Spații euclidiene

Noțiunea de produs scalar

Fie V un spațiu vectorial real.

Definiție Se numeşte produs scalar pe spațiul vectorial real V o aplicație $\varphi : V \times V \to R$, notată $\varphi(x, y) = <x, y>$, care are următoarele proprietăți:
1) $<x, y> = <y, x>, \forall x, y \in V$ (produsul scalar este comutativ).
2)$<\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y> = \lambda_1 <x_1, y> + \lambda_2 <x_2, y>, \forall x_1, x_2, y \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$ (produsul scalar este liniar în prima variabilă).
3) $<x, x> \geq 0, \forall x \in V$ şi $<x, x> = 0 \Rightarrow x = 0$, (produsul scalar este pozitiv definit).

Definiție Se numeşte *spațiu euclidian* un spațiu vectorial real de dimensiune finită pe care s-a definit un produs scalar.

Observații:
1) Din condițiile 1) şi 2) ale definiției de mai sus rezultă că produsul scalar este liniar şi în variabila a doua. Într-adevăr, oricare ar fi scalarii şi oricare ar fi vectorii avem
$$<x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2> = \mu_1 <x, y_1> + \mu_2 <x, y_2>, \ \forall \mu_1, \mu_2 \in R, \ \forall x, y_1, y_2 \in V$$
2) Produsul scalar dintre vectorul nul şi oricare alt vector din V este egal cu zero $<x, 0> = <0, x> = 0, \forall x \in V$

Exemple de produse scalare

1) Pe spațiul vectorial R^n se defineşte produsul scalar canonic a doi vectori $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ prin formula
$$<x, y> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$
2) Pe spațiul vectorial $C([a, b])$ al funcțiilor reale continue pe intervalul $[a, b]$ se defineşte produsul scalar canonic a două funcții f şi g prin formula
$$<f, g> = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

Inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovsky

Propoziție Dacă *V* este un spațiu vectorial real pe care este definit un produs scalar $<\cdot,\cdot>$, atunci, pentru oricare doi vectori *x* şi *y* din *V*, este adevărată inegalitatea

$$|< x, y >| \le \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

În inegalitatea de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă vectorii *x* şi *y* sunt liniar dependenți.

Norma asociată unui produs scalar

Definiție Se numeşte *normă* pe spațiul vectorial *V* o funcție $N : V \to R$, notată $N(x) = \|x\|$, care are următoarele proprietăți:

1) $\|x\| \ge 0, \forall x \in V$ şi $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall x \in V, \lambda \in R$.
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$ (inegalitatea triunghiului).

Un spațiu vectorial *V* pe care este definită o normă se numeşte *spațiu vectorial normat.*

Propoziție Dacă *V* este un spațiu vectorial real pe care este definit un produs scalar $<\cdot,\cdot>$, atunci aplicația $\|\cdot\| : V \to R$ definită prin formula

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

este o normă pe *V*.

Exemple de norme

Pe spațiul euclidian R^n norma asociată produsului scalar canonic definit prin relația $< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$, numită *norma euclidiană*, este dată de formula

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

oricare ar fi vectorul $x \in R^n$.

Pe spațiul vectorial real infinit dimensional *C*([*a*, *b*]) al funcțiilor reale continue pe intervalul [*a*, *b*], norma asociată produsului scalar definit prin relația $< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$, este dată de formula $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$, $f \in C([a,b])$.

Unghiul dintre doi vectori

Fie V un spațiu euclidian. Folosind definiția normei euclidiene $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$, inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovsky se poate scrie sub forma $|< x, y >| \le \|x\| \cdot \|y\|$ de unde, pentru x şi y diferiți de vectorul nul, obținem $-1 \le \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1$.

Definiție Fie V un spațiu euclidian şi x, y doi vectori nenuli din V. Se numeşte *măsura unghiului* dintre vectorii x şi y numărul real $\theta \in [0, \pi]$ dat de formula

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Definiție Fie V un spațiu euclidian. Doi vectori x şi $y \in V$ se numesc ortogonali şi se notează $x \perp y$ dacă produsul lor scalar $< x, y >= 0$.

Exemplu: Fie $V = R^3$. Să se găsească un vector z de normă egală cu 1 şi orthogonal cu vectorii $x = (2,1,0)$ şi $y = (-3,2,0)$.

Mulțimi ortogonale şi ortonormate

Definiție O submulțime $S \subset V$ se numeşte *ortogonală* dacă oricare doi vectori distincți din S sunt ortogonali. O submulțime $S \subset V$ se numeşte *ortonormată* dacă S este ortogonală şi oricare vector din S are norma egală cu 1.

Observație Din orice mulțime ortogonală $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, care nu conține vectorul nul, se poate construi o mulțime ortonormată. Într-adevăr, dacă împărțim fiecare vector $x_i \in S$ la norma sa şi notăm $y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$, atunci mulțimea $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ este o mulțime ortonormată.

Propoziție Într-un spațiu euclidian V, orice submulțime ortogonală $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, care nu conține vectorul nul, este liniar independentă.

Teoremă (Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt)
Fie V un spațiu euclidian și $L=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ o submulțime liniar independentă a lui V. Pornind de la submulțimea L se poate construi o submulțime $M=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ care are următoarele proprietăți:
1) Toți vectorii mulțimii M sunt nenuli.
2) M este o mulțime ortogonală.
3) Pentru orice k, $1 \le k \le m$, vectorii $y_1,y_2,...,y_m$ generează același subspațiu vectorial cu cel generat de $x_1,x_2,...,x_m$, adică
$Sp(y_1,y_2,...,y_m)=Sp(x_1,x_2,...,x_m)$.
4) Mulțimea $S=\{z_1,z_2,...,z_m\}$, unde $z_i=\dfrac{y_i}{\|y_i\|}$, i = 1, 2, . . . , m, este ortonormată și $Sp(z_1,z_2,...,z_m)=Sp(x_1,x_2,...,x_m)$, oricare ar fi $1 \le k \le m$.

Demonstrație. Vectorii mulțimii M se construiesc conform formulelor de mai jos

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1\\
&y_2 = x_2+\alpha_{21}y_1,\\
&y_3 = x_3+\alpha_{31}y_1+\alpha_{32}y_2,\\
&\vdots\\
&y_m = x_m+\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_{mj}y_j,
\end{aligned}$$

unde α_{ij} sunt scalari reali care se determină din condițiile ca fiecare vector y_i să fie ortogonal pe cei determinați anterior:

$$<y_i,y_j>=0,\ i=2..m,\ j=1..\ i-1$$

1) Din definirea vectorilor y_i rezultă că aceştia se pot scrie şi sub forma

$$y_i = x_i+\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}x_j,$$

Dacă ar exista un vector y_i, $1 \le i \le m$, astfel încât $y_i=0$, atunci relația de mai sus arată că mulțimea $\{x_1,x_2,...,x_i\}$ este liniar dependentă, ceea ce este imposibil deoarece mulțimea L este liniar independentă și, în consecință, orice submulțime a sa este tot liniar independentă. Prin urmare, $y_i \neq 0$, oricare ar fi $1 \le i \le m$.
2) Pentru $i = 2$, condiția $<y_2,y_1>=0$, devine $0=<x_2,y_1>+\alpha_{21}<y_1,y_1>$

de unde se obține $\alpha_{21} = -\dfrac{< x_2, y_1 >}{< y_1, y_1 >}$

Prin urmare, $y_2 = x_2 - \dfrac{< x_2, y_1 >}{< y_1, y_1 >} y_1,$

Pentru $i = 3$, condiția $< y_3, y_1 >= 0,$ devine

$$0 = < x_3, y_1 > + \alpha_{31} < y_1, y_1 > + \alpha_{32} < y_2, y_1 >$$

Deoarece $< y_2, y_1 >= 0,$ se obține $\alpha_{31} = -\dfrac{< x_3, y_1 >}{< y_1, y_1 >}$

Analog, condiția $< y_3, y_2 >= 0,$ devine

$0 = < x_3, y_2 > + \alpha_{31} < y_1, y_2 > + \alpha_{32} < y_2, y_2 > .$

Cum $< y_1, y_2 >= 0,$ se obține $\alpha_{32} = -\dfrac{< x_3, y_2 >}{< y_2, y_2 >}.$

Deci $y_3 = x_3 - \dfrac{< x_3, y_1 >}{< y_1, y_1 >} y_1 - \dfrac{< x_3, y_2 >}{< y_2, y_2 >} y_2.$

În cazul general, condițiile $< y_i, y_j >= 0,$ $i = 2..m,$ $j = 1..$ $i-1$, implică

$$0 = < y_i, y_j > = < x_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} y_k, y_j > = < x_i, y_j > + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} < y_k, y_j >$$

ținând seama că $< y_k, y_j >= 0$, dacă $k = 1..i-1,$ $k \neq j$, rezultă

$0 = < x_i, y_j > + \alpha_{ij} < y_j, y_j >$ de unde se obține $\alpha_{ij} = -\dfrac{< x_i, y_j >}{< y_j, y_j >}$

Deci $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{< x_i, y_j >}{< y_j, y_j >} y_j$, $i = 2..m$.

Evident, vectorii y_i astfel construiți sunt ortogonali doi câte doi.

3) Egalitatea $Sp(y_1, y_2, ..., y_m) = Sp(x_1, x_2, ..., x_m)$ rezultă imediat din

cele două moduri de scriere
$$\begin{aligned} & y_1 = x_1 \\ & y_2 = x_2 + \alpha_{21} y_1, \\ & y_3 = x_3 + \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 \\ & \vdots \\ & y_m = x_m + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{mj} y_j, \end{aligned}$$
și $y_i = x_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} x_j,$

4) Rezultă deoarece din orice mulțime ortogonală $M=\{y_1,y_2,...,y_m\}$, care nu conține vectorul nul, se poate construi o mulțime ortonormată.

Baze ortonormate

Definiție Fie *V* un spațiu euclidian de dimensiune *n* peste *R*. O bază $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ a lui *V* se numeşte *bază ortogonală* dacă oricare doi vectori distincți din *B* sunt ortogonali $<e_i,e_j>=0$,

Definiție Baza *B* se numeşte bază *ortonormată* dacă este ortogonală şi orice vector din *B* are norma egală cu 1.

Altfel spus, $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ este bază ortonormată dacă $<e_i,e_j>=\delta_{ij},$ unde $\delta_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\1, i=j\end{cases}$.

Teoremă: În orice spațiu Euclidian există o bază ortonormată.

<u>Avantajele folosirii bazelor ortonormate</u>

a) Calculul componentelor unui vector $x\in V$ într-o bază ortonormată se face extrem de simplu cu ajutorul produsului scalar şi nu prin rezolvarea unui sistem de ecuații liniare.

b) Într-un spațiu euclidian *n*-dimensional dotat cu o bază ortonormată formulele de calcul pentru produsul scalar dintre doi vectori şi norma unui vector au aceeaşi formă cu cele din R^n.

c) Matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală, adică o matrice a cărei inversă este egală cu transpusa sa.

Propoziție Fie *V* un spațiu euclidian de dimensiune *n* peste *R* şi $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ o bază ortonormată a sa. Atunci dacă vectorul $x\in V$ are în baza ortonormată *B* scrierea $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ne_n$

atunci componentele sale în această bază sunt date de formulele

$$\alpha_j=<x,e_j>, \forall j=1..n$$

Prin urmare, orice vector $x\in V$ are în baza ortonormată $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ scrierea $x=<x,e_1>e_1+<x,e_2>e_2+...+<x,e_n>e_n$

Exemplu: În spațiul euclidian $V = R^3$ să se găsească o bază ortonormată pornind de la baza: $B = \{e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,-1), e_3 = (1,-1,-1)\}$. Care este scrierea vectorului $x = (2,1,3)$ în noua bază.

Matricea de trecere dintre două baze ortonormate

Fie C o matrice cu n linii şi n coloane cu elemente reale.

Definiție O matrice $C \in M_{n,n}(R)$ se numeşte matrice ortogonală dacă

$$CC^T = C^T C = I_n$$

Din definiția de mai sus rezultă că o matrice ortogonală C este inversabilă şi

$$C^{-1} = C^T$$

Propoziție Fie V un spațiu euclidian de dimensiune n peste R, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a sa şi $B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ o altă bază a lui V, iar C matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) Baza B' este ortonormată.
2) Matricea C este o matrice ortogonală.

Subspațiul ortogonal unui subspațiu vectorial

Fie V un spațiu euclidian şi A o submulțime a sa. Se spune că vectorul $x \in V$ este ortogonal pe mulțimea A şi se notează $x \perp A$, dacă $< x, a >= 0, \forall a \in A$.

Vom nota $A^\perp = \{x \in V \,|< x, a >= 0, \forall a \in A\}$

$A^\perp$ este un subspațiu vectorial al lui V şi se numeşte *subspațiul ortogonal* mulțimii A.

Pentru a demonstra că un vector x este ortogonal pe un subspațiu vectorial S este suficient să se demonstreze că x este ortogonal pe vectorii unei baze a subspațiului S.

Propoziție Fie S un subspațiu vectorial al spațiului euclidian V, $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ o bază a lui S şi x un vector oarecare din V. Avem echivalența: $x \perp S \Leftrightarrow x \perp e_j, \forall j = 1..m$.

Demonstrație

$\Rightarrow$ Dacă $x \perp S$, atunci, evident, $x \perp e_j, \forall j = 1..m$ deoarece $e_j \in S$.

$\Leftarrow$ Presupunem că $x \perp e_j, \forall j = 1..m$. Avem de demonstrat că $< x, y >= 0$, oricare ar fi vectorul $y \in S$. Cum orice vector $y \in S$ se scrie în baza B sub forma $y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$, obținem $< x, y >=< x, \sum_{j=1}^{m} y_j e_j >= \sum_{j=1}^{m} y_j < x, e_j >= 0$.

Teoremă (Teorema subspa~~t~~ţiului ortogonal)
Fie V un spaţiu euclidian ş~~,si~~ ~~W~~ S un subspa~~,t~~ţiu finit dimensional al s~~ă~~ău.
Atunci $V = S \oplus S^{\perp}$.
Demonstrație.
Trebuie să arătăm că orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma $x = w + u$ cu $w \in S$ şi $u \in S^{\perp}$. Subspațiul S fiind finit dimensional, notăm cu m dimensiunea sa şi considerăm o bază ortonormată $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ a lui S.
Fie x un vector oarecare din V. Vectorul w definit prin egalitatea
$w = < x, e_1 > e_1 + < x, e_2 > e_2 + ... < x, e_m > e_m$ aparține subspațiului S.
Notăm $u = x - w$ şi demonstrăm că $u \in S^{\perp}$. În baza propoziției anterioare, este suficient să demonstrăm că $u \perp e_j, j = 1..m.$

$< u, e_j >=< x - w, e_j >=< x, e_j > - < x, e_1 >< e_1, e_j > - < x, e_2 >< e_2, e_j > - ... - < x, e_m >< e_m, e_j >$

$=< x, e_j > - < x, e_j >= 0 \Rightarrow u \in S^{\perp}$. Deci $x = w + u$ cu $w \in S$ şi $u \in S^{\perp} \Rightarrow V = S + S^{\perp}$.
Pentru a demonstra că e suma directă demonstrăm că $S \cap S^{\perp} = \{0\}$. Fie $x \in S \cap S^{\perp}$, $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

Corolar Dacă V este un subspațiu euclidian finit dimensional, atunci orice S subspațiu vectorial al lui V, atunci are loc descompunerea $V = S \oplus S^{\perp}$.

Exemple:
În R^2: $S = \{(x,0) \mid x \in R\}$, $S^{\perp} = \{(0,y) \mid y \in R\}$, $R^2 = S \oplus S^{\perp}$.
În R^3: $S = \{(x,y,0) \mid x, y \in R\}$, $S^{\perp} = \{(0,0,z) \mid z \in R\}$, $R^3 = S \oplus S^{\perp}$.

Aplicație;
Dacă $V = R^3$ este considerat ca spațiu euclidian găsiți subspațiul ortogonal al subspațiului generat de $e_1 = (1,-2,-2)$, $e_2 = (2,-1,2)$ şi o bază a sa.