea de pământ ce trebuia săpată pentru realizarea unor canale, numărul de cărămizi pentru construirea unui zid, etc. Ei aveau reguli precise pentru determinarea volumului cubului, paralelipipedului dreptunghic și piramidei; pentru celelalte corpuri geometrice foloseau metode prin care determinau valorile aproximative.

Mesopotamienii foloseau ca unitate de măsură pentru arie *1sar(a)=1ninda × 1ninda*, iar ca unitatea de măsură pentru volum *1 sar(v)=1ninda × 1 ninda× 1 kuš*




Următoarea problemă se referă la calculul volumului unui pilon de susținere de forma unui paralelipiped dreptunghic.”*6 ½ninda 5 kuš lungimea, 3 kuš lățimea și ½kuš adâncime. Care este volumul. Răspuns. Volumul este* $\frac{5}{6}$ *sar-v 1* $\frac{5}{6}$ *gin 7 ½ se*”. Pentru a afla volumul, vom calcula mai întâi aria $L\times l$, apoi vom înmulți cu *î*.

*6 ninda +½ninda= 6;30 ninda*

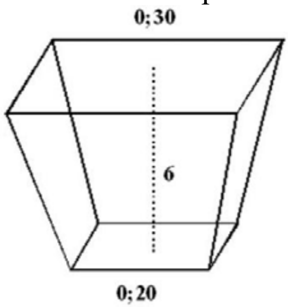
*l5 kuš = 0;25 ninda*, deoarece *1ninda=12 kuš*. Lungimea va fi:

L=*6 ½ninda 5 kuš =6;30 +0;25 =6;55 ninda*, iar lățimea *l= 3 kuš=0;15.*

Prin urmare aria, $L \times l = 6;55 \times 0;15 = 1;43,45$*sar-a*

Dacă înmulțim produsul de mai sus *cu î=½kuš=0;30* obținem volumul *V=0;51,52,30 sar-v* , sau = *0;50 + 0;01,50 + 0;00,02,30 =* ⅚ *sar-v + 1*⅚ *gin + 7 ½ se.*

O altă problemă se referă la calculul volumului de pământ care trebuie săpat, pentru a obține o groapă de forma unui trunchi de piramidă patrulateră.




*"Fiecare parte este un pătrat. Partea mai mare are lungimea de ½ninda și partea mai mică are lungimea de 4coți. Adâncimea este de ½ninda. Care este volumul. Volumul este de 1sar-v 5 gin"*

Rezolvare:

Mai întâi erau efectuate transformările în baza *60*. *½ninda=0;30, 4 coți=0;20 iar ½ninda=6coți.* Pentru a calcula volumul unui trunchi de piramidă babilonienii foloseau următoare metodă: calculau media aritmetică a suprafețelor bazelor după care o înmulțeau cu înălțimea, cu alte cuvinte considerau volumul trunchiului de piramidă egal cu volumul unei prisme care are aceeași înălțime, și aria bazei egală cu media aritmetică a ariilor bazelor trunchiului de piramidă.

Așadar, $A_1 = 0;30 \times 0,30 = 0;15$ *sar-a*, $A_2 = 0;20 \times 0;20 = 0;06,40$ *sar-a,* media aritmetica a celor două arii este:

$A = ½ (0;15 + 0;06,40) = 0;10,50$. Volumul va fi:

$V = 0;10,50 \times 6 = 1;05$ *sar-v* sau *1;00+0;05,* adică *1sar 5 gin*.

Dezvoltarea societății mesopotamiene s-a datorat și faptului că a fost pus la punct un sistem ingenios de canale. Acestea au contribuit îndeosebi la dezvoltarea agriculturii și comerțului. Pentru construirea canalelor, era nevoie de contabilizarea unor date: volumul de pământ excavat, numărul de muncitori, evidențe de ordin financiar etc. Aceste calcule le putem găsi pe tăblițe, sub forma unor probleme de tipul:

*“Trebuie săpat un canal, lungime 5ninda, lățime 1½ ninda, adâncime ½ ninda. Norma unui muncitor este de 10 gin, pentru care va primi 6 se. Care este volumul săpat, câți muncitori sunt necesari, care este costul lucrării? „*

Pentru a exprima volumul în unitatea *sar-v* se transformă adâncimea din *ninda* în *kuš*, *½ninda=6 kuš.* Volumul era calculat astfel *:*

$V=5\times 1{,}30\times 6=45sar\text{-}v$

Apoi se transforma norma unui muncitor în unitatea *sar-v: 10 gin =0;10sar-v*. Pentru a afla numărul de muncitori, se împarte volumul total la normă. *45:0;10=45× 6=4,30 (270 muncitori)*. Pentru a calcula costul lucrării se înmulțește numărul de muncitori cu cantitatea de argint primită de fiecare muncitor (*6se=0;20gin*) *4,30 × 0;20=9gin.*

În privința normelor/zi, babilonienii calculau volumul în funcție de adâncimea pământului săpat.

| *Adâncime* | *m* | *Normă/zi* | $m^3$ |
|---|---|---|---|
| *1 kuš* | *0,5* | ***0;20sar-v*** | *6* |
| *1-3 kuš* | *0,5 – 1,5* | *0;10sar-v* | *3* |
| *3-4½ kuš* | *1,5 - 2,25* | *0;07,30sar-v* | *2,25* |

Așa cum am amintit, babilonienii foloseau formulele de calcul pentru volum și în cazul construcțiilor, în special pentru determinarea numărului de cărămizi necesare construirii unui zid. Cărămizile aveau dimensiuni standardizate, cel mai des fiind utilizate cărămizile cu dimensiunile de *15 × 10 × 5 degete*. Având în vedere că o cărămidă are forma unui paralelipiped dreptunghic, volumul acesteia este de *0;00,00,41,40 sar-v*. În calcule, babilonienii nu se foloseau volumul unei cărămizi, ci lucrau cu un multiplu (pachet) format din *720 (*în baza *60 - 12,00)* cărămizi a cărui volum era de : *0;00,00,41,40×12,00 = 0;08,20 sar-c.*

Problema ce urmează se referă tocmai la determinarea numărului de cărămizi.

*"Lungimea este de 3 ninda ½, 3 coți. Înălţimea zidului este de 4 coţi, lăţimea de 2 coți. Cât este volumul. Câte cărămizi trebuiesc. "*

Pentru a calcula volumul se fac transformările:

lungimea = *3 ½ ninda 3 coţi = 3;30 + 0;15 = 3,4*5ninda

lățimea = *2 coţi = 0;10 ninda*

înălţimea = *4 coţi*

*V = 3;45 × 0;10 × 4 = 2,30 sar-v*

În funcție de dimensiunile zidului se alegea tipul de cărămidă, astfel încât fiecare dimensiune a zidului să fie un multiplu pentru fiecare dimensiune a cărămizii, respectiv lungime, lățime și înălțime. În cazul nostru cărămida cu dimensiunile de *15 × 10 × 5* satisface această condiție.

Pentru a calcula câte cărămizi intră în lungimea zidului, se împărțea lungimea zidului la lungimea unei cărămizi:

*3,45 : 0;02,30 = 3,45 × 24 = 1,30* cărămizi, pentru lățime. La fel procedăm pentru determinarea numărului de cărămizi ce intră în lățimea și înălțimea zidului:

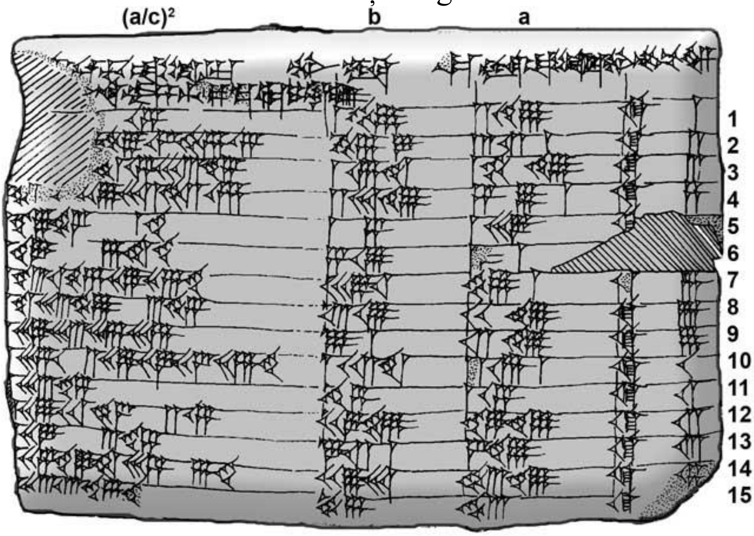
$0;10 : 0;01,40 = 0;10 \times 36 = 6$ cărămizi/lățime, $4:0;10 = 4 \times 6 = 24$ cărămizi/înălțime. Acum putem calcula numărul total de cărămizi $1,30 \times 6 \times 24 = 3,36,00$, sau *12960 (în baza 10).*

Babilonienii nu pierdeau timpul cu efectuarea unor astfel de calcule, ei stabileau mai întâi volumul zidului, tipul de cărămidă, apoi treceau de la unitatea de volum *sar-v* la unitatea de volum *sar-c* prin înmulțirea cu coeficientul specific *7,17* (inversul numărului *0;08,20)*,$30 \times 7,17 = 18$*sar-c.* numărul de cărămizi era dat de $18 \times 12,00 = 3,36,00$.Trebuie menționat faptul că tipurile de cărămizi precum și coeficienții specifici puteau fi găsiți în tabele.

## 3.6 Aplicații ale teoremei lui Pitagora

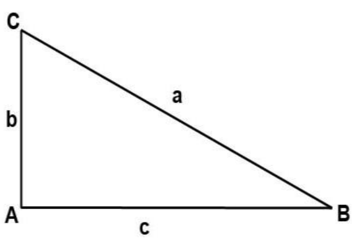
Una dintre cele mai interesante tăblițe ale mesopotamienilor, datată din secolele *XIX-XVI îHr.,* este tăblița "*Plimpton 322*". Tăblița provine din Colecția *G.A. Plimpton* a Universității Columbia, New York, și are numărul de înregistrare *322*. Ea a fost descifrată prima dată în anul 1945 de către Otto Neugebauer, ulterior comentată și interpretată de numeroși cercetători ai istoriei matematicii mesopotamiene.

Tăblița cuprinde 15 rânduri şi 4 coloane, prima și ultima coloană suferind deteriorări importante. În capul coloanelor sunt trecute câteva cuvinte a căror traducere poate fi interpretată astfel: pentru coloana doi *lățime* iar pentru coloana trei *diagonală*. În coloana a patra sunt trecute numerele de ordine: *ki 1, ki 2.….ki 15*, în traducere: primul, al doilea,…. al cincisprezecelea. În coloanele trei și doi sunt trecute numere ce pot fi laturile unui triunghi dreptunghic, și anume, în coloana trei este trecută lungimea ipotenuzei, iar în coloana doi lungimea uneia dintre catete. Interesant este faptul că  în prima coloană nu este trecută lungimea celeilalte catete, așa cum ne-am fi așteptat, ci pătratul raportului dintre numărul trecut în coloana trei și lungimea celeilalte catete.




*Tăblița Plimpton 322*

Pentru a înțelege mai bine conținutul acestui tabel vom nota cu *a, b* și *c* laturile unui triunghi dreptunghic. Fiecare linie verifică relația $a^2=b^2+c^2$, relație cunoscută în matematică cu denumirea de teorema lui Pitagora.




*Tăblița YBC 7289*

Tabelul babilonienilor conține în coloana trei lungimea ipotenuzei *a* iar în coloana doi lungimea catetei *b*. În prima coloană este calculată valoarea raportului $a^2/c^2 = 1/cos^2B$ unde *c* este lungimea celeilalte catete.

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| [1;59],15 | 1,59 | 2,49 | ki-1 |
| [1;56,56],58,14,50,6* ,15 | 56,7 | 3,12,1* | ki-2 |
| [1;55,7],41,15,33,45 | 1,16,41 | 1,50,49 | ki-3 |
| [1];5[3,1]0,29,32,52,16 | 3,31,49 | 5,9,1 | ki-4 |
| [1];48,54,1,40 | 1,5 | 1,37 | ki[-5] |
| [1];47,6,41,40 | 5,19 | 8,1 | [ki-6] |
| [1];43,11,56,28,26,40 | 38,11 | 59,1 | ki-7 |
| [1];41,33,59,3,45 | 13,19 | 20,49 | ki-8 |
| [1];38,33,36,36 | 9,1* | 12,49 | ki-9 |
| [1];35,10,2,28,27,24,26,40 | 1,22,41 | 2,16,1 | ki-10 |
| [1];33,45 | 45 | 1,15 | ki-11 |
| [1];29,21,54,2,15 | 27,59 | 48,49 | ki-12 |
| [1];27,3,45 | 7,12,1* | 4,49 | ki-13 |
| [1];25,48,51,35,6,40 | 29,31 | 53,49 | ki-14 |
| [1];23,13,46,4[0] | 56 | 53* | ki[-15] |

*Transcrierea sexagesimală a tabelului. Tabelul conține și erori, fie de calcul fie de transcriere. Numerele greșite au fost însemnate cu asterisc.*

Să verificăm linia unsprezece.

Din tabel putem observa valorile sexagesimale a liniei unsprezece. *a=1,15 b=45,* în baza *10 a=75, b= 45.*

Efectuând calculele în baza zece obținem *c = 60*, de unde $a^2/c^2$*=1,5625*. Această valoare a lui c poate fi scrisă în sistemul sexagesimal ca: *1;33,45*. Dacă privim tabelul babilonian, putem observa în prima coloană, rândul unsprezece, partea zecimală a numărului *1;33,45*.

Pe tăblița *YBC 7289,* aparținând muzeului universității din Yale, este desenat un pătrat cu latura de *30,* și diagonalele acestuia. Pe o diagonală este inscripționat numărul

*1;24,51,10,* iar în interiorul pătratului numărul *42;25,35*. Dacă aceste numere sunt transformate în baza zece, obținem:

$$1;24{,}51{,}10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414212963.....$$

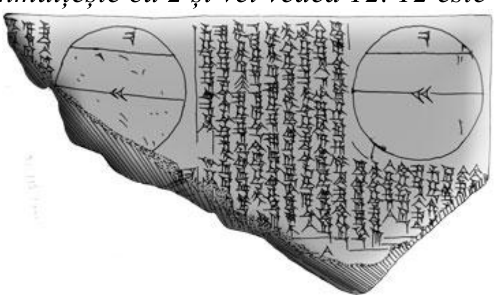
$$42;25{,}35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42{,}42638.....$$

Observăm că numărul *1;24,51,10* este o aproximare foarte bună a numărului $\sqrt{2} = 1{,}414213562....$, iar numărul *42;24 35* este produsul dintre 30 și numărul *1;24,51,10* cu alte cuvinte, babilonieni cunoșteau faptul că diagonala unui pătrat de latură *l* se poate calcula cu ajutorul formulei $d = l\sqrt{2}$. Cum s-a ajuns la această formulă? Ei bine, dacă aplicăm teorema lui Pitagora într-unul din triunghiurile dreptunghice determinate de o diagonală a pătrarului de latură *l*, obținem: $l^2+l^2=d^2$, *sau* $d^2=2l^2$, *de unde* $d = l\sqrt{2}$.

Tăblița *BM 34568* conține 19 probleme în care este folosită teorema lui Pitagora. Redăm mai jos una dintre aceste probleme. „*Lungimea unui dreptunghi este 4 iar diagonala este 5. Care este lățimea?*” Rezolvarea dată de mesopotamieni este următoarea: „*4 ori 4 este 16. 5 ori 5 este 25. Ia din 25 , 16 și obții 9. 3 ori 3 este 9. Lățimea este 3*”. Se poate constata că rezolvarea problemei a fost făcută cu ajutorul teoremei lui Pitagora, cu alte cuvinte mesopotamienii cunoșteau relațiile dintre laturile unui triunghi dreptunghic, înainte de a se naște marele matematician Pitagora. În acest caz, mesopotamienii au aflat pătratul unei catete făcând diferența dintre pătratul ipotenuzei și pătratul celeilalte catete.

Tăblița *MS 3049* conține un set de 16 probleme de matematică. Dintre problemele care au putut fi recuperate prezentăm două, una dintre ele se referă la calculul coardei unui cerc iar cealaltă la calculul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic.

Adaptarea traducerii pentru problema ilustrată mai jos este: “ *Fie un cerc. Diagonala (d) este 20 iar distanța de la coardă la cerc (a) este 2. Cât este coarda? (b). Rezolvare. Diagonala este 20, jumătate este 10. Scade 2 si vezi 8.* Pătratul lui *8 este 1,04, pătratul lui 10 este 1,40. Scade 1,04 din 1,40 și vei vedea 36. Rădăcina pătrată a lui 36 este 6. Înmulțește cu 2 și vei vedea 12. 12 este coarda*.”



*Fragment din tăblița MS 3049, față*

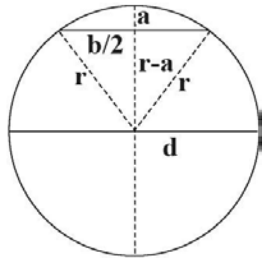



*Fig.MS1*

Din traducerea textului ne putem da seama că babilonienii au aplicat teorema lui Pitagora într-unul din triunghiurile dreptunghice formate ( vezi *Fig.MS1).* Mai întâi au calculat distanța $r\text{-}a = 8$, aplicând teorema lui Pitagora au determinat jumătatea coardei b/2 $= \sqrt{r^2 - (r-a)^2}$ , apoi prin înmulțirea cu *2* au calculat lungimea coardei.

Matematicienii babilonieni aplicau teorema lui Pitagora și în cazul determinării unor dimensiuni aflate în spațiu. Pe spatele tăbliței *MS 3049* găsim un text care ne arată modul de calcul a diagonalei “interioare” unei porți. Adaptarea traducerii este următoarea:

*„Calculează diagonala interioară. Înălțimea porții este de 5 coți și 10 degete. Lățimea este 8,53,20. Grosimea peretelui este de 6,40. Ridică la pătrat 26,40, vezi 11,51,06, 40. Ridică la pătrat 8,53,20, vezi 1,19,00,44,26,40. Ridică la pătrat 6,40, vezi 44,26,40. Adună și vezi 13,54,34,04,26,40. Rădăcina pătrată este 28,53,20.”*

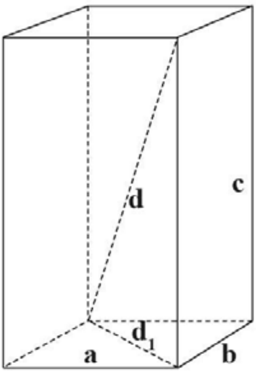



*Fig.MS2*

*Fragment din tăblița MS 3049, spate*

Dimensiunile sunt date în ninda, mai puțin înălțimea.
*5 coți+10 degete=0;25ninda+0;1,40 ninda= 0;26,40 ninda.*

Matematicienii babilonieni au calculat pătratele celor trei dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghic format, apoi le-au însumat.

$a=0;08,53,20$ $\quad$ $a^2=0;01,19,00,44,26,40$
$b=0;06,40$ $\quad$ $b^2=0;00,44,26,40$
$c=0;26,40$ $\quad$ $c^2=0;11,51,06,40$
$a^2+b^2+c^2=0;13,54,34,14,26,40$

Se observă că la efectuarea adunării apare o eroare de calcul, suma corectă fiind *0;13,54,34,04,26,40.* În final au extras rădăcina pătrată din sumă obținând diagonala *d=0;28,53,20.* Așadar, babilonienii au utilizat formula de calcul pentru determinarea lungimii diagonalei unui paralelipiped dreptunghic, $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ . Cum au ajuns la această formulă de calcul? De unde știau că suma obținută este pătrat perfect? Răspunsul la aceste întrebări pare a fi greu de dat, însă la o examinare mai atentă a numerelor observăm următoarele:

$b = 0;06,40 = 3\times 0;02,13,20 = 3\times k = 3\times 1/27$
$a = 0;08,53,20 = 4\times 0;02,13,20 = 4\times k = 4\times 1/27$
$d_1 = 5\times 0;02,13,20 = 5\times k = 5\times 1/27$
$c = 0;26,40 = 12\times 0;02,13,20 = 12\times k = 12\times 1/27$
$d = 0;28,53,20 = 13\times 0;02,13,20 = 13\times k = 13\times 1/27$

Aceste numere folosite de matematicienii mesopotamieni sunt combinații ale numerelor pitagoreice, fiecare dimensiune fiind dată de produsul dintre un număr pitagoreic și un coeficient $k=1/27$. Proprietățile acestor numere erau pe deplin cunoscute de babilonieni, în cazul nostru erau cunoscute egalitățile $3^2+4^2=5^2$ și $5^2+12^2=13^2$. Combinând cele două relații se obține $3^2+4^2+12^2=13^2$, deci, problema putea fi construită foarte ușor prin înmulțirea numerelor pitagoreice cu coeficientul $k$.

## 3.7 Ecuații pătratice

Tăblița *MS 5112* conține un set de *13* de probleme de geometrice ce se pot rezolva pe cale algebrică. Prezentăm următoarele probleme.

Problema1

*„Suma dintre lungimea și lățimea unui dreptunghi este 50. Aria dreptunghiului este 10,00. Calculează lungimea și lățimea dreptunghiului”.*

În *Fig.1* este reprezentat dreptunghiul cu dimensiunile *x* și *y*. Aplicând cunoştinţele actuale de matematică putem găsi rapid soluția acestei probleme, prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x\cdot y=b \end{cases}$$

unde *a* este semiperimetrul, iar *b* este aria dreptunghiului. Rezolvând ecuația de gradul doi scrisă în baza zece, $z^2-50z+600=0$, se găsesc soluțiile sistemului $x=20$ și $y=30$.

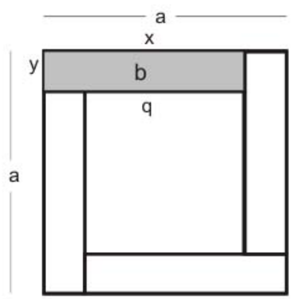



*Fig.1.a*

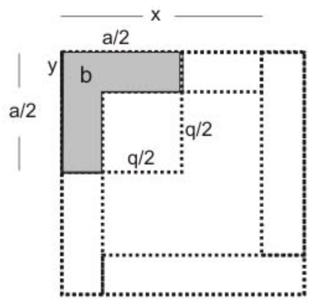



*Fig.1.b*

Mesopotamienii au rezolvat această problemă pe cale geometrică. Ideea de bază constă în determinare diferenței *x-y,* pe care o notăm cu *q*.

Se observă în *Fig.1.a* că aria pătratului mare este formată din ariile celor patru dreptunghiuri la care se adaugă aria pătratului de latură *q*. Deci, $(x+y)^2=4\cdot b+q^2$ sau $q^2= a^2 - 4\cdot b$, de unde $q=\sqrt{a^2-4b}$ .

În Fig.1.b se poate observa că $\frac{a}{2}+\frac{q}{2}=x$ și $\frac{a}{2}-\frac{q}{2}=y$, prin urmare, valorile căutate sunt:

$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$ și $y=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$, adică soluțiile ecuației de gradul *2*.

Problema 2

*"Suma ariilor a două pătrate este 21,40. Suma dintre latura unui pătrat și latura celuilalt este 50. Care sunt laturile celor două pătrate."*

Dacă notăm cu *x* și *y* laturile celor două pătrate (Fig.2.a) problema poate fi citită:

$x^2+y^2=21{,}40$

$x+y=50$

Această problemă poate fi rezolvată cu ajutorul ecuației de gradul 2, însă mesopotamienii au găsit rezolvarea pe cale geometrică:

*"Jumătate din 21,40 este10,50. Jumătatea lui 50 este 25. Ridică 25 la pătrat si obții 10,25. Scade din 10,50 pe 10,25 și obții 25. Rădăcina pătrată a lui 25 este 5. Latura unui pătrat este 25+5=30, latura celuilalt pătrat este 25-5=20."*

Pentru a înțelege logica calculelor de mai sus, apelăm la reprezentarea geometrică din Fig .2.b

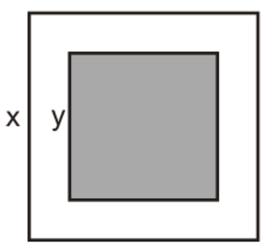



*Fig.2.a*

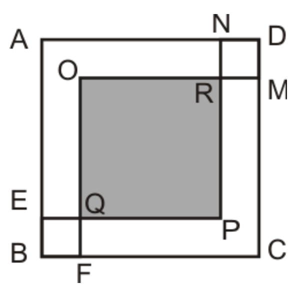



*Fig.2.b*

Se observă că suma ariilor pătratelor de latură x, respectiv y este $x^2+y^2$ și este egală cu suma ariilor pătratelor *AEPN, OFCM*, *EBFQ* și *NRMD*. Tot din figură se poate observa că: *FC+FQ+QO=x+y* și *BF+BE=x-y*, iar aria pătratului *AEPN* = Aria *OFCM*=$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ și aria pătratului *EBFQ* = Aria *NRMD* =$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

Prin urmare, avem relația:

$$x^2+y^2 = Aria\,\mathrm{AEPN} + Aria\ \mathrm{OFCM} + Aria\ \mathrm{EBFQ} + Aria\ \mathrm{NRMD} =$$

$$2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

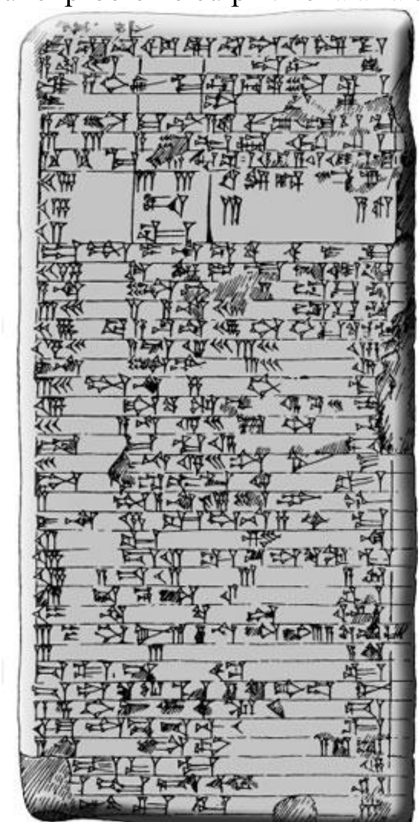
sau $\frac{x^2+y^2}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$,

de unde $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Așadar, mesopotamienii au calculat mai întâi jumătatea sumei $x^2+y^2$ și anume 10,50, apoi jumătatea sumei x+y adică 25, pe care au ridicat-o la pătrat și au obținut 10,25. Făcând diferența *10,50 - 10,25* au calculat de fapt: $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ = 25. După extragerea rădăcinii pătrate au obținut: $\frac{x-y}{2}$=5.

Cum $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ și $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$, mesopotamienii au obținut valorile: *x=25+5, y=25-5.*

Pe tăblița *AO 8862* sunt prezentate datele și soluția unei probleme cu privire la aria unui dreptunghi.



*„Am înmulțit lungimea cu lățimea și am aflat aria. Mai departe am adunat surplusul care depășește lățimea cu aria și am obținut 3,3. Apoi am adunat lungimea cu lățimea și am obținut 27. Se cere lungimea, lățimea și aria.*
*Rezultat: 15 lungimea 12 lățimea 3,0 aria.*
*Urmează această metodă:*
*(1) 27+3,3=3,30*
*(2) 2+27=29*
*(3) Ia jumătatea lui 29(adică 14;30)*
*(4) 14;30×14;30=3,30;15*
*(5) 3,30;15-3,30=0;15*
*(6) Rădăcina pătrată a lui 0;15 este 0;30.*
*(7) 14;30+0;30=15 Lungimea*
*(8) 14;30-0;30=14*
*(9) Scade 2 (pe care l-ai adunat cu 27) din 14 și obții lățimea 12.*
*(10) Înmulțește 12 cu 15 și obții 3,0 aria.*
*15-12=3*
*3,0 +3=3,3”*

*Tăblița AO 8862* *Traducere*

Pentru a înțelege această traducere, o vom transpune în limbaj matematic modern. Dacă notăm cu x lungimea și cu y lățimea, datele problemei devin: *x-y+xy=3,3* și *x+y=27*, adică un sistem de două ecuații cu două necunoscute. Astăzi cunoaștem numeroase metode de rezolvare a acestui sistem, interesant este modul cum mesopotamienii au determinat soluțiile. Ei au adunat mai întâi ecuațiile, obținând astfel linia (1) din traducere, $x+y+x-y+xy=3,30$ sau $x(2+y)=3,30$. Linia (2) o putem transpune astfel $2+x+y=29$. Dacă în ultimele două relații facem substituția $z=y+2$, obținem sistemul echivalent: $\begin{cases} xz = 3,30 \\ x + z = 29 \end{cases}$

Așa cum am observat în exemplele anterioare, pentru rezolvarea sistemului, mesopotamienii exprimau necunoscutele în funcție de semisuma și semidiferența lor. Dacă $a = \dfrac{x-z}{2}$ și $14;30 = \dfrac{x+z}{2}$ (linia 3 din traducere), atunci $x=14;30+a$ și $z=14;30-a$ de unde, $xz=3,30= (14;30)^2- a^2$.

$a^2=(14;30)^2-3,30$ $\quad$ $a^2=0;15$(liniile 4 și 5 din traducere)

$a=\sqrt{0;15}$, $\quad$ $a=0;30$ $\quad$ (linia 6)

$x= 14;30+0;30$, $\quad$ $x=15$ $\quad$ (linia 7)

$z=14;30-0;30$, $\quad$ $z=14$ $\quad$ (linia 8)

$y=z-2=14-2$, $\quad$ $y=12$ $\quad$ (linia 9)

# ANEXE

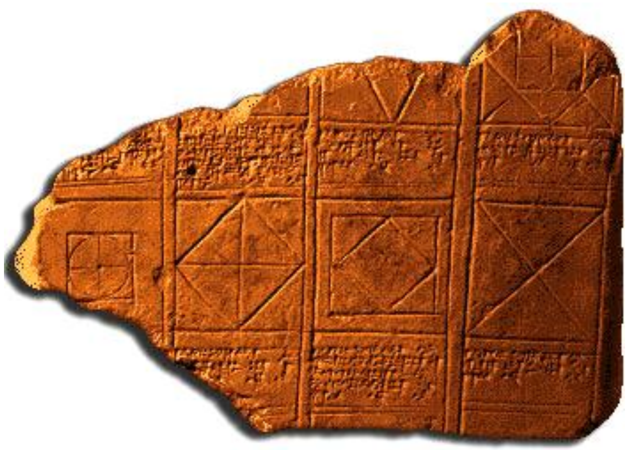
Tăblițele din anexe aparțin:
Colecției Schøyen, Londra
Colecției Universitații Yale
Colecției G A Plimpton, Universitatea Columbia

**Înregistrare numerică a unei cantități de cereale**


**Jetoane complexe**

**Tăblița MSVO 3.51 - înregistrare administrativă scriere proto cuneiformă**

**Tăblița MS 1844 - calculul sumei termenilor progresiei geometrice**



**Tăblița BM 15285 - calculul ariilor unor figuri geometrice**

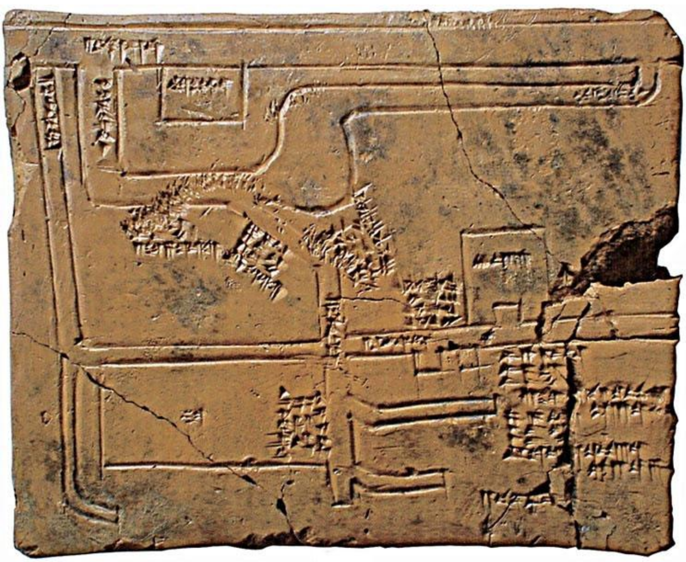
**Tăblița Plimpton - numere pitagoreice**

**Tăblița MS 3049 - calculul coardei unui cerc**

**Tăblița YBC 7289 - calculul diagonalei unui pătrat**

**Tăblița MS1850 - calcului suprafeței unui teren agricol**

**Tăblița MS2107- calculul ariei unui trapez**



**Tăblița MS 3196 - harta cu canale de irigații**

**Tăblița MS 2869 - transformări metrologice**

**Tăblița MS 5112 - probleme de algebră**

## BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

[1] Georges Ifrah, *From one to zero*, *A Universal History of Numbers* Translated by Lowell Bair, Published in Penguin Books 1987.

[2] Jöran Friberg, *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, Departmenl of Mathematical Sciences Chalmers University of Technology Gothenburg, Sweden, Hassleholm, Sweden, June 13, 2004 (final revision December 31, 2006).

[3] Jöran Friberg, *Unespected links between Egyptian and Babylonian Mathematics*, World Scientific Publishing, Singapore, 2005.

[4] Jöran Friberg, *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.

[5] Luke Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Published in the United States by Oxford University Press Inc., NewYork , 2005.

[6] David M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition,* 2006 by The McGraw−Hill Companies.

[7] Robert Kaplan, *The nothing that is: a natural history of zero*, Oxford University Press, 2000.

[8] H. V. (Hermann Vollrat) Hilprecht , *Mathematical, meteorological and chronological tablets from the Temple library of Nippur*, Published by the Department of Archaeology, University of Pennsylvania, Philadelphia*,* ***1906.***

[9] Tobias Dantzig, *Number, the language of science*, 4th edition, New York, Pi Press, March, 2005.

[10] Peter Damerow, *The Origins of Writing as a Problem of Historical Epistemology*, Max Planck Institute for the History of Science,1999.

[11] Denise Schmandt-Besserat, *Before Writing, Volume I: From Counting to Cuneiform,* University of Texas Press, 1992.

[12] Victor J. Katz, Annette Imhausen, Eleonor Robson The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam, Princeton University Press.

[13] Stephen D. Houston, *The first writing. Script Invention as History and Process,* Cambridge University Press.

[14] E. Colman, *Istoria matematicii în antichitate*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1963.

[15] Ovidiu Drîmbă*, Istoria culturii şi civilizaţiei,* Editura Științifică și Enciclopedică, București,1985.

[16] N. Mihăilescu, *Istoria Matematicii*, Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

[17] A. Vartic, *Portacul lui Borziac*, Dava International, 2002.

[18] Eliza Roman, Arina în Țara numerelor, Editura Scripta, București, 2008.

[19] Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient, *The historical roots of elementary mathemaics,*Dover Publication, INC., New York,1976.

[20] Robert Englund, *The State of Decipherment of Proto-Elamite,* S. Houston, ed., *First Writing*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[20] G. Donald Allen, *The History of Mathematics, http://www.math.tamu.edu/.*

[21] O'Connor, J. J.; Robertson, and E.F., Articles, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics.

ISBN 978-606-8056-75-3
9 786068 056753