19. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ **20.** $f(x) = (\ln x)^2$

21. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x - \dfrac{25}{3}$

22. $f(x) = (x-1)^{1/3} + (x+1)^{1/3}$

23. Discuta la concavidad de la función lineal $f(x) = ax + b$. ¿Tiene puntos de inflexión?

Clasifique los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 24-35 utilizando el test de la segunda derivada siempre que sea posible.

24. $f(x) = 3x^3 - 36x - 3$ **25.** $f(x) = x(x-2)^2 + 1$

26. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ **27.** $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

28. $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$ **29.** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

30. $f(x) = xe^x$ **31.** $f(x) = x\ln x$

32. $f(x) = (x^2-4)^2$ **33.** $f(x) = (x^2-4)^3$

34. $f(x) = (x^2-3)e^x$ **35.** $f(x) = x^2e^{-2x^2}$

36. Sea $f(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = -x^2$ si $x < 0$. ¿Es 0 un punto crítico de f? ¿Tiene f un punto de inflexión allí? ¿Es $f''(x) = 0$? Si una función tiene una tangente no vertical en un punto de inflexión, ¿se tiene que hacer cero necesariamente la segunda derivada de la función en ese punto?

***37.** Verifique que si f es convexa en un intervalo, entonces su gráfica está por encima de sus tangentes en dicho intervalo. *Sugerencia*: Suponga que f es convexa en un intervalo abierto que contiene a x_0. Sea $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Demuestre que h tiene un valor mínimo local en x_0 y, por tanto, que $h(x) \geqslant 0$ en el intervalo. Demuestre que $h(x) > 0$ si $x \neq x_0$.

***38.** Verifique que la gráfica $y = f(x)$ cruza a su tangente en un punto de inflexión. *Sugerencia*: Considere separadamente los casos en los que la tangente es vertical y no vertical.

39. Sea $f_n(x) = x^n$ y $g_n(x) = -x^n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Determine si estas funciones tienen un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión en $x = 0$.

40. (Test de derivadas superiores) Utilice las conclusiones del Ejercicio 39 para plantear una generalización del test de la segunda derivada que se pueda aplicar cuando

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

para algún $k \geqslant 2$.

***41.** Este problema demuestra que ningún test que se base solamente en los signos de las derivadas en x_0 puede determinar para toda función con un punto crítico en x_0 si en ese punto tiene un máximo o un mínimo local o un punto de inflexión. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to 0} x^{-n} f(x) = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(b) $\lim_{x\to 0} P(1/x)\, f(x) = 0$ para todo polinomio P.

(c) Para $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)\, f(x)\,(k = 1, 2, 3, \ldots)$, siendo P_k un polinomio.

(d) $f^{(k)}(0)$ existe y es igual a 0 para $k = 1, 2, 3, \ldots$

(e) f tiene un mínimo local en $x = 0$; $-f$ tiene un máximo local en $x = 0$.

(f) Si $g(x) = xf(x)$, entonces $g^{(k)}(0) = 0$ para todo entero positivo k y g tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

***42.** Una función puede tener un punto crítico y no tener en dicho punto un máximo local ni un mínimo local ni un punto de inflexión. Demuestre que esto es así considerando la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(0) = f(0) = 0$, por lo que el eje x es tangente a la gráfica de f en $x = 0$; pero $f'(x)$ no es continua en $x = 0$, por lo que no existe $f''(0)$. Demuestre que la concavidad de f no es constante en ningún intervalo con extremo 0.

4.4 Dibujo de la gráfica de una función

Al dibujar la gráfica $y = f(x)$ de una función f, hay tres fuentes de información de utilidad:

(i) **La propia función f**, mediante la que se pueden determinar las coordenadas de algunos puntos de la gráfica, su simetría, y si existen asíntotas.

(ii) **Su primera derivada f'**, de donde se pueden determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la localización de los valores extremos locales.

(iii) **Su segunda derivada f''**, de donde se puede determinar la concavidad y los puntos de inflexión, y algunas veces los valores extremos.

Los puntos (ii) y (iii) se han considerado en las dos secciones anteriores. En esta sección vamos a ver lo que se puede aprender de la propia función sobre la forma de su gráfica, y después ilustraremos el procedimiento completo de dibujo con varios ejemplos utilizando las tres fuentes de información.

Se podría dibujar la gráfica pintando las coordenadas de muchos puntos y uniéndolos mediante una curva suave adecuada. Esto es lo que hacen el software de computador y las calculadoras gráficas. Cuando esto se hace a mano (sin computador ni calculadora), este método simple es muy tedioso y además puede ocultar los aspectos más interesantes de la gráfica (puntos singulares, valores extremos, etc.). También se podría dibujar la pendiente en cada uno de los puntos y, dibujando rectas cortas que pasaran por esos puntos con las pendientes adecuadas, asegurarnos de que la gráfica pasa por todos los puntos que se han dibujado, con la pendiente correcta. Un procedimiento más eficiente es obtener las coordenadas de unos pocos puntos y utilizar información cualitativa sobre la función y su primera y segunda derivadas para determinar la *forma* de la gráfica entre esos puntos.

Además de los puntos críticos, singulares y de inflexión, una gráfica puede tener otros puntos «interesantes». La **abscisa** y **ordenada en el origen** (los puntos en los que la gráfica corta a los ejes coordenados) se encuentran entre dichos puntos. Cuando se dibuja cualquier gráfica es interesante intentar obtener estos puntos, es decir, todos los puntos de coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ que estén en la gráfica. Por supuesto, no todas las gráficas tienen que tener esos puntos, e incluso aunque existan, puede no ser posible calcularlos exactamente. Siempre que una gráfica esté compuesta de varios trozos no conectados (denominados **componentes**) se deben obtener las coordenadas de *al menos un punto de cada componente*. A veces es también útil determinar las pendientes en estos puntos. Las asíntotas verticales (que se comentarán posteriormente) separan generalmente la gráfica de una función en componentes.

Advertir que una función dada posee alguna simetría puede ayudar mucho a obtener un buen dibujo de su gráfica. En la Sección P.4 presentamos las funciones pares e impares y observamos que las funciones impares tienen gráficas que son simétricas respecto al origen, y que las funciones pares tienen gráficas que son simétricas respecto al eje y, como se muestra en la Figura 4.27. Éstas son las simetrías más fáciles de advertir, pero las funciones pueden tener otras simetrías. Por ejemplo, la gráfica de $2 + (x-1)^2$ es simétrica respecto a la recta $x = 1$ y la gráfica de $2 + (x-3)^3$ es simétrica respecto al punto $(3, 2)$.

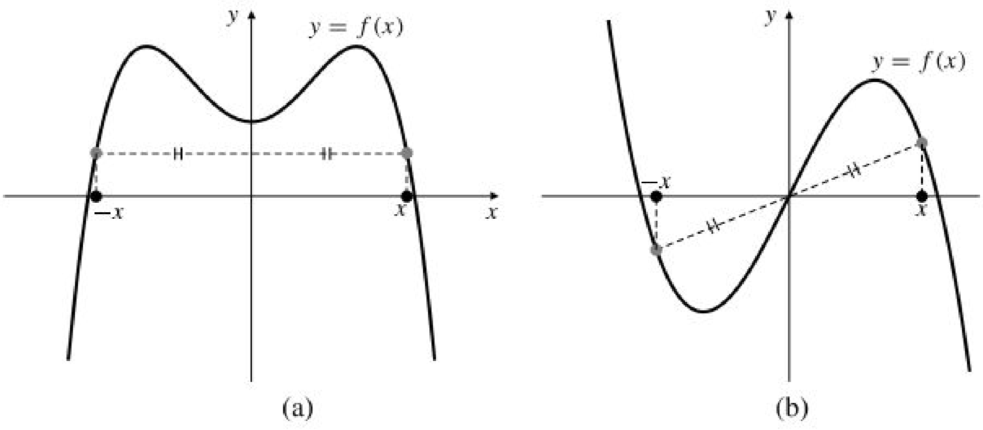

Figura 4.27
(a) La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.
(b) La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Asíntotas

Algunas de las curvas que hemos dibujado en las secciones anteriores tenían **asíntotas**, es decir, rectas a las que la curva se acerca arbitrariamente cuando se aleja a una distancia infinita del origen. Las asíntotas pueden ser de tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

DEFINICIÓN 5

La gráfica de $y = f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en $x = a$ si

$$\text{o bien} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty, \quad \text{o ambas}$$

Esta situación tiende a aparecer cuando $f(x)$ es un cociente de dos expresiones y el denominador es cero en $x = a$.

Ejemplo 1 Calcule las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$. ¿Cómo se aproxima la gráfica a esas asíntotas?

Solución El denominador $x^2 - x = x(x - 1)$ se aproxima a 0 cuando x se aproxima a 0 o 1, por lo que f tiene asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 1$ (*véase* la Figura 4.28). Como $x(x - 1)$ es positivo en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$ y es negativo en $(0, 1)$, tenemos que

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2 - x} = \infty \qquad \lim_{x \to 1-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x^2 - x} = \infty$$

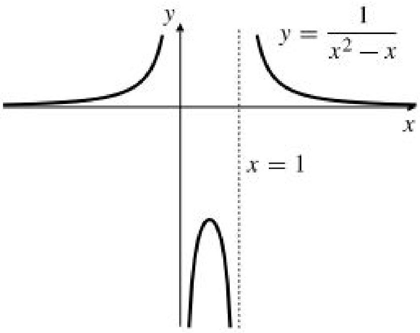

Figura 4.28

DEFINICIÓN 6

La gráfica de $y = f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** en $y = L$ si

$$\text{o bien} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L, \quad \text{o ambas}$$

Ejemplo 2 Calcule las asíntotas horizontales de

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ y (b) $g(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{x^4 + 1}$.

Solución

(a) La función f tiene la asíntota horizontal $y = 0$ (*véase* la Figura 4.28) ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1/x^2}{1 - (1/x)} = \frac{0}{1} = 0$$

(b) La función $g(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = 1$ (*véase* el Figura 4.29) ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + (1/x^2)}{1 + (1/x^4)} = \frac{1}{1} = 1$$

Obsérvese que la gráfica de g cruza a su asíntota dos veces (un error común entre los estudiantes es que las curvas no pueden cruzar a sus asíntotas; el Ejercicio 41 al final de la sección presenta un ejemplo de una curva que cruza a su asíntota infinitas veces).

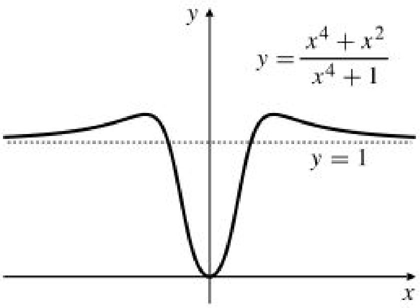

Figura 4.29

Las asíntotas horizontales de las funciones f y g del Ejemplo 2 son **bilaterales**, lo que significa que la gráfica se acerca a la asíntota cuando x se aproxima a infinito y a menos infinito. La función $\tan^{-1} x$ tiene dos asíntotas **unilaterales**, $y = \pi/2$ (cuando $x \to \infty$) y $y = -(\pi/2)$ (cuando $x \to -\infty$). *Véase* la Figura 4.30.

Puede suceder que la gráfica de una función $f(x)$ se aproxima a una recta no horizontal cuando x tiende a ∞ o a $-\infty$ (o en ambos casos). Dicha recta se denomina *asíntota oblícua* de la gráfica.

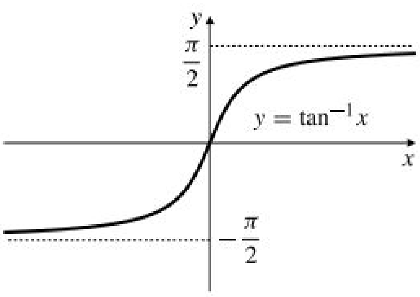

Figura 4.30 Asíntotas horizontales unilaterales.

DEFINICIÓN 7

La recta $y = ax + b$ (siendo $a \neq 0$) es una **asíntota oblicua** de la gráfica de $y = f(x)$ si

o bien $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ o bien $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ o ambas

Ejemplo 3 Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 4.31(a). La recta $y = x$ es una asíntota oblicua *bilateral* de la gráfica de f porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ejemplo 4 La gráfica de $y = \dfrac{xe^x}{1 + e^x}$, que se muestra en la Figura 4.31(b), tiene una asíntota horizontal $y = 0$ por la izquierda y una la asíntota oblicua $y = x$ por la derecha:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{1 + e^x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{xe^x}{1 + e^x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x(e^x - 1 - e^x)}{1 + e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{1 + e^x} = 0$$

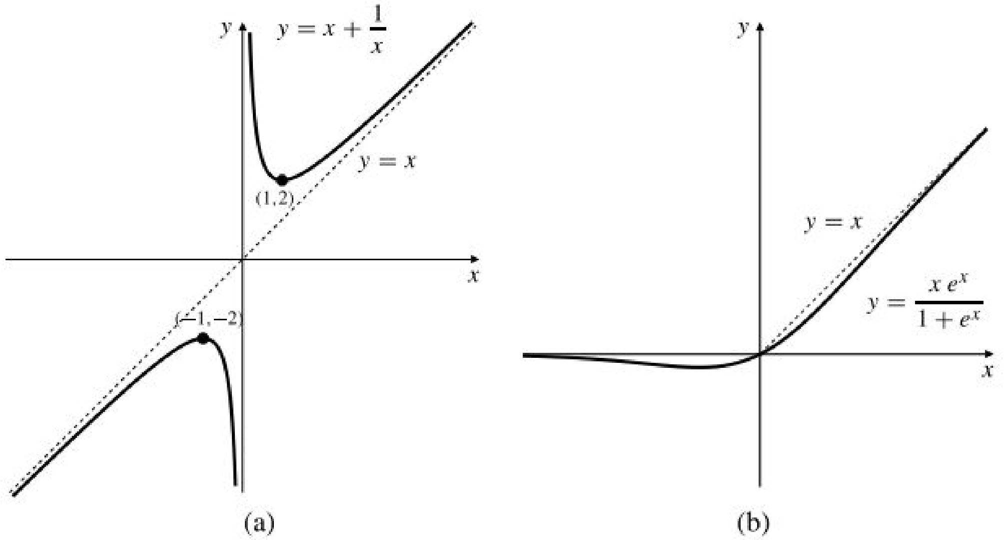

Figura 4.31
(a) $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua bilateral $y = x$.
(b) Esta gráfica tiene una asíntota horizontal por la izquierda y una asíntota oblicua por la derecha.

Recuérdese que una **función racional** es una función de la forma $f(x) = P(x)/Q(x)$, siendo P y Q polinomios. De acuerdo con las observaciones realizadas en las Secciones P.6, 1.2 y 1.3, las asíntotas de una función racional son muy específicas.

Asíntotas de una función racional

Supongamos que $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, siendo P_m y Q_n polinomios de grados m y n, respectivamente. Supongamos también que P_m y Q_n no tienen factores lineales comunes. Entonces:

(a) La gráfica de f tiene una asíntota vertical en todos los puntos x en los que se cumpla que $Q_n(x) = 0$.
(b) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal bilateral $y = 0$ si $m < n$.
(c) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal bilateral $y = L$ ($L \neq 0$) si $m = n$. L es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado de P_m y Q_n.
(d) La gráfica de f tiene una asíntota oblicua bilateral si $m = n + 1$. Esta asíntota se puede obtener dividiendo Q_n por P_m para obtener un cociente lineal $ax + b$ y un resto, R, que es un polinomio de grado como mucho $n - 1$. Es decir,

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

La asíntota oblicua es $y = ax + b$.
(e) La gráfica de f no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas si $m > n + 1$.

Ejemplo 5 Calcule la asíntota oblicua de $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$.

Solución El cociente se puede obtener dividiendo directamente los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ \hline x^2 + x + 1 & x^3 \\ & \underline{x^3 + x^2 + x} \\ & -x^2 - x \\ & \underline{-x^2 - x - 1} \\ & 1 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2 + x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

o bien podemos hacer:

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} = \frac{x^3+x^2+x-x^2-x-1+1}{x^2+x+1} = x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$$

En cualquier caso, podemos ver que la ecuación de la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

Ejemplos de dibujo formal de curvas

Presentamos a continuación una lista de cosas a considerar cuando se nos pide hacer un dibujo de la gráfica de $y = f(x)$. Por supuesto no siempre será posible obtener todos los puntos mencionados en la lista.

Lista para dibujo de curvas

1. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$, y exprese los resultados en forma factorizada.
2. Examine $f(x)$ para determinar su dominio y los siguientes elementos:
   (a) Asíntotas verticales (buscar ceros de denominadores).
   (b) Asíntotas horizontales u oblicuas (considerar $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$).
   (c) Simetrías obvias (¿es f par o impar?).
   (d) Ordenada y abscisa en el origen (puntos con coordenadas $(x, 0)$ o $(0, y)$), extremos u otros puntos «obvios». Esta lista se puede ampliar si se conocen puntos críticos, puntos singulares y punto de inflexión. Finalmente, hay que asegurarse de que se conocen las coordenadas de al menos un punto en cada componente de la gráfica.
3. Examine $f'(x)$ para buscar:
   (a) Puntos críticos.
   (b) Puntos en los que f' no esté definida (que incluirán los puntos singulares, los extremos del dominio de f y las asíntotas verticales).
   (c) Los intervalos en los que f' es positiva o negativa. Es una buena idea reunir esta información en forma de tabla como las que se han usado en los ejemplos anteriores. En la tabla se pueden indicar también las conclusiones sobre el crecimiento y decrecimiento de f y la clasificación de algunos puntos críticos y singulares como máximos y mínimos locales.
4. Examine $f''(x)$ para buscar:
   (a) Puntos en los que $f''(x) = 0$.
   (b) Puntos en los que $f''(x)$ no esté definida (entre los que se encontrarán los puntos singulares, los extremos, las asíntotas verticales, y posiblemente también otros puntos donde f' esté definida pero f'' no).
   (c) Intervalos donde f'' sea positiva o negativa y donde f será, por tanto, convexa o cóncava. Utilice una tabla.
   (d) Los puntos de inflexión.

Una vez que se haya obtenido tanta información como sea posible, debe realizarse un cuidadoso dibujo que refleje *todo* lo que se ha aprendido sobre la función. Considere el mejor sitio para situar los ejes y qué escala utilizar en cada uno de modo que las «características interesantes» de la gráfica se muestren de la forma más clara posible. Hay que tener cuidado con las aparentes inconsistencias en la información, es decir, con las sospechas de que hemos cometido un error en alguna parte. Por ejemplo, si hemos determinado que $f(x) \to \infty$ cuando x se acerca a la asíntota vertical $x = a$ por la derecha y también que f es decreciente y cóncava en el intervalo (a, b), entonces probablemente habremos cometido un error (intente dibujar esa situación y ver por qué).

Ejemplo 6 Dibuje la gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$.

Solución Resulta de utilidad expresar la función y de la forma

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$$

ya que así no sólo se muestra claramente que $y = (x/2) + 1$ es una asíntota oblicua, sino que se hace más fácil calcular las derivadas

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}, \qquad y'' = \frac{4}{x^3}$$

De y: Dominio: todo x excepto 0. Asíntota vertical: $x = 0$.
Asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{2} + 1$, $y - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = \dfrac{2}{x} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.
Simetría: ninguna obvia (y no es par ni impar).
Abscisas y ordenadas en el origen: ninguna. $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x, e y no está definida en $x = 0$.
De y': Puntos críticos: $x = \pm 2$; puntos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$.
y' no está definida en $x = 0$ (asíntota vertical).
De y'': $y'' = 0$ en ningún punto; y'' no está definida en $x = 0$.

x		PC -2		ASY 0		PC 2	
y'	$+$	0	$-$	indef	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	indef	$+$		$+$
y	$\nearrow$ $\cap$	máx	$\searrow$ $\cap$	indef	$\searrow$ $\cup$	mín	$\nearrow$ $\cup$

La gráfica se muestra en la Figura 4.32.

Ejemplo 7 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

Solución Tenemos que

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

De f: Dominio: todo x excepto ± 2. Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$.
Asíntota horizontal: $y = 1$ (cuando $x \to \pm\infty$).
Simetría: respecto al eje y (y es par).
Abscisas y ordenadas en el origen: $(0, 1/4)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
Otros puntos: $(-3, 8/5)$, $(3, 8/5)$ (las dos asíntotas verticales dividen la gráfica en tres componentes; necesitamos puntos en cada uno de ellas. Las componentes externas requieren puntos con $|x| > 2$).
De f': Punto crítico: $x = 0$: f' no está definida en $x = 2$ o $x = -2$.
De f'': $f''(x) = 0$ en ningún punto; f'' no está definida en $x = 2$ o $x = -2$.

x		ASY -2		PC 0		ASY 2	
f'	$+$	indef	$+$	0	$-$	indef	$-$
f''	$+$	indef	$-$		$-$	indef	$+$
f	$\nearrow$ $\cup$	indef	$\nearrow$ $\cap$	máx	$\searrow$ $\cap$	indef	$\searrow$ $\cup$

La gráfica se muestra en la Figura 4.33.

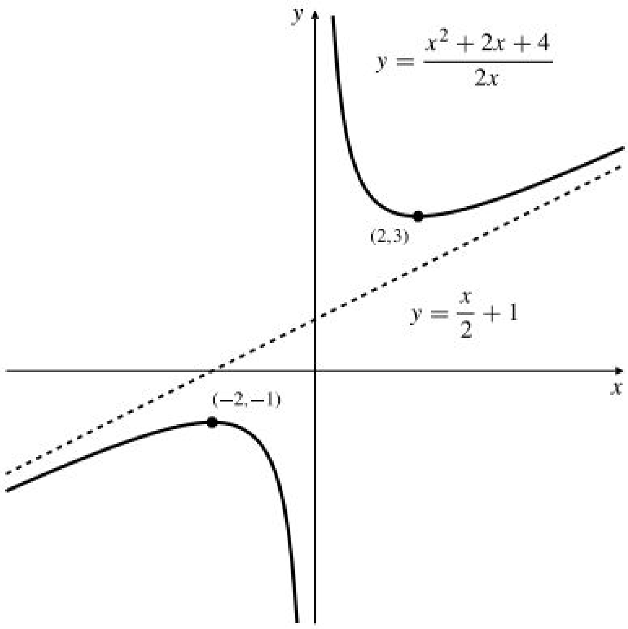

Figura 4.32

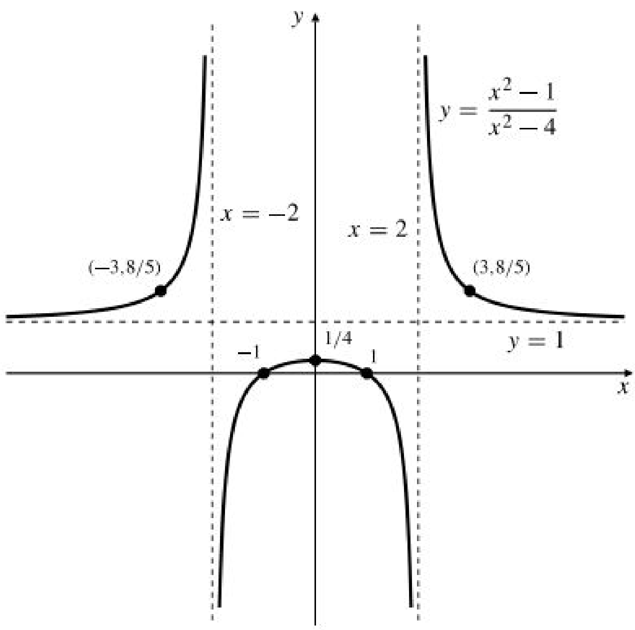

Figura 4.33

Ejemplo 8 Dibuje la gráfica de $y = xe^{-x^2/2}$.

Solución Tenemos que $y' = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$, $\quad y'' = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$.

De y: Dominio: todo x.
Asíntota horizontal: $y = 0$. Nótese que, si $t = x^2/2$, entonces $|xe^{-x^2/2}| = \sqrt{2t}\,e^{-t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ (cuando $x \to \pm\infty$).
Simetría: respecto al origen (y es impar). Abscisas y ordenadas en el origen: (0, 0).

De y': Puntos críticos: $x = \pm 1$; puntos $(\pm 1, \pm 1/\sqrt{e}) \approx (\pm 1, \pm 0.61)$.

De y'': $y'' = 0$ en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$; puntos $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}e^{-3/2}) \approx (\pm 1.73 \pm 0.39)$.

x		$-\sqrt{3}$		PC -1		0		PC 1		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$ $\cap$	infl	$\searrow$ $\cup$	mín	$\nearrow$ $\cup$	infl	$\nearrow$ $\cap$	máx	$\searrow$ $\cap$	infl	$\searrow$ $\cup$

La gráfica se muestra en la Figura 4.34.

Ejemplo 9 Dibuje la gráfica de $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. *Véase* la Figura 4.35.

Solución $f'(x) = \dfrac{4}{3}\dfrac{x}{(x^2-1)^{1/3}}, \qquad f''(x) = \dfrac{4}{9}\dfrac{x^2-3}{(x^2-1)^{4/3}}.$

De f: Dominio: todo x.
Asíntotas: ninguna ($f(x)$ crece como $x^{4/3}$ cuando $x \to \pm\infty$).
Simetría: respecto al eje f (f es una función par).
Abscisas y ordenadas en el origen: $(\pm 1, 0)$, $(0, 1)$.

De f': Puntos críticos: $x = 0$; puntos singulares $x = \pm 1$.

De f'': $f''(x) = 0$ en $x = \pm\sqrt{3}$; puntos $(\pm\sqrt{3}, 2^{2/3}) \approx (\pm 1.73, 1.59)$; $f''(x)$ no está definida en $x = \pm 1$.

				PS		PC		PS			
x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	$-$		$-$	indef	$+$	0	$-$	indef	$+$		$+$
f''	$+$	0	$-$	indef	$-$		$-$	indef	$-$	0	$+$
f	↘ $\cup$	infl	↘ $\cap$	mín	↗ $\cap$	máx	↘ $\cap$	mín	↗ $\cap$	infl	↗ $\cup$

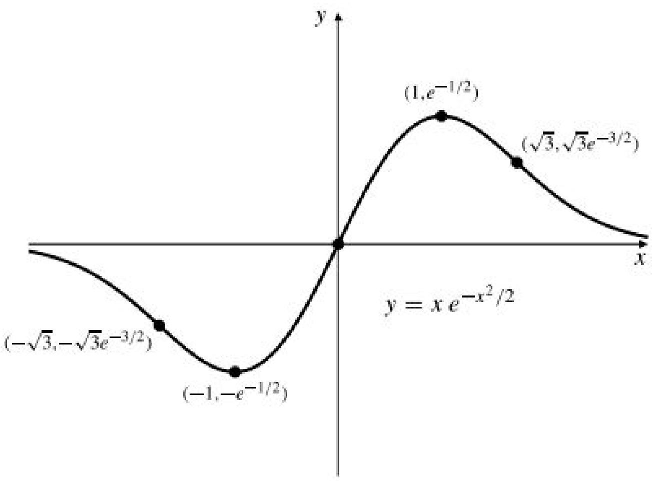

Figura 4.34

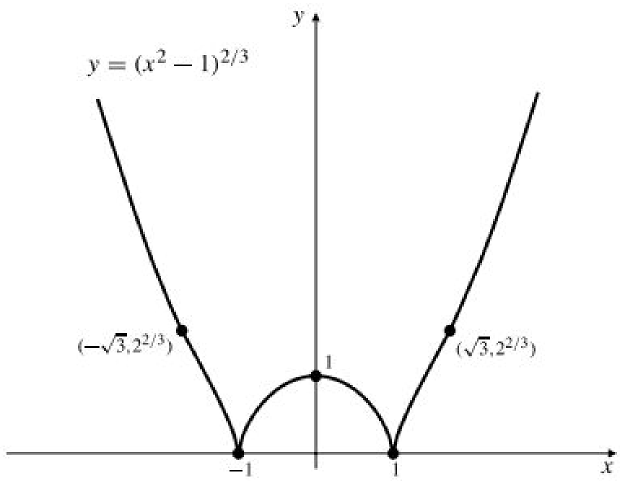

Figura 4.35

Observación **Uso de una herramienta de gráficos** Las técnicas para el dibujo de curvas que se han comentado anteriormente sólo son útiles para dibujar gráficas de funciones lo suficientemente simples como para permitir calcular y analizar sus derivadas. En la práctica, muchas veces será necesario utilizar una calculadora gráfica o un computador para dibujar la gráfica de forma rápida y sencilla. Para utilizar estas herramientas gráficas de forma más efectiva, hay que decidir en qué ventanas de visualización y qué escalas horizontal y vertical utilizar. Una selección inadecuada de la ventana de visualización puede hacer que se pierdan características significativas de la gráfica. A continuación se presenta un comando de Maple que sirve para visualizar la gráfica de la función del Ejemplo 6, junto con su asíntota oblicua. Pedimos a Maple que dibuje $(x^2 + 2x + 4)/(2x)$ y $1 + (x/2)$.

```
> plot({x^2+2*x+4)/(2*x), 1+(x/2)}, x=-6..6, -7..7) ;
```

Conseguir que Maple dibuje la gráfica del Ejemplo 9 no es tan sencillo. Como Maple no trabaja con potencias fraccionarias de números negativos, incluso aunque tomen valores positivos reales, hay que dibujar $|x^2 - 1|^{2/3}$ o si no la parte de la gráfica entre -1 y 1 se perderá.

```
> plot((abs(x^2-1))^(2/3), x=-4..4, -1..5) ;
```

Ejercicios 4.4

1. La Figura 4.36 muestra las gráficas de una función f, sus dos derivadas a f' y f'', y otra función g. ¿Qué gráfica corresponde a cada función?

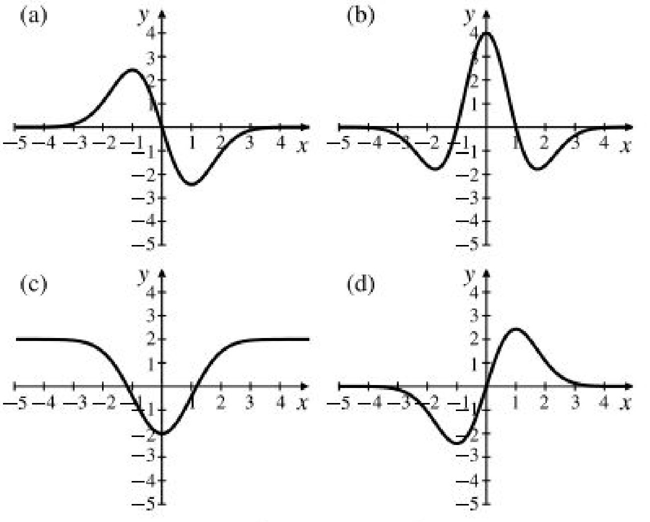

Figura 4.36

2. Indique, para cada una de las funciones que se dibujan en la Figura 4.36, qué información se puede determinar (aproximadamente) por simple inspección de la gráfica (simetría, asíntotas, abscisa y ordenada en el origen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos y singulares, máximos y mínimos locales, intervalos de concavidad constante, y puntos de inflexión).

3. La Figura 4.37 muestra las gráficas de cuatro funciones:

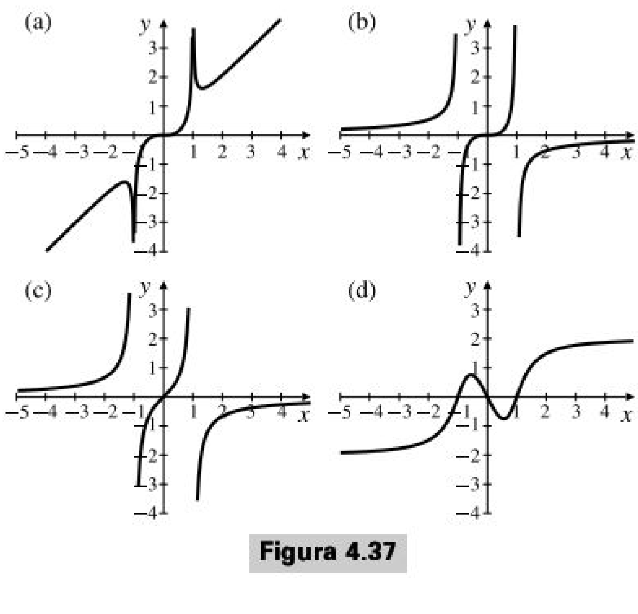

Figura 4.37

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \qquad g(x) = \frac{x^3}{1-x^4}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6+1}} \qquad k(x) = \frac{x^3}{\sqrt{|x^4 - 1|}}$$

¿Qué gráfica corresponde a cada función?

4. Repita el Ejercicio 2 para las gráficas de la Figura 4.37.

En los Ejercicios 5-6, dibuje la gráfica de una función que tenga las propiedades dadas. Identifique los puntos críticos, puntos singulares, máximos y mínimos locales y puntos de inflexión. Suponga que f es continua y que sus derivadas existen en todas partes excepto que se pueda inferir lo contrario de forma implícita o explícita.

5. $f(0) = 1$, $f(\pm 1) = 0$, $f(2) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$, $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$, $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 2)$, y $f''(x) < 0$ en $(2, \infty)$.

6. $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + 1 - x) = 0$, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(2, \infty)$, $f'(x) < 0$ en $(0, 2)$, $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$, $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, 3)$, y $f''(x) < 0$ en $(-1, 1)$ y en $(3, \infty)$.

En los Ejercicios 7-39, dibuje las gráficas de las funciones dadas, utilizando cualquier información que se pueda obtener de la función, y de su primera y segunda derivadas.

7. $y = (x^2 - 1)^3$

8. $y = x(x^2 - 1)^2$

9. $y = \dfrac{2-x}{x}$

10. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

11. $y = \dfrac{x^3}{1+x}$

12. $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

13. $y = \dfrac{1}{2-x^2}$

14. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

15. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

16. $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

17. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

18. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

19. $y = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

20. $y = \dfrac{x^2-2}{x^2-1}$

21. $y = \dfrac{x^3-4x}{x^2-1}$

22. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^5}{(x^2-1)^2}$

24. $y = \dfrac{(2-x)^2}{x^3}$

25. $y = \dfrac{1}{x^3 - 4x}$

26. $y = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

27. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3}$

28. $y = x + \operatorname{sen} x$

29. $y = x + 2\operatorname{sen} x$

30. $y = e^{-x^2}$

31. $y = xe^x$

32. $y = e^{-x}\operatorname{sen} x,\ (x \geqslant 0)$

33. $y = x^2 e^{-x^2}$

34. $y = x^2 e^x$

35. $y = \dfrac{\ln x}{x},\ (x > 0)$

36. $y = \dfrac{\ln x}{x^2},\ (x > 0)$

37. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

38. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

39. $y = (x^2 - 1)^{1/3}$

40. ¿Qué es $\lim_{x\to 0+} x \ln x$? ¿Y $\lim_{x\to 0} x\ln|x|$? Si $f(x) = x\ln|x|$ para $x \neq 0$, ¿es posible definir $f(0)$ de forma que f sea continua en toda la recta real? Dibuje la gráfica de f.

41. ¿Qué recta es una asíntota de la curva $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}$? ¿En qué puntos cruza la curva a esta asíntota?

4.5 Problemas de valores extremos

En esta sección vamos a resolver varios problemas del mundo real que, al ser trasladados a términos matemáticos, requieren el cálculo del valor máximo o mínimo de una función de una variable. Estos problemas pueden variar desde muy simples a muy complejos y difíciles. Se pueden formular en terminologías apropiadas de otras disciplinas, o ya pueden estar parcialmente traducidos a un contexto más matemático. Ya hemos encontrado algunos de esos problemas en capítulos anteriores.

Consideremos primero un par de ejemplos antes de proceder a formular principios generales para tratar estos problemas.

Ejemplo 1 Se desea construir una jaula de animales rectangular, uno de cuyos lados aprovecha una pared existente y los otros tres se cierran con una valla. Si se dispone de 100 m de valla, ¿cuál es la máxima área posible para la jaula?

Solución Este problema, como muchos otros, es esencialmente geométrico. Es conveniente realizar un dibujo, como se ha hecho en la Figura 4.38. Sean x e y la longitud y la anchura ante la jaula, respectivamente, y sea el área A m^2. Por tanto, $A = xy$. Como la longitud total de la valla es de 100 m, tenemos que $x + 2y = 100$. A es función de dos variables, x e y, pero estas variables no son independientes, sino que están relacionadas por la *restricción* $x + 2y = 100$. A partir de la ecuación de la restricción se puede despejar una variable en función de la otra, y por tanto A se puede expresar en función de una sola variable:

$$x = 100 - 2y$$
$$A = A(y) = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2$$

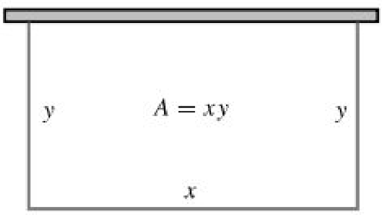

Figura 4.38

Evidentemente, se requiere que $y \geqslant 0$ y $y \leqslant 50$ (es decir, $x \geqslant 0$), para que el área tenga sentido (de otro modo sería negativa). Por lo tanto, debemos maximizar la función $A(y)$ en el intervalo $[0, 50]$. Como A es continua en este intervalo cerrado y finito, debe tener un valor máximo, por el Teorema 1. Claramente, $A(0) = A(50) = 0$ y $A(y) > 0$ para $0 < y < 50$. Por tanto, el máximo no puede estar en un extremo. Como A no tiene puntos singulares, el máximo debe estar en un punto crítico. Para obtener los puntos críticos, hacemos

$$0 = A'(y) = 100 - 4y$$

Por tanto, $y = 25$. Como A debe tener un valor máximo y sólo hay uno posible, el máximo debe estar en $y = 25$. La máxima área posible de la jaula es, por tanto, $A(25) = 1250$ m^2. ■

Ejemplo 2 Un faro L se sitúa en una pequeña isla 5 km al norte de un punto A sobre la costa este-oeste. Se tiende un cable desde L hasta un punto B en la costa, 10 km al este de A. El cable se despliega por el agua formando una línea recta desde L hasta un punto C en la costa entre A y B, y desde allí hasta B siguiendo la línea de la costa (*véase* la Figura 4.39). La parte del cable que se despliega en el agua cuesta 5000 € por kilómetro, y la parte que se despliega por la costa cuesta 3000 € por kilómetro.

(a) ¿Dónde habría que situar el punto C para minimizar el coste total del cable?
(b) ¿Donde habría que situar el punto C si B está sólo a 3 km de A?

Solución

(a) Sea C un punto situado a x km de A hacia B. Por tanto, $0 \leqslant x \leqslant 10$. La longitud de LC es $\sqrt{25+x^2}$, y la longitud de CB es de $10 - x$ km, como se muestra en la Figura 4.39. Por tanto, el coste total del cable es T €, siendo

$$T = T(x) = 5000\sqrt{25+x^2} + 3000(10-x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 10)$$

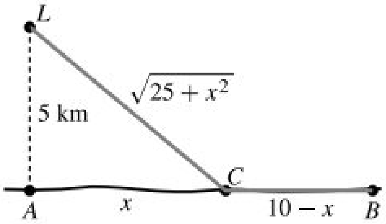

Figura 4.39

T es continua en el intervalo cerrado y finito [0, 10], por lo que tiene un valor mínimo que puede estar en uno de los extremos $x = 0$ o $x = 10$, o en un punto crítico en el intervalo (0, 10) (T no tiene puntos singulares). Para calcular los puntos críticos, hacemos

$$0 = \frac{dT}{dx} = \frac{5000x}{\sqrt{25+x^2}} - 3000$$

Así,

$$\begin{aligned} 5000x &= 3000\sqrt{25+x^2} \\ 25x^2 &= 9(25+x^2) \\ 16x^2 &= 225 \\ x^2 &= \frac{225}{16} = \frac{15^2}{4^2} \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $x = \pm 15/4$. Sólo un punto crítico, $x = 15/4 = 3.75$, está en el intervalo (0, 10). Como $T(0) = 55\,000$, $T(15/4) = 50\,000$, y $T(10) \approx 55\,902$, el punto crítico es evidentemente el valor mínimo de $T(x)$. Para obtener un coste mínimo, C debería estar a 3.75 km de A.

(b) Si B esta a 3 km de A, la función de coste total en este caso es

$$T(x) = 5000\sqrt{25+x^2} + 3000(3-x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 3)$$

que se diferencia de la función de coste total $T(x)$ del apartado (a) sólo en la constante añadida (9000 en vez de 30 000). Por tanto, tiene los mismos puntos críticos, $x = \pm 15/4$, ninguno de los cuales está en el intervalo (0, 3). Como $T(0) = 34\,000$ y $T(3) \approx 29\,155$, en este caso hay que escoger $x = 3$. Para minimizar el coste total, el cable debería ir directamente desde L hasta B.

■

Procedimiento para resolver problemas de valores extremos

Basándose en los ejemplos que se han mostrado anteriormente, se puede formular un procedimiento de pasos a comprobar para resolver problemas de optimización.

Solución de problemas de valores extremos

1. Lea el problema cuidadosamente, quizá más de una vez. Es necesario entender claramente qué información se da y qué es lo que se pide.
2. Haga un gráfico si es necesario. Muchos problemas tienen una componente geométrica, y un buen diagrama puede ser a menudo una parte esencial del procedimiento de solución.
3. Defina los símbolos que desee utilizar y que no estén ya especificados en el planteamiento del problema.
4. Exprese la cantidad Q a ser maximizada o minimizada en función de una o más variables.
5. Si Q depende de n variables, siendo $n > 1$, obtenga $n - 1$ ecuaciones (restricciones) que relacionen estas variables (si esto no se puede hacer, el problema no se puede resolver utilizando técnicas de una variable).
6. Utilice las restricciones para eliminar variables y exprese Q en función de una sola variable. Determine el intervalo o intervalos a los que debe pertenecer esta variable para que el problema tenga sentido. Alternativamente, considere las restricciones como una forma de definir implícitamente $n - 1$ variables, y por tanto de definir Q en función de la variable restante (en general, en los problemas de valores extremos, es mejor evitar si se puede este método implícito).
7. Calcule el valor extremo requerido de la función Q utilizando las técnicas de la Sección 4.2. No olvide considerar los puntos críticos, puntos singulares y extremos. Asegúrese de dar un argumento convincente para justificar que el valor extremo es el buscado. Por ejemplo, si se está buscando un máximo, el valor obtenido no debería ser un mínimo.
8. Exprese una conclusión que responda a la cuestión planteada. ¿Es *razonable* la respuesta a la cuestión? Si no es así, vuelva a revisar la solución para ver qué es erróneo.

Ejemplo 3 Calcule la longitud de la escalera más corta que se pueda desplegar desde una pared vertical, sobre una valla de 2 m de altura situada a 1 m de distancia de la pared, hasta un punto en el suelo fuera de la valla.

Solución Sea θ el ángulo de inclinación de la escalera, como se muestra en la Figura 4.40. Utilizando los dos triángulos rectángulos de la figura, se puede obtener la longitud L de la escalera en función de θ:

$$L = L(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\operatorname{sen}\theta}$$

donde $0 < \theta < \pi/2$. Como

$$\lim_{\theta \to (\pi/2)-} L(\theta) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to 0+} L(\theta) = \infty$$

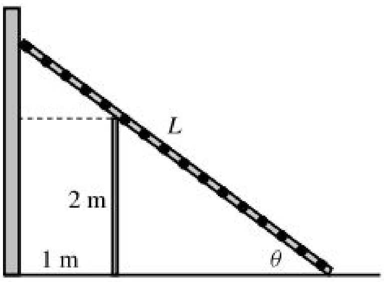

Figura 4.40

$L(\theta)$ debe tener un valor mínimo en $(0, \pi/2)$, que estará en un punto crítico (L no tiene puntos singulares en $(0, \pi/2)$). Para calcular los puntos críticos, hacemos

$$0 = L'(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^3\theta - 2\cos^3\theta}{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}$$

Los puntos críticos deben cumplir $\operatorname{sen}^3\theta = 2\cos^3\theta$, o, en otros términos, $\tan^3\theta = 2$. No es necesario resolver esta ecuación para obtener $\theta = \tan^{-1}(2^{1/3})$, ya que lo que realmente necesitamos es el correspondiente valor de $L(\theta)$. Obsérvese que

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + 2^{2/3}$$

Se deduce que

$$\cos\theta = \frac{1}{(1+2^{2/3})^{1/2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{2^{1/3}}{(1+2^{2/3})^{1/2}}$$

Por tanto, el valor mínimo de $L(\theta)$ es

$$\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} = (1+2^{2/3})^{1/2} + 2\,\frac{(1+2^{2/3})^{1/2}}{2^{1/3}} = (1+2^{2/3})^{3/2} \approx 4.16$$

La escalera más corta que se puede desplegar desde la madera sobre la valla hasta el suelo por fuera tiene aproximadamente 4.16 m de longitud.

Ejemplo 4 Calcule la forma más económica de una lata cilíndrica.

Solución Este problema está planteado de forma más bien imprecisa. Debemos considerar qué significa «más económica» e incluso «forma». Sin información adicional, podemos adoptar uno de estos dos puntos de vista:

(i) El volumen de la lata es fijo, y debemos calcular las dimensiones que minimizan el área total de la superficie.
(ii) La superficie total es fija (es decir, la cantidad de metal que se utiliza es fija), y debemos calcular las dimensiones que maximizan el volumen.

Posteriormente plantearemos otras posibles interpretaciones. Como un cilindro está determinado por su radio y su altura (*véase* la Figura 4.41), su forma está determinada por la relación radio/altura. Sean r, h, S y V, respectivamente, el radio, altura, área total de superficie y volumen de la lata. El volumen de un cilindro es el área de la base multiplicada por la altura:

$$V = \pi r^2 h$$

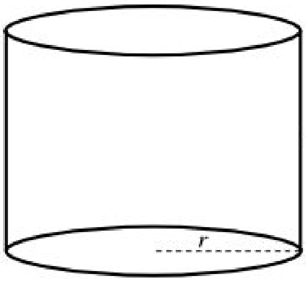

Figura 4.41

La superficie de la lata está formada por la pared cilíndrica y los discos circulares de las tapas. Cada uno de los discos tiene área πr^2, y la pared cilíndrica es realmente un rectángulo enrollado de base $2\pi r$ (la circunferencia de la lata) y altura h. Por tanto, el área total de la superficie de la lata es

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Utilicemos la interpretación (i): V es constante y hay que minimizar S. Podemos utilizar la ecuación de V para eliminar una de las dos variables r y h de las que depende S. Supongamos que despejamos $h = V/(\pi r^2)$ y sustituimos en la ecuación de S, para obtener S como una función únicamente de r:

$$S = S(r) = 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \qquad (0 < r < \infty)$$

Evidentemente, $\lim_{r\to 0+} S(r) = \infty$ y $\lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$. Como es diferenciable y por tanto continua en $(0, \infty)$, $S(r)$ debe tener un valor mínimo y debe estar en un punto crítico. Para calcular los puntos críticos,

$$0 = S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\pi r^2 h = \frac{1}{2}\,r^2 h$$

Por tanto, $h = 2r$ en el punto crítico de S. Bajo la interpretación (i), la lata más económica tiene una forma tal que su altura es igual al diámetro de su base. Animamos al lector a comprobar que la interpretación (ii) conduce a la misma conclusión.

Observación Hay otra forma de resolver el Ejemplo 4 que muestra directamente que las interpretaciones (i) y (ii) conducen a la misma solución. Comenzamos de nuevo con las dos ecuaciones

$$V = \pi r^2 h \quad \text{y} \quad S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Considerando h como función de r y diferenciando implícitamente, se obtiene

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r h + \pi r^2 \frac{dh}{dr}$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi h + 2\pi r \frac{dh}{dr} + 4\pi r$$

Bajo la interpretación (i), V es constante y deseamos obtener un punto crítico de S. Bajo la interpretación (ii), S es constante y deseamos obtener un punto crítico de V. En *cualquier* caso $dV/dr = 0$ y $dS/dr = 0$. Por tanto, ambas interpretaciones producen

$$2\pi r h + \pi r^2 \frac{dh}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad 2\pi h + 4\pi r + 2\pi r \frac{dh}{dr} = 0$$

Si se divide la primera ecuación por πr^2 la segunda ecuación por $2\pi r$ y se restan para eliminar dh/dr se tiene de nuevo $h = 2r$.

Observación **Modificación del Ejemplo 4** Dada la información imprecisa proporcionada en el planteamiento del problema del Ejemplo 4, las interpretaciones (i) y (ii) son lo mejor que podemos hacer. El problema podría tener un mayor significado económico (desde el punto de vista, por ejemplo, de un fabricante de latas) si se añaden más elementos. Por ejemplo:

(a) La mayoría de las latas utilizan un material más grueso para la pared cilíndrica que para los discos de las tapas. Si el material de la pared cilíndrica cuesta A € por unidad de área y el material de las tapas cuesta B € por unidad de área, una opción sería minimizar el coste total de materiales dado un volumen concreto de la lata. ¿Cuál es la forma óptima si $A = 2B$?

(b) Generalmente, las latas se fabrican en números grandes y el material para su fabricación se corta de láminas de metal. Las paredes cilíndricas se realizan cortando rectángulos, y los rectángulos se pueden cortar de la lámina de metal sin dejar material sobrante o dejando el mínimo posible. Sin embargo, siempre habrá una proporción de material sobrante cuando se cortan los discos de las tapas. La proporción exacta dependerá de la forma en que se disponen los discos. La Figura 4.42 muestra dos posibles disposiciones. ¿Cuál es la forma óptima de la lata si se utiliza un empaquetamiento cuadrado de los discos? ¿Y si se utiliza un empaquetamiento hexagonal? Estas modificaciones del problema original alterarán la forma óptima hasta cierto punto. En problemas «reales» hay que tener en cuenta muchos factores para obtener la «mejor» estrategia.

(c) El problema no considera ningún otro coste de fabricación de la lata excepto el coste de la lámina de metal. Pueden existir también costes asociados a unir los extremos opuestos del rectángulo para construir el cilindro y para unir los discos de las tapas al cilindro. Estos costes pueden ser proporcionales a las longitudes de los segmentos a unir.

En la mayoría de los ejemplos anteriores el valor máximo o mínimo aparece en un punto crítico. No será éste el caso en nuestro ejemplo final.

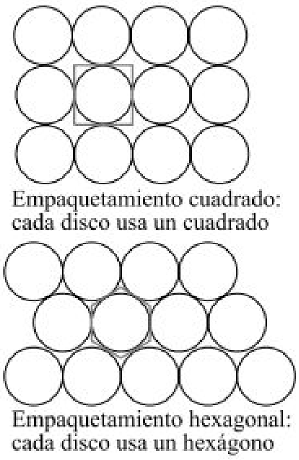

Figura 4.42 Empaquetamientos cuadrado y hexagonal de discos en un plano.

Ejemplo 5 Un hombre puede correr al doble de velocidad a la que puede nadar. Se encuentra de pie en el borde de una piscina circular de 40 m de diámetro y desea llegar al punto diametralmente opuesto B en el menor tiempo posible. ¿Dónde se debería situar el punto C para minimizar el tiempo total que lleva ir de A hasta B?

Solución Es conveniente expresar la posición de C en función del ángulo AOC, siendo O el centro de la piscina (*véase* la Figura 4.43). Sea θ este ángulo. Claramente $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (si $\theta = 0$ el hombre nadaría todo el camino; si $\theta = \pi$ correría todo el camino). El radio de la piscina es de 20 m, por lo que el arco $AC = 20\theta$. Como el ángulo $BOC = \pi - \theta$, tenemos que el ángulo $BOL = (\pi - \theta)/2$ y la cuerda $BC = 2BL = 40\,\text{sen}\,((\pi - \theta)/2)$.

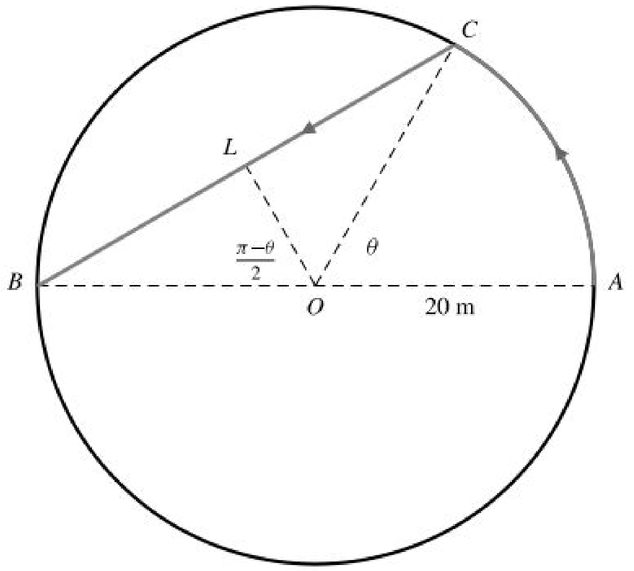

Figura 4.43 Desplazamiento desde A hasta B corriendo y nadando.

Supongamos que el hombre nada a una velocidad de k m/s y, por tanto, corre a una velocidad de $2k$ m/s. Si t es el tiempo total que necesita para ir desde A hasta B, entonces

$$t = t(\theta) = \text{tiempo corriendo} + \text{tiempo nadando}$$
$$= \frac{20\theta}{2k} + \frac{40}{k}\,\text{sen}\,\frac{\pi - \theta}{2}$$

Se supone que no se emplea tiempo en saltar al agua en el punto C. El dominio de t es $[0, \pi]$ y t no tiene puntos singulares. Como t es continua en un intervalo cerrado y finito, debe tener un valor mínimo y ese valor debe estar en un punto crítico o en un extremo. Para el caso de los puntos críticos,

$$0 = t'(\theta) = \frac{10}{k} - \frac{20}{k}\cos\frac{\pi - \theta}{2}$$

Por tanto,

$$\cos\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{\pi-\theta}{2}=\frac{\pi}{3}, \qquad \theta=\frac{\pi}{3}$$

Éste es el único valor crítico de θ que está en el intervalo $[0, \pi]$. Tenemos que

$$t\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{10\pi}{3k}+\frac{40}{k}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{10}{k}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)\approx\frac{45.11}{k}$$

Debemos buscar también en los extremos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$t(0)=\frac{40}{k}, \qquad t(\pi)=\frac{10\pi}{k}\approx\frac{31.4}{k}$$

Evidentemente $t(\pi)$ es el mínimo de esos tres tiempos. Para ir desde A hasta B tan rápidamente como sea posible, el hombre deberá correr todo el tiempo.

Observación Este problema muestra la importancia de comprobar si los puntos candidatos corresponden a máximos o mínimos. En este caso, el punto crítico $\theta = \pi/3$ proporciona la *peor* estrategia posible: correr un tercio del camino y nadar después el resto requiere el máximo tiempo, no el mínimo.

Ejercicios 4.5

1. Dos números positivos suman 7. ¿Cuál es el máximo valor posible de su producto?
2. El producto de dos números positivos es 8. ¿Cuál es el mínimo valor posible de su suma?
3. Dos números no negativos suman 60. ¿De qué números se trata si el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro es máximo?
4. Dos números suman 16. ¿De qué números se trata si el producto del cubo de uno y la quinta potencia del otro es tan grande como sea posible?
5. La suma de dos números no negativos vale 10. ¿Cuál es el mínimo valor de la suma del cubo de un número y el cuadrado del otro?
6. Dos números no negativos suman n. ¿Cuál es el mínimo valor posible de la suma de sus cuadrados?
7. Entre todos los rectángulos de un área dada, demuestre que el cuadrado tiene el perímetro mínimo.
8. Entre todos los rectángulos de un perímetro dado, demuestre que el cuadrado tiene el área máxima.
9. Entre todos los triángulos isósceles de un perímetro dado, demuestre que el triángulo equilátero es el de área máxima.
10. Calcule la máxima área posible de un triángulo isósceles si la longitud de cada uno de sus dos lados iguales es de 10 m.
11. Calcule el área del máximo rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio R si un lado del rectángulo está sobre el diámetro del semicírculo.
12. Calcule el máximo perímetro posible de un rectángulo inscrito en un semicírculo de radio R si un lado del rectángulo está sobre el diámetro del semicírculo (es interesante notar que el rectángulo del máximo perímetro tiene una forma diferente que el de máxima área, obtenido en el Ejercicio 11).
13. Un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados se inscribe en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Calcule la máxima área posible de este rectángulo.

14. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C y área S. Calcule la máxima área de un rectángulo inscrito en el triángulo si (a) una esquina del rectángulo está en C o (b) un lado del rectángulo está en la hipotenusa AB.
15. Calcule la máxima área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen 10 cm de longitud. Utilice la mitad de la longitud del tercer lado del triángulo como variables para expresar el área de dicho triángulo.
16. Repita el Ejercicio 15, pero utilice como variable para expresar el área del triángulo el ángulo entre los dos lados iguales. ¿Qué solución es más fácil?
17. **(Diseño de una cartelera)** Se desea construir una cartelera con 100 m^2 de área y con márgenes de 2 m en la parte superior e inferior y de 4 m en cada lado. Calcule las dimensiones exteriores de la cartelera si su área total debe ser mínima.
18. **(Diseño de una caja)** Se desea construir una caja partiendo de una lámina de cartón de 70 cm × 150 cm, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y después doblando las cuatro solapas resultantes para hacer los lados de la caja (la caja no tiene tapa). ¿Cuál es el máximo volumen posible de la caja?

19. (Uso de descuentos para maximizar el beneficio) Un fabricante de automóviles vende 2000 coches al mes, con un beneficio medio de 1000 € por coche. Las prospectivas de mercado indican que por cada 50 € de descuento que el fabricante ofrezca a los compradores podría vender 200 coches más al mes. ¿Cuánto descuento debería ofrecer para maximizar el beneficio mensual?

20. (Maximización del beneficio de renta) Las 80 habitaciones de un motel se podrían alquilar todas las noches si el director cobrara 40 € o menos por habitación. Si se cobra $(40 + x)$ € por habitación, entonces $2x$ habitaciones permanecerán vacantes. Si cada habitación alquilada le cuesta al director 10 € al día y cada habitación no alquilada 2 € al día, ¿qué precio debería cobrar el director por habitación para maximizar su beneficio diario?

21. (Minimización del tiempo de viaje) Nos encontramos en un todoterreno en el desierto, 12 km al sur del punto A más cercano de una carretera recta este-oeste. Se desea alcanzar un punto B en la carretera 10 km al este de A. Si nuestro todoterreno puede correr en promedio a 15 km/h sobre la arena y a 39 km/h por la carretera ¿hacia qué punto de la carretera habría que dirigirse para minimizar el tiempo de viaje hasta B?

22. Repita el Ejercicio 21, suponiendo que B se encuentra sólo a 4 km de A.

23. Un alambre de 1 m de longitud se corta en dos trozos. Un trozo se dobla en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Calcule la longitud de la parte utilizada para el cuadrado si la suma de las áreas del círculo y el cuadrado es (a) máxima y (b) mínima.

24. Calcule el área del máximo rectángulo que se puede dibujar de forma que cada uno de sus lados pase por un vértice diferente de un rectángulo cuyos lados son a y b.

25. ¿Cuál es la longitud del mínimo segmento que tiene uno de sus extremos en el eje x, el otro en el eje y y pasa por el punto $(9, \sqrt{3})$?

26. (Doblando una esquina) Calcule la longitud máxima que puede tener una viga para que pueda doblar horizontalmente la esquina que comunica un vestíbulo de anchura a m con otro vestíbulo de anchura b m (*véase* la Figura 4.44; suponga que la viga no tiene anchura).

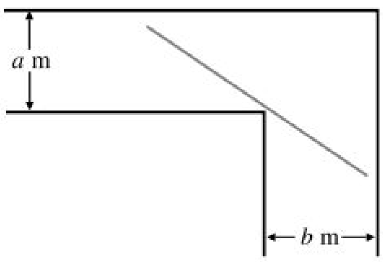

Figura 4.44

27. Si la altura de ambos vestíbulos del Ejercicio 26 es de c m, y no es necesario que la viga sea transportada horizontalmente, ¿qué longitud máxima podría tener la viga para seguir doblando la esquina? *Sugerencia*: Este ejercicio se puede resolver fácilmente teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior.

28. La valla del Ejemplo 3 se destruye y se construye una nueva valla a 2 m de separación del muro. ¿Cuál puede ser la máxima altura de la valla si se debe poder extender una escalera de 6 m desde el muro, sobre la valla y hasta el suelo en el exterior de la valla?

29. Calcule la mínima distancia desde el origen a la curva $x^2y^4 = 1$.

30. Calcule la mínima distancia desde el punto (8, 1) a la curva $y = 1 + x^{3/2}$.

31. Calcule las dimensiones del máximo cilindro circular recto que se puede inscribir en una esfera de radio R.

32. Calcule las dimensiones del cilindro circular de máximo volumen que se puede inscribir en un cono cuyo radio en la base vale R y su altura es H, si la base del cilindro coincide con la base del cono.

33. Una caja de base cuadrada sin tapa tiene un volumen de 4 m^3. Calcule las dimensiones de la caja más económica.

34. (Construcción de una pirámide) Se construye una pirámide de base cuadrada con cuatro caras, cada una de las cuales tienen la forma de un triángulo isósceles, cortando cuatro triángulos de una pieza cuadrada de cartulina de 2 pies (como se muestra en la Figura 4.45) y doblando los triángulos resultantes para formar las paredes de la pirámide. ¿Cuál es el máximo volumen que puede tener la pirámide? *Sugerencia*: El volumen de una pirámide con área de la base A y altura h medida perpendicular a la base es $V = \frac{1}{3} Ah$.

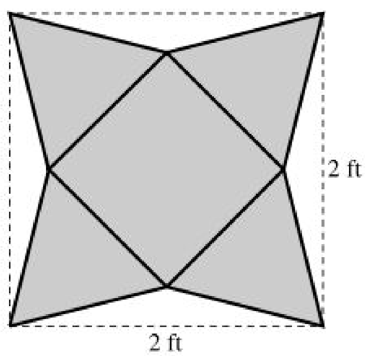

Figura 4.45

35. (Obtención de la máxima luminosidad) Una ventana tiene un perímetro de 10 m y su forma es rectangular con el lado superior reemplazado por un semicírculo. Calcule las dimensiones del rectángulo si la ventana admite la máxima cantidad de luz.

36. (Diseño de un tanque de combustible) Un tanque de combustible tiene la forma de un cilindro cerrado por semiesferas en cada uno de los extremos. Si el coste de las semiesferas por unidad de área es el doble que el de la pared del cilindro, y si el volumen del tanque es V, calcule el radio y la altura de la parte cilíndrica que minimizan el coste total. El área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, y su volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

37. (Reflexión de la luz) La luz viaja de forma que emplea el mínimo tiempo posible en ir de un punto a otro. Un rayo de luz procedente del punto C se refleja en un espejo plano AB en X y después pasa por el punto D (*véase* la Figura 4.46). Demuestre que los rayos CX y XD forman ángulos iguales con la normal a AB en X (*Observación*: Puede darse una demostración basada en geometría elemental sin utilizar el cálculo o se puede minimizar el tiempo empleado en el recorrido CXD).

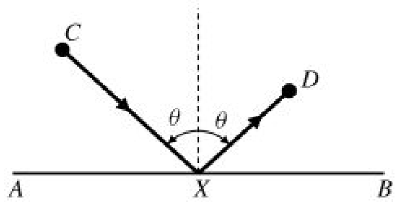

Figura 4.46

***38. (Ley de Snell)** Si la luz viaja con velocidad v_1 en un medio y con velocidad v_2 en un segundo medio, y si los dos medios están separados por una interfaz plana, demuestre que un rayo de luz que va del punto A en un medio al punto B en el otro se desvía en la interfaz de forma que

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2}$$

siendo i y r los ángulos de incidencia y de refracción, como se muestra en la Figura 4.47. Esto se conoce como Ley de Snell. Deduzca esta ley a partir del principio de mínimo tiempo presentado en el Ejercicio 37.

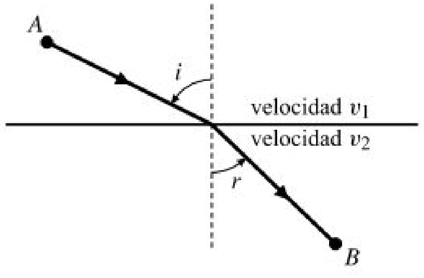

Figura 4.47

39. (Corte de la viga más rígida) La rigidez de una viga de madera de sección cruzada rectangular es proporcional a la anchura y al cubo de la profundidad de la sección cruzada. Calcule la anchura y la profundidad de la viga de máxima rigidez que se puede cortar utilizando un tronco de radio R.

40. Calcule la ecuación de la recta de máxima pendiente que es tangente a la curva $y = 1 + 2x - x^3$.

41. Una cantidad Q crece de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = kQ^3(L - Q)^5$$

siendo k y L constantes positivas. ¿Qué valor tiene Q cuando está creciendo con la máxima velocidad?

***42.** Calcule el mínimo volumen posible de un cono circular recto que puede contener a una esfera de radio R (el volumen de un cono de radio en la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

***43. (Carga de un ferry)** Un ferry realiza el recorrido entre tierra y la isla de Dedlos. La capacidad máxima del ferry es de 1000 coches, pero cargarlo cerca de su máxima capacidad consume mucho tiempo. Se sabe que el número de coches que se pueden cargar en t horas es

$$f(t) = 1000\,\frac{t}{e^{-t} + t}$$

Nótese que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1000$, como podría esperarse. Además, se sabe que se requieren $x/1000$ horas descargar x coches. El tiempo de navegación a la isla o desde la isla es de una hora. Suponga que siempre hay en cada viaje más coches esperando que los que se pueden cargar. ¿Cuántos coches deberían cargarse en el ferry en cada viaje para maximizar el movimiento medio de los coches hacia y desde la isla? (Puede ser necesaria una calculadora gráfica o un software de computador como la rutina `fsolve` de Maple para calcular el punto crítico apropiado).

***44. (La mejor vista de un mural)** ¿A qué distancia hay que mirar de un mural para conseguir la mejor vista si el mural tiene 10 pies de altura y su parte inferior está 2 pies por encima del nivel de nuestros ojos? *Véase* la Figura 4.48.

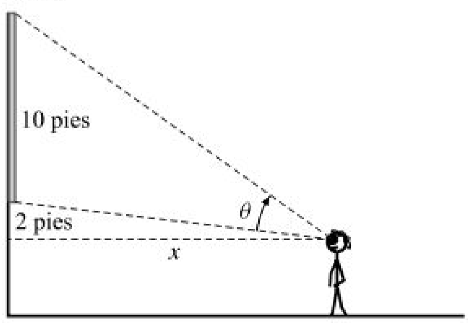

Figura 4.48

*45. **(Mejora de la jaula del Ejemplo 1)** Se construye una jaula, uno de cuyos límites coincide con un muro recto. La otra parte de la jaula se cierra mediante una valla con la forma de un arco de circunferencia. Si hay disponibles 100 m de valla, ¿cuál es el área de la jaula más grande posible? ¿En qué fracción de un círculo se curva la valla?

*46. **(Diseño de una copa Dixie)** Se corta un sector de un disco circular de radio R, y la parte restante del disco se dobla de forma que se unen los dos segmentos rectos y se forma un cono (Figura 4.49). ¿Cuál es el máximo volumen posible del cono?

*47. **(Minimización del pliegue)** Una esquina de una tira de papel de anchura a cm se dobla de forma que llegue justo al lado opuesto (Figura 4.50). Calcule la mínima longitud posible de la línea de pliegue.

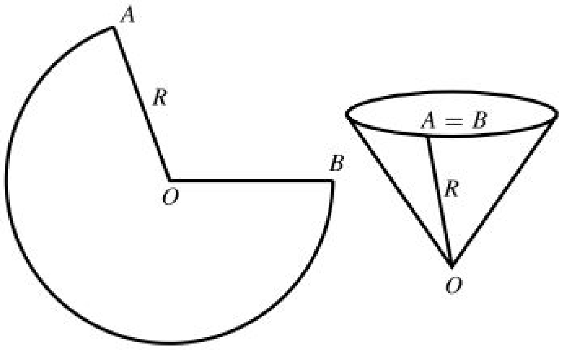

Figura 4.49

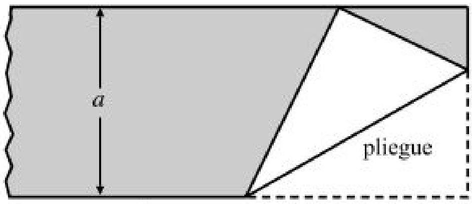

Figura 4.50

4.6 Cálculo de raíces de ecuaciones

El cálculo de soluciones (raíces) de ecuaciones es un problema matemático importante, al cual el cálculo ha hecho contribuciones significativas. Sólo hay unas pocas clases de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ que se pueden resolver de forma exacta. Entre ellas están las **ecuaciones lineales**:

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

y las **ecuaciones cuadráticas**:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las ecuaciones cúbicas (polinomios de tercer grado) y de cuarto grado también se pueden resolver, pero las fórmulas son muy complicadas. En general, estas ecuaciones y un buen número de otras se resolverán aproximadamente utilizando métodos numéricos, a menudo con ayuda de la calculadora o el computador.

En la Sección 1.4 se presentó el método de la bisección para aproximar la raíz de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Este método utiliza el Teorema del Valor Medio y depende sólo de la continuidad de f y de nuestra habilidad para obtener un intervalo $[x_1, x_2]$ donde se pueda encontrar la raíz, porque $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tengan signos opuestos. Este método es lento. Requiere entre tres y cuatro iteraciones para obtener la raíz que está siendo aproximada con una precisión suficiente.

Si sabemos más cosas sobre f, además de que es continua, podemos desarrollar métodos mejores (es decir, más rápidos) para calcular las raíces de $f(x) = 0$. En esta sección estudiaremos dos métodos de este tipo:

(a) **El método de Newton**, que requiere que f sea diferenciable y que en general es muy eficiente.
(b) **La iteración del punto fijo**, que se aplica a ecuaciones de forma diferente: $f(x) = x$.

Como el método de la bisección, ambos métodos requieren tener una cierta idea inicial de dónde se encuentra la raíz, y generan secuencias de aproximaciones para aproximarse más y más a la misma.

Método de Newton

Se desea calcular una **raíz** de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, un número r tal que $f(r) = 0$. Ese número se denomina también **cero** de la función f. Si f es diferenciable cerca de la raíz, entonces se pueden utilizar rectas tangentes para producir la secuencia de aproximaciones a la raíz que se acerque rápidamente a dicha raíz. La idea es como sigue (*véase* la Figura 4.51). Se parte de una aproximación inicial a la raíz, por ejemplo $x = x_0$. Se dibuja la recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ y se calcula x_1, el punto donde esta recta tangente corta al eje x. Bajo ciertas condiciones, x_1 estará más cerca de la raíz que x_0. Este proceso se puede repetir sucesivamente para obtener una secuencia de números x_2, x_3, ..., y se van acercando a la raíz r. El número x_{n+1} es el corte con el eje x de la tangente $y = f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$.

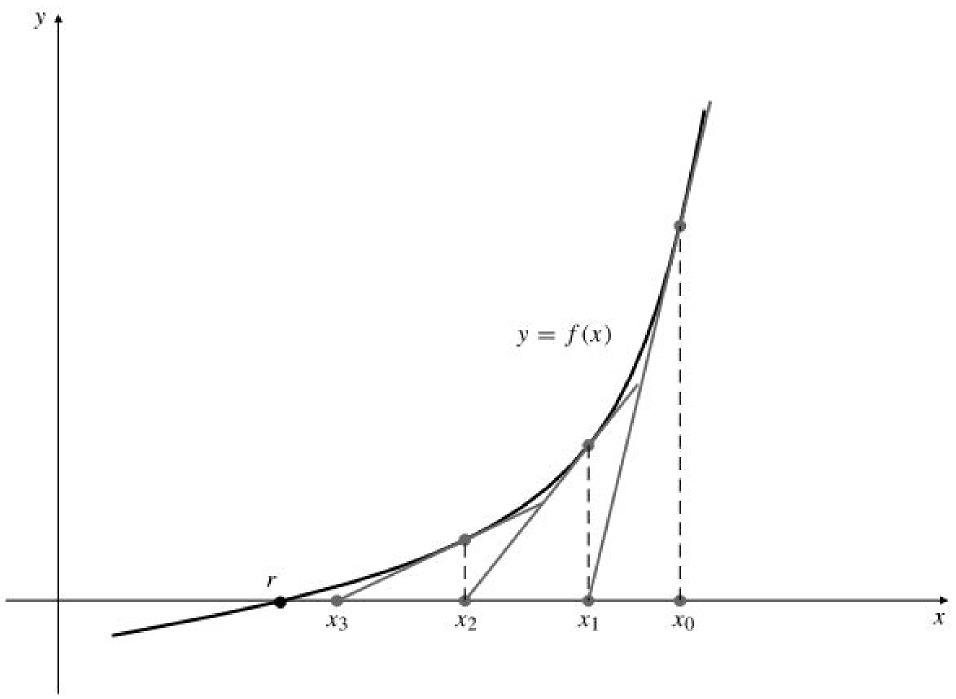

Figura 4.51

La ecuación de la recta tangente $y = f(x)$ en $x = x_0$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Como el punto $(x_1, 0)$ está en esta recta, tenemos que $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$. Por tanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Fórmulas similares producen x_2 a partir de x_1, después x_3 a partir de x_2, y así sucesivamente. La fórmula para obtener x_{n+1} a partir x_n es

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

y se conoce con el nombre de **fórmula del Método de Newton**. Generalmente, se utilizará una calculadora o un ordenador para obtener las aproximaciones sucesivas x_1, x_2, x_3, ..., y observar si los números parecen converger a un límite. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ existe, y si f/f' es continua cerca de r, entonces r debe ser una raíz de f ya que

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

de donde se deduce que $f(r) = 0$. Este método se conoce con el nombre de **Método de Newton** o **Método de Newton-Raphson**.

Ejemplo 1 Utilice el Método de Newton para calcular la raíz real única de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ con una precisión de 10 cifras decimales.

Solución Tenemos que $f(x) = x^3 - x - 1$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$. Como f es continua y como $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, la ecuación tiene una raíz en el intervalo $[1, 2]$. Empecemos con el valor inicial $x_0 = 1{,}5$. La fórmula del Método de Newton en este caso es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

de forma que, por ejemplo, la aproximación x_1 es

$$x_1 = \frac{2(1{,}5)^3 + 1}{3(1{,}5)^2 - 1} \approx 1{,}347\ 826...$$

Utilizando una calculadora científica se obtienen los valores de la Tabla 1:

Tabla 1.

n	x_n	$f(x_n)$
0	1,5	0,875 000 000 000···
1	1,347 826 086 96···	0,100 682 173 091···
2	1,325 200 398 95···	0,002 058 361 917···
3	1,324 718 174 00···	0,000 000 924 378···
4	1,324 717 957 24···	0,000 000 000 000···
5	1,324 717 957 24···	

Evidentemente, $r = 1{,}324\ 717\ 957\ 2$ con una precisión redondeada a 10 cifras decimales. ■

Obsérvese el comportamiento del número x_n. En la tercera iteración, x_3, aparentemente hemos conseguido una precisión de 6 cifras decimales, y con x_4, unos 10 dígitos decimales. Una característica del Método de Newton es que, cuando se empieza cerca de la raíz, la convergencia puede ser muy rápida. Es ilustrativo comparar estos resultados con los obtenidos para la misma ecuación por el método de la bisección en el Ejemplo 12 de la Sección 1.4. Allí se conseguían tres cifras decimales de precisión tras 11 iteraciones.

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación $x^3 = \cos x$ con una precisión de 11 cifras decimales.

Solución Deseamos obtener la coordenada x, r, de la intersección de las curvas $y = x^3$ y $y = \cos x$. Observando la Figura 4.52 parece que las curvas se cortan ligeramente a la derecha de $x = 1$. Empezaremos con el valor inicial $x_0 = 0{,}8$. Si $f(x) = x^3 - \cos x$, entonces $f'(x) = 3x^2 + \operatorname{sen} x$. La fórmula del Método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - \cos x_n}{3x_n^2 + \operatorname{sen} x_n} = \frac{2x_n^3 + x_n \operatorname{sen} x_n + \cos x_n}{3x_n^2 + \operatorname{sen} x_n}$$

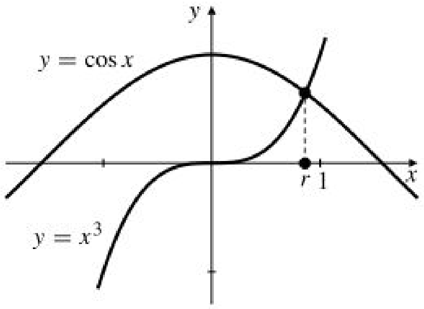

Figura 4.52 Resolución de $x^3 = \cos x$.

Las aproximaciones x_1, x_2, ..., se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,8	−0,184 706 709 347···
1	0,870 034 801 135···	0,013 782 078 762···
2	0,865 494 102 425···	0,000 006 038 051···
3	0,865 474 033 493···	0,000 000 001 176···
4	0,865 474 033 102···	0,000 000 000 000···
5	0,865 474 033 102···	

Las dos curvas se cortan en $x = 0{,}865\ 474\ 033\ 10$, con una precisión de 11 cifras decimales.

Observación El Ejemplo 2 muestra la utilidad de dibujar una gráfica para determinar un posible valor inicial x_0. Incluso un dibujo muy aproximado de la gráfica de $y = f(x)$ puede mostrar cuántas raíces tiene aproximadamente la ecuación $f(x) = 0$ y por dónde están. En general, cuanto más precisa sea la aproximación inicial a la raíz verdadera, menor número de iteraciones serán necesarias para conseguir la precisión deseada. De forma similar, para una ecuación de la forma $g(x) = h(x)$, hacer un dibujo de las gráficas de g y h (sobre los mismos ejes) puede sugerir aproximaciones para el comienzo de la iteración para encontrar los puntos de intersección. A partir de los valores iniciales, se puede aplicar después el Método de Newton para mejorar las aproximaciones.

Observación Cuando se utiliza el Método de Newton para resolver una ecuación de la forma $g(x) = h(x)$ (como la del Ejemplo 2), hay que transformar la ecuación a la forma $f(x) = 0$ y aplicar el Método de Newton a f. En general, basta utilizar $f(x) = g(x) - h(x)$, aunque $f(x) = (g(x)/h(x)) - 1$ es también una posibilidad.

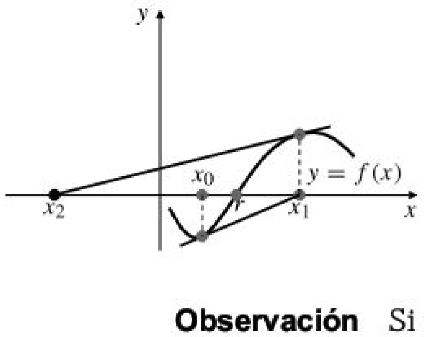

Figura 4.53 En este caso las iteraciones del Método de Newton no convergen a la raíz.

Observación Si disponemos de una calculadora programable, podemos aprender a programar la fórmula del Método de Newton para una ecuación dada, de forma que para generar nuevas iteraciones baste con pulsar unos pocos botones. Si nuestra calculadora dispone además de capacidades gráficas, se pueden utilizar para localizar un buen valor inicial.

El Método de Newton no siempre funciona tan bien como lo hace en los ejemplos anteriores. Si la primera derivada f' es muy pequeña cerca de la raíz, o si la segunda derivada f'' es muy grande cerca de la raíz, una sola iteración de la fórmula nos puede llevar desde un punto muy cercano a la raíz a un punto muy lejano. La Figura 4.53 ilustra esta posibilidad (*véanse* también los Ejercicios 15 y 16 al final de esta sección).

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para que las aproximaciones del Método de Newton converjan a una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$ si el valor inicial x_0 está lo suficientemente cerca de dicha raíz.

TEOREMA 7 **Límites de error del Método de Newton**

Supongamos que f, f' y f'' son continuas en un intervalo I que contiene a x_n, x_{n+1} y a una raíz $x = r$ de $f(x) = 0$. Supongamos también que existen constantes K y $L > 0$ tales que para todo x perteneciente a I se cumple

(i) $|f''(x)| \leqslant K$ y

(ii) $|f'(x)| \geqslant L$

Entonces,

(a) $|x_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{K}{2L}|x_{n+1} - x_n|^2$ y

(b) $|x_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{K}{2L}|x_n - r|^2$

Las condiciones (i) y (ii) aseguran que cerca de r la pendiente de $y = f(x)$ no es demasiado pequeña y que no cambia con demasiada rapidez. Si $K/(2L) < 1$, el teorema demuestra que x_n converge rápidamente a r cuando n se hace lo suficientemente grande para que $|x_n - r| < 1$.

La demostración del Teorema 7 depende del Teorema del Valor Medio. No la daremos aquí ya que este teorema es de uso práctico limitado. En la práctica, se calcularán aproximaciones sucesivas utilizando la fórmula de Newton y se observará si parecen converger a un límite. Si lo hacen, y si los valores de f en esas aproximaciones tienden a 0, podemos confiar en que hemos localizado una raíz.

Iteración del punto fijo

Un número r que cumple la ecuación $f(r) = r$ se denomina **punto fijo** de la función f porque al aplicar la función f el número no cambia. Para ciertas clases de funciones, se pueden encontrar sus puntos fijos comenzando con un valor inicial x_0 y calculando sucesivas aproximaciones $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... En general,

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Empecemos investigando un ejemplo simple:

Ejemplo 3 Calcule una raíz de la ecuación $\cos x = 5x$.

Solución Esta ecuación es de la forma $f(x) = x$, con $f(x) = \frac{1}{5}\cos x$. Como $\cos x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0, vemos que $\frac{1}{5}\cos x$ tenderá a $\frac{1}{5}$ cuando $x = \frac{1}{5}$. Esto sugiere que un valor inicial razonable del punto fijo es $x_0 = \frac{1}{5} = 0.2$. Los valores de las aproximaciones posteriores

$$x_1 = \frac{1}{5}\cos(x_0), \qquad x_2 = \frac{1}{5}\cos(x_1), \qquad x_3 = \frac{1}{5}\cos(x_2), \ldots$$

se presentan en la Tabla 3. La raíz es 0.196 164 28 con una precisión de ocho cifras decimales.

Tabla 3.

n	x_n
0	0.2
1	0.196 013 32
2	0.196 170 16
3	0.196 164 05
4	0.196 164 29
5	0.196 164 28
6	0.196 164 28

¿Por qué funciona el método utilizado en el Ejemplo 3? ¿Funcionará con cualquier función f? Para responder a estas preguntas, examinemos la línea poligonal de la Figura 4.54. Empezando en x_0, se dirige verticalmente a la curva $y = f(x)$ hasta una coordenada x de valor x_1. Después se dirige horizontalmente a la recta $y = x$, cruzándola en un punto cuya coordenada x sigue valiendo x_1. Después el proceso se repite; la recta va verticalmente hasta la curva $y = f(x)$ y horizontalmente hasta $y = x$ llegando al punto $x = x_2$. La línea continúa de esta forma siguiendo un movimiento en espiral cada vez más cercana a la intersección de $y = f(x)$ y $y = x$. Cada valor de x_n está más cerca del punto fijo r que el valor anterior.

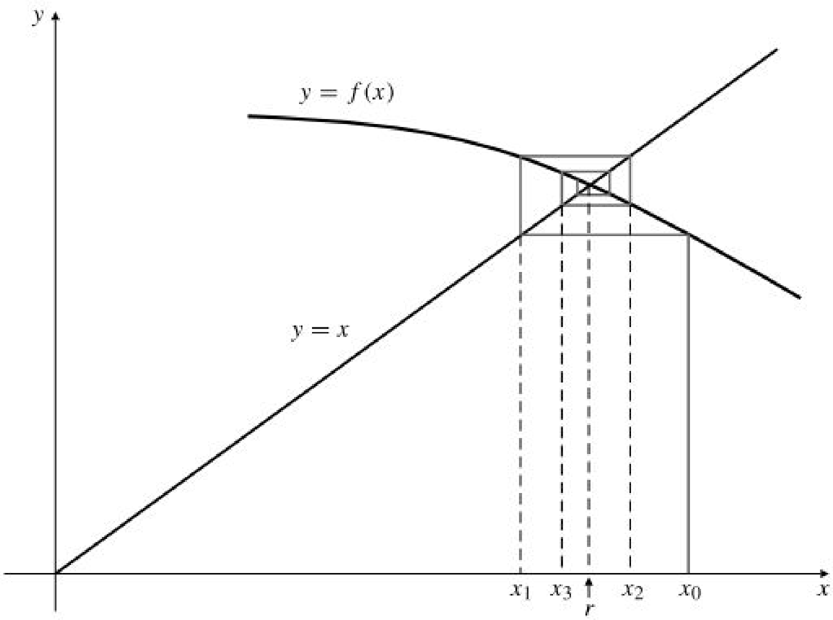

Figura 4.54 Iteraciones de $x_{n+1} = f(x_n)$ que se dirigen en espiral hacia el punto fijo.

Consideremos ahora función f cuya gráfica se muestra en la Figura 4.55(a). Si intentamos seguir el mismo método en este caso, empezando con x_0, la línea poligonal se dirige en espiral hacia afuera, lejos de la raíz, y los valores resultantes x_n no convergen a la raíz como lo hacían en el Ejemplo 3. Para ver por qué el método funciona con la función de la Figura 4.54, pero no lo hace con la función de la Figura 4.55(a), obsérvense las pendientes de las dos gráficas $y = f(x)$, cerca del punto fijo r. Ambas pendientes son negativas, pero en la Figura 4.54 el valor absoluto de la pendiente es menor que 1, mientras que el valor absoluto de la pendiente de f en la Figura 4.55(a) es mayor que 1. Observando cuidadosamente las gráficas, debemos ver claramente que éste es el hecho que hace que los puntos x_n se acerquen a r en la Figura 4.54 y se alejen de r en la Figura 4.55(a).

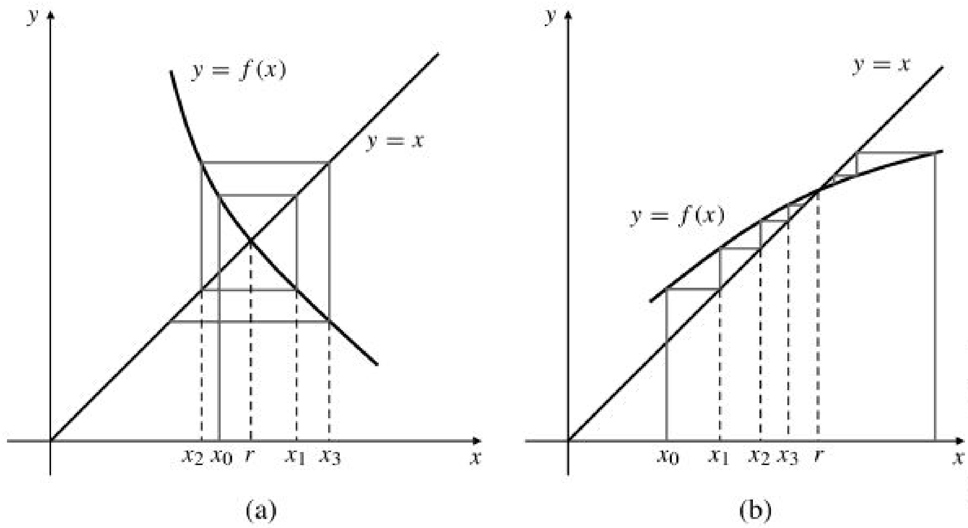

Figura 4.55
(a) Una función f para la que las iteraciones $x_{n+1} = f(x_n)$ no convergen.
(b) Convergencia «en escalera» al punto fijo.

Un tercer ejemplo, que se puede ver en la Figura 4.55(b), muestra que el método puede funcionar también para funciones cuyas gráficas tengan pendientes positivas cerca del punto fijo r, suponiendo que la pendiente sea menor que 1. En este caso, la línea poligonal forma una «escalera» en vez de una «espiral», y las aproximaciones sucesivas x_n crecen hacia la raíz si $x_0 < r$ y decrecen hacia la raíz si $x_0 > r$.

El siguiente teorema garantiza que la iteración del método del punto fijo funcionará para una clase particular de funciones.

TEOREMA 8 **Un teorema del punto fijo**

Supongamos que f está definida en un intervalo $I = [a, b]$ y cumple las dos siguientes condiciones:

(i) $f(x)$ pertenece a I siempre que x pertenezca a I.
(ii) Existe una constante K, con $0 < K < 1$, tal que para todos u y v pertenecientes a I,

$$|f(u) - f(v)| \leqslant K|u - v|$$

Entonces f tiene un punto fijo f en I, que es $f(r) = r$, y empezando con cualquier número x_0, la iteración

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1), \ldots$$

converge a r.

Invitamos al lector a demostrar este teorema mediante el método que se sugiere en los Ejercicios 24 y 25 al final de esta sección.

Rutinas «Solve»

Muchos de los modelos más avanzados de calculadoras científicas y la mayoría de los programas matemáticos para computador disponen de rutinas para resolver numéricamente ecuaciones generales o, en algunos casos, incluso simbólicamente. Estas rutinas «Solve» suponen continuidad a los lados izquierdo y derecho de las ecuaciones dadas y a menudo requieren que el usuario especifique un intervalo en el cual buscar la raíz o una aproximación inicial al valor de dicha raíz, o ambas cosas. Generalmente, la calculadora o el software de computador tendrán también capacidades gráficas, y las podremos utilizar para obtener una idea de cuántas raíces tiene la ecuación y ver aproximadamente su localización, antes de utilizar las rutinas de resolución. También es posible especificar una *tolerancia* sobre la diferencia de los dos miembros de la ecuación. Por ejemplo, si deseamos obtener una solución de la ecuación $f(x) = 0$, puede ser más importante para nosotros asegurarnos de que una solución aproximada $\hat{x}$ satisface $|f(\hat{x})| < 0.0001$ que asegurarnos de que $\hat{x}$ está dentro de una distancia particular de la raíz real.

Los métodos utilizados por las rutinas de resolución varían de una calculadora o aplicación software a otra, y suelen ser muy sofisticados, pues utilizan diferenciación numérica y otras técnicas para obtener la raíz muy rápidamente, incluso aunque el intervalo de búsqueda sea grande.

Si disponemos de una calculadora científica avanzada o un software de computador con posibilidades similares, merece la pena leer los manuales que describen cómo hacer un uso efectivo de las ecuaciones de resolución. Las aplicaciones de matemáticas para resolver problemas «del mundo real» generalmente requieren obtener soluciones aproximadas de ecuaciones que son insolubles por métodos exactos.

Ejercicios 4.6

En los Ejercicios 1-10, utilice el Método de Newton para resolver las ecuaciones dadas con la precisión permitida por su calculadora.

1. Calcule $\sqrt{2}$ resolviendo $x^2 - 2 = 0$.

2. Calcule $\sqrt{3}$ resolviendo $x^2 - 3 = 0$.

3. Calcule la raíz de $x^3 + 2x - 1 = 0$ entre 0 y 1.

4. Calcule la raíz de $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$ entre 0 y 1.

5. Calcule las dos raíces de $x^4 - 8x^2 - x + 16 = 0$ en $[1, 3]$.

6. Calcule las tres raíces de $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ en $[-3, 1]$.

7. Resuelva $\operatorname{sen} x = 1 - x$. Realice un dibujo como ayuda para obtener un valor inicial x_0.

8. Resuelva $\cos x = x^2$. ¿Cuántas raíces existen?

9. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $\tan x = x$? Calcule la que está entre $\pi/2$ y $3\pi/2$.

10. Resuelva $\dfrac{1}{1 + x^2} = \sqrt{x}$ expresándola en la forma

$$(1 + x^2)\sqrt{x} - 1 = 0$$

11. Si su calculadora dispone de una rutina «Solve», o si dispone de un software de computador con una rutina de ese tipo, utilícelas para resolver las ecuaciones de los 10 ejercicios anteriores.

En los Ejercicios 12-13 calcule los valores máximo y mínimo de las funciones.

12. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}$

13. $\dfrac{\cos x}{1 + x^2}$

14. Sea $f(x) = x^2$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene claramente como solución $x = 0$. Obtenga las iteraciones del Método de Newton x_1, x_2 y x_3 empezando con $x_0 = 1$.

(a) ¿Qué es x_n?

(b) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para calcular la raíz con un error menor que 0.0001 en valor absoluto?

(c) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener una aproximación x_n para la que $|f(x_n)| < 0.0001$?

(d) ¿Por qué las iteraciones del Método de Newton convergen en este caso más lentamente que en los ejemplos presentados en esta sección?

15. (Oscilación) Aplique el Método de Newton a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

empezando con el valor inicial $x_0 = a > 0$. Calcule x_1 y x_2. ¿Qué sucede? (realice un dibujo). Si observara este comportamiento cuando estuviera utilizando el Método de Newton para calcular la raíz de una ecuación, ¿qué haría a continuación?

16. (Oscilaciones divergentes) Aplique el Método de Newton a $f(x) = x^{1/3}$ con $x_0 = 1$. Calcule x_1, x_2, x_3 y x_4. ¿Qué sucede? Obtenga una fórmula para x_n.

17. (Oscilaciones convergentes) Aplique el Método de Newton a $f(x) = x^{2/3}$ con $x_0 = 1$. Calcule x_1, x_2, x_3, y x_4. ¿Qué sucede? Obtenga una fórmula para x_n.

Utilice la iteración del punto fijo para resolver las ecuaciones de los Ejercicios 18-22. Obtenga una precisión de cinco cifras decimales.

18. $1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen} x = x$

19. $\cos\dfrac{x}{3} = x$

20. $(x + 9)^{1/3} = x$

21. $\dfrac{1}{2 + x^2} = x$

22. Resuelva $x^3 + 10x - 10 = 0$ expresándola en la forma $1 - \frac{1}{10}x^3 = x$.

23. Sea $f(x)$ una función diferenciable cuya derivada $f'(x)$ nunca vale cero. Sea

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Demuestre que r es una raíz de $f(x) = 0$ si y sólo si r es un punto fijo de $N(x)$. ¿Qué son en este caso las aproximaciones sucesivas $x_{n+1} = N(x_n)$, empezando en x_0?

Los Ejercicios 24-25 constituyen una demostración del Teorema 8.

***24.** La condición (ii) del Teorema 8 implica que f es continua en $I = [a, b]$. Utilice la condición (i) para demostrar que f tiene un punto fijo r en I. *Sugerencia*: Aplique el Teorema del Valor Medio a $g(x) = f(x) - x$ en $[a, b]$.

***25.** Utilice la condición (ii) del Teorema 8 e inducción matemática para demostrar que

$$|x_n - r| \leqslant K^n |x_0 - r|$$

Como $0 < K < 1$, sabemos que $K^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

4.7 Aproximaciones lineales

Muchos problemas de matemática aplicada son difíciles de resolver exactamente, y todo lo que podemos esperar es obtener soluciones aproximadas que sean correctas dentro de unos límites pequeños de tolerancia aceptables. En esta sección examinaremos cómo el conocimiento de los valores de una función y de su primera derivada en un punto nos puede servir para obtener valores aproximados de la función en puntos cercanos.

La tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$ describe el comportamiento de dicha gráfica cerca del punto $P = (a, f(a))$, mejor que cualquier otra línea recta que pase por P, porque pasa por dicho punto en la misma dirección que la curva $y = f(x)$ (*véase* la Figura 4.56). Explotaremos este hecho utilizando la altura hasta la tangente para calcular valores aproximados de $f(x)$ para valores de x cercanos a a. La ecuación de la recta tangente es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

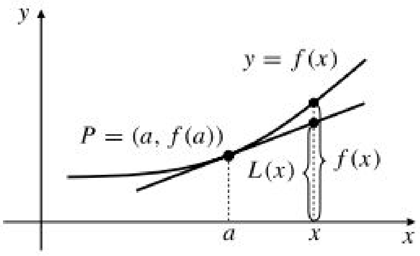

Figura 4.56 Linealización de la función f alrededor de a.

Denominaremos al miembro derecho de esta ecuación linealización de f alrededor de a (o linealización de $f(x)$ en $x = a$).

DEFINICIÓN 8

La **linealización** de la función f alrededor de a es la función L definida como

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Se dice que $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ proporciona una **aproximación lineal** de los valores de f cerca de a.

Ejemplo 1 Calcule linealizaciones de (a) $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$ y (b) $g(t) = 1/t$ en $t = 1/2$.

Solución

(a) Tenemos que $f(0) = 1$ y, como $f'(x) = 1/(2\sqrt{1 + x})$, $f'(0) = 1/2$. La linealización de f cerca del 0 es

$$L(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

(b) Tenemos que $g(1/2) = 2$ y, como $g'(t) = -1/t^2$, $g'(1/2) = -4$. La linealización de $g(t)$ en $t = 1/2$ es

$$L(t) = 2 - 4\left(t - \frac{1}{2}\right) = 4 - 4t$$

Aproximación de valores de funciones

Ya hemos utilizado la linealización en la Sección 2.7, donde se disfrazó como la fórmula

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

y se empleó para aproximar un pequeño cambio $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ en los valores de la función f correspondiente a un pequeño cambio en el argumento de la función del valor a al valor $a + \Delta x$. Esto es exactamente la aproximación lineal

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

Ejemplo 2 Una bola de hielo se funde de forma que su radio disminuye de 5 cm a 4.92 cm. ¿Cuánto disminuye aproximadamente el volumen de la bola?

Solución El volumen V de una bola de radio r se expresa como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que

$$\Delta V \approx \frac{4}{3}\pi(3r^2)\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$$

Para $r = 5$ y $\Delta r = -0.08$ tenemos que

$$\Delta V \approx 4\pi(5^2)(-0.08) = -8\pi \approx -25.13$$

El volumen de la bola disminuye aproximadamente 25 cm^3.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la linealización para obtener un valor aproximado de una función cerca de un punto cuando se conocen los valores de la función y de su derivada.

Ejemplo 3 Utilice la linealización de $\sqrt{x}$ en $x = 25$ para obtener un valor aproximado de $\sqrt{26}$.

Solución Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Como sabemos que $f(25) = 5$ y $f'(25) = 1/10$, la linealización de $f(x)$ en $x = 25$ es

$$L(x) = 5 + \frac{1}{10}(x - 25)$$

Haciendo $x = 26$ se obtiene

$$\sqrt{26} = f(26) \approx L(26) = 5 + \frac{1}{10}(26 - 25) = 5.1$$

Si se utiliza la función raíz cuadrada de una calculadora se puede obtener el «verdadero valor» de $\sqrt{26}$ (realmente, sólo otra aproximación, aunque presumiblemente mejor): $\sqrt{26} = 5.099\,019\,5\ldots$, pero si tenemos una calculadora no se necesita la primera aproximación. Las aproximaciones son útiles cuando no es fácil obtener el valor verdadero. Sin embargo, si no conocemos el valor verdadero, al menos nos gustaría disponer de alguna forma de determinar la calidad de la aproximación, es decir, desearíamos conocer una *estimación del error*. Después de todo, *cualquier núme-*

ro es un aproximación de $\sqrt{26}$, pero el error puede ser inaceptablemente grande. Por ejemplo, el tamaño del error en la aproximación $\sqrt{26} \approx 1\,000\,000$ es mayor que 999 994.

Análisis del error

En cualquier aproximación, se define el **error** como

$$\text{error} = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

Si la linealización de f alrededor de a se usa para aproximar $f(x)$ en $x = a$, es decir,

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

entonces el error $E(x)$ de esta aproximación es

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

Es la distancia vertical en x entre la gráfica de f y la tangente a esa gráfica en $x = a$, como se muestra en la Figura 4.57. Obsérvese que si x está «cerca de» a, entonces $E(x)$ será pequeño comparado con la distancia horizontal entre x y a.

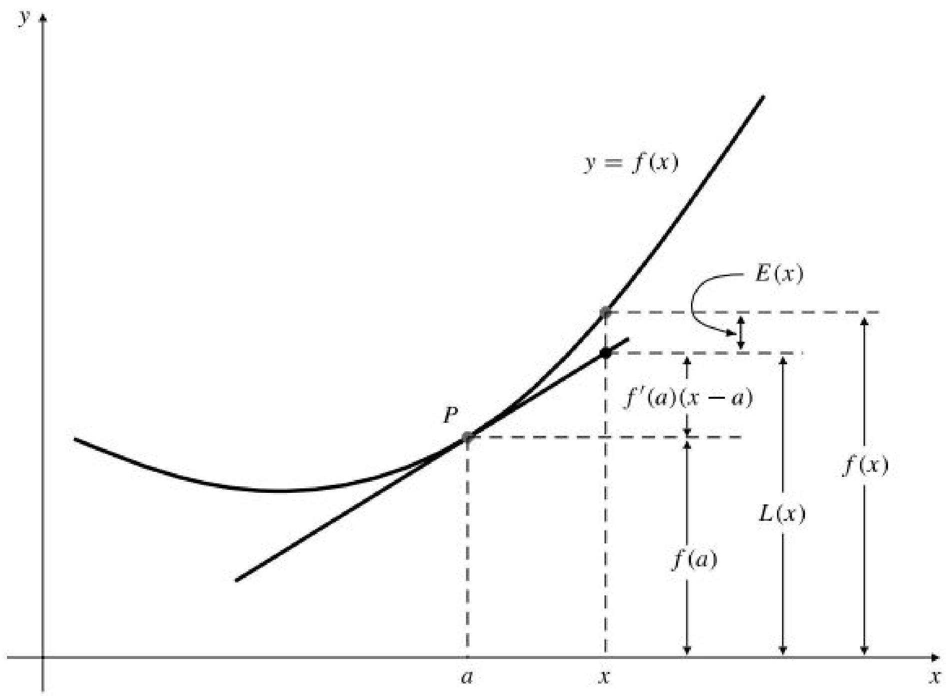

Figura 4.57 $f(x)$ y su linealización $L(x)$ en $x = a$. $E(x)$ es el error de la aproximación $f(x) \approx L(x)$.

El siguiente teorema y sus corolarios nos dan una forma de estimar este error si se conocen límites para la *segunda derivada* de f.

TEOREMA 9 **Una fórmula para el error de la linealización**

Si existe $f''(t)$ para todo t en un intervalo que contenga a a y a x, entonces existe algún punto s entre a y x tal que el error $E(x) = f(x) - L(x)$ en la aproximación lineal $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ cumple

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - a)^2$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $x > a$ (la demostración para $x < a$ es similar). Como

$$E(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t - a)$$

Tenemos que $E'(t) = f'(t) - f'(a)$. Aplicamos el Teorema del Valor Medio Generalizado (Teorema 16 de la Sección 2.6) a las dos funciones $E(t)$ y $(t - a)^2$ en $[a, x]$. Teniendo en cuenta que $E(a) = 0$, se obtiene un número u en (a, x) tal que

$$\frac{E(x)}{(x-a)^2} = \frac{E(x) - E(a)}{(x-a)^2 - (a-a)^2} = \frac{E'(u)}{2(u-a)} = \frac{f'(u) - f'(a)}{2(u-a)} = \frac{1}{2}\, f''(s)$$

para algún s en (a, u); la última expresión es una consecuencia de aplicar de nuevo el Teorema del Valor Medio, esta vez a f' en $[a, u]$. Entonces,

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}\,(x-a)^2$$

como se quería demostrar.

Los tres corolarios siguientes son consecuencias inmediatas del Teorema 9.

Corolario A. Si $f''(t)$ tiene signo constante (es decir, es siempre positivo o siempre negativo) entre a y x, entonces el error $E(x)$ en la aproximación lineal $f(x) \approx L(x)$ en el Teorema tiene ese mismo signo; si $f''(t) > 0$ entre a y x, entonces $f(x) > L(x)$; si $f''(t) < 0$ entre a y x, entonces $f(x) < L(x)$.

Corolario B. Si $|f''(t)| < K$ para todo t entre a y x, entonces $|E(x)| < (K/2)(x - a)^2$.

Corolario C. Si $f''(t)$ cumple $M < f''(t) < N$ para todo t entre a y x (siendo M y N constantes), entonces

$$L(x) + \frac{M}{2}(x-a)^2 < f(x) < L(x) + \frac{N}{2}(x-a)^2$$

Si M y N tienen el mismo signo, una aproximación mejor a $f(x)$ es el punto medio de este intervalo que contiene a $f(x)$:

$$f(x) \approx L(x) + \frac{M+N}{4}(x-a)^2$$

Para esta aproximación el error es menor que la mitad de la longitud del intervalo:

$$|\text{Error}| < \frac{N-M}{4}(x-a)^2$$

Ejemplo 4 Determine el signo y estime el tamaño del error en la aproximación $\sqrt{26} \approx 5.1$ obtenida en el Ejemplo 3. Obtenga a continuación un intervalo en el que pueda asegurar que está $\sqrt{26}$.

Solución Para $f(t) = t^{1/2}$, tenemos que

$$f'(t) = \frac{1}{2}\,t^{-1/2} \quad \text{y} \quad f''(t) = -\frac{1}{4}\,t^{-3/2}$$

Para $25 < t < 26$, tenemos que $f''(t) < 0$, por lo que $\sqrt{26} = f(26) < L(26) = 5.1$. Además, $t^{3/2} > 25^{3/2} = 125$, por lo que $|f''(t)| < (1/4)(1/125) = 1/500)$ y

$$|E(26)| < \frac{1}{2} \times \frac{1}{500} \times (26-25)^2 = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Por tanto, $f(26) > L(26) - 0.001 = 5.099$ y $\sqrt{26}$ está en el intervalo $(5.099, 5.1)$.

Observación Se puede utilizar el Corolario C del Teorema 9 y el hecho de que $\sqrt{26} < 5.1$ para calcular un intervalo mejor (es decir, más pequeño) que contenga a $\sqrt{26}$ de la siguiente forma. Si $25 < t < 26$, entonces $125 = 25^{3/2} < t^{3/2} < 26^{3/2} < 5.1^3$. Por tanto,

$$M = -\frac{1}{4 \times 125} < f''(t) < -\frac{1}{4 \times 5.1^3} = N$$

$$\sqrt{26} \approx L(26) + \frac{M+N}{4} = 5.1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4 \times 125} + \frac{1}{4 \times 5.1^3}\right) \approx 5.099\,028\,8$$

$$|\text{Error}| < \frac{N-M}{4} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5.1^3} + \frac{1}{125}\right) \approx 0.000\,028\,8$$

Entonces $\sqrt{26}$ está en el intervalo (5.099 00, 5.099 06).

Ejemplo 5 Utilice una linealización adecuada para obtener un valor aproximado de $\cos(36^\circ) = \cos(\pi/5)$. ¿Es el verdadero valor mayor o menor que la aproximación? Estime el tamaño del error y proporcione un intervalo en el que pueda asegurar que está $\cos(36^\circ)$.

Solución Sea $f(t) = \cos t$, de forma que $f'(t) = -\operatorname{sen} t$ y $f''(t) = -\cos t$. El valor de a más próximo a 36° para el que conocemos $\cos a$ es $a = 30^\circ = \pi/6$, por lo que utilizamos la linealización alrededor de ese punto:

$$L(x) = \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Como $(\pi/5) - (\pi/6) = \pi/30$, nuestra aproximación es

$$\cos(36^\circ) = \cos\frac{\pi}{5} \approx L\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right) \approx 0.813\,67$$

Si $(\pi/6) < t < (\pi/5)$, entonces $f''(t) < 0$ y $|f''(t)| < \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Por tanto, $\cos(36^\circ) < 0.813\,67$ y

$$|E(36^\circ)| < \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 < 0.004\,75$$

Por tanto, $0.813\,67 - 0.004\,75 < \cos(36^\circ) < 0.813\,67$, por lo que $\cos(36^\circ)$ está en el intervalo (0.808 92, 0.813 67).

■

Observación El error en la linealización de $f(x)$ en $x = a$ se puede interpretar en términos de diferenciales (*véase* la Sección 2.2) de la siguiente forma. Si $\Delta x = dx = x - a$, entonces el cambio en $f(x)$ cuando pasamos de $x = a$ a $x = a + \Delta x$ es $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y$, y el correspondiente cambio en la linealización $L(x)$ es $f'(a)(x - a) = f'(a)\,dx$, que es justamente el valor de $x = a$ del diferencial $dy = f'(x)\,dx$. Por tanto,

$$E(x) = \Delta y - dy$$

El error $E(x)$ es pequeño comparado con Δx cuando Δx tiende a 0, como se puede ver en la Figura 4.57. De hecho,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

Si $|f''(t)| \leqslant K$ (constante) cerca de $t = a$, se puede realizar una aseveración más fuerte:

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{(\Delta x)^2}\right| = \left|\frac{E(x)}{(\Delta x)^2}\right| \leqslant \frac{K}{2}, \qquad \text{por tanto,} \qquad |\Delta y - dy| \leqslant \frac{K}{2}(\Delta x)^2$$

Ejercicios 4.7

En los Ejercicios 1-10, calcule la linealización de las funciones dadas alrededor de los puntos dados.

1. x^2 alrededor de $x = 3$
2. x^{-3} alrededor de $x = 2$
3. $\sqrt{4-x}$ alrededor de $x = 0$
4. $\sqrt{3 + x^2}$ alrededor de $x = 1$
5. $1/(1 + x^2)$ alrededor de $x = 2$
6. $1/\sqrt{x}$ alrededor de $x = 4$
7. $\operatorname{sen} x$ alrededor de $x = \pi$
8. $\cos(2x)$ alrededor de $x = \pi/3$
9. $\operatorname{sen}^2 x$ alrededor de $x = \pi/6$
10. $\tan x$ alrededor de $x = \pi/4$
11. ¿Cuánto crece aproximadamente el área de un cuadrado si la longitud de su lado pasa de 10 cm a 10.4 cm?
12. ¿Cuánto hay que reducir aproximadamente la longitud del lado de un cubo que mide 20 cm para reducir el volumen de dicho cubo en 12 cm^3?
13. Una nave espacial orbita la tierra a una distancia de 4100 millas desde su centro. ¿Cuánto disminuirá la circunferencia de su órbita si su radio disminuye en 10 millas?
14. **(Aceleración de la gravedad)** La aceleración a de la gravedad a una altitud de h millas sobre la superficie de la tierra se puede expresar como
$$a = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$
siendo $g \approx 32$ pies/s^2 la aceleración en la superficie de la tierra y $R \approx 3960$ millas el radio de la tierra. ¿En qué porcentaje disminuirá a si h crece desde 0 hasta 10 millas?

En los Ejercicios 15-22, utilice una linealización adecuada para aproximar el valor indicado. Determine el signo del error y estime su tamaño. Utilice esta información para especificar un intervalo en el que se pueda asegurar que esté el valor.

15. $\sqrt{50}$
16. $\sqrt{47}$
17. $\sqrt[4]{85}$
18. $\dfrac{1}{2.003}$
19. $\cos 46°$
20. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$
21. $\operatorname{sen}(3.14)$
22. $\operatorname{sen} 33°$

Utilice el Corolario C del Teorema 9 de la manera que sugiere la observación que sigue al Ejemplo 4 para obtener mejores intervalos y mejores aproximaciones a los valores de los Ejercicios 23-26.

23. $\sqrt{50}$ a partir de la primera aproximación del Ejercicio 15.
24. $\sqrt{47}$ a partir de la primera aproximación del Ejercicio 16.
25. $\cos 36°$ a partir de la primera aproximación del Ejemplo 5.
26. $\operatorname{sen} 33°$ a partir de la primera aproximación del Ejercicio 22.
27. Si $f(2) = 4$, $f'(2) = -1$ y $0 \leqslant f''(x) \leqslant 1/x$ para $x > 0$, calcule el mínimo intervalo en el que se pueda asegurar que está $f(3)$.
28. Si $f(2) = 4$, $f'(2) = -1$ y $\dfrac{1}{2x} \leqslant f''(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ para $2 \leqslant x \leqslant 3$, calcule la mejor aproximación posible para $f(3)$.
29. Si $g(2) = 1$, $g'(2) = 2$ y $|g''(x)| < 1 + (x-2)^2$ para todo $x > 0$, calcule la mejor aproximación posible para $g(1.8)$. ¿Cómo puede ser de grande el error?
30. Demuestre que la linealización de $\operatorname{sen}\theta$ en $\theta = 0$ es $L(\theta) = \theta$. ¿Cómo puede ser de grande el error porcentual en la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ si $|\theta|$ es menor que 17°?
31. Un globo esférico se infla de forma que su radio crece desde 20 cm a 20.20 cm en un minuto. ¿Cuánto ha crecido aproximadamente su volumen en ese minuto?

4.8 Polinomios de Taylor

La linealización de la función $f(x)$ en $x = a$, es decir, la función lineal

$$P_1(x) = L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

describe el comportamiento de f cerca de a mejor que cualquier otro polinomio de grado 1 porque tanto P_1 como f tienen el mismo valor y la misma derivada en a:

$$P_1(a) = f(a) \quad \text{y} \quad P_1'(a) = f'(a)$$

Se utiliza el símbolo P_1 en vez de L para subrayar el hecho de que la linealización es un polinomio de grado máximo 1.

Se pueden obtener mejores aproximaciones a $f(x)$ utilizando polinomios de segundo grado o de grado superior y ajustando más derivadas en $x = a$. Por ejemplo, si f es dos veces diferenciable cerca de a, entonces el polinomio

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

cumple $P_2(a) = f(a)$, $P_2'(a) = f'(a)$ y $P_2''(a) = f''(a)$ y describe el comportamiento de f alrededor de a mejor que cualquier otro polinomio de grado máximo 2.

En general, si $f^{(n)}(x)$ existe en un intervalo abierto que contiene a $x = a$, entonces el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se ajusta a f y a sus n primeras derivadas en $x = a$,

$$P_n(a) = f(a), \qquad P_n'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

y, por tanto, describe el comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = a$ mejor que cualquier otro polinomio de grado máximo n. P_n se denomina **polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a** (los polinomios de Taylor alrededor de 0 se denominan generalmente polinomios de **Maclaurin**). El polinomio de Taylor de orden 0 para f alrededor de a es la función constante a $P_0(x) = f(a)$. El polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a se denomina a veces polinomio de Taylor de *grado* n, pero su grado será en realidad menor que n si $f^{(n)}(a) = 0$.

Ejemplo 1 Calcule los siguientes polinomios de Taylor:

(a) $P_2(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$ cerca de $x = 25$.

(b) $P_3(x)$ para $g(x) = \ln x$ cerca de $x = e$.

Solución (a) $f'(x) = (1/2)x^{-1/2}$, $f''(x) = -(1/4)x^{-3/2}$. Por tanto,

$$P_2(x) = f(25) + f'(25)(x - 25) + \frac{f''(25)}{2!}(x - 25)^2$$

$$= 5 + \frac{1}{10}(x - 25) - \frac{1}{1000}(x - 25)^2$$

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $g'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. Por tanto,

$$P_3(x) = g(e) + g'(e)(x - e) + \frac{g''(e)}{2!}(x - e)^2 + \frac{g'''(e)}{3!}(x - e)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x - e)^3$$

■

Ejemplo 2 Calcule el polinomio de Maclaurin de orden n $P_n(x)$ para e^x. Utilice $P_0(1)$, $P_1(1)$, $P_2(1)$, ... para calcular valores aproximados de $e = e^1$. Deténgase cuando piense que tiene tres cifras decimales correctas.

Solución Como todas las derivadas de e^x valen e^x, y por tanto valen uno en $x = 0$, el polinomio de Maclaurin de orden n para e^x (es decir, el polinomio de Taylor en $x = 0$) es

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Por tanto, tenemos para $x = 1$, añadiendo un término más en cada paso:

$$P_0(1) = 1$$

$$P_1(1) = 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

$$P_2(1) = P_1(1) + \frac{1}{2!} = P_1(1) + \frac{1}{2} = 2.5$$

$$P_3(1) = P_2(1) + \frac{1}{3!} = P_2(1) + \frac{1}{6} = 2.6666$$

$$P_4(1) = P_3(1) + \frac{1}{4!} = P_3(1) + \frac{1}{24} = 2.7083$$

$$P_5(1) = P_4(1) + \frac{1}{5!} = P_4(1) + \frac{1}{120} = 2.7166$$

$$P_6(1) = P_5(1) + \frac{1}{6!} = P_5(1) + \frac{1}{720} = 2.7180$$

$$P_7(1) = P_6(1) + \frac{1}{7!} = P_6(1) + \frac{1}{5040} = 2.7182$$

Parece que $e \approx 2.718$ con una precisión de tres cifras decimales. En el Ejemplo 5 posterior verificaremos que de hecho $P_7(1)$ produce mucha mayor precisión. Las gráficas de e^x y de sus cuatro primeros polinomios de Maclaurin se muestran en la Figura 4.58.

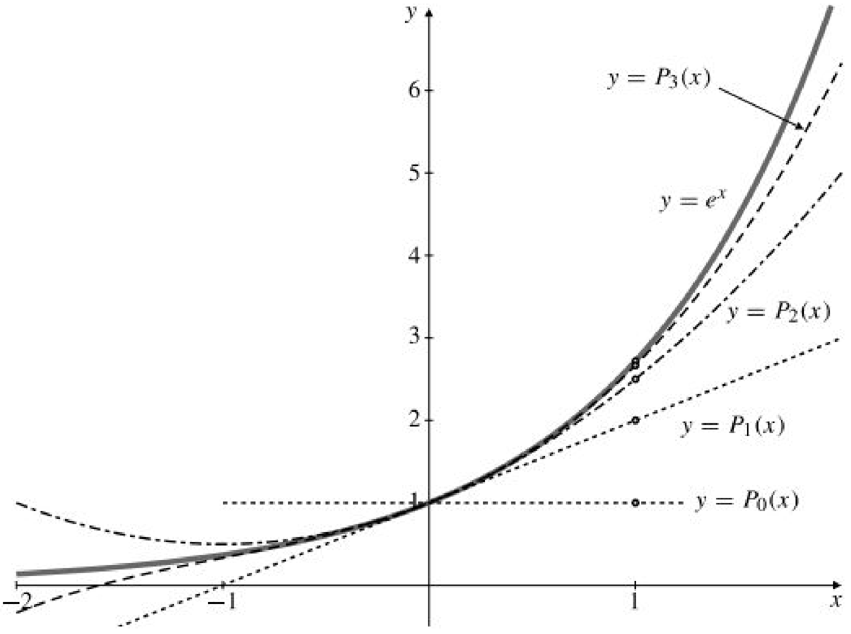

Figura 4.58 Algunos polinomios de Maclaurin para e^x.

Ejemplo 3 Calcule los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$. Escriba después los polinomios generales de Maclaurin $P_{2n-1}(x)$ y $P_{2n}(x)$ para esa función.

Solución Tenemos que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$ y $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$, por lo que el patrón se repite para derivadas superiores. Como

$$f(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(6)} = 0$$
$$f'(0) = 1 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 1, \qquad f^{(7)} = -1$$

tenemos que

$$P_1(x) = 0 + x = x$$

$$P_2(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 = x = P_1(x)$$

$$P_3(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{3!} = P_3(x)$$

En general, $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$ y $f^{(2n)}(0) = 0$, por lo que

$$P_{2n-1}(x) = P_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

■

Fórmula de Taylor

El siguiente teorema proporciona una fórmula para el error en una aproximación de Taylor $f(x) \approx P_n(x)$, similar a la proporcionada para la aproximación lineal en el Teorema 9.

TEOREMA 10 **Teorema de Taylor**

Si la derivada de orden $(n+1)$, $f^{(n+1)}(t)$, existe para todo t en un intervalo que contiene a a y a x, y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a, es decir,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

entonces el error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ en la aproximación $f(x) \approx P_n(x)$ se expresa como

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo s un número entre a y x. La fórmula resultante

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{para algún } s \text{ entre } a \text{ y } x$$

se denomina **fórmula de Taylor con resto de Lagrange**. El término del resto de Lagrange es la fórmula explícita dada anteriormente para $E_n(x)$.

Nótese que el término de error (resto de Lagrange) en la fórmula de Taylor se parece al siguiente término del polinomio de Taylor si continuáramos dicho polinomio para incluir un término más (de grado $n+1$) EXCEPTO porque la derivada $f^{(n+1)}$ no se evalúa en a, sino en algún punto c (en general desconocido) entre a y x. Esto facilita recordar la fórmula de Taylor.

DEMOSTRACIÓN Obsérvese que el caso $n = 0$ de la fórmula de Taylor, concretamente,

$$f(x) = P_0(x) + E_0(x) = f(a) + \frac{f'(s)}{1!}(x-a)$$

es justamente el Teorema del Valor Medio

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(s) \qquad \text{para algún } s \text{ entre } a \text{ y } x$$

Nótese también que el caso $n = 1$ es justamente la fórmula del error para la linealización dada en el Teorema 9.

Completaremos la demostración para valores de n mayores utilizando inducción matemática (*véase* la demostración del Teorema 2 en la Sección 2.3). Supongamos entonces que ya hemos demostrado el caso $n = k-1$, donde $k \geqslant 2$ es un entero. Esto es, estamos suponiendo que si f es una función cualquiera cuya k-ésima derivada existe en un intervalo que contiene a a y a x, entonces

$$E_{k-1}(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k$$

siendo s algún número entre a y x. Consideremos el caso siguiente $n = k$. Como en la demostración del Teorema 9, suponemos que $x > a$ (el caso $x < a$ es similar) y aplicamos el Teorema del Valor Medio Generalizado a las funciones $E_k(t)$ y $(t-a)^{k+1}$ en $[a, x]$. Como $E_k(a) = 0$, obtenemos un número u en el intervalo (a, x) tal que

$$\frac{E_k(x)}{(x-a)^{k+1}} = \frac{E_k(k) - E_k(a)}{(x-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}} = \frac{E_k'(u)}{(k+1)(u-a)^k}$$

Ahora

$$\begin{aligned} E_k'(u) &= \frac{d}{dt}\bigg(f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 \\ &\quad - \cdots - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \bigg)\bigg|_{t=u} \\ &= f'(u) - f'(a) - f''(a)(u-a) - \cdots - \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(u-a)^{k-1} \end{aligned}$$

Esta última expresión es justamente $E_{k-1}(u)$ para la función f' en vez de f. Por el supuesto de inducción es igual a

$$\frac{(f')^{(k)}(s)}{k!}(u-a)^k = \frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}(u-a)^k$$

para algún valor s entre a y u. Por tanto,

$$E_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(s)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

Hemos demostrado que el caso $n = k$ del Teorema de Taylor es verdadero si el caso $n = k - 1$ es verdadero, lo que completa la demostración por inducción.

Observación Para cualquier valor de x para el que $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$ podemos asegurar que la aproximación de Taylor $f(x) \approx P_n(x)$ estará tan cerca como deseemos escogiendo n suficientemente grande.

Ejemplo 4 Utilice el polinomio de Taylor de segundo orden para $\sqrt{x}$ alrededor de $x = 25$ obtenido en el Ejemplo 1(a) para aproximar $\sqrt{26}$. Estime el tamaño del error y especifique un intervalo en el que pueda asegurar que se encuentra $\sqrt{26}$.

Solución En el Ejemplo 1(a) calculamos $f''(x) = -(1/4)x^{-3/2}$ y obtuvimos el polinomio de Taylor

$$P_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x - 25) - \frac{1}{1000}(x - 25)^2$$

La aproximación requerida es

$$\sqrt{26} = f(26) \approx P_2(26) = 5 + \frac{1}{10}(26 - 25) - \frac{1}{1000}(26 - 25)^2 = 5.099$$

Ahora $f'''(x) = (3/8)x^{-5/2}$. Para $25 < s < 26$ tenemos que

$$|f'''(s)| \leqslant \frac{3}{8}\frac{1}{25^{5/2}} = \frac{3}{8 \times 3125} = \frac{3}{25\,000}$$

Por tanto, el error de la aproximación cumple

$$|E_2(26)| \leqslant \frac{3}{25\,000 \times 6}(26 - 25)^3 = \frac{1}{50\,000} = 0.00002$$

Entonces, $\sqrt{26}$ está en el intervalo (5.09898, 5.09902).

Ejemplo 5 Utilice el Teorema de Taylor para confirmar que el polinomio de Maclaurin $P_7(x)$ para e^x es suficiente para calcular el número e con una precisión de tres cifras decimales, como se indica en el Ejemplo 2.

Solución El error en la aproximación $e^x \approx P_n(x)$ cumple

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \text{para algún } s \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

Si $x = 1$, entonces $0 < s < 1$, por lo que $e^s < e < 3$ y $0 < E_n(1) < 3/(n+1)!$. Para obtener una aproximación de $e = e^1$ con una exactitud de tres cifras decimales, es necesario que $E_n(1) < 0.0005$. Como $3/(8!) = 3/40\,320 \approx 0.000\,074$, pero $3/(7!) = 3/5040 \approx 0.000\,59$ podemos estar seguros de que $n = 7$ cumplirá, pero no podemos asegurar que lo cumplirá $n = 6$:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \approx 2.7183 \approx 2.718$$

con una exactitud de tres cifras decimales.

Notación O

DEFINICIÓN 9

Se escribe $f(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$ si

$$|f(x)| \leqslant K|u(x)|$$

se cumple para alguna constante K en algún intervalo abierto que contiene a $x = a$.

De forma similar, $f(x) = g(x) + O(u(x))$ cuando $x \to a$ si $f(x) - g(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$, es decir, si

$$|f(x) - g(x)| \leqslant K|u(x)| \quad \text{cerca de } a$$

Por ejemplo, $\operatorname{sen} x = O(x)$ cuando $x \to 0$ porque $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ cerca de 0.

A partir de la definición se pueden deducir las siguientes propiedades de la notación O:

(i) Si $f(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$, entonces $Cf(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$ para cualquier constante C.

(ii) Si $f(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$ y $g(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$, entonces $f(x) \pm g(x) = O(u(x))$ cuando $x \to a$.

(iii) Si $f(x) = O((x-a)^k u(x))$ cuando $x \to a$, entonces $f(x)/(x-a)^k = O(u(x))$ cuando $x \to a$ para cualquier constante k.

El Teorema de Taylor dice que si $f^{(n+1)}(t)$ existe en un intervalo que contiene a a y a x, y si P_n es el polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a, entonces, cuando $x \to a$,

$$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$$

Esto es una afirmación sobre la rapidez con que la gráfica del polinomio de Taylor $P_n(x)$ se acerca a la de $f(x)$ cuando $x \to a$. La distancia vertical entre las gráficas disminuye tan rápidamente como $|x-a|^{n+1}$. El siguiente teorema demuestra que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ es el *único* polinomio de grado máximo n cuya gráfica se aproxima a la gráfica de $f(x)$ con esa rapidez.

TEOREMA 11 Si $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ cuando $x \to a$, siendo Q_n un polinomio de grado máximo n, entonces $Q_n(x) = P_n(x)$, es decir, Q_n es el polinomio de Taylor para $f(x)$ en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Sea P_n el polinomio de Taylor. Entonces las propiedades (i) y (ii) de la notación O implican que $R_n(x) = Q_n(x) - P_n(x) = O((x-a)^{n+1})$ cuando $x \to a$. Queremos demostrar que $R_n(x)$ es idénticamente cero de forma que $Q_n(x) = P_n(x)$ para todo x. Sustituyendo x por $a + (x-a)$ y desarrollando las potencias, podemos escribir $R_n(x)$ en la forma

$$R_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

Si $R_n(x)$ no es idénticamente nulo, entonces existe un mínimo coeficiente $c_k (k \leqslant n)$ tal que $c_k \neq 0$, pero $c_j = 0$ para $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Por tanto,

$$R_n(x) = (x-a)^k(c_k + c_{k+1}(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-k})$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to a} R_n(x)/(x-a)^k = c_k \neq 0$. Sin embargo, por la propiedad (iii) anterior tenemos que $R_n(x)/(x-a)^k = O((x-a)^{n+1-k})$. Como $n+1-k > 0$, esto indica que $R_n(x)/(x-a)^k \to 0$ cuando $x \to a$. Esta contradicción demuestra que $R_n(x)$ debe ser idénticamente nulo. Por tanto, $Q_n(x) = P_n(x)$ para todo x.

La Tabla 4 contiene las fórmulas de Taylor alrededor del 0 (fórmulas de Maclaurin) para algunas funciones elementales, con términos de error expresados utilizando la notación O.

Tabla 4. Algunas fórmulas de Maclaurin con términos de error expresados mediante la notación O

	Cuando $x \to 0$:
(a)	$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$
(b)	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$
(c)	$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$
(d)	$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$
(e)	$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$
(f)	$\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$

Es conveniente recordar las expresiones anteriores. Las tres primeras se pueden obtener fácilmente utilizando la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange. Las otras tres requieren un esfuerzo mayor para verificarlas para un valor de n general. En la Sección 9.6 volveremos a los polinomios de Taylor y Maclaurin en el contexto de las series de Taylor y Maclaurin. En ese momento dispondremos de mejores medios para establecer esos resultados. La necesidad de calcular derivadas de orden superior puede hacer difícil el uso de la fórmula de Taylor, excepto para las funciones más simples.

La importancia real del Teorema 11 es que nos permite obtener polinomios de Taylor para nuevas funciones combinando otros ya conocidos. Mientras el término de error sea de mayor grado que el orden del polinomio obtenido, éste debe ser un polinomio de Taylor. Ilustraremos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 6 Calcule el polinomio de Maclaurin de orden $2n$ para $\cosh x$.

Solución Escribimos la fórmula de Taylor para e^x en $x = 0$ (*véase* en la Tabla 4) sustituyendo n por $2n+1$, y luego la volvemos a escribir sustituyendo x por $-x$. Obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

cuando $x \to 0$. Promediando los dos resultados anteriores se obtiene

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

cuando $x \to 0$. Por el Teorema 11 el polinomio de Maclaurin $P_{2n}(x)$ para $\cosh x$ es

$$P_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

■

Ejemplo 7 Obtenga el polinomio de Taylor de orden tres para e^{2x} en $x = 1$ a partir del correspondiente polinomio de Maclaurin para e^x (de la Tabla 4).

Solución Escribiendo $x = 1 + (x - 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} e^{2x} &= e^{2+2(x-1)} = e^2 e^{2(x-1)} \\ &= e^2\left[1 + 2(x-1) + \frac{2^2(x-1)^2}{2!} + \frac{2^3(x-1)^3}{3!} + O((x-1)^4)\right] \end{aligned}$$

cuando $x \to 1$. Por el Teorema 11, el polinomio de Taylor $P_3(x)$ para e^{2x} en $x = 1$ debe ser

$$P_3(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4e^2}{3}(x-1)^3$$

■

Ejemplo 8 Utilice la fórmula de Taylor para $\ln(1 + x)$ (de la Tabla 4) para calcular el polinomio de Taylor $P_3(x)$ para $\ln x$ en $x = e$ (esto proporciona una alternativa a utilizar la definición de polinomios de Taylor tal como se hizo para resolver el mismo problema en el Ejemplo 1(b)).

Solución Tenemos que $x = e + (x - e) = e(1 + t)$ siendo $t = (x - e)/e$. Como $x \to e$ tenemos que $t \to 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln e + \ln(1 + t) = \ln e + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4) \\ &= 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{e}\right)^3 + O((x-e)^4) \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema 11,

$$P_3(x) = 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{e}\right)^3$$

■

Ejercicios 4.8

Calcule los polinomios de Taylor que se indican para las funciones de los Ejercicios 1-8 utilizando la definición de polinomio de Taylor.

1. Para e^{-x} alrededor de $x = 0$, orden 4.

2. Para $\cos x$ alrededor de $x = \pi/4$, orden 3.

3. Para $\ln x$ alrededor de $x = 2$, orden 4.

4. Para $\sec x$ alrededor de $x = 0$, orden 3.

5. Para $\sqrt{x}$ alrededor de $x = 4$, orden 3.

6. Para $1/(1 - x)$ alrededor de $x = 0$, orden n.

7. Para $1/(2 + x)$ alrededor de $x = 1$, orden n.

8. Para $\operatorname{sen}(2x)$ alrededor $x = \pi/2$, orden $2n - 1$.

En los Ejercicios 9-14, utilice el polinomio de orden 2, $P_2(x)$, para las funciones dadas alrededor del punto especificado, para aproximar los valores indicados. Estime el error, y escriba el mínimo intervalo que se pueda asegurar que contiene el valor.

9. $f(x) = x^{1/3}$ alrededor de 8; aproxime $9^{1/3}$.

10. $f(x) = \sqrt{x}$ alrededor de 64; aproxime $\sqrt{61}$.

11. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alrededor de 1; aproxime $\dfrac{1}{1.02}$.

12. $f(x) = \tan^{-1} x$ alrededor de 1; aproxime $\tan^{-1}(0.97)$.

13. $f(x) = e^x$ alrededor de 0; aproxime $e^{-0.5}$.

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor $\pi/4$; aproxime $\operatorname{sen}(47^\circ)$.

En los Ejercicios 15-20, escriba las fórmulas de Taylor para los casos indicados para las funciones dadas. ¿Cuál es el resto de Lagrange en cada caso?

15. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $n = 7$

16. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $n = 6$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/4$, $n = 4$

18. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $a = 0$, $n = 6$

19. $f(x) = \ln x,\ a = 1,\ n = 6$

20. $f(x) = \tan x,\ a = 0,\ n = 3$

Calcule los polinomios de Taylor que se piden en los Ejercicios 21-26, utilizando polinomios de Taylor o Maclaurin conocidos y cambiando las variables, como se hizo en los Ejemplos 6-8.

21. $P_3(x)$ para e^{3x} alrededor de $x = -1$.

22. $P_8(x)$ para e^{-x^2} alrededor de $x = 0$.

23. $P_4(x)$ para $\operatorname{sen}^2 x$ alrededor de $x = 0$. *Sugerencia*: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

24. $P_5(x)$ para $\operatorname{sen} x$ alrededor de $x = \pi$.

25. $P_6(x)$ para $1/(1 + 2x^2)$ alrededor de $x = 0$.

26. $P_8(x)$ para $\cos(3x - \pi)$ alrededor de $x = 0$.

27. Calcule todos los polinomios de Maclaurin $P_n(x)$ para $f(x) = x^3$.

28. Calcule todos los polinomios de Taylor $P_n(x)$ para $f(x) = x^3$ en $x = 1$.

29. Calcule el polinomio de Maclaurin $P_{2n+1}(x)$ para $\operatorname{senh} x$ combinando adecuadamente en los polinomios para e^x y e^{-x}.

30. Combinando adecuadamente los polinomios de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ y $\ln(1 - x)$, obtenga el polinomio de Maclaurin de orden $2n + 1$ para $\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

31. Escriba la fórmula de Taylor para $f(x) = e^{-x}$ con $a = 0$ y utilícela para calcular $1/e$ con una precisión de cinco cifras decimales (se puede utilizar una calculadora, pero no su función e^x).

32. Escriba la forma general de la fórmula de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$ con resto de Lagrange. ¿Qué valor necesita tener n para asegurar que la correspondiente aproximación del polinomio de Taylor proporcionará el seno de 1 radián con una precisión de cinco cifras decimales?

33. ¿Cuál es la mejor aproximación de orden 2 a la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 0$? ¿Cuál es el error de esta aproximación? Responda ahora las mismas preguntas para $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. ¿Puede ser mejorada (es decir, hacerse más pequeña) la constante $1/6 = 1/3!$ en la fórmula del error para la aproximación de grado 2?

34. Factorizando $1 - x^{n+1}$ (o mediante división de polinomios), demuestre que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} \qquad (*)$$

A continuación demuestre que si $|x| \leqslant K < 1$, entonces

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1 - x}\right| \leqslant \frac{1}{1 - K}|x^{n+1}|$$

Esto implica que $x^{n+1}/(1 - x) = O(x^{n+1})$ cuando $x \to 0$ y confirma la fórmula (d) de la Tabla 4. ¿Qué dice entonces el Teorema 11 sobre el polinomio de Maclaurin de orden n para $1/(1 - x)$?

***35.** Diferenciando la identidad (*) del Ejercicio 34 y sustituyendo después n por $n + 1$, demuestre que

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n + 1)x^n + \frac{n + 2 - (n + 1)x}{(1 - x)^2}x^{n+1}$$

Utilice después el Teorema 11 para determinar el n-ésimo polinomio de Maclaurin para $1/(1 - x)^2$.

4.9 Formas indeterminadas

En la Sección 2.5 demostramos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esto no se puede ver inmediatamente sustituyendo $x = 0$ en la función $(\operatorname{sen} x)/x$, ya que tanto $\operatorname{sen} x$ como x valen cero en $x = 0$. $(\operatorname{sen} x)/x$ se denomina **forma indeterminada** del tipo [0/0] en $x = 0$. El límite de esa forma indeterminada puede ser cualquier número. Por ejemplo, cada uno de los cocientes kx/x, x/x^3 y x^3/x^2 es una forma indeterminada del tipo [0/0] en $x = 0$, pero

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx}{x} = k, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

Existen otros tipos de formas indeterminadas. Se muestran, junto con un ejemplo de cada tipo, en la Tabla 5.