IULIAN ANTONESCU

ELEMENTE
DE
ALGEBRĂ LINIARĂ
ŞI
GEOMETRIE

În lucrarea de față sunt expuse, într-o prezentare unitară şi cu multe exemple, elementele de bază ale algebrei liniare, ale geometriei analitice şi ale geometriei diferențiale.

Lucrarea, de mare accesibilitate, este utilă studenților de la facultățile unde se predă algebra liniară şi geometria, tuturor inginerilor şi cercetătorilor din diferite domenii ale tehnicii, precum şi cadrelor didactice din învățământul mediu şi superior.

Lector univ. dr. **IULIAN ANTONESCU**

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI GEOMETRIE

Ediţia a doua

EDITURA ACADEMIEI NAVALE
"MIRCEA CEL BĂTRÂN"
CONSTANŢA, 2004

Referenți științifici: ***C.P. I dr.*** **I. M. STANCU – MINASIAN**
Conf. univ. dr. **Gheorghiță ZBĂGANU**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ANTONESCU, IULIAN
Elemente de algebră liniară şi geometrie / lect. univ. drd. Iulian Antonescu – Constanța : Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân”, 2003
Bibliogr.
ISBN 973-8303-39-7

512.64(075.8)
514.12(075.8)

Corector: ***Prof.*** **Adriana ANTONESCU**
Redactori: ***Stud.*** **Marilena GANEA**
Prof. **Geanina DUMITRAŞC**
Ing. **Vasile DUMITRAŞC**
Coperta: ***Asist. univ. drd.*** **Marian CAȚĂ**
Tehnoredactor: ***Stud.*** **Marilena GANEA**

PREFAȚĂ

În această lucrare sunt prezentate în mod unitar conceptele de bază ale algebrei liniare, ale geometriei analitice şi ale geometriei diferențiale. O astfel de prezentare este posibilă datorită legăturii naturale dintre aceste domenii matematice şi are o deosebită importanță pentru tratarea lor într-un spirit modern. Geometria este construită cu ajutorul unei axiomatici simple, care are ca fundament algebra liniară. Această construcție uneşte în mod firesc metoda sintetică cu cea analitică şi elimină astfel separarea lor clasică în studiul geometriei.

Algebra liniară constituie prima parte a cărții şi cuprinde : spații şi subspații vectoriale, transformări liniare, vectori şi valori proprii, forme biliniare şi pătratice. Prin aceste teme se ating problemele de bază ale teoriei elementare a spațiilor vectoriale care au aplicații imediate în disciplinele care pregătesc viitorii specialişti.

Geometria analitică în $\mathbf{E}_3$ formează a doua parte a cărții determinată de : vectori legați şi vectori liberi, operații cu vectori, dreapta şi planul în spațiu, cuadrice. Varianta de prezentare scoate în evidență faptul că vectorii liberi formează un instrument de lucru atât pentru geometrie cât şi pentru mecanică, fizică etc.

Geometria diferențială este ultima parte din lucrare alcătuită din : câmpul reperului Frenet pe o curbă, formulele Frenet, elementul de arc, formele pătratice fundamentale ale suprafeței, aria unei porțiuni de suprafață. Aceasta arată că geometria diferențială elementară modernă foloseşte preponderent noțiunea de vector legat şi cea de câmp vectorial, care sunt accesibile la nivelul anului întâi de facultate.

Pe baza experienței autorului la facultățile de Marină Militară şi Marină Civilă din cadrul Academiei Navale din Constanța, am căutat eliminarea dificultăților trecerii de la liceu la facultate, folosind un limbaj nuanțat. Dincolo de grija examenelor, în propriul interes, studiul individual la matematică trebuie însoțit de rezolvarea problemelor. Pentru aceasta am adăugat un număr de circa cinci probleme rezolvate, dintre cele mai diverse, şi alte cincisprezece propuse la fiecare temă, cartea constituind în mod implicit şi o culegere de probleme. Notațiile şi terminologia au fost alese astfel încât să fie eliminate dificultățile de înțelegere, care țin mai mult de formă şi nu de conținut.

Exprim mulțumiri autorilor citați în bibliografie, colegilor, profesorilor, studenților, redactorilor şi, de asemenea, familiei mele, care m-a ajutat necontenit în toate etapele realizării acestei lucrări.

Autorul

Decembrie 2002

CUPRINS

I. ALGEBRĂ LINIARĂ

Acest capitol conține noțiunile fundamentale ale algebrei liniare, proprietăți ale acestora şi metode de calcul pentru determinarea lor. Pentru înțelegerea lor este necesară cunoaşterea calculului algebric efectuat în liceu care conține: formulele de calcul prescurtat, studiul funcțiilor de gradul întâi, de gradul al doilea, studiul funcției modul, al funcției putere, al funcției exponențiale, al funcției logaritmice, analiză combinatorie, calcularea sumelor numerice, progresii aritmetice şi geometrice, polinoame, ecuații şi inecuații, sisteme de ecuații, sisteme de inecuații, matrice şi determinanți, sisteme de ecuații liniare, trigonometrie, numere complexe.

Obiectivele care decurg din studiul acestui capitol sunt ca studenții:

- *să definească* spațiul vectorial, subspațiul vectorial, dependența şi independența liniară, baza unui spațiu vectorial, coordonate, produsul scalar, norma, distanța, ortogonalitatea, spațiul vectorial euclidian, transformări liniare, nucleul şi imaginea unei transformări liniare, matricea asociată unei transformări liniare, vectori proprii, valori proprii, polinom caracteristic, tipuri de transformări, forme biliniare, forme pătratice, signatura unei forme pătratice reale;
- *să recunoască* expresiile analitice ale elementelor enunțate mai sus;
- *să calculeze* produsul scalar a doi vectori, norma unui vector, distanța şi unghiul dintre doi vectori, nucleul şi imaginea unei transformări liniare, valorile proprii ale unui endomorfism;
- *să deducă* dependența sau independența liniară a unui sistem de vectori, coordonatele unui vector la schimbarea bazelor, o bază ortonormată pornind de la o bază dată, matricea asociată unei transformări liniare, a unei forme biliniare sau a unei forme pătratice, vectorii proprii unui endomorfism, forma diagonală a unui endomorfism, tipurile de transformări, expresia canonică a unei forme pătratice, signatura unei forme pătratice reale.

SPAȚII ŞI SUBSPAȚII VECTORIALE

1.1. Spațiu vectorial

Noțiunea de spațiu vectorial este fundamentală în matematică şi studiul acestuia constituie obiectul algebrei liniare.

DEFINIȚIA 1.1. *Fie* $\mathbf{K}$ *un corp comutativ şi* 1_K *elementul său unitate. Un triplet format din:*

- *mulțimea nevidă V,*
- *legea de compoziție internă pe V, notată aditiv*
  $$(x, y) \to x + y \ \ (: V \times V \to V),$$
- *legea de compoziție externă:*
  $$(\alpha, x) \to \alpha x \ \ (: \mathbf{K} \times V \to V),$$

se numeşte ***spațiu vectorial*** *peste* ***K*** *(sau* ***K-spațiu vectorial*** *) dacă verifică următoarele axiome:*

perechea (V,+) este un grup abelian, adică:

$a_1)$ $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V,$

$a_2)$ $\exists 0_V \in V$ *a.î.* $0_V + x = x + 0_V = x, \quad \forall x \in V,$

$a_3)$ $\forall\, x \in V, \exists (-x) \in V$ *a.î.* $x + (-x) = (-x) + x = 0_V,$

$a_4)$ $x + y = y + x, \ \forall\, x, y \in V.$

față de legea de compoziție externă sunt îndeplinite axiomele:

$a_5)$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall\, \alpha \in \mathbf{K}, \forall\, x, y \in V,$

$a_6)$ $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad \forall\, x \in V,$

$a_7)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall\, x \in V,$

$a_8)$ $1_{\mathbf{K}} \cdot x = x, \forall\, x \in V.$

Dacă ***K***=***R*** (respectiv ***K***=***C***) vom spune că *V* este un **spațiu vectorial real (**respectiv **complex)**.

Elementele unui ***K***-spațiu vectorial se numesc **vectori**, iar elementele corpului ***K*** se numesc **scalari**.

Legea de compoziție internă se numește **adunarea vectorilor** iar legea de compoziție externă se numește **înmulțirea cu scalari din *K***.

Notație $V/_{\mathbf{K}} := V$ este ***K***- spațiu vectorial.

TEOREMA 1.1. *Dacă este dat spațiul* $V/_{\mathbf{K}}$ *, atunci au loc următoarele proprietăți:*

$P_1.\ \alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y, \forall\,\alpha\in\mathbf{K}, \forall\, x,y\in V;$

$P_2.\ (\alpha-\beta)\,x=\alpha x-\beta x, \forall\,\alpha,\beta\in\mathbf{K}, \forall\, x\in V;$

$P_3.\ \alpha\cdot 0_V=0_V, \forall\alpha\in\mathbf{K},\ 0_V\in V;$

$P_4.\ 0_{\mathbf{K}}\cdot x=0_V, \forall\, x\in V;$

$P_5.\ \alpha x=0_V \Leftrightarrow \alpha=0_{\mathbf{K}}\ sau\ \ x=0_V;$

$P_6.\ \alpha(-x)=(-\alpha)\,x=(-\alpha x)=-\alpha x, \forall\,\alpha\in\mathbf{K}, \forall\, x\in V;$

$P_7.\ (-\alpha)(-x)=\alpha x, \forall\,\alpha\in\mathbf{K}, \forall\, x\in V;$

$P_8.\ (-1)\,x=-x, \forall\, x\in V.$

Demonstrație. P_1. $\alpha(x-y)+\alpha y=\alpha(x-y+y)=\alpha(x+0_V)=\alpha x$ (conform cu a_5) şi a_3)) deci $\alpha(x-y)+\alpha y=\alpha x$, în care, scăzând în ambii membri pe αy, rezultă $\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y.$

P_2. $(\alpha-\beta)\,x+\beta\, x=(\alpha-\beta+\beta)\,x=(\alpha+0_{\mathbf{K}})\,x=\alpha\, x$ (conform cu a_6) şi a_3)), deci $(\alpha-\beta)\,x+\beta\, x=\alpha\, x$, în care, scăzând pe βx în ambii membri, rezultă $(\alpha-\beta)\mathrm{x}=\alpha\,\mathrm{x}-\beta\,\mathrm{x}.$

P_3. În P_1 facem x = y şi atunci $\alpha(x-x)=\alpha\,\mathrm{x}-\alpha\,\mathrm{x} \;\Rightarrow\; \alpha\, 0_V=0_V.$

P_4. În P_2 luăm $\alpha=\beta$ şi $\Rightarrow (\alpha-\alpha)\ x=\alpha x-\alpha x \;\Rightarrow\; 0_{\mathbf{K}}\cdot x=0_V.$

P_5. Demonstrăm implicația directă: presupunem că $\alpha x=0_V$ şi $\alpha\neq 0_{\mathbf{K}} \Rightarrow$

$$x=1_{\mathbf{K}}\cdot x=\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\,x=\alpha^{-1}(\alpha\, x)=\alpha^{-1}\cdot 0_V=0_V.$$

Reciproc, evident din P_3 şi P_4.

P_6. Să arătăm că $\alpha(-x) = -\alpha x$. Avem $\left.\begin{array}{l}\alpha(-x+x) = \alpha\, 0_V = 0_V \\ \alpha(-x+x) = \alpha(-x) + \alpha x\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\alpha(-x) + \alpha x = 0_V \Rightarrow \alpha(-x) = -\alpha x.$$

Analog, folosind $a_6) \Rightarrow (-\alpha)\, x = -\alpha\, x$.

P_7. În prima parte a demonstraţiei P_6 luăm în loc de α pe $-\alpha$ şi avem:

$$\left.\begin{array}{r}(-\alpha)(-x+x) = (-\alpha)0_V = 0_V \\ (-\alpha)(-x+x) = (-\alpha)(-x) + (-\alpha)x\end{array}\right\} \Rightarrow (-\alpha)(-x) + (-\alpha)x = 0_V \Rightarrow$$

$$(-\alpha)(-x) = -(-\alpha)\, x = \alpha\, x \text{ (conform cu } a_7\text{)).}$$

P_8. Evidentă, punând în P_6 scalarul $\alpha = 1_{\mathbf{K}}$. □

Exemple.

1. Orice câmp **K** este spaţiu vectorial peste el însuşi $\mathbf{K}/\mathbf{K}$;

2. Spaţiul vectorial al matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din **K**

$$M(m,n,\mathbf{K}) = \left[\alpha^{ij}\right] \text{ cu } 1 \le i \le m, 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n}, \forall \alpha^{ij} \in \mathbf{K}.$$

3. Spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult $n \in \mathbf{N}$ cu coeficienţi în **K**

$$K_n[X] = \left\{ f \,\middle|\, f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i, \alpha_i \in \mathbf{K},\ i = 0,1,2,\dots,n \right\}.$$

4. Fie n **K**-spaţii vectoriale V_1, $V_2, \dots, V_n$ şi produsul cartezian

$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n = \{ (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mid v_i \in V_i,\ i = 1,2,\ldots,n \}$.

Fie u, $v \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, $\alpha \in \mathbf{K}$ şi definim operaţiile :

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$; $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$ cu $\alpha \in \mathbf{K}$.

Acesta este un spaţiu vectorial şi se numeşte *produs direct de spaţii vectoriale*.

Dacă $V_i = \mathbf{K}$, $\forall\ i = 1,2,\dots, n$, atunci se obţine spaţiul vectorial :

$$\mathbf{K}^{\mathrm{n}} = \left\{ (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \mid \alpha^i \in \mathbf{K}, \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n} \right\}$$

numit **spaţiul vectorial aritmetic cu n dimensiuni.**

1.2. Subspațiu vectorial

Fie spațiul vectorial V/**K** şi mulțimea $V_1 \subset V$, cu $V_1 \neq \Phi$.

DEFINIȚIA 1.3. *V_1 se numeşte **subspațiu vectorial** al lui V dacă V_1 este spațiu vectorial peste **K** față de operațiile de adunare a vectorilor şi de înmulțire cu scalari induse în V_1 de operațiile din V. Se notează* $V_1/\mathbf{K} \subset V/\mathbf{K}$.

TEOREMA 1.2. $V_1/\mathbf{K} \subset V/\mathbf{K} \Leftrightarrow$ *sunt îndeplinite condițiile* :

1) $\forall u,v \in V_1 \Rightarrow u+v \in V_1$;

2) $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall u \in V_1 \Rightarrow \lambda \cdot u \in V_1$.

Demonstrație. Condiția este necesară. V_1 fiind o parte stabilă a lui V față de adunarea vectorilor şi de înmulțirea cu scalari a vectorilor, avem

$$u+v \in V_1,\ \forall\ u,v \in V_1 \text{ şi } \lambda u \in V_1,\ \forall \lambda \in \mathbf{K} \text{ şi } \forall u \in V_1.$$

Condiția este şi suficientă. Dacă sunt îndeplinite condițiile 1) şi 2) din teoremă se verifică uşor pentru V_1 cele opt axiome din D.1.1. □

Această teoremă se poate exprima şi sub forma

Observația 1.1. V_1 este subspațiu vectorial al lui V $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha u + \beta v \in V_1,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ \ \forall u, v \in V_1.$$

Exemple.

1. Mulțimea matricelor pătratice simetrice cu elemente din **K**

$$S(n,\mathbf{K}) = \{M \in M(n,n,K) \mid M = M^t\}$$, unde M^t este transpusa matricei M .

2. Mulțimea matricelor pătratice antisimetrice cu elemente din **K**

$$A(n,\mathbf{K}) = \{M \in M(n,n,\mathbf{K}) \mid M = -M^t\}.$$

3. Mulțimea matricelor superior triunghiulare

$$T_S(n,\mathbf{K}) = \{\lfloor a^{ij} \rfloor \in M(n,n,\mathbf{K}) \mid \alpha^{ij} = 0 \text{ pt. } i > j; i,j = 1,2,\ldots,n\}.$$

DEFINIŢIA 1.4. *Fie* $V/_{\mathbf{K}}$ *şi* $S \subset V$, $S \neq \Phi$. *Se numeşte* ***combinaţie liniară finită de elemente din S*** *o expresie de forma* $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i$, *unde* $v_i \in S$, $\lambda^i \in \mathbf{K}$, $\forall\, i = 1,2,...,n.$

Observaţia 1.2. Dacă V este **K-**spaţiu vectorial şi $S \subset V$, atunci $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i \in V$.

Notaţie. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare finite de elemente din S se notează $\mathbf{L(S)}$.

TEOREMA 1.3. *Dacă* $S \subset V$, $S \neq \Phi$, $V/_{\mathbf{K}}$ atunci $L(S)/_{\mathbf{K}} \subset V/_{\mathbf{K}}$.

Demonstraţie. Fie $v, u \in L(S) \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i$, $u = \sum_{j=1}^{m} \mu^j u_j$ cu $v_i, u_j \in S \Rightarrow$ $v + u$ este o combinaţie liniară finită de vectorii $v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_n \in S \Rightarrow$ $\Rightarrow v + u \in L(S)$. Analog $\lambda u \in L(S)$ şi condiţiile Teoremei 1.2. sunt îndeplinite. □

DEFINIŢIA 1.5. $L(S)$ *se numeşte* ***subspaţiul generat de S*** *sau* ***acoperirea liniară a lui*** **S** .

Dacă $S = \Phi$ *atunci prin definiţie* $L(S) = \{0_V\}$.

TEOREMA 1.4. *Dacă V_1 şi V_2 sunt subspaţii vectoriale pentru V, atunci* :

1) *Mulţimea* $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1 \ \text{ şi } \ v_2 \in V_2\}$ *este subspaţiu vectorial al lui V (se numeşte* ***suma dintre V_1 şi V_2****)*;
2) **Intersecţia subspaţiilor vectoriale** *este un subspaţiu vectorial al lui* V;
3) **Reuniunea subspaţiilor vectoriale** *nu este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstraţie.

1. Să arătăm că $\forall\, u, v \in V_1 + V_2$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V_1 + V_2$.

Dar $u, v \in V_1 + V_2 \Rightarrow \begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ v = v_1 + v_2 \end{cases}$ cu $\begin{matrix} u_1, v_1 \in V_1 \\ u_2, v_2 \in V_2 \end{matrix}$, atunci $\alpha u + \beta v = (\alpha u_1 + \beta v_1) +$ $+ (\alpha u_2 + \beta v_2) \in V_1 + V_2 \Rightarrow (V_1 + V_2)/_{\mathbf{K}} \subset V/_{\mathbf{K}}$.

2. Fie $u, v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow u, v \in V_1$ şi $u, v \in V_2$. Cum $V_1/_{\mathbf{K}}, V_2/_{\mathbf{K}} \subset V/_{\mathbf{K}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda u + \mu v \in V_1 \\ \lambda u + \mu v \in V_2 \end{cases}, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \Rightarrow \lambda u + \mu v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \ {}^{V_1 \cap V_2}\!/\!_{\mathbf{K}} \subset {}^{V}\!/\!_{\mathbf{K}}.$$

3. Să arătăm că $\exists\, v_1, v_2 \in V_1 \cup V_2$ şi $v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2$.

Din $v_1 \in V_1 \cup V_2$ considerăm $v_1 \in V_1$ şi $v_1 \notin V_2$.

Din $v_2 \in V_1 \cup V_2$ considerăm $v_2 \notin V_1$ şi $v_2 \in V_2$. Rezultă $v_1 + v_2 \notin V_1$ şi $v_1 + v_2 \notin V_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2 \Rightarrow V_1 \cup V_2 \not\subset {}^{V}\!/\!_{\mathbf{K}}$. □

1.3. Dependenţă şi independenţă liniară

DEFINIŢIA 1.6. *Mulţimea* $S \subset V$ cu ${}^{V}\!/\!_{\mathbf{K}}$ *se numeşte* ***liniar dependentă*** *şi se notează* $\mathbf{dep}_V\, \mathbf{S}$, *dacă* $\exists \{v_i\}_{i=1,\dots,n} \subset S$ *şi* $\{\lambda^i\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathbf{K}$, *astfel ca din* $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i = 0_V$ *să rezulte că există cel puţin un* $i \in \{1,2,\dots,n\}$ *astfel încât* $\lambda^i \neq 0$.

DEFINIŢIA 1.7. *Mulţimea* $S \subset V$ *se numeşte* ***liniar independentă*** *şi se notează* $ind_V S$, *dacă* $\forall \{\mathrm{v_i}\}_{i=1,\dots,n} \subset S$ *şi* $\{\lambda^i\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathbf{K}$, *astfel că din* $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i = 0_V$ *să rezulte toţi scalarii nuli* $\left(\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0\right)$.

Exemple. 1. În spaţiul vectorial al funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, funcţiile 1, sin x, cos x formează o mulţime liniar independentă.

Într-adevăr, din relaţia

$$\lambda^1 \cdot 1 + \lambda^2 \cdot \sin x + \lambda^3 \cdot \cos x = 0,\ \forall\, x \in \mathbf{R}$$

rezultă, punând pe rând $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ şi $x = \pi$,

$$\lambda^1 + \lambda^3 = 0, \lambda^1 + \lambda^2 = 0, \lambda^1 - \lambda^3 = 0,$$

adică $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$.

2. Funcțiile $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ formează o mulțime liniar dependentă deoarece $1 - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$, $\forall$ x $\in$ **R**.

TEOREMA 1.5. *Fie sistemul de vectori* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\} \subset V$. *Atunci*

$dep_V S \Leftrightarrow$ cel puțin un vector din S se poate exprima ca o combinație liniară de ceilalți vectori.

Demonstrație. Dacă $dep_V S$ atunci în relația $\sum_{i=1}^{p} \lambda^i v_i = 0_V$ cel puțin un coeficient este diferit de zero. Presupunând că $\lambda^p \neq 0$ obținem

$$v_p = \alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2 + ... + \alpha^{p-1} v_{p-1}$$

unde

$$\alpha^i = -\left(\lambda^p\right)^{-1} \lambda^i, \mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{p} - 1.$$

Reciproc, dacă cel puțin un vector, de exemplu v_p, se poate exprima ca o combinație liniară de ceilalți vectori

$$v_p = \mu^1 v_1 + \mu^2 v_2 + ... + \mu^{p-1} v_{p-1},$$

rezultă

$$\mu^1 v_1 + \mu^2 v_2 + ... + \mu^{p-1} v_{p-1} - v_p = 0_V,$$

în care coeficientul lui v_p este $-1 \neq 0$ şi, deci, vectorii sunt liniar dependenți . □

TEOREMA 1.6. *Vectorul nul formează un sistem liniar dependent.*

Demonstrație. Avem de exemplu $1 \cdot 0_V = 0_V$. □

TEOREMA 1.7. *Orice vector $x \neq 0_V$ formează un sistem liniar independent.*

Demonstrație. Pentru $x \neq 0_V$, relația $\lambda \cdot x = 0_V \Rightarrow \lambda = 0$. □

TEOREMA 1.8. *Orice sistem de vectori, din care se poate scoate un sistem liniar dependent, este de asemenea liniar dependent .*

Demonstrație. Fie sistemul $S=\{v_1,...,v_p \mid p>1, p\in \mathbf{N}\}$, cu proprietatea că subsistemul $S^{'}=\{v_1,...,v_r \mid r<p\}$ este $dep_V S^{'}$. Deci există scalarii $\lambda^1,\lambda^2,...,\lambda^r$, nu toți nuli astfel încât

$$\lambda^1 v_1+\lambda^2 v_2+...+\lambda^r v_r=0_V.$$

Putem scrie atunci şi

$$\lambda^1 v_1+...+\lambda^r v_r+0\cdot v_{r+1}+...+0\cdot v_p=0_V$$

şi deci $dep_V S$. □

TEOREMA 1.9. *Orice sistem de vectori care conține vectorul nul este liniar dependent .*

Demonstrație. De exemplu, pentru sistemul $\{0_V, x\}$ avem combinația liniară $1\cdot 0_V+0\cdot x=0_V$, cu $1\neq 0$, deci $dep_V\{0_V,x\}$. □

TEOREMA 1.10. *Orice subsistem al unui sistem de vectori liniar independenți este de asemenea liniar independent .*

Demonstrație. Dacă un subsistem ar fi liniar dependent, după teorema 1.8 ar rezulta că întregul sistem este liniar dependent. □

TEOREMA 1.11. *Dacă o mulțime liniar independentă S are n elemente, atunci orice mulțime care conține n+1 elemente este liniar dependentă .*

Demonstrație. Fie $S=\{v_j\}_{j=1,...,n}\subset V$, cu $ind_V S$ şi $\{w_i\}_{i=1,...,n+1}\subset L(S)\Rightarrow$

$w_i=\sum\alpha^{ji}v_j$, $i=1,...,n+1$.

Considerăm $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda^k w_k=0_V \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1}\lambda^k\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha^{jk}v_j\right)=0_V$ şi, schimbând sumarea, avem

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha^{jk}\lambda^k\right)v_j=0_V \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1}\alpha^{jk}\lambda^k=0,\ \forall\, j=1,...,n.$$

Explicitând ultima relație obținem

$$\begin{cases} \alpha^{11}\lambda^1 + \alpha^{12}\lambda^2 + ... + \alpha^{1n}\lambda^n + \alpha^{1,n+1}\lambda^{n+1} = 0 \\ \alpha^{21}\lambda^1 + \alpha^{22}\lambda^2 + ... + \alpha^{2n}\lambda^n + \alpha^{2,n+1}\lambda^{n+1} = 0 \\ .... \\ \alpha^{n1}\lambda^1 + \alpha^{n2}\lambda^2 + ... + \alpha^{nn}\lambda^n + \alpha^{n,n+1}\lambda^{n+1} = 0 \end{cases},$$

care este un sistem de n ecuaţii liniare şi omogene cu n+1 necunoscute a cărei matrice este A = $\lfloor \alpha^{ij} \rfloor$ cu $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$, cu rang $A \le n \Rightarrow \exists$ k $=1,..., \text{n}+1$ astfel încât $\lambda^k \neq 0 \Rightarrow$ dep$_\text{w}$ $\{w_i\}_{i=1,...,n+1}$. □

Observaţia 1.3. Dacă mulţimea $\{w_i\}_{i=1,...,n}$ (adică are exact n elemente) şi rangA = n $\Longrightarrow$ singura soluţie a sistemului este soluţia banală şi avem $ind_V \{w_i\}_{i=1,...,n}$.

Consecinţă 1.1. Dacă $S \subset V$, cardS = n , $ind_V S$ şi $\{w_i\}_{i=1,...,m} \subset L(S)$, atunci $ind_V \{w_i\}_{i=1,...,m} \Rightarrow$ m ≤ n.

1.4. Baza unui spaţiu finit dimensional. Coordonate

a) Baza şi dimensiunea spaţiului vectorial . Fie V/**K** şi mulţimea $B \subset V$.

DEFINIŢIA 1.8. *B se numeşte **bază a lui V/K** dacă îndeplineşte condiţiile :*

1. *$ind_V B$ (este liniar independentă);*
2. *L(B) =V (B este un sistem de generatori pentru V) .*

DEFINIŢIA 1.9. *Spaţiul vectorial* V/**K** *se numeşte **finit dimensional** dacă are o bază formată dintr-un număr finit de elemente sau dacă spaţiul vectorial se reduce la un singur vector $V = \{0_V\}$. În caz contrar se numeşte **spaţiu vectorial infinit dimensional** .*

TEOREMA 1.12. (teorema înlocuirii a lui Steinitz) *Dacã $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este bază a unui spaţiu finit dimensional L $(L \neq \{0_L\})$ şi $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ este o mulţime de vectori din L liniar independentă , atunci :*

$p \le n$;

reindexând eventual vectorii din B , mulțimea de vectori $B' = \{v_1, v_2, .., v_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ este bază pentru L .

Demonstrație. Teorema se demonstrează prin inducție după p .

Pentru p =1 avem evident $1 \le n.$ Deoarece $v_1 \in L$ iar B este bază a acestuia, avem $v_1 = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + ... + \alpha^n e_n$, cu $\alpha^i \in \mathbf{K}$, i = 1,…,n. Din $v_1 \in S$ şi $ind_L S$ rezultă $v_1 \ne 0_L$, deci cel puțin un coeficient $\alpha^i \ne 0,$, i = 1,…,n. Fie de exemplu $\alpha^1 \ne 0.$ Atunci $\exists \left(\alpha^1\right)^{-1} \in \mathbf{K}$ şi din expresia lui v_1 rezultă

$$e_1 = (\alpha^1)^{-1} v_1 - (\alpha^1)^{-1}\alpha^2 e_2 - ... - (\alpha^1)^{-1}\alpha^n e_n$$

deci mulțimea $\{v_1, e_2, ..., e_n\}$ generează spațiul L. Arătăm că această mulțime este liniar independentă . Pentru aceasta considerăm relația de dependență liniară

$$\lambda^1 v_1 + \lambda^2 e_2 + ... + \lambda^n e_n = 0_L ,$$

în care $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i$, cu $\alpha^1 \ne 0$ şi obținem

$$\lambda^1 \alpha^1 e_1 + \left(\lambda^1 \alpha^2 + \lambda^2\right) e_2 + ... + \left(\lambda^1 \alpha^n + \lambda^n\right) e_n = 0_L \quad .$$

Dar $\{e_1, e_2, ..., e_n\} = B$ fiind bază în L , rezultă $ind_L B$ şi deci

$$\lambda^1 \alpha^1 = 0 , \lambda^1 \alpha^2 + \lambda^2 = 0 , ... , \lambda^1 \alpha^n + \lambda^n = 0.$$

Cum $\alpha^1 \ne 0,$ rezultă pe rând $\lambda^1 = 0 , \lambda^2 = 0 , ... , \lambda^n = 0$, deci $v_1, e_2, e_3, ..., e_n$ formează un sistem liniar independent . Prin urmare mulțimea $\{v_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a spațiului L.

Presupunem teorema adevărată pentru p –1 şi o demonstrăm pentru p. Mai exact, presupunem că mulțimea liniar independentă $S' = \{v_1, v_2, ..., v_{p-1}\}$ are proprietățile

1’) $p - 1 \le n$,

2’) mulțimea $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{p-1}, e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ este o bază pentru spațiul vectorial L.

Din proprietatea 1’) rezultă p –1 < n căci , dacă p –1 = n, am avea $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{p-1}\} = S'$ şi, deci, v_p s-ar exprima ca o combinație liniară de vectorii

$v_1, v_2, ..., v_{p-1}$, care este în contradicție cu ipoteza că $S = \{v_1, v_2, ..., v_{p-1}, v_p\}$ este liniar independentă. Deci $p - 1 < n$, adică $p \le n$. În baza B_1 vectorul v_p are expresia

$$v_p = \beta^1 v_1 + ... + \beta^{p-1} v_{p-1} + \beta^p e_p + ... + \beta^n e_n$$

unde cel puțin un coeficient $\beta_i \neq 0$, cu $p \le i \le n$, căci altfel S ar fi dependentă liniar. Făcând eventual o renumerotare a vectorilor $e_p, ..., e_n$, putem presupune că $\beta^p \neq 0$ şi astfel rolul lui e_1 din prima parte a demonstrației îl ia acum e_p. Făcând un raționament analog cu cel din cazul $p = 1$, rezultă că mulțimea $B = \{v_1, ..., v_{p-1}, v_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ este o bază a spațiului L. □

Consecința 1.2. Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a spațiului L, atunci orice bază a lui L are tot n elemente.

Demonstrație. Fie $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ o altă bază a spațiului L . Din $ind_L B_1$ şi B bază , rezultă $m \le n$. Din $ind_L B$ şi B_1 bază, rezultă $n \le m$. Cele două inegalități au sens dacă şi numai dacă $m = n$. □

DEFINIȚIA 1.10. *Se numeşte* ***dimensiune*** *a unui spațiu vectorial finit dimensional numărul natural* **dimV = cardB,** *cu B bază a spațiului vectorial V/**K**.*
Prin definiție $\dim\{0_V\} = 0$.

Pentru un spațiu n dimensional V_n/**K**, putem completa **D.1.8.** astfel:

DEFINIȚIA 1.8'. *Fie* V_n/**K** *şi* $B \subset V_n$. *Mulțimea B se numeşte* ***bază*** *a lui* V_n/**K** *dacă :*

1. *cardB = n;*
2. *mulțimea B este ordonată;*
3. $ind_V B$;
4. $L(B) = V_n$.

Exemple de bază. 1. În spațiul vectorial aritmetic $\mathbf{K}^n$ o bază este de forma $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, cu $e_i = (e_i^1, e_i^2, ..., e_i^i, ..., e_i^n)$ şi $i = 1, \ldots, n$.

Baza B se numeşte **canonică** dacă

$e^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$, δ_{ij} = *simbolul* lui Kronecker , adică explicit

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,...,0) \\ e_2 &= (0,1,0,...,0) \\ &...................... \\ e_n &= (0,0,0,...,1) \end{aligned}$$

Se arată uşor că aceşti vectori formează o bază. Într-adevăr,

$$\lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + ... + \lambda^n e_n = 0_{K^n} \Leftrightarrow (\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^n) = (0,0,..,0) \Leftrightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = ... = \lambda^n = 0,$$

adică mulţimea B este liniar independentă şi pentru orice $x \in \mathbf{K}^n$ avem

$$x = (x^1, x^2, ..., x^n) = x^1(1,0,...,0) + x^2(0,1,...,0) + ... + x^n(0,0,...,1) =$$

$= x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n$, deci B generează spaţiul $\mathbf{K^n}$.

2. În spaţiul vectorial $\mathbf{K}_n[X]$, o bază este de forma $B = \{1, X, ..., X^n\}$.

Într-adevăr, o relaţie de forma $\lambda^0 + \lambda^1 x + \lambda^2 x^2 + ... + \lambda^n x^n = 0, \ \forall \ x \in K$ are loc dacă şi numai dacă $\lambda^0 = \lambda^1 = \lambda^2 = ... = \lambda^n = 0$, adică $ind_{\mathbf{K}_n[X]} B$ şi orice polinom $P \in \mathbf{K}_n[X]$ se poate scrie sub forma $P(X) = a^0 + a^1 X + a^2 X^2 + ... + a^n X^n$, adică B este un sistem de generatori pentru P.

b) Coordonate. În spaţiile vectoriale finit dimensionale se pot introduce şi folosi coordonatele unui vector.

TEOREMA 1.13. *Orice vector* $x \in V_n/\mathbf{K}$ *într-o bază dată* $B = \{e_i\}_{i=1,..,n}$, *admite o* ***exprimare unică*** *de forma*

(1) $$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i .$$

Demonstraţie. Folosind metoda reducerii la absurd, presupunem că

$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ şi $x = \sum_{i=1}^n x'^i e_i$, cu $x^i \neq x'^i$, $\forall$ i = 1,2,...,n $\Rightarrow$ x $= \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i=1}^n x'^i e_i \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^n (x^i - x'^i) e_i = 0_V \Rightarrow x^i = x'^i$, $\forall$ i = 1,...,n, contradicţie cu presupunerea făcută.

DEFINIȚIA 1.11. *Relația (1) se numeşte* ***relația de descompunere a vectorului x în baza B***, *iar scalarii* $x^1, x^2, ..., x^n$ *se numesc* ***coordonatele vectorului x în baza B***.

Notație. Coordonatele vectorului x în baza B se notează astfel:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}_B \quad \text{sau} \quad [x]^t{}_B = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbf{K}^n.$$

Matriceal relația (1) se scrie sub forma:

(1')
$$x = x_B = B \cdot [x]_B$$

DEFINIȚIA 1.12. *Bijecția* $f : V_n \to \mathbf{K}^n$ *definită prin* $f(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$, *care asociază fiecărui vector* $x \in V_n$ *elementul* $\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbf{K}^n$, *format din coordonatele lui x în baza B, se numeşte* ***sistem de coordonate*** *pe* V_n.

c) Schimbări de baze. Fie $B, B' \subset V_n$ două baze în V_n de forma $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$. Vectorii bazei B' se pot exprima în baza B, folosind relația (1')

$e'_j = B[e'_j]_B = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{ij} e_i$, adică în mod explicit (j =1,2,…,n):

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha^{11} e_1 + \alpha^{21} e_2 + ... + \alpha^{n1} e_n \\ e'_2 = \alpha^{12} e_1 + \alpha^{22} e_2 + ... + \alpha^{n2} e_n \\ .... \\ e'_n = \alpha^{n1} e_1 + \alpha^{n2} e_2 + ... + \alpha^{nn} e_n \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{c|cccc} & e'_1 & e'_2 & ... & e'_n \\ \hline e_1 & \alpha^{11} & \alpha^{12} & ... & \alpha^{1n} \\ e_2 & \alpha^{21} & \alpha^{22} & ... & \alpha^{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ e_n & \alpha^{n1} & \alpha^{n2} & ... & \alpha^{nn} \end{array},$$

care matriceal se scriu

(2)
$$M(B, B') = \begin{pmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & ... & \alpha^{1n} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & ... & \alpha^{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha^{n1} & \alpha^{n2} & ... & \alpha^{nn} \end{pmatrix} = \left([e'_1], [e'_2], ..., [e'_n]\right).$$

DEFINIȚIA 1.13. *Matricea M(B, B') dată de relația (2) se numeşte* ***matricea de trecere*** *de la baza B la baza B', iar coloanele ei reprezintă coordonatele vectorilor bazei noi B' în baza veche B.*

d) Schimbări de coordonate. Deoarece un vector poate fi scris în baze diferite, ne interesează trecerea de la coordonatele vectorului într-o bază, la coordonatele aceluiaşi vector într-o altă bază. Fie, deci:

$$x = x_B = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}_B = B[x]_B \qquad (*)$$

$$x = x_{B'} = \sum_{j=1}^{n} x'^j e'_j = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ ... \\ x'^n \end{pmatrix} = B'[x]_{B'} \qquad (**)$$

şi cum $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\} = (B[e'_1]_B, \mathrm{B}[\mathrm{e}'_2]_B, ..., \mathrm{B}[\mathrm{e}'_\mathrm{n}]_B) = B([e'_1]_B, [e']_B, ..., [e'_n]_B) =$ $= BM(B, B')$, rezultă că relația (**) devine

$$x = BM(B, B')[x]_{B'},$$

care împreună cu (*), folosind tranzitivitatea relației de egalitate, dă

$B[x]_B = BM(B, \mathrm{B}')[x]_{B'}$ şi $ind_{V_n} B \Rightarrow$

$$[x]_B = M(B, B')[x]_{B'}.$$

1.5. Probleme rezolvate

1. Să se determine dacă $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ are o structură de spațiu vectorial în raport cu următoarele perechi de operații:

1) $(x^1, x^2) + (y^1, y^2) = (x^1 + y^1, 0)$ şi $k(x^1, x^2) = (kx^1, kx^2)$, $k \in \mathbf{R}$;

2) $(x^1, x^2) + (y^1, y^2) = (x^1 + y^1, y^2)$ şi $k(x^1, x^2) = (kx^1, kx^2)$, $k \in \mathbf{R}$;

3) $(x^1, x^2) + (y^1, y^2) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2)$ şi $k(x^1, x^2) = (0, kx^2)$, $k \in \mathbf{R}$;

4) $(x^1, x^2) + (y^1, y^2) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2)$ şi $k(x^1, x^2) = (\alpha + i\beta)(x^1, x^2) =$ $= (\alpha x^1 - \beta x^2, \beta x^1 + \alpha x^2)$, unde $k \in \mathbf{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Pentru a stabili dacă $\mathbf{R}^2$ are o structură de spaţiu vectorial, trebuie verificate axiomele spaţiului vectorial din definiţia 1.1. şi anume:

1) Din axiomele grupului abelian, pentru determinarea elementului neutru $\left(e^1, e^2\right) \in \mathbf{R}^2$, avem

$$\left(x^1, x^2\right) + \left(e^1, e^2\right) = \left(x^1, x^2\right), \text{ pentru } \forall \left(x^1, x^2\right) \in \mathbf{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^1, x^2\right) + \left(e^1, e^2\right) = \left(x^1 + e^1, 0\right) \neq \left(x^1, x^2\right) \Rightarrow \nexists \text{ element neutru în } \mathbf{R}^2$$

şi ca urmare $\mathbf{R}^2$ nu este spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ în acest caz.

2) Ne ocupăm tot de elementul neutru şi avem:

$$\left.\begin{array}{l} \left(x^1, x^2\right) + \left(e^1, e^2\right) = \left(x^1, x^2\right) \\ \left(x^1, x^2\right) + \left(e^1, e^2\right) \overset{def}{=} \left(x^1 + e^1, e^2\right) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} x^1 + e^1 = x^1 & \Rightarrow e^1 = 0 \\ \quad x^2 = R^2 & \Rightarrow e^2 = x^2 \end{cases},$$

deci pentru $\forall\, x^2 \in \mathbf{R}$ vom avea $e^2 = x^2 \in \mathbf{R}$**,** adică elementul neutru nu este unic, deci $\mathbf{R}^2$ nu este spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ în acest caz.

3) Se verifică uşor că $\left(R^2, +\right)$ este grup abelian $\left(\left(e^1, e^2\right) = (0,0)\right)$, dar să verificăm ultima axiomă a spaţiului vectorial

$$1 \cdot \left(x^1, x^2\right) = \left(x^1, x^2\right)$$

în care, membrul stâng este $1 \cdot \left(x^1, x^2\right) = \left(0, 1 \cdot x^2\right) = \left(0, x^2\right) \neq \left(x^1, x^2\right)$, deci $\mathbf{R}^2$ nu este spaţiu vectorial împreună cu cele două operaţii.

4) Este simplu că $\left(R^2, +\right)$ este grup abelian.

La fel de uşor se verifică şi celelalte axiome, de exemplu

$$1 \cdot \left(x^1, x^2\right) = \left(x^1, x^2\right),$$

în care membrul stâng este

$$1 \cdot \left(x^1, x^2\right) = (1 + 0i)\left(x^1, x^2\right) \overset{def}{=} \left(1 \cdot x^1 - 0x^2\, 0x^1 + 1 \cdot x^2\right) = \left(x^1, x^2\right).$$

În concluzie, $\mathbf{R}^2$ este spaţiu vectorial împreună cu operaţiile 4).

2. Dându-se spațiul vectorial P_n al funcțiilor polinomiale reale care au cel mult gradul n, să se cerceteze care dintre următoarele submulțimi sunt subspații vectoriale

1) $A = \{p(x) | \ p(0) = h, \ h \in R\}$,
2) $B = \{p(x) | \ 3p(0) - 2p(1) = 0\}$,
3) $D = \{p(x) | \ p(1) + p(2) + ... + p(m) = 0, \quad m \in N^* \ \text{ fixat}\}$.

Rezolvare. 1) Fie $p, q \in A \Rightarrow p(0) = h$ şi $q(0) = h.$ Folosim Teorema 1.2. şi presupunem că $p + q \in A \Rightarrow (p+q)(0) = h \Rightarrow p(0) + q(0) = h \Rightarrow 2h = h,$ contradicție pentru $h \neq 0.$ Rezultă că prima condiție (din T. 1.2.) nu este îndeplinită şi, prin urmare, mulțimea A nu este subspațiu vectorial a lui P_n.

2) Fie $p, q \in B \Rightarrow 3p(0) - 2p(1) = 0$ şi $3q(0) - 2q(1) = 0.$ Considerăm expresia $\alpha p + \beta q$ cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi avem

$$3(\alpha p + \beta q)(0) - 2(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha(3p(0) - 2p(1)) + \beta(3q(0) - 2q(1)) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha p + \beta q \in B \Rightarrow B$ este un subspațiu vectorial al lui P_n (conform cu Obs. 1.1.)

3) Fie $p, q \in D \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{m} p(k) = 0$ si $\sum\limits_{k=1}^{m} q(k) = 0.$ Considerăm $ap + \beta q$ cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi avem

$$\sum_{k=1}^{m} (\alpha p + \beta q)(k) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha p(k) + \beta q(k)) = \alpha \sum_{k=1}^{m} p(k) + \beta \sum_{k=1}^{m} q(k) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Rezultă că mulțimea D este subspațiu vectorial al lui P_n.

3. Fie subspațiile vectoriale V şi U ale lui $\mathbf{R}^3$ generate respectiv de vectorii $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,3,1), v_3 = (2,-1,1); u_1 = (1,-2,4), u_2(-2,4,-8).$

1) Să se verifice dacă sunt subspații suplimentare.
2) Să se găsească descompunerea vectorului $w = (5,-7,13)$ pe aceste subspații.

Rezolvare. 1) Două subspații vectoriale V şi U ale lui $\mathbf{R}^3$ se numesc suplimentare dacă $V \cap U = \{O_{\mathbf{R}^3}\}$ şi suma directă este întregul spațiu vectorial, adică $V + U = \mathbf{R}^3$.

Arătăm mai întâi că $V \cap U = \{O_{R^3}\}$ Subspațiul vectorial $V \cap U$ conține acei vectori pentru care

$$\alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2 + \alpha^3 v_3 = \beta^1 u_1 + \beta^2 u_2.$$

Folosind operațiile cu vectori, această egalitate vectorială se scrie sub forma

$$\begin{cases} \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^2 + 2\alpha^3 = \beta^1 - 2\beta^2 \\ \alpha^1 + 3\alpha^2 - \alpha^3 = -2\beta^1 + 4\beta^2, \\ \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 = 4\beta^1 - 8\beta^2 \end{cases}$$

care este un sistem liniar în necunoscutele $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ cu parametrii β^1, β^2. Matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ are rangA = 2 şi } \Delta_{princ.} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Conform teoremei lui Rouché, compatibilitatea este asigurată de anularea determinantului caracteristic

$$\Delta_{carac} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta^1 - 2\beta^2 \\ 1 & 3 & -2\beta^1 + 4\beta^2 \\ 1 & 1 & 4\beta^1 - 8\beta^2 \end{vmatrix} = \left(\beta^1 - 2\beta^2\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12\left(\beta^1 - 2\beta^2\right),$$

adică

$$\beta^1 - 2\beta^2 = 0$$

Obținem soluția $\beta^1 = 2\nu,\ \beta_2 = \nu,\ \nu \in \mathbf{R},$ pentru care $\beta^1 u_1 + \beta^2 u_2 = 2\nu u_1 + \nu u_2 =$ $= (2\nu, -4\nu, 8\nu) + (-2\nu, 4\nu, -8\nu) = (0,0,0)$. Cu $\beta^1 si \beta^2$ astfel găsiți, deducem

$$\begin{cases} \alpha^1 + 2\alpha^3 = 0 \\ \alpha^1 + 3\alpha^2 - \alpha^3 = 0 \end{cases},$$

de unde, $\alpha^1 = -2\eta, \alpha^2 = \eta,\quad \eta \in \mathbf{R}$. Se verifică $\alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2 + \alpha^3 v_3 = (0,0,0)$ şi, deci, singurul vector comun spațiilor V şi U este vectorul nul (0,0,0).

Se ştie că suma a două subspaţii vectoriale coincide cu acoperirea liniară a reuniunii subspaţiilor respective. Deci $V+U=L(\{v_1,v_2,v_3,u_1,u_2\})$. Un vector oarecare $w\in(V+U)$ este de forma $w=\gamma^1v_1+\gamma^2v_2+\gamma^3v_3+\gamma^4u_1+\gamma^5u_2$ şi, deci, aparţine lui $\mathbf{R}^3$. Rezultă că $V+U\subseteq\mathbf{R}^3$. Să arătăm că $\mathbf{R}^3\subseteq V+U$. Într-adevăr, pentru fiecare $w=\left(w^1,w^2,w^3\right)$ există numerele reale $\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\gamma^4,\gamma^5$ astfel încât

$$\gamma^1v_1+\gamma^2v_2+\gamma^3v_3+\gamma^4u_1+\gamma^5u_2=w.$$

Această relaţie este echivalentă cu sistemul liniar

$$\begin{cases}\gamma^1 \qquad\quad +2\gamma^3+\gamma^4-2\gamma^5=w^1\\ \gamma^1+3\gamma^2-\gamma^3-2\gamma^4+4\gamma^5=w^2\\ \gamma^1+\gamma^2+\gamma^3+4\gamma^4-8\gamma^5=w^3\end{cases},$$

care este compatibil dublu nedeterminat. Prin urmare $V+U=\mathbf{R}^3$.

2) Înlocuirea lui $w=(5,-7,13)$ în sistemul precedent de ecuaţii conduce la sistemul liniar

$$\begin{cases}\gamma^1 \qquad\quad +2\gamma^3+\gamma^4-2\gamma^5=5\\ \gamma^1+3\gamma^2-\gamma^3-2\gamma^4+4\gamma^5=-7\\ \gamma^1+\gamma^2+\gamma^3+4\gamma^4-8\gamma^5=13\end{cases},$$

a cărui soluţie este $(-2\lambda,\lambda,1+\lambda,3+2\mu,\mu)$, cu $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

Vectorul w se descompune unic sub forma

$$w=[(-2\lambda)v_1+\lambda v_2+(1+\lambda)v_3]+[(3+2\mu)u_1+\mu u_2]\ .$$

Găsim, pentru $\lambda-1$ şi $\mu=0$, $w=(2,-1,1)+(3,-6,12)$.

4. Să se arate cã vectorii $x_1,x_2,...,x_n$ din spaţiul vectorial V_n sunt liniar independenţi dacă rangul matricei

$$M = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix},$$

alcătuită din componentele pe coloane ale acestor vectori într-o bază oarecare $(e_1, e_2, ..., e_n)$, este egal cu numărul n al vectorilor.

Rezolvare. Vectorii $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt liniar independenți dacă relația $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i x_i = O_{V_n}$, cu $\alpha^i \in \mathbf{R}$, $\forall\ i = 1,...,n, \Rightarrow \alpha^1 = \alpha^2 ... = \alpha^n = 0$. Introducem în $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i x_i = O_{V_n}$ expresiile vectorilor $x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^k e_k$, cu $i = 1,...,n$ şi ținem seama că $(e_1, e_2, ..., e_n) = B$ este o bază în V_n, adică

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_i^k e_k = (e_1, e_2, ..., e_n) \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}.$$

Obținem pentru necunoscutele $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ sistemul liniar şi omogen ai cărui coeficienți sunt chiar elementele matricei M. Deoarece $\alpha^1 = 0, \alpha^2 = 0, \dots, \alpha^n = 0$, rezultă că $\det M \neq 0$ şi deci rang M = n.

5. Să se găsească pentru spațiul polinoamelor de grad cel mult patru, matricea de trecere

- de la baza canonică $B = \left(1, x, x^2, x^3, x^4\right)$ la baza $B' = \left(1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\right)$;

- de la baza canonică B la baza B'' formată din polinoamele Legendre:

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), P_3 = \frac{1}{2}\left(5x^2 - 3x\right), P_4 = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right).$$

Rezolvare. Se ştie că matricea de trecere $M(B, B')$, de la baza veche B la baza nouă B', are pe coloane componentele vectorilor bazei B' raportate la baza B. Exprimând vectorii noii baze B' cu ajutorul bazei B avem

$$\begin{aligned} &1 = 1 \\ &x + 1 = 1 + x \\ &(x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 \\ &(x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\ &(x+1)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \end{aligned} \quad \Rightarrow M(B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analog se obține cealaltă matrice

$$M(B, B'') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix},$$

1.6. Probleme propuse

1. Să se arate că **K**[X], spațiul vectorial al polinoamelor în nedeterminatele X cu coeficienți în câmpul **K,** este un spațiu vectorial peste câmpul **K** în raport cu adunarea polinoamelor şi cu înmulțirea dintre un element din **K** şi un polinom.

2. Fie **K**[X] spațiu vectorial peste câmpul **K** al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți din **K**. Să se stabilească pentru următoarele submulțimi care este un spațiu vectorial peste câmpul **K**,

i) mulțimea $\mathbf{K}_n[X]$ a polinoamelor de grad cel mult n, ii)mulțimea polinoamelor de grad cel puțin n.

3. Să se arate că mulțimea $\mathbf{K^n} = \{(k^1, k^2, \ldots, k^n) \mid \ k^i \in \mathbf{K},\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{K} \text{ câmp } \}$ este un spațiu vectorial peste **K**, în raport cu operațiile:

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n),$$
$$\lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Caz particular: $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$.

4. Fie V un spațiu vectorial peste câmpul **K** şi S o mulțime nevidă din **K**. Se defineşte mulțimea $F = \{f \mid f : S \to V\}$ şi operațiile

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall\ f, g \in F, \ \forall\ x \in S$$
$$(kf)(x) = kf(x), \quad \forall\ k \in K, \quad \forall\ x \in S.$$

Să se arate că F împreună cu cele două operații este un spațiu vectorial peste câmpul **K**.

5. Să se arate că următoarele mulțimi sunt, respectiv, spații vectoriale reale în raport cu adunarea funcțiilor şi cu înmulțirea dintre un număr real şi o funcție.

i) $D = \{f \mid f : I \to R, I$ - interval din $\mathbf{R}$, f este derivabilă$\}$.

ii) $P = \{f \mid f : I \to R, I$ - interval din $\mathbf{R}$, f admite primitive$\}$.

iii) $I = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbf{R},\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b,\ f$ este integrabilă$\}$.

6. Să se arate că mulțimile D, P, I, definite în problema 5, sunt subspații vectoriale ale spațiului vectorial F din problema 4.

7. i) Să se arate că mulțimea funcțiilor pare $\{f \mid f : (-a, a) \to \mathbf{R},\ f$ pară$\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului $F = \{f \mid f : (-a, a) \to \mathbf{R}.\}$

ii) Să se arate că mulțimea $\{f \mid f : (-a, a) \to \mathbf{R},\ f$ impară$\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului F de la punctul i).

8. Să se precizeze care dintre următoarele submulțimi ale spațiului $\mathbf{R}^3$ sunt subspații liniare:

I. $A = \{x = (x^1, x^2, x^3) \mid x^1, x^2, x^3 \in \mathbf{R},\ x^1 - x^2 + 5x^3 = 0\}$,

II. $B = \{x = (x^1, x^2, x^3) \mid x^1, x^2, x^3 \in \mathbf{R},\ tgx^1 = \pm 1\}$.

9. Considerând în $\mathbf{R}^4$ vectorii $x_1 = (3,1,-7,4)$, $x_2 = (1,5,0,6)$, $x_3 = (-1,1,3,0)$, să se determine combinația liniară $3x_1 - 2x_2 + 7x_3$ şi să se discute rezultatul obținut.

10. Ştiind că vectorii x, y, z sunt liniar independenți în spațiul vectorial V, să se stabilească

i) dacă vectorii $x+y$, $y+z$, $z+x$ sunt liniar independenți,

ii)dacă vectorii $x-y$, $y-z$, $z-x$ sunt liniar dependenți.

11. Să se arate că dacă x, y, z sunt vectori liniar independenți în spațiul vectorial V, atunci şi $x, x+y, x+y+z$ sunt liniar independenți.

12. Să se stabilească liniar dependența sau independența următoarelor mulțimi:

$A = \{x, y \mid x = (-3,1,5),\ y = (6,-2,15)\} \subset \mathbf{R}^3$;

$B = \{x, y \mid x = (1, i, 2-i, 3+i),\ y = (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)\}$, $B \subset \mathbf{C}^4$;

$D = \{x, y, z \mid x = (1,2,3),\ y = (2,5,7),\ z = (3,7,10+\varepsilon),\ \varepsilon \neq 0 \text{ oricât de mic}\}$, $D \subset \mathbf{R}^3$.

13. Să se arate că vectorii $e_1 = (1,3,5)$, $e_2 = (6,3,2)$, $e_3 = (3,1,0)$, scrişi în baza canonică B a spațiului $\mathbf{R}^3$, formează o bază a spațiului $\mathbf{R}^3$. Să se exprime vectorii $x = (3,7,1)$, $y = (0,0,1)$ şi $z = (2,3,5)$ în această nouă bază.

14. Să se arate că polinoamele: $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ formează o bază în spațiul vectorial $\mathbf{R}_n[X]$ al polinoamelor de grad cel mult n în nedeterminata X.

15. În spațiul vectorial real al matricelor pătratice de ordinul al doilea $M(2,2,\mathbf{R})$, se consideră sistemul de vectori

$$S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Să se arate că mulțimea S este o bază pentru spațiul $M(2,2,\mathbf{R})$.

b) Să se exprime matricea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ în baza S.

2. SPAȚIUL VECTORIAL EUCLIDIAN

2.1. Produs scalar. Normă. Distanță.

Elementele introduse nu permit studierea unor aspecte ale spațiilor vectoriale legate de noțiunile de unghi şi de distanță. Aceasta se poate face înzestrând spațiul vectorial cu un tip de produs numit produs scalar.

DEFINIȚIA 2.1. *Fie* $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$ *şi* V *un* $\boldsymbol{K}$ *- spațiu vectorial. O aplicație* $(\cdot \mid \cdot): V x\ V \to \boldsymbol{K}$ *se numeşte* ***produs scalar*** *dacă:*

i) aplicația $x \to (x|y)$ *este liniară* $\forall y \in V$,

adică $(\alpha x_1 + \beta x_2 \mid y) = \alpha\,(x_1 \mid y) + \beta\,(x_2 \mid y)$,

ii) $(x|y) = \overline{(y|x)}$, *(dacă* $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$, *atunci* $(x|y) = (y|x)$ *),*

iii) $(x|x) > 0, \quad \forall x \in V \setminus \{O_V\}$.

Notații $(x|y) = (x, y) = x \cdot y = xy$

Observații 2.1 (α) $\quad (0, y) = 0, \quad \forall y \in V$.

Într - adevăr, $(x - x, y) = (x, y) - (x, y) = 0$, deci $(0, y) = 0$.

(β) $\quad (x, x) \geq 0, \quad \forall x \in V$,

care este imediată din definiția 2.1. iii) şi observația 2.1.(α).

(γ) $\quad (\alpha x, \beta y) = \alpha \overline{\beta}(x, y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \quad \forall x, y \in V$.

Într-adevăr $(\alpha x, \beta y) = \alpha(x, \beta y) = \alpha\left(\overline{\beta y, x}\right) = \alpha \overline{\beta}\left(\overline{y, x}\right) = \alpha \overline{\beta}(x, y)$. □

Exemple. 1. Fie $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ şi $V = \mathbf{K}^n = \left\{\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \mid x^i \in \mathbf{K},\ 1 \leq i \leq n\right\}$.

Pentru orice $x = \left(x^1, ..., x^n\right) \in \mathbf{K}^n$ şi $y = \left(y^1, ..., y^n\right) \in \mathbf{K}^n$ punem

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y}^i .$$

Dacă **K** = **R** avem

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i .$$

2. În spațiul vectorial $C^0_{[a,b]}$ al funcțiilor continue pe intervalul [a, b] $\subset$ **R**, produsul scalar este

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad \forall f, g \in C^0_{[a,b]}.$$

DEFINIȚIA 2.2. *Un spațiu vectorial pe care s-a definit un produs scalar se numeşte **spațiu vectorial euclidian**.*

TEOREMA 2.1. (Inegalitatea lui Schwarz** sau **inegalitatea lui Cauchy - Buneakovski)

(1) $$|(x, y)|^2 \le (x, x)\cdot(y, y), \qquad \forall x, y \in V .$$

Demonstrație. Folosind observația 2.1. β) şi proprietatea i) din definiția 2.1, avem

$$0 \le (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x - \lambda y) - \lambda(y, x - \lambda y) = (x, x) - \overline{\lambda}(x, y) - \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y),$$
$$\forall \lambda \in \mathbf{C}.$$

În particular, pentru $\lambda = \dfrac{(x, y)}{(y, y)}$, cu $y \ne O_V$, inegalitatea de mai sus devine

$$0 \le (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}(x, y)}{(y, y)} - \frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{|(y, y)|^2}(y, y) = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} =$$
$$= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} .$$

Deci

$$|(x, y)|^2 \le (x, x)\cdot(y, y). \qquad \square$$

DEFINIȚIA 2.3. *Fie **K** = **C**, **R** şi V un **K** - spațiu vectorial. O aplicație $\|\cdot\| : V \to \boldsymbol{R}$ se numeşte **normă** dacă*

(i) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = O_V$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{K}$ *şi* $\forall x \in V$ *(omogenitate),*

(iii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$ *(inegalitatea triunghiului).*

Observația 2.2. $\|x\| \ge 0, \quad \forall x \in V.$

Într-adevăr, folosind proprietățile *(i), (ii), (iii)* obținem

$$0 = \|0_V\| = \|x - x\| = \|x + (-x)\| \le \|x\| + \|(-1)x\| = \|x\| + |-1| \cdot \|x\| = 2\|x\|$$

deci

$$\|x\| \ge 0, \quad \forall x \in V.$$

DEFINIȚIA 2.4. *Perechea* $(V, \|\cdot\|)$ *se numeşte* ***spațiu normat.***

TEOREMA 2.2. *Orice produs scalar determină o normă prin egalitatea*

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}.$$

Demonstrație. Verificăm cele trei axiome din definiția 2.3. :

(i) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x,x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ (conform axiomei (iii) din def. 2.1.).

(ii) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} = \sqrt{|\alpha|^2 (x,x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)} = |\alpha| \cdot \|x\|.$

(iii) $\|x+y\|^2 = (x+y, \quad x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$

$$= \|x\|^2 + (x,y) + \overline{(x,y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) \le$$

$$\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)|\,.$$

Deci

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)|$$

şi folosind inegalitatea lui Schwarz obținem

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)| \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Prin urmare

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|. \qquad \square$$

Exemple de norme pe K$^{\mathbf{n}}$.

1. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^i\, \overline{x^i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2}$ (**K**=**C**) ;

2. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$ (**K**=**R**) ;

3. $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x^i|$;

4. $\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x^i|$.

Precizări. 1. Norma lui x se mai numeşte şi **lungimea vectorului** x.

2. Norma din exemplul 1 (sau 2) se numeşte **normă euclidiană** pe $\mathbf{K}^n$.

Cu ajutorul normei se poate da următoarea definiție:

DEFINIȚIA 2.5. *Fie E_n un spațiu vectorial euclidian de dimensiune n. Un vector $e \in E_n$, cu proprietatea că $\|e\| = 1$, se numeşte **vector unitate** sau **versor**.*

Observații 2.3. 1. Cu această noțiune, pentru $\forall x \in E_n \setminus \{O_{E_n}\}$, avem

$$\frac{x}{\|x\|} = e \quad \Leftrightarrow \quad x = \|x\| e .$$

2. Cu ajutorul normei, inegalitatea Cauchy - Schwarz se mai scrie

(1') $\quad (x, y) \le \|x\| \cdot \|y\|$

sau, dacă $\|x\| \ne 0$, $\|y\| \ne 0$,

(1'') $\quad \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1 .$

DEFINITIA 2.6. *Se numeşte **unghi neorientat al vectorilor x şi y** numărul $\theta \in \left[0, \pi/2\right]$ dat de relația*

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \qquad \text{Notatie } \theta = \left(\widehat{x, y}\right)$$

DEFINIȚIA 2.7. *Fie E_n/**R**. Se numeşte **metrică** sau **distanță** o funcție d: E_n x E_n → **R** care are proprietățile:*

D_1. $\quad d(x, y) \ge 0 \quad \forall x, y \in E_n ; \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(pozitivitate);*

D_2. $\quad d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E_n$ *(simetrie);*

D_3. $\quad d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in E_n$ *(inegalitatea triunghiului).*

DEFINIȚIA 2.8. *Un spațiu vectorial înzestrat cu o distanță se numeşte* ***spațiu metric****.*

DEFINIȚIA 2.9. *Distanța definită cu ajutorul normei euclidiene se numeşte* ***distanță euclidiană****.*

TEOREMA 2.3. *Fie* $E_n|$ $\mathbf{R}$ *normat cu normă euclidiană. Funcția reală* $d : E_n \times E_n \to \mathbf{R}$ *definită prin*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in E_n,$$

este o distanță (metrică) pe E_n.

Demonstrație. Evidentă prin verificarea axiomelor din definiția 2.7.

2.2. Ortogonalitate.

DEFINIȚII 2.10. *Fie* E_n *- spațiu vectorial euclidian.*

Doi vectori $x, y \in E_n$ *se numesc* ***ortogonali*** *dacă* $(x, y) = 0$ *; se notează* $x \perp y$ *.*

O mulțime $S \subset E_n$ *se numeşte* ***ortogonală*** *dacă* $\forall x, y \in S$ *atunci*

$$(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{daca} \quad x \neq y \\ \|x\|^2, & \text{daca} \quad x = y. \end{cases}$$

O mulțime $S \subset E_n$ *se numeşte* ***ortonormată*** *dacă este ortogonală şi este formată numai din versori.*

Consecință. Vectorul nul este ortogonal pe orice vector din E_n.

Exemple.

1. Baza canonică din $\mathbf{R}^n$ este ortonormată față de

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

2. În $C^0_{[a,b]}$ mulțimea $S = \{f_0, f_1, ..., f_{2n-1}, f_{2n}, ...\}$, în care $f_0(x) = 1, ..., f_{2n-1}(x) = \cos 2n\pi x$,

$f_{2n} = \sin 2n\pi x, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$, este o mulțime ortogonală față de produsul scalar

$$\left(f_{k,}\, f_l\right)=\int_0^1 f_k(x)\, f_l(x)dx.$$

TEOREMA 2.4. *Orice mulțime ortogonală formată din elemente nenule dintr-un spațiu vectorial euclidian E_n este liniar independentă.*

Demonstrație. Fie $\{v_i\}_{i=1,\ldots,m} \subset E_n \setminus \{O_{E_n}\}$ ortogonală $\Rightarrow$ să demonstrăm $ind_{E_n}\{v_i\}_{i=1,\ldots,m}$.

Pentru aceasta considerăm combinația liniară

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} \lambda^i v_i = 0 \;\; |\cdot v_j, \quad j=1,\ldots,m \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \left(v_i, v_j\right) = 0\, cu \qquad j=1,\ldots,m \\ si \quad cu \quad \left(v_i, v_j\right) = \begin{cases} 0, & pentru \quad i \neq j \\ \left\|v_i\right\|^2, & pentru \quad i = j \end{cases} \end{array}\right| \Rightarrow \lambda^i \left\|v_i\right\|^2 = 0, i = 1,\ldots,m$$

$$\Rightarrow \lambda^i = 0, \forall i = 1,\ldots,m \quad \Rightarrow \quad ind_{E_n}\{v_i\}_{i=1,\ldots,m}.$$ □

DEFINIȚIA 2.11. *O bază B = (e_1 , e_2 , ... , e_n)$\subset E_n$ se numeşte* ***ortonormată*** *dacă*

$$\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & daca \quad i \neq j \\ 1, & daca \quad i = j \end{cases} \;\;, \;\; \delta_{ij} = simbolul\ lui\ Kronecker.$$

DEFINIȚIA 2.12. *Fie E_n, $u, v \in E_n, \quad v \neq O_{E_n}$ atunci vectorul $\frac{(u,v)}{(v,v)}v$ se numeşte* ***proiecția vectorului u pe v****, iar numărul $\frac{(u,v)}{(v,v)}$ se numeşte* ***mărimea algebrică*** *a proiecției vectorului u pe v.*

TEOREMA 2.5. *Fie E_n şi B = (e_1 e_2 ... e_n) bază în E_n.*

Dacă B este o bază ortogonală şi $x = \sum_{i=1}^{m} x^i e_i$, atunci $x^i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$.

Dacă B este o bază ortonormată şi $x = \sum_{i=1}^{m} x^i e_i$, atunci $x^i = (x, e_i)$.

Demonstrație.

$$\text{Din}\quad \left. x=\sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right| \cdot e_j \Rightarrow \left(x,e_j\right)=\sum_{i=1}^{n} x^i\left(e_i,e_j\right)$$

$$\left(e_i,e_j\right)=\begin{cases} 0, & pentru \quad i\neq j \\ \left\|e_j\right\|^2, & pentru \quad i=j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x,e_j\right)=x^j\left\|e_j\right\|^2 \overset{j\to i}{\Rightarrow} x^i=\frac{\left(x,e_i\right)}{\left(e_i,e_i\right)}.$$

Dacă baza este ortonormată $\Rightarrow \quad \left(e_i,e_j\right)=\delta_{ij} \Rightarrow \quad x^i=\left(x,e_i\right).$ □

DEFINIȚIA 2.13. *Coordonatele* $x^i=\dfrac{\left(x,e_i\right)}{\left(e_i,e_i\right)}$ *sau* $x^i=\left(x,e_i\right)$ *se numesc* ***coordonatele euclidiene*** *ale vectorului* $x\in E_n$.

DEFINIȚIA 2.14. *Un vector* $x\in E_n$ *se numeşte* ***ortogonal*** *mulțimii* $S\subset E_n$ *dacă este ortogonal pe orice vector din S. Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali lui S se numeşte* ***S ortogonal*** *şi se notează* $S^{\perp}$. *Dacă* $S/\mathbf{R}\subset E_n/\mathbf{R}$, *atunci* $S^{\perp}$ *se numeşte* ***complementul ortogonal al lui S***.

PROPRIETATEA 2.1. $S^{\perp}/\mathbf{R}\subset E_n/\mathbf{R}$.

2.3. Construcția unei baze ortonormate, pornind de la o bază dată

Fie E_n şi baza $B=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\subset E_n$.

Construim mai întâi o bază ortogonală $B'=\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$ cu

$$\left(u_i,u_j\right)=\begin{cases} 0, \text{ daca } \mathrm{i}\neq \mathrm{j} \\ \left\|\mathrm{u_i}\right\|^2, \text{ daca } \mathrm{i}=\mathrm{j} \end{cases}$$

făcând următoarea considerație

$$\begin{cases} v_1=u_1 \\ v_2=\alpha^{12}u_1+u_2 \\ v_3=\alpha^{13}u_1+\alpha^{23}u_2+u_3 \\ \vdots \\ v_n=\alpha^{1n}u_1+\alpha^{2n}u_2+\ldots+\alpha^{n-1,1}u_{n-1}+u_n \end{cases}, \quad \text{adică cu } M\left(B',B\right)=\begin{bmatrix} 1 & \alpha^{12} & \alpha^{13} & \ldots & \alpha^{1n} \\ 0 & 1 & \alpha^{23} & \ldots & \alpha^{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \alpha^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

matrice superior triunghiulară.

Punând condiția de ortogonalitate a bazei B', obținem

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \dfrac{(u_1, v_2)}{(u_1, u_1)} u_1 + u_2 \\ v_3 = \dfrac{(u_1, v_3)}{(u_1, u_1)} u_1 + \dfrac{(u_2, v_3)}{(u_2, u_2)} u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \dfrac{(u_1, v_n)}{(u_1, u_1)} u_1 + \dfrac{(u_2, v_n)}{(u_2, u_2)} u_2 + \ldots + \dfrac{(u_{n-1}, v_n)}{(u_{n-1}, u_{n-1})} u_{n-1} + u_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (*) \quad \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - \dfrac{(u_1, v_2)}{(u_1, u_1)} u_1 \\ u_3 = v_3 - \dfrac{(u_1, v_3)}{(u_1, u_1)} u_1 - \dfrac{(u_2, v_3)}{(u_2, u_2)} u_2 \\ \vdots \\ u_n = v_n - \dfrac{(u_1, v_n)}{(u_1, u_1)} u_1 - \ldots - \dfrac{(u_{n-1}, v_n)}{(u_{n-1}, u_{n-1})} u_{n-1} \end{cases} .$$

Acest procedeu se numește **Gram-Schmidt**.

TEOREMA 2.6. *Fie E_n. Dacă $B=(v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)$ este o bază a spațiului E_n, atunci B* **O** *$= (u_1\ u_2\ \ldots\ u_n)$ de forma $(*)$ este o bază ortogonală, iar mulțimea*

$$B'' = (e_1, e_2, \ldots, e_n) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$$

este o bază ortonormată a lui E_n.

Demonstrație. Din construcție s-a văzut că B' este o bază ortogonală $\Rightarrow B''$ bază. Pentru a demonstra că B'' este ortonormată, considerăm produsul scalar a doi vectori din B''

$$(e_i, e_j) = \left(\frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right) = \frac{1}{\|u_i\| \cdot \|u_j\|} (u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad i \neq j, \\ \dfrac{\|u_i\|^2}{\|u_i\| \cdot \|u_i\|} = 1, & \text{dacă} \quad i = j. \end{cases} \qquad \square$$

2.4. Probleme rezolvate

1. Fie $P_n = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid gradP \le n \ , \ n \in \mathbf{N}^* \quad fixat\}$ şi aplicaţia $(\ ,\ ): P_n \times P_n \to \mathbf{R}$ definită prin $(P,Q) = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a^j b^j$, unde $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a^j X^j$ şi $Q(X) = \sum_{j=0}^{n} b^j X^j$.

Să se arate că aplicaţia (,) este un produs scalar în P_n.

Rezolvare. Verificăm axiomele din 2.1. :

i) $(\alpha P_1 + \beta P_2, Q) = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 (\alpha a_1^j + \beta a_2^j) b^j = \alpha \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a_1^j b^j + \beta \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a_2^j b^j =$

$= \alpha(P_1, Q) + \beta(P_2, Q)$, unde $P_1(X) = \sum_{j=0}^{n} a_1^j X^j$, $P_2(X) = \sum_{j=0}^{n} a_2^j X^j$. Scriind capetele acestui şir de egalităţi $((\alpha P_1 + \beta P_2, Q) = \alpha(P_1, Q) + \beta(P_2, Q))$, rezultă că aplicaţia (,) este liniară în raport cu prima variabilă.

ii) $(P,Q) = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a^j b^j = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 b^j a^j = (Q,P)$, deoarece $a^j b^j = b^j a^j$ în **R**, $\forall j = 0,1,\ldots,n$.

iii) $(P,P) = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 (a^j)^2 = \sum_{j=0}^{n} (j! a^j)^2 > 0$.

2. Să se arate că funcţia $\|\cdot\| : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ definită prin $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x^i|$, cu $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbf{R^n}$, este o normă în $\mathbf{R^n}$.

Rezolvare. Considerăm definiţia 2.3. şi îi verificăm axiomele:

i) $\|x\| = 0 \iff \max\limits_{1 \le i \le n} |x^i| = 0 \iff x = 0_{R^n}$ pentru că numai vectorul nul are maximum, pentru elementele sale luate în modul, egal cu zero.

ii) Fie $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x^i| = |x^k|$, cu $k = 1,\ldots,n$ fixat. Rezultă că

$$\|\alpha x\| = |\alpha x^k| = |\alpha| \cdot |x^k| = |\alpha| \cdot \|x\| \ .$$

iii) Fie $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x^i| = |x^k|$, cu $k = 1, \dots, n$, fixat,

$\|y\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |y^i| = |y^j|$, cu $j = 1, \dots, n$, fixat,

$\|x + y\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x^i + y^i| = |x^p + y^p|$, cu $p = 1, \dots, n$, fixat.

Avem

$$\|x + y\| = |x^p + y^p| \le |x^p| + |y^p| \le \max_{1 \le i \le n} |x^i| + \max_{1 \le i \le n} |y^i| = |x^k| + |y^j| = \|x\| + \|y\|$$

şi axioma iii) este verificată.

Să se arate că aplicaţia $q : \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$q(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} \quad (\text{cu } x = (x^1, x^2, \dots x^n), \quad y = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbf{R^n}),$$

este o metrică în $\mathbf{R^n}$.

Rezolvare. Verificăm pe rând axiomele din definiţia 2.7.:

D₁) $q(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} \ge 0$, care este adevărată din definiţia funcţiei radical de ordinul doi şi din $(x^i - y^i)^2 \ge 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \ge 0.$ Pe de altă parte,

$$q(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^i - y^i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \quad x^i = y^i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$
$$\Leftrightarrow \quad (x^1, x^2, \dots, x^n) = (y^1, y^2, \dots, y^n) \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

D₂) $q(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)^2} = q(y, x), \qquad \forall x, y \in \mathbf{R^n}.$

D₃) Considerăm, pentru orice vectori $x, y, z \in \mathbf{R^n}$, expresia

$$[q(x, z) + q(z, y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i - z^i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - z^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z^i - y^i)^2} + \sum_{i=1}^{n} (z^i - y^i)^2 \text{ şi}$$

folosind inegalitatea Cauchy – Buneacovski – Schwarz

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a^i\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(b^i\right)^2}$$

obținem

$$[q(x,z)+q(z,y)]^2 \geq \sum_{i=1}^{n}\left(x^i - z^i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(x^i - z^i\right)\left(z^i - y^i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(z^i - y^i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(x^i - z^i\right)+\left(z^i - y^i\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x^i - y^i\right)^2 = q^2(x,y)$$

adică

$$q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y).$$

4. Să se arate că funcțiile polinomiale $1, X, \frac{X^2}{2!}, \ldots, \frac{X^n}{n!}$ formează o bază ortonormată a lui P_n față de produsul scalar definit prin

$$(\ ,\ ): P_n \times P_n \to \mathbf{R}, \qquad (P,Q) = \sum_{k=0}^{n} (k!)^2 a^k b^k ,$$

unde $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a^k X^k$ şi $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b^k X^k$.

Rezolvare. Să arătăm că baza $\left(1, X, \frac{X^2}{2!}, \ldots, \frac{X^n}{n!}\right) = \left(\frac{X^k}{k!}\right)_{k=0,1,\ldots,n}$ este ortonormată. Folosind definiția 2.11. şi definiția produsului scalar din enunț, calculăm produsul scalar a două polinoame oarecare din bază

$$\left(\frac{x^i}{i!}, \frac{x^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{n} (k!)^2 a^k b^k = \begin{cases} (i!)^2 \cdot \frac{1}{i!} \cdot 0 + (j!)^2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{j!}, & \textit{pentru} \quad i \neq j \\ (j!)^2 \cdot \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{j!}, & \textit{pentru} \quad i = j \end{cases}$$

şi obținem

$$\left(\frac{x^i}{i!}, \frac{x^j}{j!}\right) = \delta_{ij} \text{, unde } \delta_{ij} \text{ este simbolul lui Kronecker.}$$

Deci baza $\left(\frac{X^k}{k!}\right)_{k=0,1,\ldots,n}$ este ortonormată.

5. Fie P spaţiul vectorial real al tuturor funcţiilor polinomiale reale definite pe intervalul $[-1,1]$ şi produsul scalar (,): $P\times P\to\mathbf{R}$ definit prin $(p,q)=\int_{-1}^{1}p(x)\cdot q(x)dx$, cu $p,q\in P$. Polinoamele obţinute din polinoamele $1,x,x^2,\dots,x^n,\dots$ prin procedeul de ortogonalizare se numesc **polinoame Legendre.** Să se scrie primele şase polinoame Legendre.

Rezolvare. Notăm $p_j(x)=x^j$, $j\in\mathbf{N}$. Cu $q_k(x)$, $k=0,1,\dots,5$, notăm polinoamele Legendre.

Fie $\mathbf{q_0(x)}=p_0(x)=1$ şi calculăm

$$\mathbf{q_1(x)}=p_1(x)-\frac{(p_1,q_0)}{(q_0,q_0)}q_0(x)=x$$

deoarece

$$(p_1,q_0)=\int_{-1}^{1}xdx=0,\quad (q_0,q_0)=\int_{-1}^{1}dx=2.$$

În mod analog, folosind procedeul Gram – Schmidt, obţinem pe rând :

$$\mathbf{q_2(x)}=p_2(x)-\frac{(p_2,q_0)}{(q_0,q_0)}q_0(x)-\frac{(p_2,q_1)}{(q_1,q_1)}q_1(x)=x^2-\frac{1}{3}\ ,$$

pentru că

$$(p_2,q_0)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},\quad (p_2,q_1)=\int_{-1}^{1}x^3dx=0,\quad (q_1,q_1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}\ ;$$

$$\mathbf{q_3(x)}=p_3(x)-\frac{(p_3,q_0)}{(q_0,q_0)}q_0(x)-\frac{(p_3,q_1)}{(q_1,q_1)}q_1(x)-\frac{(p_3,q_2)}{(q_2,q_2)}q_2(x)=x^3-\frac{3}{5}x\ ,$$

deoarece

$$(p_3,q_0)=\int_{-1}^{1}x^3dx=0,\quad (p_3,q_1)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5},\quad (p_3,q_2)=\int_{-1}^{1}x^3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=0\ ,$$

$$(q_2,q_2)=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\frac{8}{45}\ ;$$

$$\mathbf{q_4(x)} = p_4(x) - \frac{(p_4,q_0)}{(q_0,q_0)}q_0(x) - \frac{(p_4,q_1)}{(q_1,q_1)}q_1(x) - \frac{(p_4,q_2)}{(q_2,q_2)}q_2(x) - \frac{(p_4,q_3)}{(q_3,q_3)}q_3(x) =$$

$$= x^4 - \frac{1}{5} - \frac{16}{105}\cdot\frac{45}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \quad ,$$

pentru că

$$(p_4,q_0) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}, \quad (p_4,q_1) = \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0, \quad (p_4,q_2) = \int_{-1}^{1} x^4\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \frac{16}{105},$$

$$(p_4,q_3) = \int_{-1}^{1} x^4\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)dx = 0, \quad (q_3,q_3) = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{8}{175} \quad ;$$

$$\mathbf{q_5(x)} = p_5(x) - \frac{(p_5,q_0)}{(q_0,q_0)}q_0(x) - \frac{(p_5,q_1)}{(q_1,q_1)}q_1(x) - \frac{(p_5,q_2)}{(q_2,q_2)}q_2(x) - \frac{(p_5,q_3)}{(q_3,q_3)}q_3(x) -$$

$$- \frac{(p_5,q_4)}{(q_4,q_4)}q_4(x) = x^5 - \frac{3}{7}x - \frac{16}{315}\cdot\frac{175}{8}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x \quad ,$$

deoarece

$$(p_5,q_0) = \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0, \quad (p_5,q_1) = \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7}, \quad (p_5,q_2) = \int_{-1}^{1} x^5\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = 0,$$

$$(p_5,q_3) = \int_{-1}^{1} x^5\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)dx = \frac{16}{315}, \quad (p_5,q_4) = \int_{-1}^{1} x^5\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right)dx = 0,$$

$$(q_4,q_4) = \int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right)^2 dx = \frac{2^7}{105^2} \quad .$$

Prin inducție se poate demonstra că

$$q_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \quad .$$

2.5. Probleme propuse

1. Fie spațiul vectorial real V_n şi doi vectori oarecare $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ şi $y = \left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right)$ din V_n . Să se cerceteze care din expresiile

1) $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x^i\left|y^i\right|$,

2) $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|x^i y^i\right|$,

3) $(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2\left(y^i\right)^2}$,

4) $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(x^i+y^i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(y^i\right)^2$

definesc produse scalare în V_n .

2. Pe spațiul vectorial $C^0_{[1,e]}=\left\{f:[1,e]\to\mathbf{R}\,\middle|\, f \quad \textit{este} \quad \textit{functie} \quad \textit{continua}\right\}$ definim aplicația (,): $C^0_{[1,e]}\times C^0_{[1,e]}\to\mathbf{R}$ prin $(f,g)=\int_1^e(\ln x)\cdot f(x)\cdot g(x)dx$.

i) Să se arate că această aplicație este un produs scalar în spațiul $C^0_{[1,e]}$.

ii) Pe spațiul vectorial $C^0_{[1,e]}$, înzestrat cu produsul scalar de la punctul i), să se calculeze $\|f\|$, pentru $x\to f(x)=\sqrt{x}$, folosind teorema 2.2.

3. În spațiul punctual euclidian E_5 avem produsul scalar $(x,y)=\sum_{j=1}^{5}x^j y^j$, unde

$x=\left(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5\right),\quad y=\left(y^1,y^2,y^3,y^4,y^5\right)\in E_5$.

Să se determine lungimile laturilor şi unghiurile interioare ale triunghiului definit prin vârfurile $A(2,4,2,4,2),\quad B(6,4,4,4,6),\quad C(5,7,5,7,2)$.

4. Fie $M(n)=\left\{A\in M(n,n,\mathbf{R})\ \middle|\ A=\left[a^{ij}\right],\quad i,j=1,2,\dots,n\right\}$ spațiul vectorial real al matricelor pătratice.

i) Să se arate că funcțiile $\|\cdot\|_k: M(n)\to\mathbf{R}_+$, $k=1,2,\dots,5$, definite mai jos, sunt norme:

$$\|A\|_1=\sum_{i,j=1}^{n}\left|a^{ij}\right|;\qquad \|A\|_2=\sqrt{tr\left(A^t\cdot A\right)}=\sqrt{\sum_{i=j=1}^{n}\left(a^{ij}\right)^2};$$

$$\|A\|_3=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a^{ij}\right|;\qquad \|A\|_4=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a^{ij}\right|;\qquad \|A\|_5=\max_{1\le i,j\le n}\left|a^{ij}\right|.$$

ii) Pentru matricea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ să se calculeze $\|A\|_k$, cu $k=1,\dots,5$.

5. Fie $\mathbf{C^n}=\{z=(z^1,z^2,\dots,z^n) \mid z^j\in\mathbf{C},\ j=1,\dots,n\}$.

i) Să se arate că funcția $d:\mathbf{C^n}\times\mathbf{C^n}\to\mathbf{R}_+$, dată prin

$$d(z_1,z_2)=\sum_{j=1}^{n}\left|z_1^j-z_2^j\right|, \text{ cu } z_1,z_2\in\mathbf{C^n},$$

este o metrică în $\mathbf{C^n}$.

ii) În $\mathbf{C^2}$ să se calculeze distanța dintre elementele

$$z_1=(3+4i,\quad 5-2i) \quad \text{şi} \quad z_2=(1-i,\quad 2+3i).$$

6. Fie $\mathbf{R_2}[X]$ spațiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult doi şi $(p,q)=\sum_{j=0}^{2}a^jb^j$ un produs scalar pe $\mathbf{R_2}[X]$, unde $p=\sum_{j=0}^{2}a^jX^j$, $q=\sum_{j=0}^{2}b^jX^j$. Considerăm polinoamele

$p_1=3X^2+2X+5,\quad p_2=3X^2+5X+2,\quad p_3=3X^2+2X+1,\quad p_4=-X^2+2X+1$.

i) Să se găsească un polinom p_0, de grad cel mult doi, care este echidistant față de polinoamele p_1, p_2, p_3, p_4.

ii) Să se calculeze această distanță.

7. Să se arate că, dacă $x_1,x_2,\dots,x_p$ sunt vectori ortogonali în **K**-spațiu vectorial euclidian E, atunci şi vectorii $\lambda^1x_1,\lambda^2x_2,\dots,\lambda^px_p$ sunt ortogonali, $\forall\lambda^j\in\mathbf{K}$ cu $j=1,2,\dots,n$.

8. Să se demonstreze că, dacă vectorul x este ortogonal pe oricare din vectorii $y_1,y_2,\dots,y_n$ din $E/\mathbf{K}$, atunci este ortogonal şi pe combinația liniară $\lambda^1x_1+\lambda^2x_2+\dots+\lambda^nx_n$, $\forall\lambda^i\in\mathbf{K}$, cu $i=1,\dots,n$.

9. Să se arate că orice mulțime formată din vectori nenuli ortogonali este liniar independentă.

10. Care din următoarele mulțimi sunt baze în $\mathbf{C^3}$ față de produsul scalar

$(x,y)=\sum_{k=1}^{3}x^k\cdot\overline{y^k}$, cu $x=(x^1,x^2,x^3)$, $y=(y^1,y^2,y^3)\in\mathbf{C^3}$?

$A=\{u_1=(i,0,0),\quad u_2=(0,i,0),\quad u_3=(0,0,i)\}$,
$B=\{v_1=(2+i,3,0),\quad v_2=(i,2-i,3i),\quad v_3=(6i,1-5i,0)\}$,
$C=\{w_1=(1,i,0),\quad w_2=(0,1,i),\quad w_3=(i,0,1)\}$.

11. Fie $M(n)=\left\{A\in M(n,n,\mathbf{R}\,)\,\middle|\,A=\left[a^{ij}\right]\ ,\quad i,j=1,\ldots,n\right\}$ spațiul vectorial real al matricelor pătratice. Produsul scalar standard este definit pe $M(n)$ prin

$$(A,B)=tr\left(A^t\cdot B\right)=\sum_{i=j=1}^{n}a^{ij}b^{ij}\ ,\quad A=[a^{ij}],\quad B=[b^{ij}].$$

Care dintre următoarele submulțimi din $M(3)$ este ortogonală ?

$$A=\left\{M=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}-3&0&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&-2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right\},$$

$$B=\left\{Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\right\}.$$

12. Să se ortogonalizeze în $\mathbf{R}^3$ mulțimea de vectori

$$x_1=(5,\quad -3,\quad 7),\quad x_2=(1,\quad 0,\quad 0),\quad x_3=(0,\quad 1,\quad 1),$$

față de produsul scalar $(x,y)=\sum_{i=1}^{3}x^iy^i$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3\right),\quad y=\left(y^1,y^2,y^3\right)\in\mathbf{R}^3$.

13. Să se ortogonalizeze în $\mathbf{R}^4$ sistemele de vectori

$\overline{\underline{I}}\qquad x_1=(1,1,1,1),\quad x_2=(3,3,-1,-1),\quad x_3=(-2,0,6,8)\quad;$

$\overline{\underline{II}}\qquad y_1=(0,1,1,0),\quad y_2=(0,4,0,1),\quad y_3=(1,-1,1,0),\quad y_4=(1,3,0,1)$.

14. Să se ortonormeze mulțimea

$$A=\left\{2,\quad 2+x,\quad (2+x)^2,\quad (2+x)^3\right\}$$

în $C^0_{[0,1]}$ în raport cu produsul scalar definit prin $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

15. În spațiul vectorial E_4 se defineşte produsul scalar a doi vectori $x=\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$ şi $y=\left(y^1,y^2,y^3,y^4\right)$ cu relația

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{4}x^j y^j$$

i) Să se completeze vectorii ortogonali $e_1=(1,-1,2,-1)$, $e_2=(-1,2,0,3)$ cu alți doi vectori e_3 şi e_4 astfel încât aceştia să formeze împreună cu primii doi o bază ortogonală în E_4.

ii) Din baza obținută la punctul i) să se formeze o bază ortonormată.

16. În spațiul euclidian E_4, în care e_1,e_2,e_3,e_4 formează o bază, avem produsul scalar $(x,y)=\sum_{j=1}^{4}x^j y^j$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$, $y=\left(y^1,y^2,y^3,y^4\right)\in E_4$. Să se descompună vectorul $u=(-2,-6,13,6)$ într-o sumă de doi vectori, din care unul să aparțină subspațiului generat de vectorii $a_1=(2,-3,2,4)$, $a_2=(3,1,1,1)$, $a_3=(4,1,-4,-2)$, iar celălalt să fie ortogonal acestui spațiu.

3. TRANSFORMĂRI LINIARE

3.1. *Definiție. Proprietăți generale. Operații*

Indisolubil legată de noțiunea de spațiu vectorial este noțiunea de transformare liniară de spații vectoriale.

DEFINIȚIA 3.1. *Fie U şi V două **K** - spații vectoriale. O aplicație* $\mathscr{F}: U \to V$ *se numeşte **K-liniară** (sau mai simplu **liniară**, atunci când corpul **K** este subînțeles) dacă:*

(1) $\mathscr{F}(x+y) = \mathscr{F}(x) + \mathscr{F}(y), \ \forall\, x, y \in U$ ($\mathscr{F}$ *este **aditivă***) ,

(2) $\mathscr{F}(\alpha\, x) = \alpha\, \mathscr{F}(x), \ \forall\, x \in U, \ \alpha \in \boldsymbol{K}$ ($\mathscr{F}$ *este **omogenă***) .

Condițiile din definiția 3.1 sunt echivalente cu condiția

PROPRIETATEA 3.1. *O aplicație* $\mathscr{F}: U \to V$ *este o transformare liniară dacă şi numai dacă*

(3) $\mathscr{F}(\lambda\, x+\mu\, y) = \lambda\, \mathscr{F}(x) + \mu\, \mathscr{F}(y), \ \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K}, \ \forall\, x, y \in U.$

Demonstrație. Presupunem că $\mathscr{F}$ este transformare liniară. Din definiția 3.1 rezultă

$$\mathscr{F}(\lambda\, x+\mu\, y) = \mathscr{F}(\lambda\, x) + \mathscr{F}(\mu\, y) = \lambda\, \mathscr{F}(x) + \mu\, \mathscr{F}(y) \ .$$

Reciproc, dacă $\mathscr{F}$ satisface condiția (3) punând $\lambda = \mu = 1_{\mathbf{K}}$, deducem $\mathscr{F}(x+y) = \mathscr{F}(x) + \mathscr{F}(y)$, care este tocmai relația (1) şi, punând apoi $\mu = 0$, rezultă $\mathscr{F}(\lambda\, x) = \lambda\, \mathscr{F}(x)$, adică relația (2), ceea ce arată că aplicația $\mathscr{F}$ este liniară. $\square$

Notație. $\mathscr{L}$(U, V) : = {$\mathscr{F}$| $\mathscr{F}$: U $\to$ V, $\mathscr{F}$ transformare liniară} = $\mathscr{H}$m(U, V)

Denumiri. Vectorul $\mathscr{F}(x) \in$ V, pentru $x \in$ U, se numeşte **imaginea** lui x prin $\mathscr{F}$, iar $x \in$ U, a cărui imagine este $\mathscr{F}(x) \in$ V, se numeşte **preimaginea** lui $\mathscr{F}(x)$.

Cazuri particulare. Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(U, V) şi

$\mathscr{F}$ injectivă $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ se numeşte **monomorfism**;

$\mathscr{F}$ surjectivă $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ se numeşte **epimorfism**;

$\mathscr{F}$ bijectivă $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ se numeşte **izomorfism**.

Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(U, U) $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ se numeşte **endomorfism**.

Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(U, U) bijectivă $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ se numeşte **automorfism**.

Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(U / **K**,**K**) $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ se numeşte **formă liniară**.

Exemple. 1. Produsul scalar în E_n cu unul din vectori fixați este o formă liniară.

2. Analog in $C^0_{[a,b]}$ cu $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ cu f(x) fixat.

3. Fie $\mathbf{R}_n$[X] spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n şi $\mathscr{F}$: $\mathbf{R}_n$[X] $\to$ $\mathbf{R}_{n-1}$[X] aplicația care asociază fiecărui polinom derivata lui, adică

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \quad \longrightarrow \quad p'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}.$$

Această aplicație este liniară deoarece $\forall$ $p_1, p_2 \in$ **R**[X] şi $\forall$ $k^1, k^2 \in$ **R**, avem

$$\mathscr{F}(k^1p_1(x)+k^2p_2(x))=(k^1p_1(x)+k^2p_2(x))'=k^1p_1'(x)+k^2p_2'(x)=$$
$$=k^1\mathscr{F}(p_1(x))+k^2\mathscr{F}(p_2(x)).$$

4. Fie V un spațiu vectorial peste câmpul **K**, a un element fixat din **K** şi aplicația $\mathscr{F}_a$: V $\to$ V definită prin $\mathscr{F}_a(x)=ax$, $\forall$ $x \in$ V. Transformarea $\mathscr{F}_a$ este liniară deoarece, $\forall x, y \in$ V şi $\forall \lambda, \mu \in$ **K,** avem

$$\mathscr{F}_a(\lambda x+\mu y)=a(\lambda x+\mu y)=\lambda(ax)+\mu(ay)=\lambda\mathscr{F}_a(x)+\mu\mathscr{F}_a(y).$$

Aplicația $\mathscr{F}_a$ se numeşte **omotetia spațiului V de raport** $a \in$ **K**.

Luând $a=-1$, obținem transformarea liniară care asociază fiecărui vector $x \in$ V opusul său $-x$. Aceasta se numeşte **simetria lui V față de subspațiul nul**.

TEOREMA 3.1. *Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(U, V) atunci:*

***1**. $\mathscr{F}(0_U) = 0_V$;*

***2.** U_1 / **K** $\subset$ U / **K** $\Rightarrow$ $\mathscr{F}(U_1)$ / **K** $\subset$ V / **K**;*

***3.** V_1 / **K** $\subset$ V / **K** $\Rightarrow$ $\mathscr{F}^{-1}(V_1)$ / **K** $\subset$ U / **K**;*

4. *$S = \{u_i\}_{i=1...n}$, $dep_U S$ $\Rightarrow$ $dep_V \mathcal{F}(S)$;*

5. *$\mathcal{F}$ bijectivă $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$.*

Demonstrație. **1.** Din (1) pentru $\beta = 0$ şi apoi $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(0_U) = 0_V$.

2. U_1 / **K** $\subset$ U / **K** din definiție $\Rightarrow$ [$\forall$ $\alpha, \beta \in$ **K** şi $x, y \in U_1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U_1$] $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) \in \mathcal{F}(U_1)$ şi $\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \beta \mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(U_1)$. Deci

$\forall$ $\alpha, \beta \in$ **K** şi $\forall$ $\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(U_1)$ $\Rightarrow$ $\alpha \mathcal{F}(x) + \beta \mathcal{F}(y) \in \mathcal{F}(U_1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}(U_1)$ / **K** $\subset$ V / **K**.

3. Fie $x, y \in \mathcal{F}^{-1}(V_1)$ şi $\lambda, \mu \in$ **K**. Atunci $\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) \in V_1$, deci ($\mathcal{F}$ fiind liniară şi V_1 fiind subspațiu), avem

$$\mathcal{F}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{F}(x) + \mu \mathcal{F}(y) \in V_1 ,$$

de unde

$$\lambda x + \mu y \in \mathcal{F}^{-1}(V_1) .$$

4. $$dep_U S\{u_i\} \overset{def}{\Rightarrow} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i = 0_U \Rightarrow \exists\ i = 1, \dots, n \quad astfel \quad incât \quad \lambda^i \neq 0\right].$$

Deci $\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i\right) = \mathcal{F}(0_U) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \mathcal{F}(u_i) = 0_V$ şi $\exists$ $i = 1, \dots, n$ astfel încât $\lambda^i \neq 0$

$\Rightarrow$ $dep_V \mathcal{F}(S)$.

5. Pentru $v_1 \in V \Rightarrow \exists\ u_1 \in U$ astfel încât $v_1 = \mathcal{F}(u_1)$ (sau $u_1 = \mathcal{F}^{-1}(v_1)$).

Analog, pentru $v_2 \in V \Rightarrow \exists\ u_2 \in U$ astfel încât $v_2 = \mathcal{F}(u_2)$ (sau $u_2 = \mathcal{F}^{-1}(v_2)$).

Avem

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda v_1 + \mu v_2) = \mathcal{F}^{-1}(\lambda \mathcal{F}(u_1) + \mu \mathcal{F}(u_2)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\lambda u_1 + \mu u_2)) =$$
$$= \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda \mathcal{F}^{-1}(v_1) + \mu \mathcal{F}^{-1}(v_2), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K},$$

deci $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$. ▯

DEFINIȚIA 3.2. *Fie $\mathcal{L}(U, V)$ pe care introducem următoarele:*

1\. ***egalitatea*** *$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{L}(U, V)$, $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x)$, $\forall\ x \in U$;*

2. ***adunarea*** $\forall\ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{L}(U, V)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2(x)$, $\forall x \in U$;

3. ***înmulţirea cu scalari*** $\forall\ \mathcal{F}_1 \in \mathcal{L}(U, V)$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\mathcal{F} = \alpha\, \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}(x) = \alpha\, \mathcal{F}_1(x)$, $\forall\ x \in U$.

PROPRIETĂŢI 3.2. 1. *($\mathcal{L}(U, V)$,+) formează grup comutativ;*

2. *$\mathcal{L}(U, V)$ împreună cu adunarea şi înmulţirea cu scalari formează spaţiu vectorial peste **K** .*

Demonstraţie. Evidentă, prin verificarea axiomelor din definiţiile corespunzătoare.

TEOREMA 3.2. *Fie E şi E′ două **K** spaţii vectoriale, B = (e_1, e_2, ... , e_n) bază în E şi C = {v_1, v_2, ... ,v_n} un sistem arbitrar de vectori din E′. Atunci există o aplicaţie liniară unică $\mathcal{F}$: E $\to$ E′ cu prorietatea că $\mathcal{F}(e_k) = v_k$, k = 1, 2, ... , n.*

Demonstraţie. B este bază în E, deci orice $x \in$ E este o combinaţie liniară de vectorii mulţimii B, adică

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$$

cu $x^1, x^2, \ldots, x^n$ unic determinaţi.

Definim aplicaţia $\mathcal{F}$: E $\to$ E′ prin

$$\mathcal{F}(x) = x^1 v_1 + \ldots + x^n v_n = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i$$

şi vom arăta că $\mathcal{F}$ este liniară şi că $\mathcal{F}(e_k) = v_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Fie $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_1^i e_i$ şi $x_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_2^i e_i$ vectori arbitrari din E, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ scalari arbitrari şi considerăm combinaţia liniară

$$\alpha\ x_1 + \beta\ x_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha\ x_1^i + \beta\ x_2^i\right) e_i\ .$$

Ţinând seama de modul cum a fost definită aplicaţia $\mathcal{F}$, avem pe rând

$$\mathcal{F}\left(\alpha\ x_1 + \beta\ x_2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha\ x_1^i + \beta\ x_2^i\right) v_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_1^i v_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_2^i v_i = \alpha\ \mathcal{F}(x_1) + \beta\ \mathcal{F}(x_2)$$

şi, conform cu proprietatea 3.1, aplicaţia $\mathcal{F}$ este liniară. Tot din definiţia lui $\mathcal{F}$, pentru $x = e_k \quad (k = 1,\dots,n) \quad \Rightarrow \quad x^k = 1$ şi $x^i = 0$, pentru $i \neq k$, deci $\mathcal{F}(e_k) = v_k$, $k = 1,\dots,n$.

Să demonstrăm unicitatea. Fie $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(E, E')$ cu proprietatea că $\mathcal{G}(e_k) = v_k$, $k = 1,\dots,n$.

Pentru orice $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$, din E, avem $\mathcal{G}(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \; \mathcal{G}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i$.

Valorile lui $\mathcal{G}$ coincid cu valorile lui $\mathcal{F}$, $\forall\, x \in E$, deci $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Aplicaţia $\mathcal{F}$, definită mai sus, este singura aplicaţie liniară care ia valorile date $\mathcal{F}(e_k) = v_k$, $k = 1,\dots,n$. $\square$

Reţinem din această demonstraţie următoarea expresie pentru imaginea lui x prin aplicaţia $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i = \sum_{i=1}^{n} x^i \; \mathcal{F}(e_i) = x^1 \, \mathcal{F}(e_1) + x^2 \, \mathcal{F}(e_2) + \dots + x^n \, \mathcal{F}(e_n) =$$

$$= \left(\mathcal{F}(e_1), \mathcal{F}(e_2), \dots, \mathcal{F}(e_n) \right) \cdot \left(x^1, x^2, \dots, x^n \right)^t$$

şi făcând notaţia $(\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \dots, \mathcal{A}(e_n)) := \mathcal{A}(B)$ obţinem următoarea consecinţă:

Consecinţa 3.1. Dacă $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(E, E')$ şi B este bază a lui E, atunci pentru $\forall\, x \in E$ avem

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(B) \cdot [x]_B .$$

Consecinţa 3.2. Dacă $\text{ind}_{E'}\, C$ şi $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(E, E')$, cu $C = \mathcal{F}(B)$, pentru B - bază, atunci $\mathcal{F}$ este monomorfism.

Demonstraţie. Fie $x, y \in E$, cu $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \overset{C\ 3.1.}{\Rightarrow} \mathcal{A}(B)[x]_B = \mathcal{A}(B)[y]_B \Leftrightarrow$
$\mathcal{A}(B)([x]_B - [y]_B) = 0_{E'}$ şi $\text{ind}_{E'}\, C = \text{ind}_{E'}\, \mathcal{A}(B) \Leftrightarrow [x]_B = [y]_B \Leftrightarrow B[x]_B = B[y]_B \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \mathcal{F}$ injectivă. $\square$

TEOREMA 3.3. *Dacă* $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(U_n, V)$ *monomorfism şi*

1. *dacă* $S = \{u_i\}_{i=1,\dots,n}$, *cu* $\text{ind}_{U_n} S \Leftrightarrow \text{ind}_V \mathcal{A}(S)$;

2. *dacă* $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *este bază a lui* $U_n \Leftrightarrow \text{ind}_V\, \mathcal{A}(B)$;

3. *dacă* $\dim U_n = \dim V = n$ *şi* B *este bază a lui* $U_n \Rightarrow \mathscr{F}(B)$ *bază a lui* V.

Demonstrație. 1. $ind_{U_n} S \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i = 0_{U_n} \Rightarrow \quad \lambda^i = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n\right].$

$\mathscr{F}$ monomorfism$\Rightarrow \left[pentru \quad u_i \neq 0_V \quad \Rightarrow \mathscr{F}(u_i) \neq 0_V\right] \Rightarrow \left[u_i \neq u_j \Rightarrow \mathscr{F}(u_i) \neq \mathscr{F}(u_j)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathscr{F}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i\right) = \mathscr{F}(0_U) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda^i (u_i) = 0_V \Rightarrow \quad \lambda^i = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow$ $\mathrm{ind}_V \mathscr{F}(S)$

2. şi **3.** rezultă din **1.**

DEFINIȚIA 3.3. *Fie* $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{L}(U, V)$ *şi* $\mathscr{F}_2 \in \mathscr{L}(V, W)$, *atunci* $\mathscr{F}: U \to W$ *prin* $\mathscr{F}(x) = (\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1)(x)$, $\forall x \in U$ *se numeşte* ***compunerea*** *sau* ***produsul transformări-lor liniare*** *şi se notează* $\mathscr{F} = \mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1$ *sau* $\mathscr{F} = \mathscr{F}_2 \mathscr{F}_1$.

PROPRIETĂȚI 3.3.

1. *Produsul transformărilor liniare este o transformare liniară.*

2. *Produsul este asociativ şi în general nu este comutativ.*

3. *Compunerea este distributivă la dreapta şi la stânga în raport cu adunarea.*

Demonstrație. (evidentă) exerciţiu.

În $\mathscr{L}(V, V)$ se pot introduce:

- transformarea identică $\mathscr{I}: V \to V$ prin $\mathscr{I}(x) = x$, $\forall x \in V$;
- puterile naturale ale unei transformări: $\mathscr{F}^0 = \mathscr{I}$, $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}\mathscr{F}^{n-1}$.

3.2. Nucleul şi imaginea unei transformări liniare

DEFINIȚII 3.4.1. *Fie* $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(U,V)$. *Se numeşte* ***nucleu*** *al transformării liniare* $\mathscr{F}$ *multimea*

(4) $\{u \in U \mid \mathscr{F}(u)=0_v\} = \mathscr{F}^{-1}(0_v) := Ker(\mathscr{F})$

adică mulțimea preimaginilor lui 0_v .

2. *Se numeşte* ***imagine*** *a transformarii liniare mulțimea*

(5) $\{v \in V \mid \exists u \in U$ *astfel încât* $\mathscr{F}(u)=v\} = \mathscr{F}(U) := Im(\mathscr{F})$,

adică mulțimea imaginilor lui U.

TEOREMA 3.4. *Dacă $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(U,V)$, atunci Ker($\mathcal{F}$)/**K** $\cong$ U /**K** şi Im $\mathcal{F}$**K** $\cong$ V /**K**.*

Demonstraţie. Evidentă din proprietăţile 3. şi respectiv 2. ale teoremei 3.1.

TEOREMA 3.5. Dacă U şi V sunt **K**-spaţii finit dimensionale şi $\mathcal{F} \in \mathcal{L}$(U,V) atunci

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{F}) + \dim \operatorname{Im}(\mathcal{F}) = \dim U$$

Demonstraţie. Fie $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază a lui Ker($\mathcal{F}$) şi $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ o bază a lui Im($\mathcal{F}$). Atunci

(6) $$\mathcal{F}(e_i) = 0_V, \ \forall\ 1 \le i \le n$$

şi există $x_j \in$ U astfel încât

(7) $$y_j = \mathcal{F}(x_j), \ \forall\ 1 \le j \le m \ .$$

Să arătăm că $\{e_1, e_2, \ldots, e_n,\ x_1, \ldots, x_m\}$ este o bază a lui U. Fie $\alpha^i, \beta^j \in$ **K**, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ şi să considerăm

(8) $$0_U = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i + \sum_{j=1}^{m} \beta^j x_j \ ,$$

unde, ţinând seamă de (6) şi (7), obţinem

$$0_V = \mathcal{F}(0_U) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i\ \mathcal{F}(e_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta^j\ \mathcal{F}(x_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta^j y_j$$

şi, cum $ind_V \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $\beta^j = 0$, $\forall 1 \le j \le m$, prin urmare (8) devine

$$0_U = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i$$

Cu $ind_U \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ rezultă $\alpha^i = 0$, $\forall\ 1 \le i \le n$. Aşadar, obţinem

$$ind_U \{e_1, e_2, \ldots, e_n, x_1, \ldots, x_m\}.$$

Să arătăm acum că U=L($\{e_1, e_2, \ldots, e_n, x_1, \ldots, x_m\}$). Pentru orice $x \in$U avem $\mathcal{F}(x) \in$ Im($\mathcal{F}$) şi mulţimea $\{y_1, \ldots, y_m\}$={$\mathcal{F}(x_1)$, ... ,$\mathcal{F}(x_m)$} fiind bază pentru Im($\mathcal{F}$), rezultă că există $\mu^1, \ldots, \mu^m \in$ **K** , astfel încât

$$\mathscr{F}(x) = \sum_{j=1}^{m} \mu^j \, \mathscr{F}(x_j) \ ,$$

deci $$\mathscr{F}\left(x - \sum_{j=1}^{m} \mu^j x_j \right) = 0_V \ ,$$

adică $$x - \sum_{j=1}^{m} \mu^j x_j \in Ker(\mathscr{F}) \ .$$

Cum $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ este bază pentru Ker ($\mathscr{F}$), există $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in$ **K** cu proprietatea $$x - \sum_{j=1}^{m} \mu^j x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i \ ,$$

deci $$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i + \sum_{j=1}^{m} \mu^j x_j \ .$$

Aşadar, U = L ({ $e_1, e_2, \dots, e_n, x_1, \dots, x_m$ }). □

DEFINIŢIA 3.5. *dim Ker($\mathscr{F}$) şi dim Im($\mathscr{F}$) se numesc* ***defectul*** *şi, respectiv,* ***rangul*** *tranformării liniare $\mathscr{F}$.*

TEOREMA 3.6. *Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(U, V)$ atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:* ***(a)*** *$\mathscr{F}$ monomorfism* $\Leftrightarrow$ ***(b)*** *Ker ($\mathscr{F}$) = $\{0_U\}$*

Demonstraţie. ***(b)*** $\Rightarrow$ ***(a)*** Din $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(y)$ şi $\mathscr{F}$ liniară $\Rightarrow$ $\mathscr{F}(x-y) = 0_V$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x - y \in Ker(\mathscr{F}) \Rightarrow \quad x - y = 0_U \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \mathscr{F}$ inj .

Ker($\mathscr{F}$) $\subseteq \{0_U\}$. Din $x \in$ Ker($\mathscr{F}$) $\Rightarrow$ $\mathscr{F}(x) = 0_V$ şi cum

$\mathscr{F}(0_U) = 0_V$

(a) $\Rightarrow$ ***(b)*** $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow \mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(0_U)$ şi $\mathscr{F}$ injectivă $\Rightarrow x = 0_U$;

$\{0_U\} \subset Ker(\mathscr{F})$, evidentă pentru că Ker($\mathscr{F}$)/**K** $\subset$ U /**K** (conf. T 3.4).

3.3.Matrice asociată unei transformări liniare

Fie E şi E’ două **K**-spaţii vectoriale şi B=($e_1, e_2, \ldots, e_n$) o bază în E. Conform cu T.3.2, o transformare liniară $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E,E’) este complet determinată dacă sunt date valorile $\mathscr{F}(e_j) = v_j \in$ E’, $j = 1, \ldots, n$.

Fie B’= ($u_1, u_2, \ldots u_p$) o bază în E’. Cei n vectori v_j pot fi daţi prin coordonatele lor în raport cu baza B’ , adică

$$v_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha^{ij} u_i \ , \quad j = 1, \ldots, n . \tag{9}$$

Construim un tablou cu coordonatele acestor vectori în care coordonatele vectorului v_j se găsesc pe coloana j, în ordine naturală. Matricea corespunzătoare acestui tablou o notăm M($\mathscr{F}$;B,B’).

$$\begin{array}{c|cccccc} & \mathscr{F}(e_1) & \mathscr{F}(e_2) & \ldots & \mathscr{F}(e_j) & \ldots & \mathscr{F}(e_n) \\ \hline u_1 & \alpha^{11} & \alpha^{12} & \ldots & \alpha^{1j} & \ldots & \alpha^{1n} \\ u_2 & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \ldots & \alpha^{2j} & \ldots & \alpha^{2n} \\ . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & & . & & . \\ u_p & \alpha^{p1} & \alpha^{p2} & \ldots & \alpha^{pj} & \ldots & \alpha^{pn} \end{array} \tag{10}$$

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}; B, B') = \begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \ldots & \alpha^{1n} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \ldots & \alpha^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{p1} & \alpha^{p2} & \ldots & \alpha^{pn} \end{bmatrix} .$$

DEFINIŢIA 3.5. *Fie* $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E')$, *B = (*$e_1, e_2, \ldots, e_n$*) o bază în E şi*

B'=(u_1, u_2,...,u_p) o bază în E'. Matricea M($\mathscr{F}$; B,B') ale cărei coloane sunt formate cu coordonatele vectorilor $\mathscr{F}$(e_j) în raport cu B', se numeşte ***matricea transformării $\mathscr{F}$ în raport cu perechea de baze (B,B').***

Pentru un endomorfism $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E,E') se foloseşte notația mai simplă M($\mathscr{F}$; B).

Observația 3.1. Matricea M($\mathscr{F}$; B,B')$\in$M(p,n,**K)** are numărul de linii p=cardB'=dim E' şi numărul de coloane n=card B=dim E, iar elementele sale sunt din corpul **K.** Deoarece, conform T.3.2., există o aplicație liniară unică $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E,E') cu valorile $\mathscr{F}(e_k)=v_k$ date, aplicația

M($\cdot$; B,B') : $\mathscr{L}$(E,E') $\to$ M(p,n,**K**)

având valorile M($\mathscr{F}$; B,B') definite mai sus, este o **bijecție** (deci pentru oricare transfor-mare $\mathscr{F}$ matricea M($\mathscr{F}$; B,B') există şi este unic determinată).

TEOREMA 3.7. *Fie $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E,E'), B=($e_1$,$e_2$,...,$e_n$) o bază în E, B'=($u_1$, u_2,..., u_n) o bază în E', M($\mathscr{F}$; B,B') matricea transformării şi doi vectori x $\in$ E, y $\in$ E' de forma*

$$x=\sum_{j=1}^{n} x^j e_j = B[x]_B \quad \text{si} \quad y=\sum_{i=1}^{n} y^i u_i = B'[y]_{B'}$$

Atunci are loc echivalența: $f(x) = y \iff M(\mathscr{F};B,B')[x]_B = [\mathscr{F}(x)]_B$.

Demonstrație. Avem

$$\mathscr{F}(x)=\mathscr{F}\left(\sum_{j=1}^{n} x^j e_j\right)=\sum_{j=1}^{n} x^j\ \mathscr{F}(e_j)\overset{(9)}{=}\sum_{j=1}^{n} x^j \sum_{i=1}^{p}\alpha^{ij}u_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\alpha^{ij}x^j u_i\ .$$

Schimbăm ordinea de sumare şi scoțând factor comun pe u_i

$$\mathscr{F}(x)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}x^j\right)\cdot u_i=(u_1,u_2,\ldots,u_p)\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{1j}x^j\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha^{2j}x^j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha^{3j}x^j\end{pmatrix}=$$

$$= B'\begin{pmatrix} (\alpha^{11},\alpha^{12},\ldots,\alpha^{1n})(x^1,x^2,\ldots,x^n)^t \\ (\alpha^{21},\alpha^{22},\ldots,\alpha^{2n})(x^1,x^2,\ldots,x^n)^t \\ \vdots \\ (\alpha^{p11},\alpha^{p2},\ldots,\alpha^{pn})(x^1,x^2,\ldots,x^n)^t \end{pmatrix} = B'\begin{pmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \ldots & \alpha^{1n} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \ldots & \alpha^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^{p1} & \alpha^{p2} & \ldots & \alpha^{pn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

unde am scos factor comun, la dreapta, matricea $(x^1,x^2,\ldots,x^n)^t = [x]_B$.

Avem deci

(11) $\mathcal{F}(x) = B' \cdot M(\mathcal{F};B,B')[x]_B$.

Vectorul $\mathcal{F}(x)$ din E' se mai scrie sub forma

(12) $\mathcal{F}(x) = B' \cdot [\mathcal{F}(x)]_{B'}$.

Din tranzivitatea relației de egalitate aplicată pentru (11) şi (12) şi din faptul că $ind_{E'}B'$, obținem

$$M(\mathcal{F};B,B')[x]_B = [\mathcal{F}(x)]_{B'} . \quad ❾$$

Observația 3.2. Forma (11) este **reprezentarea analitică a unei transformări liniare**.

TEOREMA 3.8. *Aplicația $M(\cdot\,;B,B'): \mathcal{L}(E,E') \to M(p,n,\boldsymbol{K})$ prin care oricărei relații liniare i se asociază o matrice în raport cu perechea de baze (B,B'), are următoarele proprietăți:*

(P.1.) *$M(\mathcal{F}+\mathcal{G};B,B') = M(\mathcal{F};B,B') + M(\mathcal{G};B,B')$, $\forall\, \mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathcal{L}(E,E')$;*

(P.2.) *$M(\lambda\mathcal{F};B,B') = \lambda M(\mathcal{F};B,B')$, $\forall\, \lambda \in \boldsymbol{K}$, $\forall\, \mathcal{F} \in \mathcal{L}(E,E')$.*

Demonstrație. **(P.1.)** Fie $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(E,E')$ cu matricele asociate $M(\mathcal{F};B,B')$ şi $M(\mathcal{G};B,B')$ date.

Din relațiile (9) şi (10) rezultă că $\mathcal{F}(B) = B' \cdot M(\mathcal{F};B,B')$, $\mathcal{G}(B) = B' \cdot M(\mathcal{G};B,B')$.

Dacă notăm $\mathcal{H} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$, avem

$\mathcal{H}(B) = \mathcal{F}(B) + \mathcal{G}(B) \Leftrightarrow B' \cdot M(\mathcal{H};B,B') = B' \cdot (M(\mathcal{F};B,B') + M(\mathcal{G};B,B'))$

adică, revenind la notația pentru $\mathcal{H}$ şi ținând seama de $ind_{E'}B'$,

$$M(\mathcal{F}+\mathcal{G};B,B') = M(\mathcal{F};B,B') + M(\mathcal{G};B,B').$$

(P.2.) Pentru transformarea liniară $\bullet\mathscr{F}$ avem

$$(\bullet\mathscr{F})(B) = \bullet\mathscr{F}(B) \Leftrightarrow B' \cdot M(\bullet\mathscr{F}; B,B') = B' \cdot \bullet\, M(\mathscr{F}; B,B')$$

adică (ţinând seama de $\mathrm{ind}_{E'} B'$)

$$M(\bullet\mathscr{F}; B, B') = \bullet M(\mathscr{F}; B,B') \;.$$ ☙

TEOREMA 3.9. *Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E')$, $\mathcal{G} \in \mathscr{L}(E', E'')$ şi B, B′, B″ baze, respectiv, în E, E′, E″, atunci există relaţia*

$$M(\mathcal{G} \circ \mathscr{F}; B,B'') = M(\mathcal{G}; B', B'') \cdot M(\mathscr{F}; B,B').$$

Demonstraţie. Din consideraţiile de mai sus, avem

$$\mathscr{F}(B) = B' \cdot M(\mathscr{F}; B,B'), \quad \mathcal{G}(B') = B'' \cdot M(\mathcal{G}; B',B'')$$

(13) $$(\mathcal{G} \circ \mathscr{F})(B) = \mathcal{G}(\mathscr{F}(B)) = \mathcal{G}(B' \cdot M(\mathscr{F}; B,B')) \overset{(11)}{=} B'' \cdot M(\mathcal{G}; B',B'') \cdot M(\mathscr{F}; B,B')$$

unde am folosit exprimarea (11) pentru $\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(B'[x]_{B'}) = B'' \cdot M(\mathcal{G}; B',B'') \cdot [x]_{B'}$ cu $[x]_{B'} = M(\mathscr{F}; B,B')$. Cum $(\mathcal{G}\circ\mathscr{F})(B) = B'' \cdot M(\mathcal{G}\circ\mathscr{F}; B,B'')$, din (13) rezultă (ţinând seama de $\mathrm{ind}_{E''} B''$)

$$M(\mathcal{G}\circ\mathscr{F}; B,B'') = M(\mathcal{G}; B',B'') \cdot M(\mathscr{F};B,B') \;.$$ ❿

TEOREMA 3.10. *Fie endomorfismele $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}' \in \mathscr{L}(E, E)$; B, B′ - baze în E şi M(B, B′) matricea de trecere de la B la B′. Matricele $M(\mathscr{F}'; B')$ şi $M(\mathscr{F}; B)$ sunt asociate aceluiaşi endomorfism $\Leftrightarrow$ are loc relaţia*

(14) $$M(\mathscr{F}'; B') = M^{-1}(B, B') \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot M(B, B').$$

Demonstraţie. Fie $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$. În $B' = B \cdot M(B, B')$ aplicând transformarea $\mathscr{F}$ obţinem $\mathscr{F}(B') = \mathscr{F}(B) \cdot M(B, B') \overset{D.3.5.}{\Rightarrow} B' \cdot M(\mathscr{F}; B') = B \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot M(B,B')$, în care, punând $B = B' \cdot M^{-1}(B, B')$, obţinem

$$B' \cdot M(\mathscr{F}; B') = B' \cdot M^{-1}(B, B') \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot M(B, B')$$

şi $\mathrm{ind}_E B'$ dă

$$M(\mathscr{F}'; B') = M^{-1}(B, B') \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot M(B, B').$$

Reciproc, presupunând adevărată relaţia (14), rezultă că pentru orice bază B′ din E avem

B❍≺ M(ℱ❍;B❍)=B❍≺ M $^{-1}$(B,B❍) ≺ M(ℱ; B) ≺ M(B,B❍)⊂

ℱ❍(B❍)=B ≺ M(ℱ; B) ≺ M(B, B❍)⇔ℱ❍(B❍) = ℱ(B) ≺ M(B,B❍) ⊂

ℱ❍(B❍) = ℱ(B ≺ M(B,B❍)) ⊂ ℱ❍(B❍) = ℱ(B❍), ✂ B❍ bază în E

❶ ℱ❍ = ℱ . ☙

DEFINIȚIA 3.6. Două matrice *se numesc* ***asemenea*** *dacă ele reprezintă aceeaşi transformare liniară ℱ în două baze diferite ale spațiului vectorial.*

PROPRIETATEA 3.4. *Toate matricele asemenea unei matrice date A sunt de forma*

$$S^{-1}AS \ ,$$

unde S este o matrice nesingulară.

Demonstrație. Rezultă imediat din definiția 3.6 şi din teorema 3.10.

3.4. Probleme rezolvate

1. Se consideră funcțiile $\mathscr{F}: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ definite respectiv prin

1) $\mathscr{F}(x) = x + a$, cu a vector fixat în $\mathbf{R^3}$;
2) $\mathscr{F}(x) = \lambda x$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$;
3) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1, x^2, \left(x^3\right)^2\right)$, cu $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbf{R^3}$;
4) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1 + 2x^2, x^1 - x^3, 2x^1 + x^2 - 3x^3\right)$;
5) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1, x^1 + x^2, x^1 + x^2 + x^3\right)$;
6) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1 + 1, x^2, x^3 - 1\right)$;
7) $\mathscr{F}(x) = \left(x^3, x^1, x^2 + k\right)$, cu $k \in \mathbf{R^*}$;
8) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1 + 2x^2 - 3x^3, 3x^1 - x^2 + 3x^3, 2x^1 + 3x^2 + 2x^3\right)$.

Rezolvare. 1) Dacă $a \neq 0_{R^3}$, atunci $\mathscr{F}\left(0_{R^3}\right) \neq 0_{R^3}$ şi $\mathscr{F}$ nu este aditivă, deci $\mathscr{F}$ nu este li-niară.

Dacă $a = 0_{R^3}$, atunci $\mathscr{F}(x) = x$, $\mathscr{F}(y) = y$ şi pentru $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avem

$\mathscr{F}(\alpha x+\beta y)=\alpha x+\beta y=\alpha\ \mathscr{F}(x)+\beta\ \mathscr{F}(y)$ şi $\mathscr{F}$ este liniară (conform cu proprietatea 3.1.)

2) $\mathscr{F}(\alpha x+\beta y)\overset{def}{=}\lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha(\lambda x)+\beta(\lambda y)=\alpha\ \mathscr{F}(x)+\beta\ \mathscr{F}(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^3$ şi $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, rezultă $\mathscr{F}\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$.

3) Considerăm şi $y=(y^1,y^2,y^3)\in\mathbf{R}^3$ şi $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Avem

$$\alpha x+\beta y=\left(\alpha x^1+\beta y^1,\alpha x^2+\beta y^2,\alpha x^3+\beta y^3\right)$$

şi

$$\mathscr{F}(\alpha x+\beta y)\overset{def}{=}\left(\alpha x^1+\beta y^1,\alpha x^2+\beta y^2,\left(\alpha x^3+\beta y^3\right)^2\right)\neq$$
$$\neq\left(\alpha x^1,\alpha x^2,\alpha\left(x^3\right)^2\right)+\left(\beta y^1,\beta y^2,\beta\left(y^3\right)^2\right)=\alpha\ \mathscr{F}(x)+\beta\ \mathscr{F}(y),$$

deci $\mathscr{F}$ nu este liniară.

4) $\mathscr{F}(\alpha x+\beta y)=\mathscr{F}\left(\alpha x^1+\beta y^1,\alpha x^2+\beta y^2,\alpha x^3+\beta y^3\right)\overset{def}{=}$

$\overset{def}{=}\left(\alpha x^1+\beta y^1+2\left(\alpha x^2+\beta y^2\right)\ ,\ \alpha x^1+\beta y^1-\alpha x^3-\beta y^3,\ 2\alpha x^1+2\beta y^1+\alpha x^2+\beta y^2-3\alpha x^3-\right.$
$\left.-3\beta y^3\right)=$
$=\left(\alpha\left(x^1+2x^2\right)+\beta\left(y^1+2y^2\right)\ ,\alpha\left(x^1-x^3\right)+\beta\left(y^1-y^3\right)\ ,\alpha\left(2x^1+x^2-3x^3\right)+\beta\left(2y^1+y^2-\right.\right.$
$\left.\left.-3y^3\right)\right)=$
$=\alpha\left(x^1+2x^2,x^1-x^3,2x^1+x^2-3x^3\right)+\beta\left(y^1+2y^2,y^1-y^3,2y^1+y^2-3y^3\right)=$
$=\alpha\ \mathscr{F}(x)+\beta\ \mathscr{F}(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^3$, deci $\mathscr{F}$ este transformare liniară.

5) $\mathscr{F}$ este liniară (analogă cu problema anterioară – 1.4).

6) $\mathscr{F}(x+y)\overset{def}{=}\left(x^1+y^1+1,x^2+y^2,x^3+y^3-1\right)=\left(x^1,x^2,x^3\right)+\left(y^1+1,y^2,y^3-1\right)\neq$

$$\neq\left(x^1+1,x^2,x^3-1\right)+\left(y^1+1,y^2,y^3-1\right)=\mathscr{F}(x)+\mathscr{F}(y),\ \text{pentru}\ x,y\in\mathbf{R}^3.$$

Deci $\mathscr{F}$ nu este aditivă $\Rightarrow$ $\mathscr{F}\notin\mathscr{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$.

7) Deoarece $\mathscr{F}\left(0_{R^3}\right)=(0,0,k)\neq(0,0,0)=0_{R^3}$, rezultă că $\mathscr{F}\notin\mathscr{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$.

8) $\mathscr{F}$ este liniară (analogă cu problema 1.4).

2. Fie $\mathscr{F}\in \mathscr{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4)$ dată prin $\mathscr{F}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)=\left(x^3, x^1+x^4, x^2-x^4, x^3\right)$. Să se scrie Im($\mathscr{F}$) şi Ker($\mathscr{F}$).

Rezolvare. Im($\mathscr{F}$) $\overset{def}{=}\{y\in\mathbf{R}^4 \mid \exists x\in \mathbf{R}^4 \text{ a.î. } y=\mathscr{F}(x)\}$, deci

$$\operatorname{Im}(\mathscr{F})=\left\{\left(x^3, x^1+x^4, x^2-x^4, x^3\right) \mid \left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)\in\mathbf{R}^4\right\}.$$

Din definiție Ker($\mathscr{F}$) $=\{x\in\mathbf{R}^4 \mid \mathscr{F}(x)=0_{R^4}\}$, deci $y=\left(x^3, x^1+x^4, x^2-x^4, x^3\right)=(0,0,0,0)$, de unde rezultă $x^3=0, \quad x^1=-x^4, \quad x^2=x^4$. Avem

$$\operatorname{Ker}(\mathscr{F})=\left\{\left(-x^4, x^4, 0, x^4\right) \mid x^4\in\mathbf{R}\right\}.$$

3. Să se determine defectul şi rangul transformării liniare $\mathscr{F}: \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definită prin

$$\mathscr{F}(x)=\left(x^1+x^3, 0, x^1+x^2\right), \text{ cu } x=\left(x^1, x^2, x^3\right)\in \mathbf{R}^3,$$

explicitând câte o bază în Ker($\mathscr{F}$) şi în Im($\mathscr{F}$).

Rezolvare. Din definiție Ker($\mathscr{F}$) $=\{x\in\mathbf{R}^3 \mid \mathscr{F}(x)=0_{R^3}\}$, deci Ker($\mathscr{F}$) este mulțimea vectorilor $x=\left(x^1, x^2, x^3\right)$ pentru care

$$\left(x^1+x^3 \quad , \quad 0 \quad , \quad x^1+x^2\right)=(0,0,0).$$

Obținem sistemul $x^1+x^3=0, \quad x^1+x^2=0$ care este simplu nedeterminat şi are soluția $x^1=-x^3, \quad x^2=x^3$, cu $x^3\in\mathbf{R}$, deci Ker($\mathscr{F}$) $=\left\{\left(-x^3, x^3, x^3\right) \mid x^3\in\mathbf{R}\right\}$.

Prin urmare, orice vector din Ker($\mathscr{F}$) are forma $x=x^3(-1,1,1)$. Vectorul $e=(-1,1,1)\neq 0_{R^3}$ este un vector liniar independent, de aceea mulțimea $\{e\}$ este o bază în subspațiul Ker($\mathscr{F}$) şi deci **n = dim(Ker($\mathscr{F}$)) = 1.**

Având în vedere definiția subspațiului Im($\mathscr{F}$) şi definiția lui $\mathscr{F}$, conchidem că ori-ce vector y din Im($\mathscr{F}$) este de forma

$$y=\left(x^1+x^3 \quad , \quad 0 \quad , \quad x^1+x^2\right)=x^1(1,0,1)+x^2(0,0,1)+x^3(1,0,0), \text{ cu } x^1, x^2, x^3\in\mathbf{R}.$$

Se observă că pentru $x^1=-x^2=-x^3=1\neq 0$, rezultă $y=0_{R^3}$. Deci mulțimea de vectori $\{(1,0,1), \quad (0,0,1), \quad (1,0,0)\}$ este liniar dependentă. Mai mult, orice vector din Im($\mathscr{F}$) se poate exprima în funcție de vectorii $e_1=(0,0,1)$ şi $e_2=(1,0,0)$, care sunt liniar independenţi. Rezultă că o bază în Im($\mathscr{F}$) este formată din aceşti vectori şi atunci **r=dim(Im($\mathscr{F}$)) = 2.**

4. Fie V_3 spaţiul vectorial real şi aplicaţia $\mathscr{F}$: $V_3 \to V_3$ definită prin

$$\mathscr{F}(x) = \left(x^1, x^1 - x^2, x^1 + x^2 - x^3\right), \text{ cu } x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in V_3 .$$

i) Să se arate că transformarea $\mathscr{F}$ este liniară.

ii) Să se scrie matricea M($\mathscr{F}$; B) a transformării $\mathscr{F}$ în aceeaşi bază B în care au fost date componentele vectorilor x şi $\mathscr{F}(x)$.

Rezolvare. i) Se verifică uşor că, pentru orice $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ şi $y = \left(y^1, y^2, y^3\right)$ din V_3 şi pentru orice λ din **R**, avem $\mathscr{F}(x+y) = \mathscr{F}(x) + \mathscr{F}(y)$ şi $\mathscr{F}(\lambda x) = \lambda\ \mathscr{F}(x)$.

ii) Considerăm baza B formată din vectorii e_1, e_2 şi e_3. Scriind vectorii x şi $\mathscr{F}(x)$ în baza B, relaţia de definiţie a funcţiei $\mathscr{F}$ devine

$$\mathscr{F}\left(x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3\right) = x^1 e_1 + \left(x^1 - x^2\right)\ e_2 + \left(x^1 + x^2 - x^3\right)\ e_3$$

sau

$$x^1\ \mathscr{F}(e_1) + x^2\ \mathscr{F}(e_2) + x^3\ \mathscr{F}(e_3) = x^1(e_1 + e_2 + e_3) + x^2(-e_2 + e_3) + x^3(-e_3).$$

Din aceasta rezultă

$$\mathscr{F}(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \qquad \mathscr{F}(e_2) = -e_2 + e_3, \qquad \mathscr{F}(e_3) = -e_3 .$$

Matricea transformării $\mathscr{F}$ în baza B$=\{e_1, e_2, e_3\}$ este

$$\text{M}(\mathscr{F};\ \text{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Această matrice are pe coloane componentele vectorilor $\mathscr{F}(e_1)$, $\mathscr{F}(e_2)$, $\mathscr{F}(e_3)$ (componentele transformatelor prin $\mathscr{F}$ ai vectorilor bazei) raportaţi la aceeaşi bază B.

5. Un endomorfism $\mathscr{A}$**,** al spaţiului vectorial cu n dimensiuni, transformă vectorii liniar independenţi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în vectorii corespuzători $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Să se arate că matricea M($\mathscr{A}$; B) a acestei transformări $\mathscr{A}$ într-o anumită bază $\mathrm{B}=\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ poate fi determinată cu ajutorul relației

$$\mathrm{M}(\mathscr{A};\,\mathrm{B})=Y\cdot X^{-1} \quad ,$$

unde coloanele matricelor X şi Y sunt alcătuite din componentele (coordonatele) vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectiv, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, în aceeaşi bază B.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată şi fie

$$\mathrm{M}(\mathscr{A};\,\mathrm{B})=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}$$

matricea căutată a transformării $\mathscr{A}$ raportată la baza $\mathrm{B}=\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$. Conform definiției avem

(1) $$\mathscr{A}\left(e_i\right)=\sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j \quad , \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Scriem că în baza B transformarea $\mathscr{A}$ trece vectorul $x_k=\sum_{i=1}^{n} x_k^i e_i$ în vectorul $y_k=\sum_{i=1}^{n} y_k^i e_i$

şi, ținând seamă de relația (1), avem

$$\mathscr{A}\left(x_k\right)=\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_k^i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_k^i\ \mathscr{A}\left(e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_k^i \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_k^i\right)\cdot e_j=y_k=\sum_{j=1}^{n} y_k^j e_j \ .$$

Din aceasta rezultă

(2) $$y_k^j=\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_k^i\,, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Aranjând componentele vectorilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pe coloane şi folosind relațiile (2), obținem ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \ldots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \ldots & y_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & \ldots & y_n^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

sau

$$Y = \mathrm{M}(\mathscr{A};\mathrm{B}) \cdot X \quad ,$$

de unde

$$\mathrm{M}(\mathscr{A};\mathrm{B}) = Y \cdot X^{-1}.$$

3.5. Probleme propuse

1. Fie $\mathbf{R_n}[X]$ spațiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult n. Să se arate că funcția $\mathscr{F}$: $\mathbf{R_n}[X] \to \mathbf{R_n}[X]$ definită prin $\mathscr{F}(P(x)) = P(x+1) - P(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, este o trans-formare liniară.

2. Să se cerceteze care dintre funcțiile definite mai jos sunt transformări liniare.

1) $\mathscr{F}(P(x)) = P(-x)$, $\quad P \in \mathbf{R_n}[X]$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) $\mathscr{F}(P(x)) = P(x+1)$, $\quad P \in \mathbf{R_n}[X]$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

3) $\mathscr{F}(P(x)) = P(x+2) - P(x)$, $\quad P \in \mathbf{R_n}[X]$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

4) $\mathscr{F}(P(x)) = P(x^2)$, $\quad P \in \mathbf{R_n}[X]$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

5) $\mathscr{F}(x) = \left((x^1)^2, (x^2)^2, (x^3)^2\right)$, $\quad x = (x^1, x^2, x^3) \in V_3$.

6) $\mathscr{F}(x) = \left(e^{x^1}, e^{x^2}\right)$, $\quad x = (x^1, x^2) \in V_2$.

7) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1 + 1, x^2 + 1, x^3 - 1\right)$, $\quad x = (x^1, x^2, x^3) \in V_3$.

8) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1 + x^2, 0, x^1 + x^2 + x^3\right)$, $\quad x = (x^1, x^2, x^3) \in V_3$.

9) $\mathscr{F}(x) = \left(x^1, x^1 + x^2, x^1 + x^2 + x^3, x^1 + x^2 + x^3 + x^4\right)$, $\quad x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in V_4$.

3. (*Derivata*). Fie spațiile vectoriale reale $V = \{f : (a,b) \to \mathbf{R} \mid f \quad \textit{functie} \quad \textit{derivabila}\}$ şi $W = \{g : (a,b) \to \mathbf{R} \quad \}$**.** Să se arate că funcția $\mathscr{D} : V \to W$, dată prin $g = \mathscr{D}(f) \equiv f'$, este o transformare liniară.

4. *(Integrala definită).* Fie spațiul vectorial real $V = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \mid$ f este integrabilă în sens Riemann $\}$. Să se arate că funcția $\mathscr{I} : V \to \mathbf{R}$, definită prin $\mathscr{I}(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx$, este o transformare liniară.

5. ***(Integrala nedefinită sau primitiva).*** Fie spațiul vectorial real

$$V=\{f:[a,b]\to\mathbf{R} \mid \text{f este funcție continuă}\}.$$

Să se arate că funcția

$$\mathscr{P}:V\to V,\ \mathscr{P}(f)=g,\ \ g(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt,\ \text{pentru}\ a\le x\le b,$$

este liniară.

6. Fie spațiul vectorial real $V=\{f:[a,b]\to\mathbf{R} \mid \text{f este funcție continuă}\}$. Să se verifice că aplicația $\mathscr{F}:V\to V$, $\mathscr{F}(f)=g$, $g(x)=\int_a^b f(t)\cos(x-t)\cdot dt$, pentru $a\le x\le b$, este o transformare liniară.

7. Să se cerceteze care dintre funcțiile $\mathscr{F}:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ definite mai jos, sunt transformări liniare şi în caz afirmativ să se determine defectul şi rangul fiecărei transformări.

1) $\mathscr{F}(x)=\left(\ln\left|arctg\left(x^1+x^2+x^3\right)\right|,\ x^1,\ e^{x^1+x^2+x^3}\right)$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)\in\mathbf{R^3}$.

2) $\mathscr{F}(x)=\left(x^1,x^1+x^2,\ 0\right)$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)\in\mathbf{R^3}$.

3) $\mathscr{F}(x)=\left(x^1+x^2,x^2+x^3,x^1+x^3\right)$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)\in\mathbf{R^3}$.

4) $\mathscr{F}(x)=x+(0,3,0)$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)\in\mathbf{R^3}$.

5) $\mathscr{F}(x)=\left(x^2,x^1,x^2+x^3\right)$, cu $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)\in\mathbf{R^3}$.

8. Pentru problemele **3**. şi **5**. să se determine Ker($\mathscr{D}$) şi, respectiv, Ker($\mathscr{P}$).

9. Pe spațiul vectorial real P_n al funcțiilor polinomiale reale de grad cel mult n, se definesc funcțiile

$$\mathrm{P}(x)\to\mathscr{F}_1(P(x))=xP(x),$$

$$\mathrm{P}(x)\to\mathscr{F}_2(P(x))=x\int_0^1 tP(t)dt,\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

1) Să se arate că $\mathscr{F}_1$ şi $\mathscr{F}_2$ sunt transformări liniare.

2) Să se determine Ker($\mathscr{F}_2$) şi Im($\mathscr{F}_2$).

10. Pentru transformarea liniară $\mathscr{D}$, definită de problema **3**, să i se găsească matricea M($\mathscr{D}$; B) în cazurile :

1) $B=\left(1,x,x^2,\dots,x^n\right)$,

2) $B=\left(1,\dfrac{x-a}{1},\dfrac{(x-a)^2}{2!},\dots,\dfrac{(x-a)^n}{n!}\right)$, cu $a\in\mathbf{R}$ fixat.

11. Fie $\mathscr{F}$: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ o transformare liniară dată prin imaginile $\mathscr{F}(e_1)=(2,1)$, $\mathscr{F}(e_2)=(0,1)$, $\mathscr{F}(e_3)=(1,1)$, unde $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

i) Să se determine imaginea unui vector oarecare din $\mathbf{R}^3$ **.**

ii) Să se determine imaginile vectorilor $u=(-1,1,-2)$, $v=(1,0,-2)$ şi $w=(0,2,-1)$ prin $\mathscr{F}$.

12. Fie (e_1,e_2,e_3) o bază a spaţiului vectorial V_3. Transformarea liniară $\mathscr{U}\in\mathscr{L}(V_3, V_3)$ duce vectorul $x_1=(0,0,1)$ în $y_1=(3,5,-2)$, $x_2=(0,1,1)$ în $y_2=(0,1,0)$, $x_3=(1,1,1)$ în $y_3=(-1,0,1)$. Care este matricea M($\mathscr{U}$; B) în cazurile :

1) $B=(e_1,e_2,e_3)$;

2) $B=(x_1,x_2,x_3)$.

13. Fie $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2\in\mathscr{L}(\mathbf{R}_3[X], \mathbf{R}_3[X])$ două endomorfisme definite prin relaţiile :

$\mathscr{F}_1\left(a^0+a^1X+a^2X^2+a^3X^3\right)=a^0+a^1X+a^2X^2$, $\mathscr{F}_2\left(X^2+X^3\right)=X+X^3$,

$\mathscr{F}_2\left(X+X^3\right)=1+X^3$, $\mathscr{F}_2\left(1+X^3\right)=1+X+X^2+X^3$, $\mathscr{F}_2\left(1+X+X^2+X^3\right)=0$.

Să se determine matricele transformărilor $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ şi, respectiv, $\mathscr{F}_2\mathscr{F}_1$, în raport cu baza canonică a spaţiului $\mathbf{R}_3[X]$.

14. Endomorfismul $\mathscr{F}\in\mathscr{L}(V_4, V_4)$ are în baza $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ matricea

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};\mathrm{B})=\begin{bmatrix}1&2&3&2\\-1&0&3&1\\2&1&5&-1\\1&1&2&2\end{bmatrix}.$$

Care va fi matricea endomorfismului $\mathscr{F}$, dacă luăm ca nouă baza

1) $B'=\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right)$;

2) $B''=\left(e_1,e_1+e_2,e_1-e_2+e_3,e_1+e_2-e_3-e_4\right)$.

15. Dacă $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ sunt date prin matricele

$$\mathrm{M}(\mathscr{A}_1;\mathrm{B})=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \qquad \mathrm{M}(\mathscr{A}_2;\mathrm{B})=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix},$$

cu B baza canonică a spațiului $\mathbf{R}^3$, atunci

1) să se determine imaginea vectorului $u=(0,1,-1)$ prin transformările $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_1^{-1}$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_2^{-1}$;

2) să se determine imaginea vectorului $v=(1,3,-2)$ prin $(\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2)$ şi $(\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2)^{-1}$;

3) să se determine imaginea vectorului $w=(0,1,2)$ prin $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$, $(\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1)^{-1}$ şi $(\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2)^{-1}$.

4. VECTORI PROPRII. VALORI PROPRII.

4.1. Subspaţii invariante ale unui endomorfism

Fie E un **K** - spaţiu vectorial.

DEFINIŢIA 4.1. *Fie $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E)$ un endomorfism şi E_1 un subspaţiu vectorial al lui E. Se spune că E_1 este un* ***subspaţiu invariant al lui*** *$\mathscr{F}$ (sau* ***faţă de*** *$\mathscr{F}$) dacă*

$$\forall\, x \in E_1, \text{ atunci } \mathscr{F}(x) \in E_1,$$

TEOREMA 4.1. *Fie subspaţiul $E_1 / \mathbf{K} \subset E / \mathbf{K}$ şi B_1 o bază a lui E_1.*

Subspaţiul E_1 este invariant faţă de $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E)$ $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}(B_1) \subset E_1$.

Demonstraţie. Dacă E_1 este invariant faţă de $\mathscr{F}$ şi $B_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$, atunci $\mathscr{F}(B_1) = (\mathscr{F}(u_1), \mathscr{F}(u_2), \ldots, \mathscr{F}(u_p)) \subset E_1$ deoarece, conform cu D.4.1, pentru orice $k = 1, \ldots, p$,

$$u_k \in E_1 \Rightarrow \mathscr{F}(u_k) \in E_1.$$

Reciproc, fie $x \in E_1$ arbitrar care, raportat la baza B_1, se scrie

$$x = \alpha^1 u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots + \alpha^p u_p .$$

$\mathscr{F}$ este o transformare liniară

$$\mathscr{F}(x) = \alpha^1 \mathscr{F}(u_1) + \alpha^2 \mathscr{F}(u_2) + \ldots + \alpha^p \mathscr{F}(u_p) ,$$

adică $\mathscr{F}(x)$ este o combinaţie liniară formată din vectorii $\mathscr{F}(u_k)$ din subspaţiul E_1, $\forall\, k = 1, \ldots, p$, deci $\mathscr{F}(x) \in E_1$, $\forall\, x \in E_1$. □

Observații 4.1. (a) Cunoaşterea unor subspații invariante ale unui endomorfism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}$(E, E) permite alegerea unei baze convenabile în care matricea lui $\mathcal{T}$ are o formă mai simplă.

(b) Mulțimea $\{0_E\}$ este un subspațiu invariant față de orice endomorfism $\mathcal{T}$, dar nu prezintă interes. Dimensiunea sa este zero.

(c) Fie E_1/**K** $\subset$ E/**K,** cu dim E_1=1. Orice sistem $B_1 = \{u\}$, cu $u \in E_1 \setminus \{0_E\}$, este o bază în E_1. Conform cu T.4.1, E_1 este invariant față de $\mathcal{T} \in \mathcal{L}$(E) dacă şi numai dacă $\mathcal{T}(u) \in E_1$, adică $\exists\ \lambda \in \mathbf{K}$ a.î. $\mathcal{T}(u) = \lambda u$. Vectorii cu această proprietate prezintă un interes deosebit în cele ce urmează.

4.2. *Vectori proprii. Valori proprii. Definiții. Proprietăți*

Fie E un **K** -spațiu vectorial.

DEFINIȚIA 4.2. *Un vector $x \in E \setminus \{0_E\}$ se numeşte* ***vector propriu*** *al endomorfismului $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E,E)$ dacă $\exists\ \lambda \in \mathbf{K}$ a.î.*

(1) $\mathcal{T}(x) = \lambda x$.

Un scalar $\lambda \in \mathbf{K}$ se numeşte ***valoare proprie*** *a endomorfismului $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E,E)$ dacă $\exists\ x \in E \setminus \{0_E\}$ care verifică egalitatea (1).*

Observații 4.2. (a) Unui vector propriu îi corespunde o singură valoare proprie. Într-adevăr, $\mathcal{T}(x)=\lambda x$ şi $\mathcal{T}(x)=\mu x \Rightarrow (\lambda-\mu)x = 0_E \Rightarrow \lambda = \mu$, deoarece $x \neq 0_E$.

(b) Unei valori proprii λ îi corespund o infinitate de vectori proprii.

Într-adevăr, dacă x este vector propriu asociat valorii proprii λ (adică $\mathcal{T}(x)=\lambda x$), atunci toți vectorii subspațiului E_1 generat de x, mai puțin vectorul nul 0_E, vor fi vectori proprii asociați valorii proprii λ (deoarece $\mathcal{T}(kx)=\lambda kx$, $\forall\ k \in \mathbf{K} \setminus \{0_{\mathbf{K}}\}$).

TEOREMA 4.2. *Vectorii proprii $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ai unui endomorfism $\mathcal{T}$, asociați unor valori proprii distincte $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p$, sunt liniar independenți.*

Demonstrație. Presupunem contrariul : $\exists$ $\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^p \in$ **K** nu toți nuli, a.î.

(2) $$\beta^1 x_1 + \beta^2 x_2 + \dots + \beta^p x_p = 0_E \quad .$$

Dispunem de numerotare şi putem face ca $\beta^1 \neq 0_{\mathbf{K}}$. Din aceasta deducem

$$\beta^1 \mathcal{A}(x_1) + \beta^2 \mathcal{A}(x_2) + \dots + \beta^p \mathcal{A}(x_p) = 0_E$$

sau, ținând seama că $x_1, x_2, \dots, x_p$ sunt vectori proprii,

(2') $$\beta^1 \lambda^1 x_1 + \beta^2 \lambda^2 x_2 + \dots + \beta^p \lambda^p x_p = 0_E \quad .$$

Înmulțim (2) cu λ^1 şi o scădem din (2'),

$$\beta^2 \left(\lambda^2 - \lambda^1\right) x_2 + \beta^3 \left(\lambda^3 - \lambda^1\right) x_3 + \dots + \beta^p \left(\lambda^p - \lambda^1\right) x_p = 0_E \quad .$$

Dacă ind$_E$$\{x_2, \dots, x_p\}$, din această ultimă egalitate, cu $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^p$ distincte, rezultă $\beta^2 = \beta^3 = \dots = \beta^p = 0$ şi (2) se reduce la $\beta^1 x_1 = 0_E$, cu $\beta^1 \neq 0_{\mathbf{K}}$, deci $x_1 = 0_E$. Dar x_1 este vector propriu şi conform cu D.4.2, $x_1 \neq 0_E$. Prin urmare nu are loc ind$_E$$\{x_2, \dots, x_p\}$. Am demonstrat astfel că

$$\text{dep}_E\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \Rightarrow \text{dep}_E\{x_2, x_3 \dots, x_p\}.$$

Repetând raționamentul, obținem

$$\text{dep}_E\{x_2, x_3 \dots, x_p\} \Rightarrow \text{dep}_E\{x_3, x_4, \dots, x_p\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{dep}_E\{x_p\} \ ,$$

ceea ce este fals deoarece $x_p \neq 0_E$ şi $\mu x_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$ (care dă ind$_E$$\{x_p\}$).

În concluzie, ind$_E$$\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

DEFINIȚIA 4.3. *Fie* λ^j *o valoare proprie a endomorfismului* $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, E)$. *Mulțimea* $E_j = \{ x \in E \mid \mathcal{A}(x) = \lambda^j x \}$ *se numeşte* ***subspațiul propriu asociat valorii proprii*** λ^j .

Se observă că E_j este format din vectorul nul şi toți vectorii proprii asociați valorii proprii λ^j.

TEOREMA 4.3. (a subspațiilor proprii).

(P.1.) *Subspațiul propriu E_j, asociat valorii proprii λ^j, este un subspațiu vectorial al lui E, invariant față de $\mathscr{F}$.*

(P.2.) *Subspațiile proprii asociate valorilor proprii distincte $\lambda^1 \neq \lambda^2$, au proprietatea că $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.*

Demonstrație. **(P.1.)** Să arătăm mai întâi că E_j / **K** $\subset$ E / **K**. Egalitatea $\mathscr{F}(x) = \lambda^j x$ se mai scrie $(\mathscr{F} - \lambda^j \mathscr{I})(x) = 0_E$, cu $\mathscr{I}$ transformarea identică. Deci E_j este nucleul endomorfismului $\mathscr{F} - \lambda^j \mathscr{I}$ şi, conform cu T.3.4, este un subspațiu vectorial al lui E.

Subspațiul E_j este invariant față de $\mathscr{F}$ deoarece $\forall\ x \in E_j$, $\mathscr{F}(x) = \lambda^j x \in E_j$ (conform D.4.1) .

(P.2.) Fie $\lambda^1 \neq \lambda^2$. Pentru $\forall x \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in E_1 \\ x \in E_2 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{F}(x) = \lambda^1 x$, $\mathscr{F}(x) = \lambda^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (\lambda^1 - \lambda^2) \cdot x = 0_E$ şi $\lambda^1 \neq \lambda^2 \Rightarrow x = 0_E \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. ∎

4.3. Polinom caracteristic

În cele ce urmează ne vom ocupa de determinarea valorilor proprii şi a vectorilor proprii pentru $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E, E).

Fie $\mathscr{I}$ endomorfismul unitate, $\mathscr{I}(x) = x$, $\forall\ x \in E$. Egalitatea (1) este echivalentă cu

(3) $$(\mathscr{F} - \lambda \mathscr{I})(x) = 0_E .$$

Fie B o bază în E, M($\mathscr{F}$; B) $= \left[\alpha^{ij}\right]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ şi M ($\mathscr{I}$; B) = I_n, unde I_n este matricea unitate de ordinul n = dim E. La rândul ei, egalitatea (3) este echivalentă cu

(4) $$(M(\mathscr{F}; B) - \lambda I_n)[x]_B = [0_E]_B ,$$

unde $[x]_B$ este matricea coloană formată din coordonatele lui x în baza B.

DEFINIŢIA 4.4. *Egalitatea dată de relaţia (4) se numeşte* ***ecuaţia vectorilor proprii****.*

Aceasta este folosită pentru determinarea coordonatelor $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ale vectorului propriu x, atunci când se cunoaşte valoarea proprie λ.

Ecuaţia matriceală (4) se scrie explicit sub forma

$$(4') \qquad \begin{bmatrix} \alpha^{11}-\lambda & \alpha^{12} & \dots & \alpha^{1n} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22}-\lambda & \dots & \alpha^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{n1} & \alpha^{n2} & \dots & \alpha^{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(unde } 0=0_{\mathbf{K}}\text{)}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(\alpha^{11}-\lambda\right)x^1 + \alpha^{12}x^2 + \dots + \alpha^{1n}x^n = 0 \\ \alpha^{21}x^1 + \left(\alpha^{22}-\lambda\right)x^2 + \dots + \alpha^{2n}x^n = 0 \\ \vdots \\ \alpha^{n1}x^1 + \alpha^{n2}x^2 + \dots + \left(\alpha^{nn}-\lambda\right)x^n = 0 \end{cases}$$

de ecuaţii liniare şi omogene în necunoscutele x^i, $i=1,\dots,n$, pentru care soluţia banală nu convine deoarece $x \in$ E \ {0_E}. Deci valorile proprii sunt acele valori ale lui λ pentru care determinantul ataşat matricei sistemului este nul.

DEFINIŢIA 4.5. *Polinomul*

$$(6) \qquad P(\lambda) = \det\left(M(\mathscr{F}; B) - \lambda I_n\right)$$

se numeşte ***polinomul caracteristic*** *al endomorfismului $\mathscr{F}$, iar $P(\lambda)=0$ se numeşte* ***ecuaţia caracteristică*** *a lui $\mathscr{F}$.*

TEOREMA 4.4. *Polinomul caracteristic al unui endomorfism $\mathscr{F}$ este un invariant la schimbarea bazei spaţiului vectorial E.*

Demonstraţie. Fie B şi $\tilde{B}$ două baze în E, $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E,E) , cu M($\mathscr{F}$; B), M($\mathscr{F}$, $\tilde{B}$) matricele asociate lui $\mathscr{F}$ în cele două baze şi polinoamele caracteristice ale lui $\mathscr{F}$ în cele două baze

$$P(\lambda) = \det\left(\mathrm{M}(\mathscr{F}; B) - \lambda\, I_n\right), \text{ respectiv, } \tilde{P}(\lambda) = \det\left(\mathrm{M}(\mathscr{F}, \tilde{B}) - \lambda\, I_n\right).$$

Conform egalităţii (14), a teoremei 3.10,

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}, \tilde{B}) = M^{-1}\left(B, \tilde{B}\right) \cdot \mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B}) \cdot M\left(B, \tilde{B}\right),$$

unde M(B, $\widetilde{B}$) este matricea de trecere de la B la $\widetilde{B}$. Avem în mod evident că

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{M}^{-1}(B, \widetilde{B}) \cdot \mathrm{I}_n \cdot \mathrm{M}(B, \widetilde{B})$$

şi , prin urmare,

$$\widetilde{P}(\lambda) = \det\left(M^{-1}\left(B,\widetilde{B}\right)\cdot \mathrm{M}(\mathscr{F}; B) \cdot M\left(B,\widetilde{B}\right) - \lambda M^{-1}\left(B,\widetilde{B}\right)\cdot I_n \cdot M\left(B,\widetilde{B}\right)\right) =$$

$$= \det M^{-1}\left(B,\widetilde{B}\right)\cdot \det\left(\mathrm{M}(\mathscr{F}; B) - \lambda\, I_n\right)\cdot \det M\left(B,\widetilde{B}\right) =$$

$$= \frac{1}{\det M\left(B,\widetilde{B}\right)}\cdot \det M\left(B,\widetilde{B}\right)\cdot \det\left(\mathrm{M}(\mathscr{F}; B) - \lambda\, I_n\right) = P(\lambda),$$

deoarece determinantul produsului a două matrice pătrate de acelaşi ordin este egal cu produsul determinanților celor două matrice pătrate.

Acest rezultat justifică de ce P(λ) a fost numit, simplu, polinomul caracteristic al lui $\mathscr{F}$ şi nu polinomul caracteristic al lui $\mathscr{F}$ în baza B.

TEOREMA 4.5. *Fie E un* ***K*** *- spațiu vectorial şi* $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E)$*. Dacă* ***K*** *este un corp algebric închis, endomorfismul* $\mathscr{F}$ *admite valori proprii şi vectori proprii.*

Demonstrație. P(λ) este un polinom cu grad P(λ) $= n = \dim E$ şi cu coeficienții din corpul **K**. Dacă **K** este algebric închis, ecuația $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ admite cel puțin o soluție $\lambda^1 \in$ **K** **.** Printr-un procedeu cunoscut, din aproape în aproape se obține descompunerea

$$\mathrm{P}(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda - \lambda^1\right)^{m_1}\left(\lambda - \lambda^2\right)^{m_2} \ldots \left(\lambda - \lambda^l\right)^{m_l},$$

cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_l = n$. Valorile proprii ale endomorfismului $\mathscr{F}$ sunt $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^l$, cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \ldots, m_l$.

Unei valori proprii λ^i îi corespunde o infinitate de vectori proprii care au coordonatele în baza B date de sistemul (5), în care λ este înlocuit cu λ^i.

În particular, dacă **K** = **C**, orice endomorfism $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E, E) admite valori proprii şi vectori proprii. Dacă **K** = **R**, nu orice $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E, E) admite valori proprii şi vectori proprii.

4.4. Forma diagonală

O preocupare importantă în cele ce urmează este determinarea unei baze în E, asfel încât matricea unui endomorfism $\mathcal{F}\in\mathcal{L}(E,E)$ să aibă forma cea mai simplă, aşa numita **formă canonică** . Pentru acest motiv, determinarea unei baze în care matricea endomorfismului $\mathcal{F}$ are forma diagonală, prezintă un interes deosebit. Dat fiind un endomorfism prin matricea sa într-o bază arbitrară, această operație se numeşte **reducerea matricei** respective **la forma diagonală** sau **diagonalizarea matricei.**

DEFINIȚIA 4.6. *Vom spune că* ***endomorfismul*** $\mathcal{F}\in\mathcal{L}(E,E)$ ***este diagonalizabil*** *dacă există o bază B în E în care*

$$\mathrm{M}(\mathcal{F};B)=\left[\alpha^{ij}\right]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

este o matrice diagonală, adică $\alpha^{ij}=0_{\mathbf{K}}$, *pentru* $i\neq j$.

TEOREMA 4.6. *Un endomorfism* $\mathcal{F}\in\mathcal{L}(E_n, E_n)$ *este diagonalizabil dacă şi numai dacă există o bază a spațiului* E_n *formată din vectori proprii ai endomorfismului.*

Demonstrație. Dacă $\mathcal{F}$ este diagonalizabil, atunci există o bază $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ a spațiului față de care matricea este diagonală, adică

$$\mathrm{M}(\mathcal{F};\mathrm{B})=\begin{bmatrix} a^{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a^{22} & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a^{nn}\end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$\mathcal{F}(B)=B\cdot M\,(\mathcal{F};B)=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\cdot\begin{pmatrix} a^{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a^{22} & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a^{nn}\end{pmatrix}=\left(a^{11}e_1,\ a^{22}e_2,\ldots,a^{nn}e_n\right)$$

şi cum $\mathcal{F}(B)=(\mathcal{F}(e_1),\ \mathcal{F}(e_2),\ldots,\mathcal{F}(e_n))$, obținem $\mathcal{F}(e_k)=a^{kk}e_k,\quad k=1,2,\ldots,n$, ceea ce înseamnă că vectorii $e_k,\quad k=1,2,\ldots,n$ sunt vectori proprii ai endomorfismului $\mathcal{F}$.

Reciproc, dacă $B^*=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ este o bază în E_n formată de vectorii proprii ai lui $\mathcal{F}$, adică $\mathcal{F}(u_k)=\lambda^k u_k,\quad k=1,\ldots,n$, atunci matricea lui $\mathcal{F}$ în această bază este

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};\, B^*) = \left(\left[\mathscr{F}(u_1) \right]_{B^*}, \dots, \left[\mathscr{F}(u_n) \right]_{B^*} \right) = \begin{bmatrix} \lambda^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Desigur, unele dintre numerele λ^k pot fi egale. □

TEOREMA 4.7. *Pentru endomorfismul* $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E_n, E_n)$, *dimensiunea unui subspațiu propriu este cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare subspațiului.*

Demonstrație. Fie λ^0 o valoare proprie multiplă de ordinul m şi E_0 subspațiul propriu corespunzător, cu $\dim E_0 = p < n$. Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_p\} \subset E_0$ o bază a subspațiului propriu. Completăm această bază până la o bază în E_n de forma $B = \{e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$. Deoarece vectorii e_k, $k = 1,2,\dots,p$, sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii λ^0, avem $\mathscr{F}(e_k) = \lambda^0 e_k$, $k = 1,2,\dots,p$ şi

$\mathscr{F}(u_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} a^{ij} e_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} a^{ij} u_i$, $j = p+1, \dots, n$. Matricea lui $\mathscr{F}$ în această bază este

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};\, \mathrm{B}) = \begin{bmatrix} \lambda^0 & 0 & \dots & 0 & a^{1p+1} & \dots & a^{1n} \\ 0 & \lambda^0 & \dots & 0 & a^{2p+1} & \dots & a^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^0 & a^{pp+1} & \dots & a^{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^{np+1} & \dots & a^{nn} \end{bmatrix}$$

astfel că polinomul caracteristic al lui $\mathscr{F}$ are forma

$$P(\lambda) = \det\left(\mathrm{M}(\mathscr{F};\, \mathrm{B}) - \lambda I \right) = \left(\lambda^0 - \lambda \right)^p \Delta(\lambda),$$

unde $\Delta(\lambda)$ este un determinant de ordin $n - p$.

În concluzie, $\Delta(\lambda^0) = 0$ implică $p < m$, iar $\Delta(\lambda^0) \neq 0$ implică $p = m$. Deci $p \leq m$. □

TEOREMA 4.8. *Un endomorfism* $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E_n, E_n)$ *este diagonalizabil dacă şi numai dacă polinomul caracteristic are toate rădăcinile în câmpul peste care este luat* E_n *şi dimensiunea fiecărui subspațiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al* *valorii proprii corespunzătoare.*

Demonstrație. Presupunem că endomorfismul $\mathscr{F}$ este diagonalizabil. Rezultă că există o bază $\{e_1,\dots,e_n\}\subset E_n$ formată din vectori proprii pentru $\mathscr{F}$, față de care matricea lui $\mathscr{F}$ este diagonală. Fie

$$P(\lambda)=\left(\lambda-\lambda^1\right)^{m^1}\left(\lambda-\lambda^2\right)^{m^2}\dots\left(\lambda-\lambda^p\right)^{m^p},$$

adică λ^k, $k=1,\dots,p$, sunt valorile proprii ale lui $\mathscr{F}$ de multiplicități m^i, cu $\sum_{i=1}^{p}m^i=n$. Fără a reduce generalitatea, putem admite că primii m^1 vectori din baza $\{e_1,\dots,e_n\}$ corespund lui λ^1, următorii m^2 lui λ^2 etc. În concluzie, vectorii $\{e_1,\dots,e_{m^1}\}\subset E_1$ aparțin subspațiului propriu corespunzător valorii proprii λ^1, ceea ce înseamnă că numărul lor m^1 este mai mic sau cel mult egal cu $\dim E_1$, adică $m^1\le\dim E_1$. Pe de altă parte, conform teoremei 4.7, avem $\dim E\le m^1$. În concluzie $m^1=\dim E_1$. Analog, rezultă $\dim E_k=m^k,\quad k=2,\dots,p$.

Reciproc, presupunem că $\dim E_k=m^k,\quad k=1,2,\dots,p$. Considerăm mulțimea

$B=\{e_1,\dots,e_{m^1},e_{m^1+1},\dots,e_{m^2},\dots,e_{m^{p-1}},\dots,e_{m^p}\}$, cu $\sum_{i=1}^{p}m^i=n$, formată din vectori din $\mathbf{E_n}$

astfel încât primii m^1 vectori să constituie o bază în $\mathbf{E_1}$, următorii m^2 să constituie o bază în $\mathbf{E_2}$ şi aşa mai departe. Folosind inducția asupra lui p se arată că B este o bază a lui $\mathbf{E_n}$. Față de această bază B matricea lui $\mathscr{F}$ este

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};\mathrm{B})=\begin{bmatrix}\lambda^1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda^1 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \lambda^1 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \lambda^p & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \lambda^p & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \lambda^p\end{bmatrix},$$

adică o matrice diagonală. □

Consecința 4.1. Dacă $\mathscr{F} \in \mathscr{L}$(E$_n$, E$_n$) este diagonalizabil, atunci **E$_n$** este suma directă a subspațiilor proprii asociate valorilor proprii $\lambda^1,\ldots,\lambda^p$ ale endomorfismului, adică $E_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_p$.

Procedeu de diagonalizare a unui endomorfism. Practic se parcurg următoarele etape :

1) Fixăm o bază B în **E$_n$** şi determinăm matricea M($\mathscr{F}$; B).

2) Determinăm valorile proprii care sunt soluții în **K** ale ecuației $P(\lambda) = 0$.

3) Dacă există $p(p \le n)$ valori proprii distincte $\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^p$ cu ordinele de multiplicitate $m^1, m,^2,\ldots,m^p$, calculăm rangul fiecărei matrice M($\mathscr{F}$; B) $- \lambda^k I$, $k = 1,\ldots,p$. Dacă rang(M($\mathscr{F}$; B) $- \lambda^k I) = n - m^k$, $k = 1,\ldots,p$, dim E_k = dim$(Ker\ (\mathscr{F} - \lambda^k \mathscr{I}))$ este numărul soluțiilor independente ale sistemului omogen (M($\mathscr{F}$; B) $- \lambda^k I) \cdot [x]_B = [O_E]_B$, atunci (conform teoremei 4.8) $\mathscr{F}$ este diagonalizabil.

4) Se rezolvă cele p sisteme omogene (M($\mathscr{F}$; B) $- \lambda^k I) \cdot [x]_B = [O_E]_B$, $k = 1,\ldots,p$. Un sistem fundamental de soluții, pentru un asemenea sistem, reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ^k.

5) Matricea lui $\mathscr{F}$, în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{F}$, are pe diagonală elementele $\lambda^1,\ldots,\lambda^1;\ldots;\lambda^p,\ldots,\lambda^p$, adică valorile proprii.

6) Notăm prin D∈M (n, n, **K**) matricea diagonală ataşată lui $\mathscr{F}$ în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{F}$. Dacă C∈M (n, n, **K**) este matricea ale cărei coloane sunt vectorii proprii care alcătuiesc noua bază a lui **E$_n$**, adică matricea de trecerea de la baza inițială din **E$_n$** (baza canonică B) la baza formată din vectorii proprii, atunci

$$D = C^{-1} \cdot M(\mathscr{F};\ B) \cdot C\ .$$

4.5. Probleme rezolvate

1. Fie $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^p$ valorile proprii ale endomorfismului lui $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E)$, iar $x_1, x_2, ..., x_p$ vectorii proprii corespunzători. Să se arate că endomorfismul $\mathscr{F}^n$, cu $n \in$ **Z***, admite valorile proprii $(\lambda^1)^n, (\lambda^2)^n, ..., (\lambda^p)^n$ şi vectorii proprii $x_1, x_2, ..., x_p$.

Rezolvare. Din relația de definiție a vectorilor proprii

$$\mathscr{F}(x_i) = \lambda^i x_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

obținem pe de o parte

$$\mathscr{F}^2(x_i) = \lambda^i \cdot \mathscr{F}(x_i) = (\lambda^i)^2 x_i, \qquad \mathscr{F}^3(x_i) = (\lambda^i)^2 \cdot \mathscr{F}(x_i) = (\lambda^i)^3 x_i, \ \dots$$

şi pe de altă parte

$$\mathscr{F}^{-1}(x_i) = \frac{1}{\lambda^i} x_i \, \mathscr{F}^{-2}(x_i) = \frac{1}{\lambda^i} \mathscr{F}^{-1}(x_i) = \frac{1}{(\lambda^i)^2} x_i, \quad \mathscr{F}^{-3}(x_i) = \frac{1}{(\lambda^i)^2} \mathscr{F}^{-1}(x_i) = \frac{1}{(\lambda^i)^3} x_i, \dots,$$

pentru $i = 1, \dots, p$.

2. Fie $V = \{ f : [-1,1] \to \mathbf{R} \quad | f \in C^\infty \}$ spațiul funcțiilor de clasă C^∞ pe intervalul [-1,1]. Endomorfismul $\mathscr{S} : V \to V$ prin $\mathscr{S}(f(x)) = [(x^2 - 1) f'(x)]'$, $\forall x \in [-1,1]$ se numeşte **operatorul Sturm-Liouville**. Să se arate că $\lambda^n = n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$ sunt valorile proprii, iar vectorii $x \to \mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$, $n \in$ **N,** sunt vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{S}$.

Rezolvare. Facem notația $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ şi avem egalitatea

$$(x^2 - 1) f'_n(x) = 2nx f_n(x) \ .$$

Derivând de n+1 ori ambii membri, folosind formula Leibniz, obținem

$$(x^2 - 1) f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n+1) f_n^{(n+1)}(x) + n(n+1) f_n^{(n)}(x) = 2nx f_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1) f_n^{(n)}(x)$$

sau

$$[(x^2 - 1) P_n'(x)]' = \mathrm{n(n+1)} \, \mathrm{P}_n(x) \, .$$

Aceasta se mai scrie $\mathscr{S}\left(\mathrm{P}_n(x)\right)=n(n+1)\mathrm{P}_n(x)$, ceea ce arată că numerele $\lambda^n=n(n+1)$ sunt valorile proprii, iar $P_n(x)$ sunt vectorii proprii corespunzători ai operatorului $\mathscr{S}$.

3.I. Fie matricele asemenea A şi $\mathrm{B}=S^{-1}\mathrm{A}S$ (cu S – matricea nesingulară de același ordin ca A). Să se arate că polinoamele caracteristice ale matricelor A si B sunt egale.

II. Fie M si N două matrice pătratice de acelaşi ordin. Ştiind că una dinte ele este nesingulară, să se arate că :

i) matricele M şi N sunt asemenea;

ii) polinoamele caracteristice ale matricelor MN si NM coincid.

Rezolvare. I. Deoarece $\lambda\mathrm{I}=S^{-1}\lambda IS$, putem scrie

$$\det\left[\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}\right]=\det\left[S^{-1}AS-S^{-1}\lambda\mathrm{I}S\right]=\det\left[S^{-1}(A-\lambda\mathrm{I})S\right]$$

sau încă

$$\det\left[\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}\right]=\det S^{-1}\cdot\det\left[\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}\right]\cdot\det S\ .$$

Cum $\det S^{-1}\cdot\det S=1$, rezultă

$$\det\left(\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}\right)=\det\left[\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}\right].$$

II. Presupunem matricea M nesingulară şi avem

i) $S^{-1}NMS=S^{-1}M^{-1}MNMS=(MS)^{-1}MN(MS)$;

ii) $\det\left[NM-\lambda\mathrm{I}\right]=\det\left[M^{-1}MNM-M^{-1}\lambda\mathrm{I}M\right]=\det\left[M^{-1}(MN-\lambda\mathrm{I})M\right]=$

$$=\det M^{-1}\cdot\det\left[MN-\lambda\mathrm{I}\right]\cdot\det M=\det\left[MN-\lambda\mathrm{I}\right].$$

4.I. Fie endomorfismul $\mathscr{T}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ dat prin matricea

$$\mathrm{M}(\mathscr{T};\mathrm{B})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

exprimată în baza canonică B a spaţiului $\mathbf{R}^3$. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai lui $\mathscr{T}$.

II. Fie endomorfismul $\mathscr{F}:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ dat prin matricea

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};B)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

exprimată în baza canonică B a spațiului vectorial $\mathbf{R}^4$.

i) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii.

ii) Dacă baza canonică B a spațiului $\mathbf{R}^4$ este formată din vectorii $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, să se arate că subspațiul generat de vectorii $u_1=e_1+2e_2$ si $u_2=e_2+e_3+2e_4$ este invariant în raport cu $\mathscr{F}$.

Rezolvare. I. Obținem polinomul caracteristic

$$\mathrm{P}(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)\cdot\left(\lambda^2-\lambda-1\right)$$ şi valorile proprii $\lambda^1=-1$,

$\lambda^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda^3=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dacă $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ, ecuația (4) a vectorilor proprii se scrie

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 1 & -1 & -\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda^1=-1$, avem sistemul matriceal

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

din care $x^3=-2x^1, x^2-x^1$, deci vectorul propriu căutat este $x_1=\alpha(1,-2,-1)$, cu $\alpha\in\mathbf{R}$.

Pentru $\lambda^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ obținem $x_2=\beta\left(1,0,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$, cu $\beta\in\mathbf{R}$, iar pentru $\lambda^3=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

obținem $x_3 = \gamma\left(1{,}0,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, cu $\gamma \in \mathbf{R}$.

II. i) Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ şi $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = \lambda^4 = 1$ este valoare proprie multiplă de ordinul al patrulea. Ecuația (4) a vectorilor proprii se scrie

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi are soluția $x^2 = 2x^1 + x^3, x^4 = 2x^3$. Parametrizând variabilele x^1 şi x^3, punem $x^1 = \alpha$ si $x^3 = \beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, astfel că vectorul $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ devine

$$x = \mathrm{B}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \mathrm{B}\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + \beta \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \mathrm{B}\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{B}\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, lui $\lambda = 1$ îi corespund doi vectori proprii $u_1 = (1, 2, 0, 0)$ şi $u_2 = (0, 1, 1, 2)$ în scriere vectorială sau $u_1 = \mathrm{B}(1{,}2{,}0{,}0)^t$ si $u_2 = \mathrm{B}(0{,}1{,}1{,}2)^t$ în scriere matriceală.

ii) Din expresiile vectorilor proprii se vede că subspațiul generat de vectorii $u_1 = e_1 + 2e_2$, $u_2 = e_2 + e_3 + 2e_4$ este invariant în raport cu $\mathscr{F}$, conform teoremei 4.3, deoarece u_1 şi u_2 sunt tocmai vectorii proprii ai endomorfismului.

5. Fie endomorfismele $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ date în baza canonică B a spațiului vectorial $\mathbf{R}^3$ prin matricele

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}_1; \mathrm{B}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } \mathrm{M}(\mathscr{F}_2; \mathrm{B}) = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii, vectorii proprii pentru $\mathscr{F}_1$ şi $\mathscr{F}_2$ şi apoi, dacă este posibil, să se diagonalizeze fiecare endomorfism.

Rezolvare. Pentru endomorfismul $\mathscr{F}_1$ avem polinomul caracteristic $\mathrm{P}(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$, valorile proprii $\lambda^1=-2, \lambda^2=\lambda^3=1$ cu ordinele de multiplicitate $\mathrm{m}^1=1$, $\mathrm{m}^2=2$. Deoarece rang(M($\mathscr{F}_1$; B) – λ^1I)=2=n-m^1=3-1=2, prin rezolvarea sis-temului omogen [M($\mathscr{F}_1$; B) – (–1)I]$[u_1]=[0]$, obținem vectorul propriu $u_1=\mathrm{B}x^3(-1,1,1)^t$, cu $x^3\in\mathbf{R}$ sau $e_1=\mathrm{B}(-1,1,1)^t$. Analog, rang(M($\mathscr{F}_1$; B) – λ^2I)=1= = n - m^2 = 3 – 2 = 1, deci $\dim \mathrm{E}_2=2$. Prin rezolvarea sistemului omogen [M($\mathscr{F}_1$;B) – λ^2I]$[u_2]=[0]$, obținem $u_2=\mathrm{B}(-2x^2,x^2,x^3)^t=x^2\mathrm{B}(-2,1,0)^t+$ $+x^3\mathrm{B}(0,0,1)$, cu $x^2,x^3\in\mathbf{R}$ sau $e_2=\mathrm{B}(-2,1,0)^t$ si $e_3=\mathrm{B}(0,0,1)^t$.

Considerând $\mathrm{B}_1=(e_1,e_2,e_3)$, baza formată din vectorii proprii pentru $\mathscr{F}_1$, obținem

$$\mathrm{M}(\mathrm{B},\mathrm{B}_1)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ şi forma diagonală

$$\mathrm{D}=\mathrm{M}^{-1}(\mathrm{B},\mathrm{B}_1)\cdot \mathrm{M}(\mathscr{F}_1;\mathrm{B})\cdot \mathrm{M}(\mathrm{B},\mathrm{B}_1)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Pentru endomorfismul $\mathscr{F}_2$ avem polinomul caracteristic $\mathrm{P}(\lambda)=(\lambda-1)^3$ şi valorile proprii $\lambda^1=\lambda^2=\lambda^3=1$ cu ordinul de multiplicitate $\mathrm{m}^1=3$. Deoarece rang(M($\mathscr{F}_2$; B) – 1·I) = 2 $\neq$ n-m^1=3-3=0, endomorfismul $\mathscr{F}_2$ nu este diagonalizabil .

4.6. *Probleme propuse*

1. Să se demonstreze că, prin multiplicarea unui operator cu un scalar nenul, vectorii proprii rămân neschimbați, iar valorile proprii se înmulțesc cu acel scalar.

2. Să se demonstreze că, pentru orice $\alpha^0\in\mathbf{R}$, matricea $\mathrm{A}-\alpha^0\mathrm{I}$ are aceiaşi vectori proprii ca şi matricea A. Pentru operatorii corespunzători celor două matrice, să se găsească relația dintre valorile proprii.

3. Să se arate că valorile proprii ale unei matrice diagonale coincid cu elementele diagonalei.

4. Endomorfismul $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{V}_3, \mathrm{V}_3)$ are în baza $\mathrm{B} = (e_1, e_2, e_3)$ matricea

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii u_i ai lui $\mathscr{F}$.

2) Să se scrie matricea $\mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B}^*)$, cu $\mathrm{B}^* = (u_1, u_2, u_3)$.

3) Să se determine formulele de trecere de la baza B la baza B^*.

4) Notând cu $\mathrm{M}(\mathrm{B};\mathrm{B}^*)$ matricea de trecere de la B la B^*, să se verifice prin calcul direct că matricea $\mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B}^*)$ este asemenea cu matricea $\mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B})$ (adică, să se arate că $\mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B}^*) = \mathrm{M}^{-1}(\mathrm{B}; \mathrm{B}^*) \cdot \mathrm{M}(\mathscr{F}; \mathrm{B}) \cdot \mathrm{M}(\mathrm{B}; \mathrm{B}^*)$).

5) Ce se poate spune despre valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării $\mathscr{F}^{-1}$?

5. Fie endomorfismul $\mathscr{A} = \mathscr{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ definit prin

a) $\mathscr{A}(\mathrm{x}) = (x^1, 2x^2, 3x^3)$,

b) $\mathscr{A}(x) = (x^1, x^1 + x^2, x^1 + x^2 + x^3)$,

c) $\mathscr{A}(x) = (x^1 - x^2, 0, x^1 + x^2)$.

Să se găsească, pentru fiecare caz în parte, vectorii proprii şi valorile proprii.

6. Să se determine valorile şi vectorii proprii ai următoarelor matrice din spaţiul $\mathbf{R}^3$:

$$\mathrm{M}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Să se determine polinomul caracteristic pentru operatorul liniar $\mathscr{A}$, căruia în spaţiul liniar E îi corespunde matricea:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Endomorfismul $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathrm{V}_4, \mathrm{V}_4)$ este definit in baza e_1, e_2, e_3, e_4 a spațiului V_4 cu ajutorul matricei

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării $\mathscr{A}$.

ii) Să se indice subspațiile invariante nebanale ale spațiului V_4.

iii) Poate fi diagonalizată matricea A ?

9. Să se diagonalizeze matricea $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

10. Pot fi diagonalizate matricele următoare:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

11. Fie $\mathscr{T} \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3\right)$ endomorfismul definit prin

$\mathscr{T}(x) = \left(x^1 + 2x^2 - 4x^3, 2x^1 - 2x^2 - 2x^3, -4x^1 - 2x^2 + x^3\right)$, cu $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbf{R}^3$. Să se determine o baza ortonormată în $\mathbf{R}^3$ față de care matricea endomorfismului să fie diagonală.

12. Fie matricea $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i)Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii.

ii)Folosind forma diagonală a matricei A, sa se determine $A^k, k \in \mathbf{N}$ şi să se scrie sub forma $A^k = a^k A + b^k I$, unde I este matricea unitate de ordinul 3, iar $a^k, b^k \in \mathbf{R}$.

13. Fie $A = \left[a_j^i\right]$ o matrice de ordinul n, cu elemente în **R**. Se numeşte **urma matricei A** şi se notează SpA, suma elementelor diagonale ale acestei matrice

$$\text{Sp(A)}= a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^n .$$

Dacă matricele A,B,C sunt de acelaşi ordin şi C este nesingulară, să se verifice relațiile:

Sp (αA) = α Sp (A) , Sp (A+B) = Sp (A) + Sp(B) ,

Sp (AB) = Sp(BA) , Sp(C^{-1}AC) = Sp (A) .

14. Fie $\lambda^n + p^1\lambda^{n-1} + p^2\lambda^{n-2} + \ldots + p^{n-1}\lambda + p^n = 0$ ecuația caracteristică a matricei A. Notăm cu s^1=Sp(A), s^2=Sp(A^2),…, s^n=Sp(A^n). Să se arate că :

1. s^1=Sp(A)= $\lambda^1 + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n$;
2. s^k=Sp(A^k)= $(\lambda^1)^k + (\lambda^2)^k + \ldots + (\lambda^n)^k, k \in \mathbf{Z}^*$;
3. Între urmele $s^1, s^2, \ldots, s^n$ şi coeficienții $p^1, p^2, \ldots p^n$ ai ecuației caracteristice, există relațiile

$$s^1 + p^1 = 0$$

$$s^2 + p^1 s^1 + 2p^2 = 0$$

(7) $$s^3 + p^1 s^2 + p^2 s^1 + 3p^3 = 0$$

……………………………………

$$s^n + p^1 s^{n-1} + p^2 s^{n-2} + \ldots + p^{n-1} s^1 + np^n = 0$$

15. Folosind relațiile

$$\mathrm{p}^1 = -s^1 \ , \ p^2 = -\frac{1}{2}\left(p^1 s^1 + s^2\right) , \ p^3 = -\frac{1}{3}\left(p^2 s^1 + p^1 s^2 + s^3\right) , \ \ldots$$

(stabilite in problema 14), să se scrie ecuațiile caracteristice ale matricelor

1. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **2.** $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; **3.** $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$.

5. TIPURI DE TRANSFORMĂRI PE SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE

5.1. Transformări ortogonale

Fie E, E' două **K** - spații euclidiene.

DEFINIȚIA 5.1. *O transformare liniară $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, E')$ se numește* ***ortogonală*** *dacă păstrează produsul scalar, adică*

(1) $$(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = (x, y), \quad \forall x,y \in E$$

Notație. $\mathcal{L}_{ort}(E, E') := \{\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, E') \mid ((\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = (x, y), \ \forall x, y \in E\}$

Exemple. 1. Transformarea identică $\mathcal{I} : E \to E$ este ortogonală deoarece pentru orice $x \in E$ avem $\mathcal{I}(x) = x$ şi condiția (1) este deci îndeplinită.

2. Transformarea $\mathcal{T} : E \to E$ care asociază fiecărui $x \in E$, opusul său $-x$, este ortogonală deoarece din relația de definiție $\mathcal{T}(x) = -x$ pentru orice $x \in E$, rezultă con-diția (1).

TEOREMA 5.1. *Condiția necesară şi suficientă ca o transformare liniară $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, E')$ să fie ortogonală este ca ea să păstreze lungimea vectorilor, adică*

(2) $$\| \mathcal{T}(x) \| = \| x \|, \quad \forall x \in E.$$

Demonstrație. Dacă $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_{ort}(E, E') \Rightarrow (\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(x)) = (x, x)$ (conform cu (1)) $\Rightarrow \| \mathcal{T}(x) \| = \| x \|, \ \forall x \in E.$

Reciproc, dacă $\| \mathcal{T}(x) \| = \| x \|, \ \forall x \in E$, considerăm

$$(x,y)=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-x^2-y^2\right]=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\mathscr{T}(x+y)\|^2-\|\mathscr{T}(x)\|^2-\right.$$

$$\left.-\|\mathscr{T}(y)\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\mathscr{T}(x)+\mathscr{T}(y)\|^2-\|\mathscr{T}(x)\|^2-\|\mathscr{T}(y)\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left((\mathscr{T}(x)+\mathscr{T}(y))^2-\mathscr{T}^2(x)-\mathscr{T}^2(y)\right)=(\mathscr{T}(x),\mathscr{T}(y)).\ \square$$

Consecința 5.1. Orice transformare ortogonală este injectivă.

Într-adevăr, dacă $\mathscr{T}\in\mathscr{L}(E,E')$, din $\mathscr{T}(x)=0_{E'}$ rezultă, conform cu relația (2), că $\|x\|=\|\mathscr{T}(x)\|=\|0_{E'}\|=0$, adică $\mathrm{Ker}(\mathscr{T})=\{0_E\}\Rightarrow\mathscr{T}$ injectivă (cf.T.3.6).

***TEOREMA 5.2. (1)** Produsul a două transformări ortogonale este tot o transformare ortogonală.*

***(2)** Inversa unei transformări ortogonale surjective este tot o transformare ortogonală.*

Demonstrație. **(1)** Fie $\mathscr{T}_1: E\to E'$ şi $\mathscr{T}_2: E'\to E''$ două transformări ortogonale şi $\mathscr{T}=\mathscr{T}_2\circ\mathscr{T}_1: E\to E''$ produsul lor. După proprietatea 3.3.1, $\mathscr{T}$ este liniară şi, ținând seama de relația (2), avem $\|\mathscr{T}(x)\|=\|\mathscr{T}_2(\mathscr{T}_1(x))\|=\|\mathscr{T}_1(x)\|=\|x\|$, $\forall\, x\in E$, deci $\mathscr{T}$ este ortogonală.

(2) Fie $\mathscr{T}\in\mathscr{L}_{ort}(E,E')$, $\mathscr{T}$ surjectivă $\Rightarrow\mathscr{T}$ este bijectivă şi, deci, există $\mathscr{T}^{-1}: E'\to E$ care este, conform proprietății 3.3.5., transformare liniară. Punând $\mathscr{T}^{-1}(v')=v$ sau echi-valent $v'=\mathscr{T}(v)$ şi, ținând seama de (2), obținem $\|\mathscr{T}^{-1}(v')\|=\|v\|=\|\mathscr{T}(v)\|=\|v'\|$, $\forall\, v'\in E'$, adică $\mathscr{T}^{-1}$ este ortogonală. $\blacksquare$

Din teorema 5.2. rezultă

Consecința 5.2. Operația de compunere determină, pe mulțimea endomorfismelor ortogonale surjective ale unui spațiu vectorial euclidian E pe el însuşi, o structură de grup.

Acest grup se numeşte **grupul ortogonal** al spațiului euclidian E şi-l vom nota GO(E). El este subgrup al grupului liniar GL(E) - grupul format de mulțimea endomorfismelor lui E.

***TEOREMA 5.3.** Condiția necesară şi suficientă ca $\mathscr{T}\in\mathscr{L}_{ort}(E,E')$ este ca ma-tricea $M(\mathscr{T};B,B')$ a transformării $\mathscr{T}$ în raport cu orice baze ortonormate B şi B' din E, respectiv, E' să verifice egalitatea*

(3) $$M^t(\mathcal{F};B,B')\cdot M(\mathcal{F};B,B')=I_n\ ,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul $n = \dim E$.

Demonstrație. Presupunem că $\mathcal{F}\in\mathcal{L}_{ort}(E,E')\Leftrightarrow\forall\, x\in E,\ \|\mathcal{F}(x)\|=\|x\|\Leftrightarrow$ $(\mathcal{F}(x),\mathcal{F}(x))=(x,x)\Leftrightarrow[\mathcal{F}(x)]^t_{B'}[\mathcal{F}(x)]_{B'}=[x]^t_B[x]_B$ și, cum $[\mathcal{F}(x)]_{B'}=M(\mathcal{F};B,B')[x]_B$,

rezultă $[x]^t_B\cdot M^t(\mathcal{F};B,B')\cdot M(\mathcal{F};B,B')\cdot[x]_B=[x]^t_B\cdot I_n\cdot[x]_B$, de unde rezultă (3).

Reciproc, presupunem adevărată relația (3) şi parcurgând în sens invers demonstrația precedentă $\Leftrightarrow\|\mathcal{F}(x)\|=\|x\|$, adică $\mathcal{F}\in\mathcal{L}_{ort}(E,E')$.

DEFINIȚIA 5.2. *Matricea pătrată $A\in M(n,n,\mathbf{R})$ se numeşte* ***ortogonală*** *dacă satisface relația*

(4) $$A\cdot A^t=A^t\cdot A=I_n\ .$$

Consecințe 5.3. (1) Dacă $\mathcal{F}\in\mathcal{L}_{ort}(E,E)$ atunci $M(\mathcal{F};B)$ este matrice ortogonală.

(2) Dacă A este matrice ortogonală, atunci $\det A=\pm 1$.

(3) Dacă A şi B sunt două matrice ortogonale, atunci şi matricea $A\cdot B$ este matrice orto-gonală.

(4) Inversa unei matrice ortogonale este o matrice ortogonală.

(5) Dacă A şi B sunt matrice ortogonale, atunci şi matricea $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ este ortogonală.

Demonstrație. **(1)** este evidentă.

(2) Ținând seama de proprietatea că $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$, avem din relația (4)

$$\det(A\cdot A^t)=\det I_n\Leftrightarrow \det A\cdot\det A^t=1$$

şi, cum $\det A=\det A^t$, rezultă $(\det A)^2=1\Leftrightarrow\det A=\pm 1$.

(3) Din ipoteză: $A\cdot A^t=I_n$, $B\cdot B^t=I_n$, rezultă

$$(AB)\cdot(AB)^t=(AB)\cdot(B^tA^t)=A\cdot(BB^t)\cdot A^t=A\cdot I_n\cdot A^t=AA^t=I_n\,.$$

(4) Fie $B=A^{-1}$ şi $AA^t=I_n$. Avem succesiv:

$B \cdot B^t = (A^{-1}) \cdot (A^{-1})^t = A^{-1} \cdot (A^t)^{-1} = (A \cdot A^t)^{-1} = I_n^{-1} = I_n.$

(5) Ţinând seama de (3), avem pe rând

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot A^t & 0 \\ 0 & B \cdot B^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I. \quad \square$$

Observaţie 5.1. În C.5.3.(5) nu este necesar ca cele două matrice să fie de acelaşi ordin.

DEFINIŢIA 5.3. *Un endomorfism ortogonal $\mathcal{T}$ se numeşte* ***rotaţie*** *dacă detM($\mathcal{T}$, B)= 1, unde M($\mathcal{T}$, B) este matricea lui $\mathcal{T}$ asociată bazei B a spaţiului vectorial.*

5.2. Transformări liniare simetrice

DEFINIŢIA 5.4. *O transformare liniară $\mathcal{T}$ a unui spaţiu euclidian în el însuşi se numeşte* ***simetrică*** *dacă satisface condiţia*

(5) $\qquad (x, \mathcal{A}(y)) = (\mathcal{A}(x), y), \quad \forall\, x, y \in E.$

În cele ce urmează vom considera $\dim E = n$.

TEOREMA 5.4. *Condiţia necesară şi suficientă ca transformarea liniară $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, E)$ să fie simetrică este ca:*

i) *matricea asociată ei într-o bază ortonormată dată să fie simetrică ;*

ii) *produsul scalar $(x, \mathcal{A}(x))$ să fie real, $\forall\, x \in E$.*

Demonstraţie. ***i)*** Fie $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază ortonormată, adică

$$\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{daca } i \neq j, \\ 1, & \text{daca } i = j. \end{cases}$$

Considerăm doi vectori x şi $y \in E \setminus \{0_E\}$ care, în baza B, se exprimă sub forma

$$B \cdot [x]_B = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \text{ şi, respectiv, } B \cdot [y]_B = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i .$$

Reamintim expresia produsului scalar

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i , \sum_{j=1}^{n} y^j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j (e_i , e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

adică

(6) $$(B[x]_B, B[y]_B) = [x]^t_B [y]_B .$$

Scriind relația (5) sub formă matriceală avem

$$(B[x]_B, B \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot [y]_B) = (B \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot [x]_B, B[y]_B)$$

şi, folosind (6), obținem următoarele forme echivalente

$$[x]^t_B \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot [y]_B = (M(\mathscr{F}; B) \cdot [x]_B)^t [y]_B \iff$$

$$\iff [x]^t_B \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot [y]_B = [x]^t_B \cdot M^t(\mathscr{F}; B) \cdot [y]_B \iff$$

$$\iff M(\mathscr{F}; B) = M^t(\mathscr{F}; B).$$

ii) Dacă $\mathscr{F}$ este simetric, atunci $(x, \mathscr{F}(x)) = (\mathscr{F}(x), x) = \overline{(x, \mathscr{F}(x))}$, unde bara orizontală de deasupra perechii de paranteze înseamnă conjugatul complex. Deci $(x, \mathscr{F}(x)) = \overline{(x, \mathscr{F}(x))}$ şi $(x, \mathscr{F}(x))$ este real, $\forall x \in E$.

Reciproc, dacă $(x, \mathscr{F}(x))$ este real, atunci $(x, \mathscr{F}(x)) = \overline{(x, \mathscr{F}(x))} = \overline{(\mathscr{F}(x), x)} =$ $= (\mathscr{F}(x), x)$ şi, prin urmare, $\mathscr{F}$ este simetric. □

TEOREMA 5.5. *Fie E un **R** - spațiu vectorial, $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(E, E)$ şi B bază a lui E. Dacă $M(\mathscr{F}; B) \in M(n, \mathbf{R})$ şi $M(\mathscr{F}; B) = M^t(\mathscr{F}; B)$, atunci toate valorile proprii, distincte sau nu, ale endomorfismului $\mathscr{F}$ sunt reale.*

Demonstrație. Fie $M(\mathscr{F}; B)$ matricea transformării $\mathscr{F}$ față de o bază ortonormată din E şi ecuația caracteristică asociată ei

$$\det(M(\mathscr{F}; B) - \lambda I_n) = 0.$$

Cum această ecuație este de gradul n în λ, ea are n rădăcini distincte sau nu în corpul complex **C**. Fie λ^0 una din ele şi $[x]_B$ o soluție nenulă a ecuației vectorilor proprii (4) din **§** 4.3. Considerăm relația (4) din **§** 4.3 sub forma

(7) $$M(\mathscr{F}; B)\, [x]_B = \lambda^0 [x]_B ,$$ care, conjugată complex, dă

(8) $\quad M(\mathscr{F};\, B)\left[\bar{x}\right]_B = \overline{\lambda^0 \cdot \left[x\right]_B}$, unde $M(\mathscr{F};\, B)=M(\mathscr{F};\, B)$, deoarece $M(\mathscr{F};\, B) \in M(n;\, \mathbf{R})$. Amplificând la stânga pe (7) cu $[\bar{x}]_B^t$ şi pe (8) cu $[x]_B^t$, avem

(7′) $$[\bar{x}]_B^t\; M(\mathscr{F};\, B)\; [x]_B = \lambda^0 \cdot [\bar{x}]_B^t \cdot [x]_B \;,$$

(8′) $$[x]_B^t\; M(\mathscr{F};\, B)\; [\bar{x}]_B = \overline{\lambda^0} \cdot [x]_B^t \cdot [\bar{x}]_B \;.$$

Aplicăm transpusa relației (8′) şi obținem

$$[\bar{x}]_B^t\; M(\mathscr{F};\, B)\; [x]_B = \overline{\lambda^0}\; [\bar{x}]_B^t\, [x]_B \;,$$

care, comparată cu (7′), dă

$$\left(\lambda^0 - \overline{\lambda^0}\right) \cdot [\bar{x}]_B^t \cdot \left[x\right]_B = 0$$

şi, cum $x \neq 0_E$, rezultă $\lambda^0 = \overline{\lambda^0}$, deci $\lambda^0 \in \mathbf{R}$. ∎

TEOREMA 5.6. *Subspațiul ortogonal unui vector propriu al unei transformări liniare simetrice $\mathscr{F}$, este invariant față de $\mathscr{F}$.*

Demonstrație. Fie e un vector propriu al lui $\mathscr{F}$ corespunzător valori proprii reale λ^0, a cărei existență este asigurată de teorema precedentă şi notăm cu E^0 subspațiul lui E ortogonal pe e. Atunci pentru $\forall\; x \in E^0$ avem

$$(e,\, \mathscr{F}(x)) = (\mathscr{F}(e), x) = (\lambda^0\, e,\, x) = \lambda^0 (e, x) = 0 \,,$$

adică şi $\mathscr{F}(x) \in E^0$ şi, prin urmare, E^0 este invariant față de $\mathscr{F}$. ∎

TEOREMA 5.7. *Pentru orice transformare liniară simetrică $\mathscr{F}$ există o bază ortonormată în E față de care matricea ei să aibă formă diagonală.*

Demonstrație. Fie e_1 un vector propriu unitar pentru $\mathscr{F}$ şi E_1 subspațiul cu $n-1$ dimensiuni ortogonal pe e_1, E_1 fiind invariant față de $\mathscr{F}$, restricția $\mathscr{F}'$, a lui $\mathscr{F}$ la E_1, este o transformare liniară de asemenea simetrică pe E_1. Considerând un vector propriu unitar e_2 pentru $\mathscr{F}'$, el este propriu şi pentru $\mathscr{F}$ şi ortogonal pe e_1. Fie apoi E_2 subspațiul cu $n-2$ dimensiuni ortogonal pe e_1 şi e_2. E_2 este de asemenea invariant față de $\mathscr{F}'$ şi fie e_3 un vector propriu unitar al restricției $\mathscr{F}''$ a lui $\mathscr{F}$ la E_2. Vectorul e_3 este propriu şi pentru $\mathscr{F}$ şi ortogonal pe e_1 şi e_2. Continuând acest proces, după

n paşi obţinem în E o bază ortonormată $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, formată din vectori propii pentru $\mathscr{T}$. Conform T.4.4, matricea transformării M($\mathscr{T}$; B) are formă diagonală .

Din această teoremă rezultă:

Consecinţa 5.4. Subspaţiile proprii ale unei transformări liniare simetrice au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare şi sunt ortogonale două câte două.

Practic, **pentru a reduce matricea unei transformări liniare simetrice** $\mathscr{T} \in \mathscr{L}(E_n, E_n)$ la **forma diagonală printr-o schimbare ortogonală de bază**, procedăm astfel:

- Considerăm o bază ortonormată $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, faţă de care matricea transformării este M($\mathscr{T}$; B) , cu M ($\mathscr{T}$; B) = M^t ($\mathscr{T}$; B).
- Scriem ecuaţia caracteristică

$$\det(M(\mathscr{T}; B) - \lambda I_n) = 0$$

şi găsim rădăcinile $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ care, după cum am văzut, vor fi toate reale. Forma diagonală a matricei transformării $\mathscr{T}$ va fi

$$M(\mathscr{T}; B○) = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix}$$, cu baza B○ necunoscută.

- Dacă ne interesează şi baza ortonormată B○ faţă de care matricea M($\mathscr{T}$; B○) are forma diagonală de mai sus, cum aceasta trebuie să fie formată din vectori proprii, procedăm în felul următor. Considerăm ecuaţia vectorilor proprii

$$(M(\mathscr{T}; B) - ●I_n)[x]_B = [0_{E_n}]_B$$

şi înlocuind, pe rând, λ cu fiecare rădăcină caracteristică λ^i, determinăm subspaţiile proprii E_i. Cu ajutorul procedeului Gram-Schmidt construim, pornind de la un sistem fundamental de soluţii ale sistemului $(M(\mathscr{T}; B) - \lambda I_n)[x]_B = [0_{E_n}]_B$, câte o bază ortonormată în fiecare E_i. Cum subspaţiile E_i sunt ortogonale câte două şi suma dimensiunilor lor este n, rezultă că aceste baze vor constitui împreună o bază ortonormată B' în E_n, față de care matricea transformării $\mathcal{T}$ are forma diagonală M($\mathcal{T}$; B').

5.3. Izometrii

Fie E un spațiu vectorial euclidian real.

DEFINIȚIA 5.5. *Funcția $\mathcal{T}: E \to E$ definită prin $\mathcal{T}(x) = x + a$, $a \in E$, a fixat, se numeşte* ***translație de vector a pe E****.*

Observația 5.2. Translația de vector nul (0_E) este identitatea pe E.

TEOREMA 5.8. (1) *Dacă $\mathcal{T}_1$ este translație de vector a_1 şi $\mathcal{T}_2$ este translație de vector a_2, atunci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translație de vector $a_1 + a_2$.*

(2) *Dacă $\mathcal{T}$ este translație de vector a, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există şi este translația de vector $-a$.*

Demonstrație. **(1)** $(\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1)(x) = \mathcal{T}_2(x + a_1) = (x + a_1) + a_2 = x + (a_1 + a_2)$. Analog $(\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1)(x) = x + (a_1 + a_2)$ şi , deci, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$.

(2) Din $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I} \Leftrightarrow \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}(x)) = x \Leftrightarrow \mathcal{T}^{-1}(x + a) = x$ şi făcând înlocuirea $x \to x - a \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathcal{T}^{-1}(x) = x - a$. ∎

Observația 5.3. Produsul defineşte pe mulțimea tuturor translațiilor pe E o structură de grup abelian, numit **grupul translațiilor**.

TEOREMA 5.9. *Translația păstrează distanța euclidiană, adică*

$$d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Demonstrație. $d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \|\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(x)\| = \|y + a - (x + a)\| = \|y - x\| =$
$= d(x, y)$, $\forall x, y \in$ E. ∎

DEFINIȚIA 5.6. *O funcție surjectivă $\mathcal{T}: E \to E$ care păstrează distanța euclidiană, adică $d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in E$, se numeşte* ***izometrie****.*

Observația 5.4. Transformările ortogonale şi translațiile sunt izometrii. De asemenea se dovedeşte cu uşurință că produsul a două izometrii este o izometrie.

TEOREMA 5.10. *O izometrie $\mathcal{F}: E \to E$ cu proprietatea că $\mathcal{F}(0_E) = 0_E$ este o transformare ortogonală.*

Demonstrație. Să arătăm că $\mathcal{F}$ păstrează normele:

$\|x\| = \|x - 0_E\| = \mathrm{d}(0_E, x) = \mathrm{d}(\mathcal{F}(0_E), \mathcal{F}(x)) = \mathrm{d}(0_E, \mathcal{F}(x)) = \|\mathcal{F}(x) - 0_E\| = \|\mathcal{F}(x)\|$, $\forall x \in$ E.

Utilizând acest rezultat putem dovedi că $\mathcal{F}$ păstrează produsul scalar:

$$\mathrm{d}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = \mathrm{d}(x, y) \Leftrightarrow \|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)\| = \|y - x\| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)) = (y - x, y - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Arătăm acum că orice izometrie care păstrează produsul scalar este o transformare liniară:

- $(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = (x, y) \Rightarrow (\mathcal{F}(kx), \mathcal{F}(y)) = (kx, y) = k(x, y) = k(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) =$
  $= (k\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \Rightarrow (\mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = 0$, $\forall \mathcal{F}(y)$, $\forall k \in \mathbf{R}$.

Facem $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x)$ şi rezultă $\mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x) = 0$, adică $\mathcal{F}$ este omoge-nă.

- $(\mathcal{F}(x+y), \mathcal{F}(z)) = (x+y, z) = (x, z) + (y, z) = (\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(z)) + (\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(z)) =$
  $= (\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)) \Rightarrow (\mathcal{F}(x+y) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)) = 0$, $\forall \mathcal{F}(z)$. Deci $\mathcal{F}(x+y) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y) = 0$, adică $\mathcal{F}$ este aditivă.

TEOREMA 5.11. *Dacă $\mathcal{F}$ este o izometrie, atunci există o translație $\mathcal{T}$ şi o transformare ortogonală $\mathcal{R}$ astfel încât $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{T}$ translația de vector $\mathcal{F}(0_E)$ şi $\mathcal{T}^{-1}$ translația de vector $-\mathcal{F}(0_E)$. Funcția $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o izometrie care păstrează pe 0_E. Conform cu T.5.10. izometria $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o transformare ortogonală $\mathcal{R}$, adică $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{R}$ sau $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$.

Observația 5.5. Compunerea definește pe mulțimea tuturor izometriilor lui E o structură de grup.

5.4. Probleme rezolvate

1. Fie $\mathscr{F}$: $\mathbf{R^4} \to \mathbf{R^4}$ transformarea liniară definită prin:

$$\mathscr{F}(x) = \left(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4, \frac{1}{2}x^1 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4, \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4, \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 \right), \text{ cu } x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{R^4} .$$

1) Să se arate ca $\mathscr{F}$ este o transformare ortogonală.

2) Să se determine $\mathscr{F}^{-1}$.

3) Să se scrie matricele lui $\mathscr{F}$ şi $\mathscr{F}^{-1}$ în raport cu baza canonica din $\mathbf{R^4}$.

Rezolvare. 1) Folosind consecinţele 5.3, scriem

$$M(\mathscr{F}; B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}, \text{ cu B – baza canonică din } \mathbf{R^4}$$

şi, prin calcul, obţinem det M ($\mathscr{F}$; B) = -1. Deci $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\mathbf{R^4}, \mathbf{R^4})$.

2) Folosim teorema 3.9 cu $\mathscr{G} = \mathscr{F}^{-1}$ şi avem

$M(\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F}; B) = M(\mathscr{F}^{-1}; B) \cdot M(\mathscr{F}; B) \Leftrightarrow M(\mathscr{I}; B) = M(\mathscr{F}^{-1}; B) \cdot M(\mathscr{F}; B)$

unde $\mathscr{I}$ este transformarea identică. Amplificând la dreapta ultima relaţie cu $M^{-1}(\mathscr{F}; B)$, obţinem

$$M(\mathscr{I}; B) \cdot M^{-1}(\mathscr{F}; B) = M(\mathscr{F}^{-1}; B) \cdot M(\mathscr{F}; B) \cdot M^{-1}(\mathscr{F}; B),$$

adică

$$I \cdot M^{-1}(\mathscr{F}; B) = M(\mathscr{F}^{-1}; B) \cdot I ,$$

unde I este matricea unitate de ordinul patru. Rezultă

$$\mathrm{M}\,(\mathscr{F}^{-1};\,\mathrm{B}) = \mathrm{M}^{-1}(\mathscr{F};\,\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Pentru $x = B\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)^t \in \mathbf{R}^4$, obținem $\mathscr{F}^{-1}(x)$= B·M($\mathscr{F}^{-1}$; B)·[x]$_B$ =

$$= B\left(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4, \frac{1}{2}x^1 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4, \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4,\right.$$

$$\left., \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4\right)^t.$$

3) Matricele M ($\mathscr{F}$; B) şi M ($\mathscr{F}^{-1}$; B) s-au determinat în cadrul rezolvărilor anterioare.

2. Să se determine baza ortonormată a spațiului $\mathbf{R}^3$ în raport cu care se poate reduce matricea

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a transformării liniare $\mathscr{T}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, la forma diagonală D.

Rezolvare. Ecuația caracteristica $P(\lambda) = 0$ are valorile proprii $\lambda^1 = -2$, $\lambda^2 = 3$, $\lambda^3 = 6$, cu ordinele de multiplicitate $m^1 = m^2 = m^3 = 1$. Calculăm rangul fiecărei matrice $T - \lambda^k I$, k=1, 2, 3 şi obținem $rang\left(T - \lambda^k I\right) = 2 = n - m^k = 3 - 1 = 2$, $\forall k = 1,2,3$.

Găsim vectorii proprii ortogonali $u_1 = B(1,0,-1)^t$, $u_2 = B(1,-1,1)^t$, $u_3 = B(1,2,1)^t$, unde B este baza canonică a spațiului $\mathbf{R}^3$. Conform teoremei 4.8, matricea T este diagonalizabilă.

Normând vectorii proprii, obținem

$$e_1 = B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t,\ e_2 = B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t,\ e_3 = B\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^t,$$

care este o bază ortonormată, notată B_1, în raport cu care matricea transformării $\mathscr{T}$ este

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Avem, în mod evident, relația

$$D = M^{-1}(B, B_1) \cdot T \cdot M(B, B_1) \ ,$$

care arată că matricele T si D sunt asemenea (unde $M(B, B_1)$ este matricea de trecere de la B la B_1). Transformarea ortogonală pe care o defineşte matricea $M(B, B_1)$ este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(B, B_1)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{3}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} Y + \frac{2}{\sqrt{6}} Z \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{3}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z \end{cases}.$$

3. Să se reducă matricea ortogonală

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

la forma canonică C.

Rezolvare. Matricea C trebuie căutată printre matricele „ortogonal asemenea” cu matricea M, adică $C = S^{-1} \cdot M \cdot S$, în care S este o matrice ortogonală care trebuie determinată. Avem de rezolvat o problemă de valori proprii şi vectori proprii. Efectuând calculele obținem

$$\lambda^1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad u_1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad u_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$\lambda^3 = 1$, $u_3 = (1,1,1)$.

În locul vectorilor proprii u_1, u_2, u_3 considerăm vectorii cu componentele reale

$$v_1 = \frac{1}{2i}(u_1 - u_2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) ,$$

$$v_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) ,$$

$$v_3 = u_3 = (1,1,1) ,$$

pe care îi normăm

$$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) ,\ e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) ,\ e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) ,$$

Conform celor prezentate, matricea $C = S^{-1} \cdot M \cdot S$, adică

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

unde S are pe coloane componentele vectorilor e_1, e_2, e_3.

Observație. Forma canonică C indică faptul că transformarea ortogonală a spațiului E_3, definită prin matricea M , este o rotație cu un unghi de $\frac{\pi}{3}$ radiani de la e_1 la e_2 , în jurul vectorului e_3.

4. Fie $\mathscr{F}$: $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ definit prin $\mathscr{F}(x) = \left(x^1 + ix^2, -ix^1 + x^2\right)$, $x = \left(x^1, x^2\right) \in \mathbf{C}^2$. Să se arate că endomorfismul $\mathscr{F}$ este simetric.

Rezolvare. Folosind teorema 5.4. ii), trebuie să arătăm că produsul scalar $(\mathscr{F}(x), x)$ este real. Avem (ținând seama de produsul scalar din exemplul 1, situat după definiția 2.1)

$$(\mathscr{F}(x), x) = \left(\left(x^1 + ix^2, -ix^1 + x^2\right), \left(x^1, x^2\right)\right) = \left(x^1 + ix^2\right)\overline{x^1} + \left(-ix^1 + x^2\right)\overline{x^2} =$$

$$= \left|x^1\right|^2 + ix^2\overline{x^1} - ix^1\overline{x^2} + \left|x^2\right|^2 = \left|x^1\right|^2 + ix^2\overline{x^1} + \overline{\left(ix^2\overline{x^1}\right)} + \left|x^2\right|^2,$$

care este real deoarece $z + \overline{z} \in \mathbf{R}$, pentru $z \in \mathbf{C}$.

Mai trebuie arătat că $ix^1\overline{x^2} = \overline{\left(ix^2\overline{x^1}\right)}$. Într-adevăr, deoarece $x^1, x^2 \in \mathbf{C}$, putem lua $x^1 = x_1^1 + ix_2^1$, $x^2 = x_1^2 + ix_2^2$, cu $x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2 \in \mathbf{R}$ şi obținem pe rând:

- $$-ix^1\overline{x^2} = -i\left(x^1 + ix_2^1\right)\cdot\overline{\left(x_1^2 + ix_2^2\right)} = -i\cdot\left(x_1^1 + ix_2^1\right)\cdot\left(x_1^2 - ix_2^2\right) =$$
  $$= -i\left[x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2 + i\left(x_2^1x_1^2 - x_1^1x_2^2\right)\right] =$$
  $$= x_2^1x_1^2 - x_1^1x_2^2 - i\left(x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2\right),$$
- $$ix^2\overline{x^1} = i\left(x_1^2 + ix_2^2\right)\left(x_1^1 - ix_2^1\right) = i\cdot\left[x_1^2x_1^1 + x_2^2x_2^1 + i\left(x_2^2x_1^1 - x_1^2x_2^1\right)\right] =$$
  $$= -x_2^2x_1^1 + x_1^2x_2^1 + i\left(x_1^2x_1^1 + x_2^2x_2^1\right),$$
- $$\overline{ix^2\overline{x^1}} = x_2^1x_1^2 - x_1^1x_2^2 - i\left(x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2\right) = -ix^1\overline{x^2}.$$

5. Punctele M(x,y,z) raportate la triedrul ortogonal drept Oxyz verifică ecuația

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + 3z^2 + 4yz - 6x + 4y + 14z + 1 = 0\,.$$

Să se găsească ecuația verificată de coordonatele (x',y',z') ale acestor puncte față de triedrul *O'x'y'z'* obținut din cel inițial printr-o translație a originii O în punctul O'(3,-2,-1).

Rezolvare. Formulele care dau translația sunt

x=x'+3 , y=y'-2 , z=z'-1

care, înlocuite în ecuația dată, dau următoarea ecuație

$x'^2 + 3z'^2 + 4y'z' - 19 = 0$

Ecuația dată în enunțul problemei este ecuația generală a unei cuadrice cu centrul în punctul O'(3,-2,-1). Ecuația cuadricei raportată la triedrul translatat *O'x'y'z'* s-a simplificat deoarece au dispărut termenii liniari, iar termenul liber a căpătat valoarea f(3,-2,-1) = -19.

5.5. *Probleme propuse*

1. Să se găsească pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

forma diagonală D şi transformarea ortogonală definită prin matricea S astfel încât să avem $D = S^{-1}AS$.

2. Să se transforme matricea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

într-o matrice ortogonală.

3. Față de un reper ortonormat al spațiului $\mathbf{R^3}$, transformarea $\mathscr{F}\colon \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ are matricea

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Să se calculeze matricea F_1 a transformării $\mathscr{F}^{\frac{1}{2}}$.

4. Se consideră transformarea ortogonală

$$x^1 = \frac{2}{3}y^1 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \quad ,$$

$$x^2 = \frac{1}{3}y^1 + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{3}y^3 \quad ,$$

$$x^3 = \frac{2}{3}y^1 + \frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}y^3 \quad .$$

Să se determine valorile lui y^1, y^2, y^3 atunci când $x^1 = 1, x^2 = -1, x^3 = 2$.

5. Să se reducă matricele următoare la forma diagonală cu ajutorul câte unei matrice ortogonale

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}4 & -6 & 2\\ -6 & 3 & -4\\ 2 & -4 & -1\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 4\\ 8 & -1 & 4\\ 4 & 4 & -7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

6. Să se justifice următoarele afirmații:

i) Dacă determinantul matricei A are valoarea ± 1 şi dacă fiecare element al acesteia este egal cu complementul său algebric luat cu semnul său când detA=1 şi cu semnul schimbat când detA=-1, atunci matricea este ortogonală;

ii) Într-o matrice ortogonală A suma pătratelor tuturor minorilor care se pot forma cu două linii (coloane) arbitrare ale matricei este egală cu –1.

7. Matricea

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

este ortogonală. Transformând-o printr-o matrice ortogonală S, să se obțină forma sa canonică A'. Să se verifice că transformarea ortogonală definită prin matricea A se compune dintr-o simetrie şi o rotație.

8. Fie $\mathscr{A}: V \to V$ un endomorfism dat prin matricea

$$\mathrm{M}\,(\mathscr{A};\mathrm{B})=\begin{pmatrix}3+2i & 2-2i\\ 1-i & 3+4i\end{pmatrix}$$

în raport cu o bază B a spațiului euclidian complex V. Să se determine două transformări simetrice $\mathscr{A}_1$ şi $\mathscr{A}_2$ astfel ca $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1+\mathrm{i}\mathscr{A}_2$ şi apoi să se determine matricele transformărilor $\mathscr{A}_1$ şi $\mathscr{A}_2$.

9. Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ai transformării $\mathscr{F}: \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ definită prin matricea

$$\mathscr{F}=\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Să se arate că operația de compunere a funcțiilor definește pe mulțimea izometriilor lui E_n o structură de grup (**grupul izometric**).

6. FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE.

6.1. Forme biliniare

DEFINIŢIA 6.1. *Fie E un spaţiu vectorial real cu $\dim E = n$. O aplicaţie $\mathscr{F}: E\times E \to \mathbf{R}$ se numeşte **formă** (sau **funcţională**) **biliniară** dacă este liniară în raport cu ambele argumente, adică*

$$\mathscr{F}(\alpha^1 x_1+ \alpha^2 x_2, y)=\alpha^1 \mathscr{F}(x_1, y)+ \alpha^2 \mathscr{F}(x_2, y),\ \forall \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbf{R},\ \forall x_1, x_2, y \in E,$$

(1)

$$\mathscr{F}(x, \beta^1 y_1+ \beta^2 y_2)=\beta^1 \mathscr{F}(x, y_1)+ \beta^2 \mathscr{F}(x, y_2),\ \forall \beta^1, \beta^2 \in \mathbf{R},\ \forall x, y_1, y_2 \in E.$$

Exemple. 1. Produsul scalar, în cazul spaţiilor reale, este o formă biliniară.

2. Fie $E = \mathbf{R}^\mathbf{n}$ şi $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j$ vectori arbitrari din $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ exprimaţi în baza $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Aplicaţia $\varphi: E\times E \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij} x^i y^j$$

cu α^{ij} constante reale date, este o formă biliniară.

Observaţia 6.1. Noţiunea de formă biliniară poate fi generalizată în mai multe sensuri. Dacă E şi E' sunt două spaţii vectoriale reale, aplicaţia $\mathscr{F}: E\times E' \to \mathbf{R}$, de valori $\mathscr{F}(x, y)$, liniară în raport cu ambele argumente, se numeşte formă biliniară.

De asemenea, dacă E este un spaţiu vectorial complex, aplicaţia $\mathscr{F}: E\times E \to \mathbf{C}$ care satisface condiţiile (1), în care $\mathbf{R}$ se înlocuieşte cu $\mathbf{C}$, iar ultima egalitate cu

$\mathscr{F}\left(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2\right) = \overline{\beta^1}\ \mathscr{F}\left(x, y_1\right) + \overline{\beta^2}\ \mathscr{F}\left(x, y_2\right)$, $\overline{\beta}$ fiind conjugatul lui β,

se numeşte formă biliniară.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de forme biliniare precizate în def. 6.1.

TEOREMA 6.1. *Fie* $B = \left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ *o bază oarecare din E. O formă biliniară* $\mathscr{F}: E \times E \to \boldsymbol{R}$ *este complet determinată dacă se cunosc valorile sale* $\mathscr{F}\left(e_i, e_j\right) = \alpha^{ij}$ *pe produsul cartezian* $B \times B$.

Demonstrație. Fie $x, y \in E$ arbitrari cu

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j.$$

Ținând seama de (1) avem

$$\mathscr{F}(x,y) = \mathscr{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y^j e_j \Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^i y^j\ \mathscr{F}(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^i y^j \alpha^{ij},$$

deci

(2) $$\mathscr{F}\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^i y^j\ \mathscr{F}\left(e_i, e_j\right). \qquad \square$$

DEFINIȚIA 6.2. *Dacă* $B = \left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ *este o bază în E şi* $\mathscr{F}: E \times E \to \boldsymbol{R}$ *este o formă biliniară, atunci matricea* $[\alpha] \in M(n, n, \boldsymbol{R})$ *cu elementele* $\alpha^{ij} = \mathscr{F}(e_i, e_j)$, $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$, *se numeşte* ***matricea formei biliniare*** $\mathscr{F}$ ***în baza B****.*

Notație. $[\alpha] := M(\mathscr{F}; B \times B)$.

Observația 6.2. Sub formă matriceală relația (2) se poate scrie

(3) $$\mathscr{F}(x, y) = [x]^t_B \cdot M(\mathscr{F}; B \times B) \cdot [y]_B.$$

Într-adevăr, avem pe rând

$$\mathscr{F}(x,y) = \mathscr{F}(B[x]_B, y) = \mathscr{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i, y\Big) = \sum_{i=1}^{n} x^i\ \mathscr{F}(e_i, y) =$$

$$= \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \cdot \begin{pmatrix} F(e_1, y) \\ F(e_2, y) \\ \vdots \\ F(e_n, y) \end{pmatrix} = [x]_B^t \cdot \begin{pmatrix} F(e_1, y) \\ F(e_2, y) \\ \vdots \\ F(e_n, y) \end{pmatrix},$$

în care, pentru i = 1, 2, ..., n, explicitând pe y

$$\mathsf{F}\,(e_i, y) = \mathsf{F}\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{F}\left(e_i, e_j\right) y^j = \left(\mathsf{F}\left(e_i, e_1\right), ..., \mathsf{F}\left(e_i, e_n\right)\right) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\mathsf{F}\left(e_i, e_1\right), ..., \mathsf{F}\left(e_i, e_n\right)\right) \cdot [y]_B,$$

obținem

$$\mathsf{F}\,(x, y) = [x]_B^t \cdot \begin{pmatrix} \mathsf{F}\left(e_1, e_1\right), ..., \mathsf{F}\left(e_1, e_n\right) \\ \mathsf{F}\left(e_2, e_1\right), ..., \mathsf{F}\left(e_2, e_n\right) \\ \vdots \\ \mathsf{F}\left(e_n, e_1\right), ..., \mathsf{F}\left(e_n, e_n\right) \end{pmatrix} \cdot [y]_B.$$

TEOREMA 6.2. *Fie o formă biliniară $\mathscr{F}: E \times E \to$ **R** dată în baza B şi fie B' o altă bază a spațiului E. Dacă M(B, B') este matricea de trecere de la baza B la baza B', atunci*

(4) $$M(\mathscr{F}, B' \times B') = M^t(B, B') \cdot M(\mathscr{F}, B \times B) \cdot M(B, B').$$

Demonstrație. Fie $x, y \in E \setminus \{0_E\}$. Calculând în două moduri pe $\mathscr{F}(x, y)$, ținând seama de relația (3), obținem

$\mathscr{F}(x, y) = \mathscr{F}(B'[x]_{B'}, B'[y]_{B'}) = [x]^t_{B'} \cdot M(\mathscr{F}, B' \times B') \cdot [y]_{B'}$,

$\mathscr{F}(x, y) = \mathscr{F}(B'[x]_{B'}, B'[y]_{B'}) = \mathscr{F}(B \cdot M(B, B') \cdot [x]_{B'}, B \cdot M(B, B') \cdot [y]_{B'}) =$

$= (M(B, B') \cdot [x]_{B'})^t \cdot M(\mathscr{F}, B \times B) \cdot M(B, B') \cdot [y]_{B'} =$

$= [x]^t_{B'} \cdot M^t(B, B') \cdot M(\mathscr{F}, B \times B) \cdot M(B, B') \cdot [y]_{B'}$.

Folosind proprietatea de tranzitivitate a relației de egalitate, rezultă relația (4).

DEFINIȚIA 6.3. Rangul unei forme biliniare *este rangul matricei sale $M(\mathscr{F}, B \times B) = [\alpha]$ într-o bază B arbitrară în E.*

DEFINIȚII 6.4. 1. *Forma biliniară* $\mathcal{F}$ *se numeşte* ***simetrică*** *dacă* $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}(y, x), \ \forall x, y \in E$.

2. *Forma biliniară* $\mathcal{F}$ *se numeşte* ***antisimetrică*** *dacă* $\mathcal{F}(x, y) = -\mathcal{F}(y, x), \forall x, y \in E$.

TEOREMA 6.3. (1) *O formă biliniară* $\mathcal{F}$ *este simetrică dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază B, arbitrară, este simetrică.*

(2) *O formă biliniară* $\mathcal{F}$ *este antisimetrică* $\Leftrightarrow$ *M* $(\mathcal{F}, B\times B)$ *este antisimetrică, oricare ar fi baza B.*

Demonstrație. **(1)** Fie B o bază arbitrară şi $x, y \in E$ arbitrari. $\mathcal{F}$ simetrică $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}(y, x) \Leftrightarrow [x]^t_B \cdot M(\mathcal{F}, B\times B) \cdot [y]_B = [y]^t_B \cdot M(\mathcal{F}, B\times B) \cdot [x]_B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [x]^t_B \cdot M(\mathcal{F}, B\times B) \cdot [y]_B = ([y]^t_B \cdot M(\mathcal{F}, B\times B) \cdot [x]_B)^t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(\mathcal{F}, B\times B) = M^t(\mathcal{F}, B\times B).$$

(2) Se demonstrează în mod analog cu (1) .

Fie mulțimea

$$S_0(\mathcal{F}) = \{ y \in E \mid \mathcal{F}(x, y) = 0, \ \forall x \in E\}.$$

PROPRIETATEA 6.1. Mulțimea $S_0(\mathcal{F})$ este un subspațiu vectorial al lui E.

Demonstrație. $\mathcal{F}(x, \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2) = \lambda^1 \mathcal{F}(x, y_1) + \lambda^2 \mathcal{F}(x, y_2) = 0$, $\forall y_1, y_2 \in S_0(\mathcal{F})$ şi $\forall \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbf{R}$, deci $\lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 \in S_0(\mathcal{F})$.

DEFINIȚIA 6.5. *$S_0(\mathcal{F})$ se numeşte* ***subspațiul nul*** *al formei biliniare* $\mathcal{F}$.

Observația 6.3. Unei forme biliniare $\mathcal{F}$ i se asociază două subspații nule, $S_0(\mathcal{F})$ şi

$$S'_0(\mathcal{F}) = \{ x \in E \mid \mathcal{F}(x, y) = 0, \ \forall y \in E\}.$$

DEFINIȚIA 6.6. *Dacă* $\mathcal{F}$ *este o formă biliniară simetrică atunci subspațiul nul ($S_0(\mathcal{F})$ sau $S'_0(\mathcal{F})$) se numeşte* ***nucleul formei biliniare,*** *adică*

$$\{x \in E \mid \mathcal{F}(x, y) = 0, \ \forall y \in E\} := Ker(\mathcal{F}).$$

Vectorii $x, y \in E$ cu proprietatea că $\mathcal{A}(x, y) = 0$, se numesc ***vectori ortogonali în raport cu*** $\mathcal{A}$.

6.2. Forme pătratice.

DEFINIȚIA 6.7. *Fie E un spațiu vectorial real. O aplicație $\mathcal{P}: E \to \mathbf{R}$ se numeşte* ***formă pătratică*** *dacă există o formă biliniară simetrică $\mathcal{A}: E\times E \to \mathbf{R}$ astfel încât*

(5) $$\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x,x), \quad \forall x \in E .$$

$\mathcal{A}$ se numeşte ***forma biliniară simetrică asociată*** *formei pătratice.*

Exemplu. Forma pătratică pentru produsul scalar real este pătratul normei euclidiene, adică

$$(x,x) = \|x\|^2.$$

TEOREMA 6.4. *Oricărei forme biliniare simetrice $\mathcal{A}: E\times E \to \mathbf{R}$ îi corespunde o formă pătratică $\mathcal{P}: E \to \mathbf{R}$, unică, definită prin (5).*

Reciproc, forma biliniară simetrică asociată unei forme pătratice $\mathcal{P}$ este unică.

Demonstrație. Afirmația directă este evidentă.

Pentru a o dovedi pe *cea de-a doua*, vom presupune că există două forme biliniare simetrice $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ cu proprietatea (5),

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x,x), \quad \mathcal{P}(x) = \mathcal{A}'(x,x), \quad \forall\ x \in E.$$

Din egalitatea

$$\mathcal{A}(x+y, x+y) = \mathcal{A}(x,x) + 2\,\mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(y,y), \quad \forall x, y \in E ,$$

rezultă

(6) $$\mathcal{P}(x+y) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y) + 2\,\mathcal{A}(x,y), \quad \forall x, y \in E ,$$

Analog,

(6') $$\mathcal{P}(x+y) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y) + 2\,\mathcal{A}'(x,y), \quad \forall x, y \in E .$$

Din (6) şi (6') rezultă

$$\mathcal{A}(x,y) = \mathcal{A}'(x,y), \quad \forall x, y \in E , \qquad \text{deci} \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}'.$$

Observația 6.4. Dacă este dată o formă pătratică $\mathscr{P}$, atunci forma biliniară simetrică asociată are valorile date de

(7) $$\mathscr{F}(x, y) = \frac{1}{2}[\mathscr{P}(x + y) - \mathscr{P}(x) - \mathscr{P}(y)], \quad \forall\, x, y \in E .$$

Într-adevăr, din (6) deducem (7).

Observația 6.5. Dacă $\mathscr{F}(x, y) = [x]^t_B \cdot \mathrm{M}(\mathscr{F};\ B\times B) \cdot [y]_B$, $\forall\, x, y \in E$, atunci

$$\mathscr{P}(x) = [x]^t_B \cdot \mathrm{M}(\mathscr{F};\ B\times B) \cdot [x]_B .$$

Este astfel îndreptățită următoarea definiție:

DEFINIȚIA 6.8. Matricea unei forme pătratice *într-o bază B arbitrară este matricea* $M(\mathscr{F};\ B\times B)$ *a formei biliniare* $\mathscr{F}$ *asociată în acea bază B, adică*

(8) $$M(\mathscr{P}; B) = M(\mathscr{F}; B\times B)$$

DEFINIȚIA 6.9. *O bază B = ($e_1, e_2, \dots, e_n$) se numeşte* ***ortogonală în raport cu*** *forma biliniară simetrică* $\mathscr{F}$ *dacă*

$$\mathscr{F}(e_i, e_j) = \delta_{ij}\alpha^{ij}, \quad \forall\, i, j = 1,\dots,n, \text{ cu } \delta_{ij} \text{ simbolul lui Kronecker.}$$

DEFINIȚIA 6.10. *Fie* $\mathscr{F}: E\times E \to \mathbf{R}$ *o formă biliniară simetrică şi* $\mathscr{P}: E \to \mathbf{R}$ *forma pătratică asociată . Vectorii* $x, y \in E$ *se numesc* ***ortogonali în raport cu*** $\mathscr{F}$ *(sau* ***cu*** $\mathscr{P}$*), dacă* $\mathscr{F}(x, y)=0$.

Observația 6.6. Într-o bază ortogonală în raport cu $\mathscr{F}$ avem pe rând

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};\ B\times B) = \begin{bmatrix} \alpha^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^{nn} \end{bmatrix} \in D(n, \mathbf{R}),$$

(9) $$\mathscr{F}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{ij} x^i y^j, \quad \mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{ij} (x^i)^2, \text{ cu } \quad x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y^j e_j .$$

DEFINIȚIA 6.11. *Expresiile (9) se numesc* ***expresia canonică a formei biliniare simetrice*** $\mathscr{F}$ *şi, respectiv,* ***expresia canonică a formei pătratice*** $\mathscr{P}$*. Se spune în acest caz că formele au fost* ***reduse la expresia canonică****.*

6.3. Reducerea formei pătratice la expresia canonică

TEOREMA 6.5.(Metoda lui Gauss). *O formă pătratică $\mathscr{P}$: E → **R** se poate scrie totdeauna sub forma canonică printr-o schimbare convenabilă a bazei spațiului.*

Demonstrație. Fie o formă pătratică

$$\mathscr{P}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}x^i x^j \quad , \quad cu \quad x=B\cdot\left(x^1,x^2,\dots,x^n\right)^t \quad ,$$

în care $B=\left(e_1,e_2,\dots,e_n\right)$ este bază a spațiului E. Punem în evidență toți termenii care îl conțin pe x^1 şi anume $\alpha^{11}\left(x^1\right)^2+2\alpha^{12}x^1x^2+2\alpha^{13}x^1x^3+\dots+2\alpha^{1n}x^1x^n$, în care formăm pătratul perfect ($\alpha^{11}\neq 0$) obținând

$$(10) \qquad \frac{1}{\alpha^{11}}\left(\alpha^{11}x^1+\alpha^{12}x^2+...+\alpha^{1n}x^n\right)^2$$

şi din care trebuie să scădem pe

$$\frac{1}{\alpha^{11}}\left[\left(\alpha^{12}\right)^2\left(x^2\right)^2+\left(\alpha^{13}\right)^2\left(x^3\right)^2+...+\left(\alpha^{1n}\right)^2\left(x^n\right)^2\right] .$$

Deci $\mathscr{P}(x)$ se scrie

$$\mathscr{P}(x)=\frac{1}{\alpha^{11}}\left(\alpha^{11}x^1+\alpha^{12}x^2+\dots+\alpha^{1n}x^n\right)^2+\mathscr{P}_1(x),$$

unde $\mathscr{P}_1(x)$ este o formă pătratică care nu-l conține pe x^1.

Procedeul se continuă şi pentru $\mathscr{P}_1$. După n astfel de operații obținem

$$\mathscr{P}(y)=\beta^1\left(y^1\right)^2+\beta^2\left(y^2\right)^2+\dots+\beta^n\left(y^n\right)^2 ,$$

unde :

$$y=B'\cdot\left(y^1,y^2,\dots,y^n\right)^t,$$

B' noua bază(care, eventual, se determină uşor folosind schimbările de coordonate)

$$\beta^1=\frac{1}{\alpha^{11}}, \qquad y^1=\alpha^{11}x^1+\alpha^{12}x^2+...+\alpha^{1n}x^n$$

ceilalți coeficienți β^i şi coordonate y^i, i = 2, ... ,n, se determină din aproape în aproape.

Observația 6.7. Procedeul folosit nu este unic; aici am început cu x^1, dar putem începe cu oricare x^i şi să le separăm.

Observația 6.8. Dacă $\alpha^{ij} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ şi $\mathscr{P}$ nu este identic nulă, atunci există cel puțin un element $\alpha^{ij} \neq 0$, pentru $i \neq j$. Prin transformarea de coordonate

$x^i = x'^i + x'^j$, $x^j = x'^i - x'^j$, $x^k = y'^k$, $k \neq i, j$, expresia formei pătratice devine

$$\mathscr{P}(x') = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha'^{ij} x'^i x'^j ,$$

în care cel puțin unul din elementele α'^{ij}, $i = 1,2,\ldots,n$, este nenul (deoarece $x^i x^j = (x'^i)^2 - (x'^j)^2$).

Presupunând $\alpha'^{11} \neq 0$, procedeul se continuă cu expresia (10).

TEOREMA 6.6. (Metoda lui Jacobi) *Fie E spațiu vectorial real, $\mathscr{P}$: E → **R** o formă pătratică, $\mathscr{F}$ forma biliniară simetrică asociată, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază în E,*

$$M(\mathscr{F}; B \times B) = \left[\alpha^{ij}\right]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} ,$$

$$\mathscr{P}(x) = [x]_B^t \, M(\mathscr{F}; B \times B) [x]_B = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij} x^i x^j .$$

Dacă toți determinanții

$$(11) \qquad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = \alpha^{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \\ \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \\ \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \det M(\mathscr{F}; B \times B) ,$$

*numiți **determinanți minori principali** ai matricei M($\mathscr{F}$; B×B) sunt nenuli, atunci există o bază*

$$\widetilde{B} = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n),$$

obținută din B prin matricea de trecere triunghiulară

(12) $$M\left(B,\widetilde{B}\right)=\begin{bmatrix}\lambda^{11} & \lambda^{12} & \lambda^{13} & \dots & \lambda^{1n}\\ 0 & \lambda^{22} & \lambda^{23} & \dots & \lambda^{2n}\\ 0 & 0 & \lambda^{33} & \dots & \lambda^{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{nn}\end{bmatrix},$$

în care $\mathscr{P}$ are forma canonică

(13) $$\mathscr{P}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\left(\widetilde{x}^{i}\right)^2,\quad cu\qquad x=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}^{i}\widetilde{e}_i .$$

Demonstrație. În baza $\widetilde{B}$

$$\mathscr{P}\left(x\right)=\left[x\right]_{\widetilde{B}}^{t}\cdot M\left(\mathscr{F};\widetilde{B}\times\widetilde{B}\right)\cdot\left[x\right]_{\widetilde{B}}=\sum_{i,j=1}^{n}\widetilde{\alpha}^{ij}\widetilde{x}^{i}\widetilde{x}^{j}\ ,\quad \text{cu}\quad \widetilde{\alpha}^{ij}=\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j\right)$$

Vom demonstra că se poate determina o transformare triunghiulară de forma (12) astfel ca $\widetilde{\alpha}^{ij}=0$, pentru $i\neq j$. Deoarece $\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j\right)=\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_i\right)$, este suficient ca

(14) $$\widetilde{\alpha}^{ij}=\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j\right)=0\ ,\quad \forall i,j\in\{1,2,\dots,n\},\ \text{cu}\quad j<i\ ,$$

sau, folosind transformarea (12), $\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,\sum_{k=1}^{j}\lambda^{kj}e_k\right)=0,\quad \forall i,j\in\{1,2,\dots,n\},\ \text{cu}\ \ j<i\quad\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{j}\lambda^{kj}\ \mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,e_k\right)=0,\quad \forall i,j\in\{1,2,\dots,n\},\ \text{cu}\ \ j<i\quad\Leftrightarrow$$

(15) $$\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,e_k\right)=0,\qquad k=1,2,\dots,i-1;\quad i=1,2,\dots,n.$$

Adăugăm, pentru simplificarea calculelor, condițiile

(16) $$\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,e_i\right)=1,\qquad i=1,2,\dots,n\ .$$

Cu dezvoltările

$$\mathscr{F}\left(\widetilde{e}_i,e_k\right)=\mathscr{F}\left(e_k,\widetilde{e}_i\right)=\mathscr{F}\left(e_k,\sum_{j=1}^{i}\lambda^{ij}e_j\right)=\sum_{j=1}^{i}\lambda^{ij}\ \mathscr{F}\left(e_k,e_j\right)=\sum_{j=1}^{i}\lambda^{ij}\alpha^{kj}=$$

$$=\sum_{j=1}^{i}\alpha^{kj}\lambda^{ji}=\alpha^{k1}\lambda^{1i}+\alpha^{k2}\lambda^{2i}+\dots+\alpha^{ki}\lambda^{ii}\ ,$$

pentru că sunt scalari şi α^{kj} sunt dați, iar λ^{ji} sunt necunoscuți, relațiile (15) şi (16) se scriu în sistemul

$$
(17)\begin{cases}
\alpha^{11}\lambda^{1i}+\alpha^{12}\lambda^{2i}+\ldots+\alpha^{1i}\lambda^{ii}=0\\
\alpha^{21}\lambda^{1i}+\alpha^{22}\lambda^{2i}+\ldots+\alpha^{2i}\lambda^{ii}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha^{i-1,1}\lambda^{1i}+\alpha^{i-1,2}\lambda^{2i}+\ldots+\alpha^{i-1,i}\lambda^{ii}=0\\
\alpha^{i1}\lambda^{1i}+\alpha^{i2}\lambda^{2i}+\ldots+\alpha^{ii}\lambda^{ii}=1
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{pmatrix}
\alpha^{11} & \alpha^{12} & \ldots & \alpha^{1i}\\
\alpha^{21} & \alpha^{22} & \ldots & \alpha^{2i}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\alpha^{i-1,1} & \alpha^{i-1,2} & \ldots & \alpha^{i-1,i}\\
\alpha^{i1} & \alpha^{i2} & \ldots & \alpha^{ii}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\lambda^{1i}\\ \lambda^{2i}\\ \vdots\\ \lambda^{i-1,i}\\ \lambda^{ii}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1
\end{pmatrix},
$$

pentru $i=1,2,\ldots,n$. Prin ipoteză $\Delta_i \neq 0$, deci acest sistem va determina în mod unic coordonatele $\lambda^{1i},\lambda^{2i},\ldots,\lambda^{ii}$ ale vectorului $\tilde{e}_i$ în baza B.

De exemplu, $\lambda^{ii}=\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$ (din rezolvarea sistemelor de ecuații liniare şi omogene).

În baza $\tilde{B}$ astfel obținută, forma pătratică va avea forma canonică

$$\mathscr{P}(x)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}^{ii}\left(\tilde{x}^{i}\right)^{2},$$

cu coeficienții

$$\tilde{\alpha}^{ii}=\mathscr{F}\left(\tilde{e}_i,\tilde{e}_i\right),$$

care trebuie determinați. Pentru aceasta facem dezvoltarea

$$\tilde{\alpha}^{ii}=\mathscr{F}\left(\tilde{e}_i,\tilde{e}_i\right)=\mathscr{F}\left(\tilde{e}_i,\sum_{j=1}^{i}\lambda^{ji}e_j\right)=\sum_{j=1}^{i}\lambda^{ji}\ \mathscr{F}\left(\tilde{e}_i,e_j\right),$$

şi, ținând seama de (15) şi (16), rezultă

$$\tilde{\alpha}^{ii}=\lambda^{ii}\quad .$$

Cu λ^{ii} dedus din sistemul (17) rezultă

$$\tilde{\alpha}^{ii}=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Pentru $i=1$, avem

$$\tilde{\alpha}^{11}=\mathscr{F}\left(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1\right)=\mathscr{F}\left(\tilde{e}_1,\lambda^{11}e_1\right)=\lambda^{11}.$$

Pe de altă parte,

$$1=\mathscr{F}\left(\tilde{e}_1,e_1\right)=\mathscr{F}\left(\lambda^{11}e_1,e_1\right)=\lambda^{11}\ \mathscr{F}\left(e_1,e_1\right)=\lambda^{11}\alpha^{11}$$

şi rezultă

$$\tilde{\alpha}^{11} = \frac{1}{\alpha^{11}} = \frac{1}{\Delta_1}.$$

Deci în baza $\tilde{B}$, determinată prin procedeul de mai sus, forma pătratică are forma canonică (13) .

Observaţia 6.9. Teorema lui Jacobi permite să se construiască o bază pentru reducerea formei pătratice la forma canonică şi să se calculeze coeficienţii formei canonice. Aceşti coeficienţi arată numărul termenilor negativi cât şi ai celor pozitivi.

TEOREMA 6.7. (Metoda valorilor proprii şi a vectorilor proprii). *Dacă $\mathscr{P}: E \to \mathbf{R}$ este o formă pătratică, atunci există o bază $B' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a lui E faţă de care expresia canonică a formei este*

$$\mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(x'^i\right)^2,$$

unde $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ sunt valorile proprii ale matricei formei, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atâtea ori cât este multiplicitatea sa, iar x'^i, i = 1, ... , n, sunt coordonatele lui x în această bază.

Demonstraţie. Deoarece matricea formei $\mathscr{P}$ este o matrice simetrică reală, ea admite numai valori proprii reale şi se poate diagonaliza. Atunci baza căutată B' este formată din vectorii proprii ortonormaţi ai matricei formei M($\mathscr{F}; B \times B$). În baza B' obţinem expresia canonică a formei $\mathscr{P}$ şi anume, dacă M(B, B') este matricea de trecere de la B la B', prin schimbarea $[x]_B = M(B, B')\,[x]_{B'}$, avem

$$\mathscr{P}(x) = [x]_{B'}^t \cdot M^t(B, B') \cdot M(\mathscr{F}; B \times B) \cdot M(B, B') \cdot [x]_{B'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(x'^i\right)^2.$$

6.4.Signatura unei forme pătratice reale

DEFINIŢII 6.12. *O formă pătratică $\mathscr{P}: E \to \mathbf{R}$ se numeşte* ***pozitiv semidefinită (negativ semidefinită)*** *dacă $\mathscr{P}(x) \geq 0$ (respectiv $\mathscr{P}(x) \leq 0$) pentru $\forall\, x \in E$. Forma pătratică $\mathscr{P}$ se numeşte* ***pozitiv definită (negativ definită)*** *dacă $\mathscr{P}(x) > 0$ (respectiv $\mathscr{P}(x) < 0$) pentu orice $x \neq 0_E$, cu $x \in E$.*

O formă biliniară simetrică $\mathcal{F}: E\times E \to \mathbf{R}$ se numeşte ***pozitiv definită (****negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită) dacă forma pătratică asociată $\mathcal{P}$ are această proprietate.*

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial real este o formă biliniară simetrică şi pozitiv definită.

Observaţia 6.10. Dacă $\exists$ $x_1 \in E$ astfel încât $\mathcal{P}(x_1) > 0$ şi $x_2 \in E$ astfel încât $\mathcal{P}(x_2) < 0$, spunem că forma pătratică $\mathcal{P}$ este **nedefinită**.

Metoda lui Jacobi ne permite să obţinem o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o formă pătratică $\mathcal{P}: E \to \mathbf{R}$ să fie pozitiv definită (respectiv negativ definită).

TEOREMA 6.8. (Criteriul lui Sylvester). *Dacă sunt îndeplinite condiţiile teoremei lui Jacobi, atunci forma pătratică $\mathcal{P}: E \to \mathbf{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_k > 0$, $k = 1,\dots,n$ şi este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i=1,\dots,n$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{P}$ o formă pătratică pozitiv definită. Admitem prin absurd că există un $\Delta_p = 0$, $1 \le p \le n$, adică o linie din Δ_p este o combinaţie liniară de celelalte, deci există numerele $k^1,\dots,k^p$, nu toate nule, astfel încât $k^1\alpha^{1i} + k^2\alpha^{2i} + \dots + k^p\alpha^{pi} = 0$, $i = 1,\dots,p$, adică

$$k^1 \mathcal{F}(e_1, e_i) + k^2 \mathcal{F}(e_2, e_i) + \dots + k^p \mathcal{F}(e_p, e_i) = 0.$$ De aici rezultă

(18) $$\mathcal{F}\left(k^1 e_1 + k^2 e_2 + \dots + k^p e_p,\ e_i\right) = 0,\quad i = 1,\dots,p,$$

deoarece $\mathcal{F}$ este o formă biliniară simetrică. Amplificând (18) cu k^i, $i = 1,\dots,p$ şi, adunând relaţiile astfel obţinute, găsim

$$k^1 \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{p} k^i e_i, e_1\right) + k^2 \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{p} k^i e_i, e_2\right) + \dots + k^p \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{p} k^i e_i, e_p\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{p} k^i e_i, \sum_{i=1}^{p} k^i e_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} k^i e_i = 0_E,$$

deoarece $\mathcal{F}$ este admisă pozitiv definită. Cum k^i, $i = 1,\dots,p$, nu sunt toţi nuli, rezultă că avem $dep_E\{e_1,\dots,e_p\}$, ceea ce contrazice ipoteza că $\{e_1, e_2,\dots,e_n\}$ este bază în E.

Deci $\Delta_p \neq 0, \quad p = 1,\dots,n$. Mai mult, conform T.6.6. (a lui Jacobi), există o bază a lui E față de care

$$\mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \left(x'^i\right)^2$$

şi, cum $\mathscr{P}$ este pozitiv definită, rezultă

$$\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0, \quad \text{adică} \quad \Delta_i > 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Reciproc, dacă $\Delta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, rezultă

$$\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0, \qquad i = 1,\dots,n$$

şi, din $\mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \left(x'^i\right)^2$, deducem $\mathscr{P}(x) \geq 0$; $\mathscr{P}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'^1 = x'^2 = \dots = x'^n = 0$,

deci $x = 0_E$. Avem $\mathscr{P}(x) > 0, \quad \forall x \neq 0_E$.

Dacă $\mathscr{P}$ este negativ definită, rezultă că forma $-\mathscr{P}$ este pozitiv definită şi totul se repetă ca mai sus având în vedere că matricea lui $-\mathscr{P}$ este

$$\mathrm{M}\,(-\mathscr{T}; B \times B) = \left[-\alpha^{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}.$$ ❿

DEFINIȚIA 6.13. *Fie expresia canonică*

$$\mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i^2$$

*a unei forme pătratice $\mathscr{P}$: E ✹ **R** în care p coeficienți sunt strict pozitivi, q sunt strict negativi, iar $d = n - (p + q)$ sunt nuli. Tripletul (p, q, d) se numeşte **signatura formei pătratice** $\mathscr{P}$.*

Consecința 6.1. Forma pătratică $\mathscr{P}$: E ✹ **R** este pozitiv definită dacă şi numai dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

(i) are signatura $(n,0,0)$;

(ii) determinanții Δ_i, $i = 1,\dots,n$ sunt strict pozitivi;

(iii) valorile proprii ale matricei A sunt strict pozitive.

6.5. Probleme rezolvate

1. Se dă funcția $\mathscr{F}: \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definită prin $\mathscr{F}(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 + x^1y^3 - x^3y^1 + x^1y^4 - x^4y^1 + x^2y^3 - x^3y^2 + x^2y^4 - x^4y^2 + x^3y^4 - x^4y^3$, cu $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $y = (y^1, y^2, y^3, y^4) \in$ $\mathbf{R}^4$.

i) Să se arate că $\mathscr{F}$ este o formă biliniară.

ii) Să se scrie matricea formei în raport cu baza canonică B a spațiului $\mathbf{R}^4$.

iii) Să se determine matricea formei în raport cu baza B' formată din vectorii $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,1,0,1)$, $u_4 = (1,0,0,1)$.

Rezolvare. i) Arătăm că $\mathscr{F}$ este liniară în raport cu primul argument. Considerând oricare doi vectori $x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4)$ din $\mathbf{R}^4$ și scalarii $\alpha, \beta \in$ $\mathbf{R}$, avem

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= (\alpha x_1^1 + \beta x_2^1)y^2 - (\alpha x_1^2 + \beta x_2^2)y^1 + (\alpha x_1^1 + \beta x_2^1)y^3 - (\alpha x_1^3 + \beta x_2^3)y^1 + \\ &+ (\alpha x_1^1 + \beta x_2^1)y^4 - (\alpha x_1^4 + \beta x_2^4)y^1 + (\alpha x_1^2 + \beta x_2^2)y^3 - (\alpha x_1^3 + \beta x_2^3)y^2 + \\ &+ (\alpha x_1^2 + \beta x_2^2)y^4 - (\alpha x_1^4 + \beta x_2^4)y^2 + (\alpha x_1^3 + \beta x_2^3)y^4 - (\alpha x_1^4 + \beta x_2^4)y^3 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \alpha\left(x_1^1y^2 - x_1^2y^1 + x_1^1y^3 - x_1^3y^1 + x_1^1y^4 - x_1^4y^1 + x_1^2y^3 - x_1^3y^2 + x_1^2y^4 - x_1^4y^2 + x_1^3y^4 - x_1^4y^3\right) + \\ &+ \beta\left(x_2^1y^2 - x_2^2y^1 + x_2^1y^3 - x_2^3y^1 + x_2^1y^4 - x_2^4y^1 + x_2^2y^3 - x_2^3y^2 + x_2^2y^4 - x_2^4y^2 + x_2^3y^4 - x_2^4y^3\right) = \\ &= \alpha\, \mathscr{F}(x_1, y) + \beta\, \mathscr{F}(x_2, y)\ .\end{aligned}$$

Analog $\mathscr{F}(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\, \mathscr{F}(x, y_1) + \mu\, \mathscr{F}(x, y_2)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Rezultă că $\mathscr{F}$ este lini-ară în raport cu ambele argumente, deci $\mathscr{F}$ este o formă biliniară.

ii) Baza canonică a spațiului $\mathbf{R}^4$ este formată din vectorii $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. Matricea formei $\mathscr{F}$ în raport cu baza canonică B este

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}; B \times B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) Folosim relația (4) din teorema 6.2 și avem

$$\mathrm{M}(\mathcal{F};B'\times B') = \mathrm{M}^t(B,B')\cdot \mathrm{M}(\mathcal{F};B\times B)\cdot \mathrm{M}(B,B') =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Fie forma pătratică $\mathcal{P}$: $\mathbf{R}^2$ ✹ $\mathbf{R}$, definită prin $\mathcal{P}(x) = 3(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 5(x^2)^2$. Să se determine valoarea parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca vectorii $x = (1,2)$ şi $y = (\lambda,-1)$ să fie ortogonali în raport cu forma $\mathcal{P}$.

Rezolvare. Conform definiției 6.10, vectorii x şi y sunt ortogonali în raport cu $\mathcal{P}$ dacă $\mathcal{F}(x,y) = 0$, unde $\mathcal{F}$ este forma biliniară simetrică ataşată lui $\mathcal{P}$. Determinăm pe $\mathcal{F}(x,y)$, cu $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2) \in \mathbf{R}^2$ **,** folosind observația 6.4. Avem

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{2}[\ \mathcal{P}(x+y) - \mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(y)] = 3x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + 5x^2y^2$$

sau, matriceal,

$$\mathcal{F}(x,y) = (x^1, x^2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Pentru $x = (1,2)$ şi $y = (\lambda,-1)$, relația $\mathcal{F}(x,y) = 0$ este echivalentă cu

$$(1,2)\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\lambda - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{5}.$$

3. Să se reducă la forma canonică, prin metoda lui Gauss, următoarele forme pătratice:

i) $\mathcal{P}$: $\mathbf{R}^3$ ✹ $\mathbf{R}$, $\mathcal{P}(x) = 3(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 5(x^3)^2 + 2x^1x^2 - 2x^2x^3$;

ii) $\mathcal{P}$: $\mathbf{R}^4$ ✹ $\mathbf{R}$, $\mathcal{P}(x) = 2x^1x^2 - 6x^1x^3 - 6x^2x^4 + 2x^3x^4$.

Rezolvare. i) Grupăm termenii care-l conțin pe x^1

$$\mathcal{P}(x) = \left(3(x^1)^2 + 2x^1x^2\right) + 2(x^2)^2 + 5(x^3)^2 - 2x^2x^3$$

sau

$$\mathscr{P}(x) = \frac{1}{3}\left(3x^1 + x^2\right)^2 + \frac{5}{3}\left(x^2\right)^2 + 5\left(x^3\right)^2 - 2x^2x^3 .$$

Facem transformarea

$$y^1 = 3x^1 + x^2 \quad , \quad y^2 = x^2 \quad , \quad y^3 = x^3$$

şi obţinem

$$\mathscr{P}(y) = \frac{1}{3}\left(y^1\right)^2 + \frac{5}{3}\left(y^2\right)^2 + 5\left(y^3\right)^2 - 2y^2y^3 ,$$

care se mai scrie

$$\mathscr{P}(y) = \frac{1}{3}\left(y^1\right)^2 + \frac{3}{5}\left[\left(\frac{5}{3}y^2\right)^2 - 2\cdot\frac{5}{3}y^2\cdot y^3 + \left(y^3\right)^2\right] - \frac{3}{5}\left(y^3\right)^2 + 5\left(y^3\right)^2$$

sau, încă

$$\mathscr{P}(y) = \frac{1}{3}\left(y^1\right)^2 + \frac{1}{15}\left(5y^2 - 3y^3\right)^2 + \frac{22}{5}\left(y^3\right)^2 .$$

Cu transformarea

$$z^1 = y^1 \quad , \quad z^2 = 5y^2 - 3y^3 \quad , \quad z^3 = y^3 \quad ,$$

obţinem expresia canonică

$$\mathscr{P}(z) = \frac{1}{3}\left(z^1\right)^2 + \frac{1}{15}\left(z^2\right)^2 + \frac{22}{5}\left(z^3\right)^2 .$$

Deci, cu transformarea $z^1 = 3x^1 + x^2, \quad z^2 = 5x^2 - 3x^3, \quad z^3 = x^3,$ forma pătratică $\mathscr{P}(x)$ se schimbă în forma canonică $\mathscr{P}(z)$, obţinută mai sus.

ii) Deoarece toţi coeficienţii $a^{ii} = 0, \quad i = 1,2,3,4,$ vom face transformarea

$$x^1 = y^1 - y^2 \quad , \quad x^2 = y^1 + y^2 \quad , \quad x^3 = y^3 \quad , \quad x^4 = y^4$$

şi obţinem

$$\mathscr{P}(y) = 2\left(y^1\right)^2 - 6y^1y^3 - 6y^1y^4 - 2\left(y^2\right)^2 + 6y^2y^3 - 6y^2y^4 + 2y^3y^4 ,$$

care se mai scrie

$$\mathscr{P}(y) = \frac{1}{2}\left[\left(2y^1\right)^2 - 2\cdot 2y^1\cdot 3y^3 - 2\cdot 2y^1\cdot 3y^4 + 2\cdot 3y^3\cdot 3y^4 + \left(3y^3\right)^2 + \left(3y^4\right)^2\right] - 9y^3y^4 -$$

$$- \frac{9}{2}\left(y^3\right)^2 - \frac{9}{2}\left(y^4\right)^2 - 2\left(y^2\right)^2 + 6y^2y^3 - 6y^2y^4 + 2y^3y^4$$

sau, încă

$$\mathscr{P}(y)=\frac{1}{2}\left(2y^1-3y^3-3y^4\right)^2-2\left(y^2\right)^2+6y^2y^3-6y^2y^4-\frac{9}{2}\left(y^3\right)^2-7y^3y^4-\frac{9}{2}\left(y^4\right)^2.$$

Cu transformarea

$$z^1=2y^1-3y^3-3y^4 \quad , \quad z^2=y^2 \quad , \quad z^3=y^3 \quad , \quad z^4=y^4 \quad ,$$

avem

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{2}\left(z^1\right)^2-\frac{1}{2}\left[\left(2z^2\right)^2-12z^2z^3+12z^2z^4\right]-\frac{9}{2}\left(z^3\right)^2-7z^3z^4-\frac{9}{2}\left(z^4\right)^2$$

sau

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{2}\left(z^1\right)^2-\frac{1}{2}\left(2z^2-3z^3+3z^4\right)^2-16z^3z^4.$$

În sfârşit, cu transformarea

$$z^1=t^1 \quad , \quad 2z^2-3z^3+3z^4=t^2 \quad , \quad z^3=t^3-t^4 \quad , \quad z^4=t^3+t^4 \quad ,$$

obținem forma canonică

$$\mathscr{P}(t)=\frac{1}{2}\left(t^1\right)^2-\frac{1}{2}\left(t^2\right)^2-16\left(t^3\right)^2+16\left(t^4\right)^2 \; .$$

Aşadar cu transformarea

$$t^1=x^1+x^2-3x^3-3x^4 \quad , \quad t^2=-x^1+x^2+3x^3-3x^4 \quad , \quad t^3=\frac{x^3+x^4}{2} \quad , \quad t^4=\frac{x^4-x^3}{2} \quad ,$$

forma pătratică $\mathscr{P}(x)$ se schimbă în forma canonică $\mathscr{P}(t)$ obținută .

4. Folosind metoda lui Jacobi să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice :

i) $\mathscr{P}:\mathbf{R}^3$ ✹ $\mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x)=5\left(x^1\right)^2+6\left(x^2\right)^2+4\left(x^3\right)^2-4x^1x^2-4x^1x^3$;

ii) $\mathscr{P}:\mathbf{R}^3$ ✹ $\mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x)=2\left(x^1\right)^2+2\left(x^2\right)^2+3\left(x^3\right)^2-4x^1x^2-4x^2x^3$.

Pentru fiecare dintre acestea să se găsească o bază față de care forma pătratică să aibă o expresie canonică.

Rezolvare. i) Matricea formei polare $\mathscr{F}$ ataşate lui $\mathscr{P}$ este

$$\mathrm{M}(\mathscr{F};B\times B)=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 6 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Minorii principali sunt

$$\Delta_0=1,\quad \Delta_1=5,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}=26,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 6 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=80,$$

toți nenuli şi pozitivi.

Forma canonică a lui $\mathscr{P}(x)$ este

$$\mathscr{P}(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\left(x'^{i}\right)^2=\frac{1}{5}\left(x'^{1}\right)^2+\frac{5}{26}\left(x'^{2}\right)^2+\frac{13}{40}\left(x'^{3}\right)^2,$$

unde

$$[x]_{B'}^{t}=\left(x'^{1},x'^{2},x'^{3}\right),$$

cu B' baza ortogonală în raport cu care avem forma canonică pentru $\mathscr{P}(x)$.

Pentru cazul general, când $\mathscr{P}$: V_n ✹ **R,** se ştie că

$$\mathrm{M}(B,B')=\begin{pmatrix}\lambda^{11} & \lambda^{12} & \lambda^{13} & \dots & \lambda^{1n}\\ 0 & \lambda^{22} & \lambda^{23} & \dots & \lambda^{2n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{nn}\end{pmatrix}\in T_S(n,\mathbf{R}),$$

în care necunoscutele λ^{ij} (cu $i=j,\quad j=1,\dots,n$) se determină din ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix}\alpha^{11} & \alpha^{21} & \dots & \alpha^{i1}\\ \alpha^{12} & \alpha^{22} & \dots & \alpha^{i2}\\ \vdots & & & \vdots\\ \alpha^{1,i-1} & \alpha^{2,i-1} & \dots & \alpha^{i,i-1}\\ \alpha^{1i} & \alpha^{2i} & \dots & \alpha^{ii}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda^{1i}\\ \lambda^{2i}\\ \vdots\\ \lambda^{i-1,i}\\ \lambda^{ii}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

în care α^{ij} sunt elementele cunoscute ale matricei $\mathrm{M}(\mathscr{F};\ B\times B)$.

În cazul nostru :

- Pentru $i=j=1\ \Rightarrow\ \alpha^{11}\lambda^{11}=1\ \Rightarrow\ 5\lambda^{11}=1\ \Rightarrow\ \lambda^{11}=\dfrac{1}{5}$.

- Pentru $i = j = 2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{12} \\ \lambda^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \lambda^{12} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{26} = \dfrac{1}{13}$ şi $\lambda^{22} = \dfrac{5}{26}$.

- Pentru $i = j = 3$ avem

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{13} \\ \lambda^{23} \\ \lambda^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

din care rezultă :

$$\lambda^{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{80} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20}; \quad \lambda^{23} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{80} = \frac{1}{20}; \quad \lambda^{33} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{80} = \frac{13}{40}$$

şi obţinem, deci,

$$\mathrm{M}(B, B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{13} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{13}{40} \end{pmatrix}$$

adică : $e'_1 = \frac{1}{5} e_1, \quad e'_2 = \frac{1}{13} e_1 + \frac{5}{26} e_2, \quad e'_3 = \frac{3}{20} e_1 + \frac{1}{20} e_2 + \frac{13}{40} e_3$.

ii) Avem

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}; B \times B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ cu } \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = -8.$$

Vom face o schimbare de bază astfel ca, în noua bază, minorii principali să fie toţi diferiţi de zero. Cu matricea de trecere de la baza B la baza B'

$$\mathrm{M}(B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obţinem matricea formei polare $\mathscr{F}$ ataşate lui $\mathscr{P}$ în noua bază B'

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}; B'\times B') = \mathrm{M}^t(B, B')\cdot \mathrm{M}(\mathscr{F}; B\times B)\cdot \mathrm{M}(B,B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

în care $\Delta_0 = 1,\quad \Delta_1 = 2,\quad \Delta_2 = 6,\quad \Delta_3 = 8,$ iar forma canonică va fi

$$\mathscr{P}(x') = \frac{1}{2}\left(x'^1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x'^2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x'^3\right)^2,$$

unde $x' = \left(x'^1, x'^2, x'^3\right) \in \mathbf{R}^3$, este exprimat în baza B'.

Se observă că vectorii $e'_1,\ e'_2,\ e'_3$ ai bazei B' sunt ortonormați.

5. Se dă forma pătratică $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x) = 5\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 + 4x^1x^2 + 6x^1x^3$. Utilizând metoda valorilor proprii, să se aducă $\mathscr{P}(x)$ la expresia canonică şi apoi să i se determine signatura.

Rezolvare. Matricea reală $\mathrm{M}(\mathscr{F}; B\times B)$ a formei polare $\mathscr{F}$ ataşate lui $\mathscr{P}$ se scrie

$$\mathrm{M}(\mathscr{F}; B\times B) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

care este o matrice simetrică reală şi deci are valori proprii reale. Aceste valori proprii vor constitui coeficienții formei canonice. Determinăm valorile proprii din ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\ .$$

Efectuăm calculele şi obținem $\lambda\left(\lambda^2 - 5\lambda - 14\right) = 0$, adică $\lambda^1 = -2$, $\lambda^2 = 0$, $\lambda^3 = 7$, deci vectorii proprii corespunzători vor fi ortogonali.

Dacă $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ, atunci ecuația vectorilor proprii se scrie

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Pentru $\lambda^1 = -2$, avem sistemul matriceal

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

din care $2x^1 = -x^2$, $3x^1 = -3x^3$, deci vectorul propriu căutat este $x_1 = -x^3(1,-2,-1)$, cu $x^3 \in \mathbf{R}$. Prin normalizare $\frac{x_1}{\|x_1\|} = e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Analog, pentru $\lambda^2 = 0$ obținem $x_2 = -\frac{x^3}{3} \cdot (1,2,-3)$, cu $x^3 \in \mathbf{R}$ şi vectorul $e'_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$. Coordonatele vectorului e'_3 se obțin fie ca soluție a sistemului matriceal

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

care apoi se normalizează, fie din condițiile de ortogonalitate $(e'_3, e'_1) = 0$ şi $(e'_3, e'_2) = 0$. Găsim $e'_3 = \frac{x_3}{\|x_3\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$.

Transformarea ortogonală care ne conduce la forma canonică este

$$[x]_B = M(B,B') \cdot [x]_{B'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}_{B'} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x'^1 + \dfrac{1}{\sqrt{14}}x'^2 + \dfrac{1}{\sqrt{21}}x'^3 \\ x^2 = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}x'^1 + \dfrac{2}{\sqrt{14}}x'^2 + \dfrac{1}{\sqrt{21}}x'^3 \\ x^3 = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}x'^1 - \dfrac{3}{\sqrt{14}}x'^2 + \dfrac{2}{\sqrt{21}}x'^3 \end{cases}.$$

Prin această transformare, forma pătratică devine

$$\mathscr{P}(x') = -2(x'^1)^2 + 7(x'^3)^2.$$

Această formă canonică s-a obținut cu ajutorul unei baze ortonormate dată de $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

Signatura formei pătratice $\mathscr{P}$ este (conform definiției 6.12) dată de tripletul $(1,1,1)$, deoarece în forma canonică obținută avem $p = 1$ coeficienți strict pozitivi, $q = 1$ strict negativi şi $d = 3 - (p + q) = 1$ coeficienți nuli.

6.6.Probleme propuse

1. Fie P_3 spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale reale care au cel mult gradul trei şi fie $\mathscr{F}$: $P_3 \times P_3$ ✹**R** funcția definită prin $\mathscr{F}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 x(t)y(s)dtds$.

i) Să se arate că $\mathscr{F}$ este o formă biliniară.

ii) Să se determine matricea ei în baza canonică a spațiului P_3 şi apoi matricea ei în baza $B' = (t^2 - 1, t^2 - t, t^2, t^2 - t^3)$.

2. Să se precizeze care dintre următoarele funcții sunt forme biliniare şi, în caz afirmativ, să se găsească spațiul nul relativ la al doilea argument.

i) $\mathscr{F}$: $P_n \times P_n$ ✹**R,** $\quad \mathscr{F}(x, y) = \int_0^2 x(t)[y(t) + k]dt, \quad k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

ii) $\mathscr{F}$: $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ ✹**R,** $\mathscr{F}(x, y) = x^1y^2 - x^2y^1 + x^1y^3 - x^3y^1 + k, \quad k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

iii) $\mathscr{F}$: $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ ✹**R,** $\mathscr{F}(x, y) = 2x^1y^1 + x^2y^1 + x^2y^2 + 3x^3y^3 + x^4y^1 + x^4y^4$.

iv) $\mathscr{F}: \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$,

$\mathscr{F}(x,y) = 4x^1y^1 - 2x^1y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + 2x^3y^1 + x^3y^3 - 2x^4y^1 + x^4y^2.$

3. Fie formele biliniare:

$\mathscr{F}_1: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{F}_1(x,y) = x^3y^1 - 2x^1y^1 + x^2y^3 - x^1y^2$,

$\mathscr{F}_2: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{F}_2(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 + x^1y^3 - x^3y^1 + x^2y^3 - x^3y^2$.

Să se scrie matricele corespunzătoare acestor forme biliniare în raport cu baza canonică a spaţiului $\mathbf{R}^3$ şi apoi în raport cu baza *B'* formată din vectorii $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,1,0,1)$, $u_4 = (1,0,0,1)$.

4. Fie forma biliniară

$$\mathscr{F}: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\quad \mathscr{F}(x,y) = x^1y^1 - 2x^2y^1 + x^2y^2 - 3x^3y^2.$$

i) Să se determine matricea corespunzătoare formei biliniare în baza din $\mathbf{R}^3$ formată din vectorii $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2)$, $v_3 = (0,1,1)$, exprimaţi în baza canonică din $\mathbf{R}^3$.

ii) Să se determine spaţiul nul relativ la primul argument al formei biliniare.

iii) Să se reducă la forma canonică.

5. În spaţiul $\mathbf{R}^3$ se consideră forma biliniară

$$\mathscr{F}(x,y) = 3x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^2 + x^3y^1 + 3x^3y^2 + x^3y^3.$$

Să se aducă la forma canonică.

6. Fie V un spaţiu euclidian complex şi $\mathscr{F}: V \to V$ un endomorfism. Definim forma pătratică $x \to \mathscr{P}(x) = (\mathscr{F}(x), x), \quad x \in V$.

i) Să se arate că dacă $\mathscr{F}$ este o transformare simetrică, atunci $\mathscr{P}(x) \in \mathbf{R}$, $\forall x \in V$, iar dacă $\mathscr{F}$ este antisimetrică, atunci $\mathscr{P}(x)$ este pur imaginar, $\forall x \in V$.

ii) Să se verifice relaţiile

$$\mathscr{P}(tx) = t\bar{t}\,\mathscr{P}(x), \quad \forall t \in \mathbf{C},$$

$$\mathscr{P}(x+y) = \mathscr{P}(x) + \mathscr{P}(y) + (\mathscr{F}(x), y) + (\mathscr{F}(y), x), \quad \forall x, y \in V,$$

şi să se scrie formula corespunzătoare pentru $\mathscr{P}(x+ty)$.

iii) Să se verifice implicaţia $\mathscr{P}(x) = 0,\ \forall x \in V \Rightarrow \mathscr{F}(x) = 0_V \quad \forall x \in V$.

iv) Să se arate că dacă $\mathscr{P}(x)$ este real $\forall x \in V$, atunci $\mathscr{F}$ este transformare simetrică.

7. Se dă forma pătratică $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^3$ ✹**R,** definită prin

$$\mathscr{P}(x) = 2x^1x^2 - 6x^1x^3 - 6x^2x^3 .$$

i) Să se scrie matriceal şi să se determine rangul formei.

ii) Să se găsească expresia canonică prin metoda Gauss şi să se stabilească matricea de trecere.

8. Să dă forma pătratică $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^4$ ✹**R,** definită prin

$$\mathscr{P}(x) = \left(x^1\right)^2 - 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 2x^1x^4 - \left(x^2\right)^2 + 2x^2x^3 - 4x^2x^4 + \left(x^3\right)^2 - 2\left(x^4\right)^2 .$$

Utilizând metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi şi, respectiv, metoda valorilor proprii, să se reducă $\mathscr{P}$ la expresia canonică şi să i se determine signatura.

9. Să se reducă la forma canonică

i) $\mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 + \sum_{i<j} x^i x^j$, $\qquad x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$.

ii) $\mathscr{P}(x) = \sum_{i<j} x^i x^j$, $\qquad x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$.

iii) $\mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 - \frac{3}{2} \sum_{i<j} x^i x^j$, $\qquad x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$.

10. Pentru fiecare din următoarele forme pătratice, să se găsească o bază ortonormată față de care forma pătratică să aibă o expresie canonică.

i) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^3$ ✹**R,** $\quad \mathscr{P}(x) = 3\left(x^1\right)^2 + 6\left(x^2\right)^2 + 3\left(x^3\right)^2 - 4x^1x^2 - 8x^1x^3 - 4x^2x^3$.

ii) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^3$ ✹**R,** $\quad \mathscr{P}(x) = -\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - 5\left(x^3\right)^2 + 6x^1x^3 + 4x^2x^3$.

iii) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^4$ ✹**R,** $\quad \mathscr{P}(x) = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 + \left(x^4\right)^2 + 2x^1x^2 - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 + 2x^3x^4$.

11. Să se reducă la forma canonică prin metoda lui Gauss formele pătratice:

i) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^3$ ✹**R,** $\mathscr{P}(x) = 7\left(x^1\right)^2 + 3\left(x^2\right)^2 + 5\left(x^3\right)^2 - 4x^1x^2 + 4x^2x^3$.

ii) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^3$ ✹**R,** $\mathscr{P}(x) = 11\left(x^1\right)^2 + 10\left(x^2\right)^2 + 6\left(x^3\right)^2 - 12x^1x^2 - 8x^2x^3 + 4x^1x^3$.

iii) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^4$✹**R,** $\mathscr{P}(x) = 2\left(x^1\right)^2 + 2\left(x^2\right)^2 + 2\left(x^3\right)^2 + 2\left(x^4\right)^2 - 6x^1x^2 + 4x^1x^4 + 4x^2x^3 - 6x^3x^4$.

iv) $\mathscr{P}$: $\mathbf{R}^4$ ✹**R,**

$$\mathscr{P}(x) = \left(x^1\right)^2 - 2\left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 + \left(x^4\right)^2 + 4x^1x^2 - 10x^1x^3 + 4x^2x^3 + 2x^1x^4 + 4x^2x^4 - 10x^3x^4$$

12. Să se reducă prin metoda lui Jacobi următoarele forme pătratice

i) $\mathscr{P}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2x^1x^2 - 2x^2x^3$.

ii) $\mathscr{P}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x) = 11(x^1)^2 + 10(x^2)^2 + 6(x^3)^2 - 12x^1x^2 - 8x^2x^3 + 4x^1x^3$.

iii) $\mathscr{P}: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 3(x^4)^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3 + 2x^1x^4 + 6x^2x^4$.

13. Se dă forma pătratică

$\mathscr{P}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathscr{P}(x) = \alpha(x^1)^2 + 2\beta x^1x^2 + \gamma(x^2)^2 + 2x^1x^3 - 4x^2x^3$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

Ce condiţii trebuie să satisfacă α, β şi γ pentru ca forma pătratică să fie pozitiv definită ?

14. Să se arate că forma pătratică

$$\mathscr{P}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad \mathscr{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|j-i|} \cdot x^i x^j$$

este pozitiv definită.

15. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Să i se scrie forma pătratică corespunzătoare şi să se reducă la expresia canonică.

II.GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN E_3

În cele ce urmează sunt prezentate noțiunile introductive în geometria analitică din spațiul punctual tridimensional (notat E_3): segmente orientate, spațiul vectorilor legați, spațiul vectorilor liberi, operații cu vectori, planul şi dreapta în spațiu, sfera, cuadrice nedegenerate şi cuadrice degenerate, aceste obiecte (figuri) geometrice sunt tratate cu mijloacele algebrei.

Obiective care decurg din studiul acestui capitol sunt ca studenții:

- *să definească* segmentul orientat, operația de adunare a segmentelor orientate, operația de înmulțire a segmentelor orientate cu numere reale, spațiul vectorilor legați, spațiul vectorilor liberi, baze şi repere în spațiul vectorilor liberi, proiecția unui vector pe o dreaptă, unghiul a doi vectori liberi, produsul scalar, produsul vectorial, produsul mixt, dublul produs vectorial, planul în spațiu, dreapta în spațiu, fascicul de plane, stea de plane, sfera, puterea unui punct față de o sferă, cuadrice, elipsoidul, hiperboloidul cu o pânză, hiperboloidul cu două pânze, paraboloidul eliptic, paraboloidul hiperbolic, cuadrice degenerate;
- *să recunoască* formele analitice ale acestor noțiuni în enunțul oricărei probleme sau în cadrul oricărui text de specialitate;
- *să calculeze* proiecția unui vector pe o dreaptă, produsul scalar şi produsul vectorial a doi vectori liberi, produsul mixt şi dublul produs vectorial a trei vectori liberi, distanța de la un punct la un plan, distanța dintre două plane paralele, unghiul dintre două plane orientate, unghiul a două drepte în spațiu, aria unui triunghi din spațiu, unghiul unei drepte cu un plan, distanța dintre două drepte în spațiu, unghiul dintre două sfere, puterea unui punct față de o sferă, centrul unei cuadrice (când este cazul);
- *să descompună* un vector după trei direcții oarecare în spațiu;
- *să determine* ecuația planului şi ecuațiile dreptei, ecuația sferei şi ecuația oricărei cuadrice în condiții bine stabilite;
- *să deducă* ecuația normală a unui plan scris în orice formă, pozițiile relative ale unor plane date, ecuația unui fascicul de plane, ecuația unei stea de plane, intersecția unei drepte cu un plan, pozițiile relative ale dreptelor, poziția unei drepte sau a unui plan față de o sferă, ecuația planului tangent la o cuadrică;
- *să reducă* ecuația cuadricei la forma canonică.

1. SPAŢII ALE VECTORILOR DIN E_3

1.1. Segmente orientate. Echipolenţă

Fie $\mathbf{E_3}$ spaţiul punctual tridimensional (sau spaţiul geometric) al geometriei elementare, conceput ca o mulţime de puncte . Geometria elementară este geometria în ca-re este admisă axioma paralelelor : "Printr-un punct exterior unei drepte, trece cel mult o dreaptă paralelă cu dreapta dată ". Dreptele şi planele sunt submulţimi ale lui $\mathbf{E_3}$. Punctul, dreapta, planul şi spaţiul $\mathbf{E_3}$ sunt noţiuni primare legate prin anumite axiome, cunoscute din geometria elementară .

Considerăm mulţimea Δ a tuturor dreptelor din $\mathbf{E_3}$. În muţimea $\Delta\times\Delta$ introdu-cem relaţia ρ:="$d_1 || d_2$ sau $d_1 = d_2$". Aceasta are proprietăţile:

- reflexivă: $d_1 \,\rho\, d_1$;
- simetrică: dacă $d_1 \,\rho\, d_2 \Rightarrow d_2 \,\rho\, d_1$;
- tranzitivă: dacă $d_1 \,\rho\, d_2$ şi $d_2 \,\rho\, d_3 \Rightarrow d_1 \,\rho\, d_3$,

adică ρ este o relaţie de echivalenţă pe Δ pe care o notăm cu "$\sim$" .

DEFINIŢIA 1.1. *Submulţimea* $\{d'\in\Delta / d'\sim d\}:=Cl_d$ *a tuturor elementelor care sunt echivalente cu un element dat* $d\in\Delta$ *se numeşte* ***clasă de echivalenţă*** *conţinând d.*

Deoarece d~d, atunci $d\in Cl_d$ şi orice element $d'\in Cl_d$ se numeşte **reprezentant** al clasei Cl_d .

PROPRIETATEA 1.1. *Mulţimea claselor de echivalenţă prin relaţia "$\sim$" este o partiţie (clasă de submulţimi rezultată din descompunerea unei mulţimi) a mulţimii Δ, în sensul că Δ este o reuniune de submulţimi disjuncte.*

DEFINIŢIA 1.2. *Se numeşte* ***direcţia dreptei d*** $\in\Delta$*, clasa de echivalenţă a relaţiei "$d_1 // d_2$ sau $d_1 = d_2$" în care d este un reprezentant al acestei clase.*

Altfel exprimat, o direcție este mulțimea tuturor dreptelor din spațiul $\mathbf{E_3}$ cu proprietatea : ″$d_1 || d_2$ sau $d_1 = d_2$″.

DEFINIȚIA 1.3. *Se numeşte* ***segment orientat*** *orice pereche* $(A,B) \in \mathbf{E_3} \times \mathbf{E_3}$*, în care A şi B sunt puncte din* $\mathbf{E_3}$*.*

Se notează $(A,B) = \vec{AB}$. Grafic (figura 1.1.) este o săgeată de la A la B. A se numeşte **originea** segmentului orientat $\vec{AB}$,iar B se numeşte **extremitatea** segmentu-lui orientat $\vec{AB}$. Dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte **suportul** seg-mentului orientat, AB:=sup $\vec{AB}$.

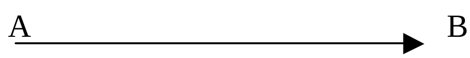


Figura1.1.

Caz particular. Dacă A = B segmentul orientat $\vec{AB}$ se numeste **segment ori-entat nul**, grafic reprezentându-se printr-un singur punct A, iar sup $\vec{AA}$ este nedeter-minat .

DEFINIȚII 1.4. *1.* ***Lungimea,norma*** *sau* ***modulul*** *unui segment orientat* $\vec{AB}$ *este distanța dintre punctele A şi B. Se notează* $d(A,B) := \| \vec{AB} \|$.

2. ***Direcția*** *unui segment orientat* $\vec{AB}$*, cu* $A \neq B$*, este direcția sup* $\vec{AB}$*. Seg-mentele orientate nule au direcția nedeterminată.*

3. Segmentele orientate $\vec{AB}$ *şi* $\vec{BA}$ *se numesc* ***opuse****. Avem* $\vec{AB} = \vec{BA} \Leftrightarrow A = B$.

4.Fie $\vec{AB}$ *un segment orientat nenul. Se numeşte* ***sens de parcurs*** *pe sup* $\vec{AB}$*, sensul de la A spre B.*

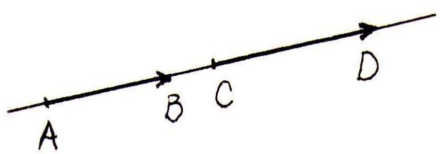
5.O dreaptă împreună cu alegerea unui sens de parcurs, se numeşte ***dreaptă orientată****.*

6.O direcție împreună cu unul din cele două sensuri posibile, se numeşte ***di-recție orientată****.*

7.Două segmente orientate nenule şi $\vec{CD}$ *au* ***acelaşi sens****, dacă:*

a) $\sup \vec{AB} = \sup \vec{CD} \equiv d$ *şi sensul de parcurs determinat de* $\vec{AB}$ *pe d este acelaşi cu sensul de parcurs determinat de* $\vec{CD}$ *pe d (fig. 1.2.a).*

b) $\sup \vec{AB} \,//\, \sup \vec{CD}$ *şi extremitățile lor (B şi D) se află în acelaşi semiplan (fig.1.2b) din planul dreptelor suport, determinat de* $\sup \vec{AC}$*, adică* $D \in (\sup \vec{AC}, B$ *sau* $B \in (\sup \vec{AC}, D$ *(adică B aparține semiplanului determinat de sup* $\vec{AC}$ *şi punctul D) .*



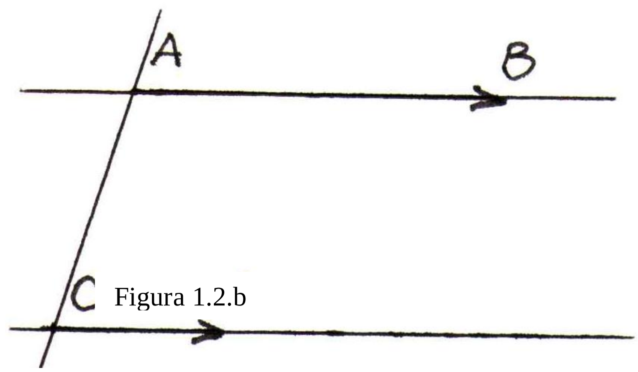


Figura 1.2.b

DEFINIȚIA 1.5. *Două segmente orientate nenule se numesc* ***echipolente*** *dacă au aceeaşi direcție, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.*

Notație. Dacă $\vec{AB}$ şi $\vec{CD}$ sunt echipolente, aceasta se notează cu $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ (vezi fig.1.3.).

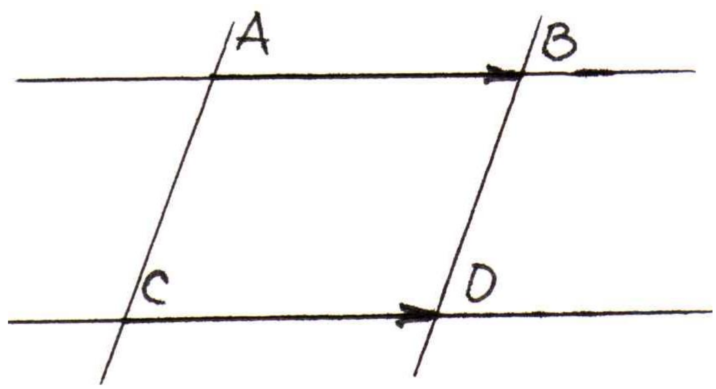


Figura 1.3.

TEOREMA 1.1. *Relația de echipolență are următoarele proprietăți :*

1. *este o relație de echivalență ;*
2. $\vec{AB} \sim \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{BA} \sim \vec{DC}$ *(echipolența opuselor) ;*
3. $\forall \vec{AB}$ *și* $C \in E_3 \Rightarrow \exists\, D \in \boldsymbol{E_3}$ *astfel încât* $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ *;*
4. $\vec{AB} \sim \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} \sim \vec{BD}$ *(încrucişarea echipolenței).*

Demonstrație. Primele trei proprietăți sunt imediate. De asemenea şi proprie-tatea 4 este evidentă în cazul în care punctele A, B, C, D nu sunt coliniare (fig.1.3.)

Dacă cele patru puncte se găsesc pe o aceeaşi dreaptă d (fig.1.4.), considerăm o dreaptă arbitrară d' paralelă cu d şi prin A, B, C, D ducem drepte paralele între ele şi neparalele cu d. Acestea vor întâlni dreapta d' în A', B', C', respectiv D'. Echipolența $\vec{AC} \sim \vec{BD}$ poate fi dedusă din $\vec{A'C'} \sim \vec{BD}$, iar aceasta din $\vec{A'B} \sim \vec{C'D}$.

Din egalitatea triunghiurilor AA'B şi CC'D deducem $A\hat{B}A' = C\hat{D}C'$ deci $\vec{A'B}$ şi $\vec{C'D}$ au aceeaşi direcție. Mai mult, B şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei $A'C'$ deci $\vec{A'B}$ şi $\vec{C'D}$ au aceeaşi orientare. Tot din egalitatea celor două triunghiuri rezultă că şi lungimile lor sunt egale, deci $\vec{A'B} \sim \vec{C'D}$. Mai departe prin incrucişare

$$\vec{A'B} \sim \vec{C'D} \Rightarrow \vec{A'C'} \sim \vec{BD}.$$

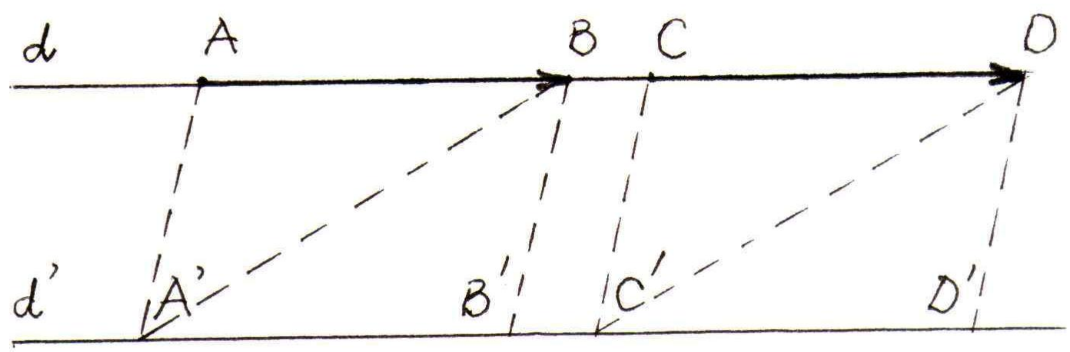


Figura 1.4.

Dar $\vec{AC} \sim \vec{A'C'}$ şi folosind proprietatea de tranzitivitate,rezultă $\vec{AC} \sim \vec{BD}$. □

1.2.Spațiul vectorilor legați din E_3

Fie $O \in \mathbf{E_3}$ un punct fixat şi mulțimea

$$\{\, \vec{OM} \mid M \in \mathbf{E_3} \} := T_O(\mathbf{E_3})$$

a segmentelor orientate din $\mathbf{E_3}$ cu originea în O. Introducem în $T_O(\mathbf{E_3})$ operațiile :

1.Adunarea segmentelor orientate din $T_O(\mathbf{E_3})$ definită de relația

$$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OP},$$

în care punctul P este simetricul punctului O față de mijlocul segmentului [MN].

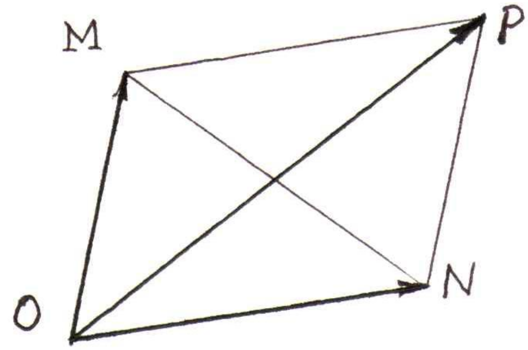


Figura 1.5.

Această regulă este echivalentă cu regula paralelogramului sau cu regula triunghiului (fig.1.5.).

2.Operația de înmulțire a segmentelor orientate cu numere reale definită de:

a)dacă $\vec{OM} \neq \vec{O}_{T_O}$ şi $\lambda \neq 0$, atunci $\lambda \cdot \vec{OM}$ este vectorul care are sup$\vec{OM}$ =sup$\lambda\vec{OM}$, acelaşi sens cu $\vec{OM}$ dacă $\lambda > 0$ şi sens contrar dacă $\lambda < 0$, iar lungimea este $|\lambda| \cdot \|\vec{OM}\|$;

b)dacă $\vec{OM} = \vec{O}_{T_O}$ sau $\lambda = 0$, atunci $\lambda \cdot \vec{OM} = \vec{OO}$.

TEOREMA 1.2. *Mulțimea $T_O(\mathbf{E_3})$ formează un spațiu vectorial real în raport cu operațiile de adunare a segmentelor orientate şi de înmulțire cu scalari a segmen-telor orientate.*

Demonstrație. Este elementară (ca exercițiu). □

DEFINIȚIA 1.6. *Spațiul vectorial $T_O(\mathbf{E_3})$ se numeşte* ***spațiul vectorial tan-gent la E_3 în O.*** *Elementele sale se numesc* ***vectori legați în O*** *sau* ***vectori tangenți în O la E_3.***

Cazuri particulare . 1.Fie o dreaptă d din $\mathbf{E_3}$ şi $O\in d$, mulțimea $\{\vec{OM} \mid M\in d\}:=T_O(\mathbf{E_1})$ este un subspațiu vectorial a lui $T_O(\mathbf{E_3})$. Subspațiul $T_O(\mathbf{E_1})$ se numeşte **dreaptă vectorială tangentă în O la $\mathbf{E_3}$.**

2.Fie α un plan şi $O\in\alpha$. Mulțimea $\{\vec{OM} \mid M\in\alpha\}:=T_O(\mathbf{E_2})$ este un subspațiu vectorial al lui $T_O(\mathbf{E_3})$. Subspațiul $T_O(\mathbf{E_2})$ se numeşte **plan vectorial tangent în O la $\mathbf{E_3}$.**

1.3. Spațiul V al vectorilor liberi din E_3 . Vectori coliniari, vectori coplanari în V

DEFINIȚII 1.7. *1.Clasele de echivalență ale segmentelor orientate relativ la relația de echipolență se numesc* **vectori liberi** *. Direcția, sensul şi lungimea care sunt comune segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc* ***direcția, sensul şi lungimea vectorului liber****. Fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un* ***reprezentant al clasei*** *. Notăm mulțimea vectorilor liberi din spațiul $\mathbf{E_3}$ cu V. Vec-torii liberi îi vom nota cu literele mici ale alfabetului latin, prevăzute cu săgeată dea-supra.*

2.Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori liberi şi punctul $O\in\mathbf{E_3}$. Fie $\vec{OA}$ un reprezentant al clasei lui $\vec{a}$ şi $\vec{OB}$ un reprezentant al clasei lui $\vec{b}$. Se numeşte ***sumă a vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$*** *vectorul liber $\vec{c} \sim \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ şi notăm $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.*

3.Fie $\vec{a}\in V$, $\lambda\in R$ şi $O\in\mathbf{E_3}$. Fie $\vec{OA}$ un reprezentant al clasei lui $\vec{a}$. Se numeşte ***produ-sul vectorului $\vec{a}$ cu scalarul λ , vectorul liber*** *$\vec{b} \sim \lambda\vec{OA}$ şi notăm $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

PROPRIETATEA 1.2. *Mulțimea vectorilor liberi V din $\mathbf{E_3}$ înzestrată cu ope-rațiile definite prin definițiile 1.7. 2 şi 3 formează un spațiu vectorial.*

DEFINIȚII 1.8. *1.***Doi vectori** *$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}\setminus\{\vec{O}_V\}$ se numesc* **coliniari** *dacă au aceeaşi direcție. Vectorul nul având direcția nedeterminată, se consideră coliniar cu orice vector din* ***V****.*

*2.**Trei vectori** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in$ **V** $\setminus\{\vec{O}_V\}$ se numesc **coplanari** dacă $\forall O\in$ **E**$_3$, reprezentanţii $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$ ai claselor lui $\vec{a},\vec{b}$, respectiv $\vec{c}$ sunt situaţi in acelaşi plan. Vectorul nul se consideră coplanar cu oricare doi vectori din **V**.*

TEOREMA 1.3.(1). *Doi vectori $\vec{a},\vec{b}\in$ **V** $\setminus\{\vec{O}_V\}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow$ dep$_V\{\vec{a},\vec{b}\}$*

(2). *Trei vectori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in$ **V** $\setminus\{\vec{O}_V\}$ sunt coplanari$\Leftrightarrow$ dep$_V\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.*

Demonstraţie (1). Presupunem $\vec{a},\vec{b}\in$ **V**$\setminus\{\vec{O}_V\}$ şi $\vec{a},\vec{b}$ coliniari, atunci au ace-laşi versor $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\pm\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$, cu $\|\vec{a}\|\neq 0$ şi $\|\vec{b}\|\neq 0$, de unde $\|\vec{b}\|\vec{a}\mp\|\vec{a}\|\vec{b}=\vec{O}_V$, deci dep$_V\{\vec{a},\vec{b}\}$

Reciproc, presupunem că $\exists\alpha,\beta\in$ **R,** $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ şi $\alpha\ \vec{a}+\beta\ \vec{b}=\vec{O}_V$. Dacă $\alpha=0$ şi $\beta\neq 0\ \Rightarrow\ \vec{b}=\vec{O}_V$; dacă însă $\alpha\neq 0$ şi $\beta=0\ \Rightarrow\ \vec{a}=\vec{O}_V$, deci $\alpha\neq 0$ şi $\beta\neq 0$, de unde $\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$.

(2). Presupunem $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in$ **V**$\setminus\{\vec{O}_V\}$ şi liniar dependenţi, adică $\exists\alpha,\beta,\gamma\in$ **R**, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ şi $\alpha\ \vec{a}+\beta\ \vec{b}+\gamma\ \vec{c}=\vec{O}_V$. Fie $\gamma\neq 0$, atunci $\vec{c}=-\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{b}$, iar repre-zentanţii claselor respective $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$, $\forall O\in$ **E**$_3$ verifică relaţia $\vec{OC}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{OA}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{OB}$, adică $\vec{OC}$ se află în planul determinat de $\vec{OB}$ şi $\vec{OC}$.

Reciproc, presupunem $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in$ **V**$\setminus\{\vec{O}_V\}$ şi coplanari, atunci $\forall O\in$ **E**$_3$ reprezentanţii claselor respective $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$ sunt în acelaşi plan.

Presupunem că semidreapta (O,C$\subset$ int $A\hat{O}B$. Proble-ma se reduce la construcţia unui paralelogram cu dia-gonala OC iar laturile situate pe sup$\vec{OA}$ şi sup$\vec{OB}$, ca

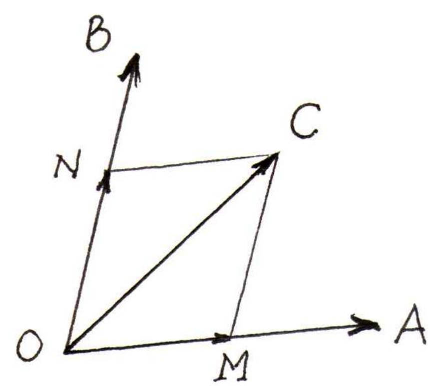


Figura 1.6.

în figura 1.6.

Dar $\vec{OM} = -\alpha\vec{OA}$ şi $\vec{ON} = \beta\vec{OB}$ cu $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, unde

$\vec{OC} = \alpha\,\vec{OA} + \beta\,\vec{OB}$ şi deci $\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$. □

Consecințe 1.1. 1.Oricare doi vectori liberi necoliniari sunt liniari indepen-denți. 2.Oricare trei vectori liberi necoplanari sunt liniari independenți.

1.4.Baze şi repere în V

TEOREMA 1.4.*Spațiul vectorial real* ***V*** *al vectorilor liberi din* $\boldsymbol{E_3}$ *are dimensiunea 3.*

Demonstrație. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trei vectori necoplanari. Vom arăta că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ este o bază în V. Din teorema precedentă rezultă că $\{\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ \}$ este un sistem liniar independent. Rămâne de dovedit că este şi sistem generator al lui **V**.

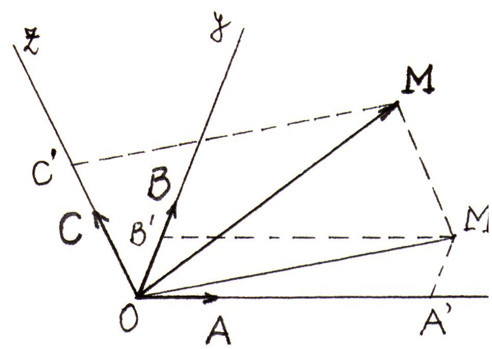


Figura 1.7.

Luăm ca origine a segmentelor orientate care reprezintă vectorii din **V** un ace-laşi punct O, iar reprezentanții vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pe $\vec{OA}, \vec{OB}$ respectiv $\vec{OC}$. Punctele O, A, B, C nu sunt în acelaşi plan (fig.1.7).

Fie $\vec{x}$ arbitrar în **V** cu reprezentantul $\vec{OM}$. Paralela dusă prin M la OC intersectează planul OAB în M_0. Paralela prin M_0 la OB şi OA intersectează, respectiv, dreapta OA în A',dreapta OB în B'. Dreptele M_0M şi OC fiind paralele determină un plan. Paralela prin M la OM_0 se află în acest plan şi intersectează dreapta OC în C'. Avem :

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{OC}' \ , \ \ \vec{OM}_0 = \vec{OA}' + \vec{OB}'$$

deci

$$\vec{OM} = \vec{OA}' + \vec{OB}' + \vec{OC}'.$$

Dar $\vec{OA}'$ este coliniar cu $\vec{OA}$, $\vec{OB}'$ cu $\vec{OB}$, $\vec{OC}'$ cu $\vec{OC}$, deci există $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ astfel încât $\vec{OA}' = \alpha \cdot \vec{OA}$, $\vec{OB}' = \beta \cdot \vec{OB}$, $\vec{OC}' = \gamma \cdot \vec{OC}$ şi avem

$$\vec{OA}' = \alpha \cdot \vec{a} \quad , \quad \vec{OB}' = \beta \cdot \vec{b} \quad , \quad \vec{OC}' = \gamma \cdot \vec{c}$$

şi

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}.$$

Cazuri particulare I. Dacă $\vec{x} = \vec{O} \Rightarrow$ M coincide cu O şi $\vec{x}$ poate fi scris ca o combinație liniară formată cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, în care toți scalarii sunt nuli.

II. Dacă $\vec{x} \neq \vec{O}$ este coliniar cu $\vec{a}$, M se află pe dreapta OA şi $\vec{x}$ va fi de forma $\vec{x} = \alpha\ \vec{a}$ cu $\alpha \neq 0$. Rezultate analoage pentru cazurile când $\vec{x}$ ar fi coliniar cu $\vec{b}$ sau $\vec{c}$.

III. Dacă $\vec{x} \neq \vec{O}$ nu este coliniar cu nici unul din vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, dar este coplanar cu $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, atunci M se află în planul OAB şi $\vec{x}$ poate fi exprimat sub forma $\vec{x} = \alpha\ \vec{a} + \beta\ \vec{b}$ cu $\alpha\beta \neq 0$. Rezultate analoage se obțin în cazurile când $\vec{x}$, $\vec{b}, \vec{c}$ sau $\vec{x}, \vec{c}, \vec{d}$ sunt copla-nari.

Consecințe 1.2. 1.Dacă $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ este o bază a lui **V**, atunci pentru $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}$ avem

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = B[x]_B$$

unde

$$[\vec{x}]_B^t = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R^3}$$

2.Dacă baza $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ este fixată în **V**, se poate stabili un izomorfism între **V** şi $\mathbf{R^3}$ prin aplicația

$$f_B : V \to \mathbf{R^3} \quad , \quad f_B(\vec{x}) = [x]_B^t.$$

PROPRIETĂȚI 1.3. *Dacă B este o bază în* **V** *atunci egalitatea vectorilor, adunarea vectorilor şi înmulțirea cu scalari a vectorilor se reduc la aceleaşi procedee cu coordonatele vectorilor în* $\boldsymbol{R^3}$*:*

(1) $\vec{a}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a^1=b^1,\quad a^2=b^2,\quad a^3=b^3,$ *cu* $\vec{a}=B\left(a^1,a^2,a^3\right)_B^t,\quad \vec{b}=B\left(b^1,b^2,b^3\right)_B^t$;

(2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad a^1+b^1=c^1,\quad a^2+b^2=c^2,\quad a^3+b^3=c^3$ *cu* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ *;*

(3) $\lambda\vec{a}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda a^1=b^1,\quad \lambda a^2=b^2,\quad \lambda a^3=b^3,$ *cu* $\lambda\in\boldsymbol{R},\ \vec{a},\vec{b}\in V$ *.*

Demonstrație. (1) $\vec{a}=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad B\cdot[\vec{a}]_B=B\cdot\left[\vec{b}\right]_B \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{a}]_B=\left[\vec{b}\right]_B \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^1,a^2,a^3\right)=\left(b^1,b^2,b^3\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^1=b^1,\quad a^2=b^2,\quad a^3=b^3.$$

(2) şi (3) analog cu (1). □

Consecințe 1.3. (1) Doi vectori sunt coliniari $\Leftrightarrow$ coordonatele lor sunt proporționale.

(2) Trei vectori sunt coplanari $\Leftrightarrow$ matricea formată din coordonatele lor are rangul strict mai mic decât 3.

(3) Trei vectori nu sunt coplanari $\Leftrightarrow$ rangul matricei formate din coordonatele lor este 3.

Demonstrație. (1) rezultă imediat din Proprietatea 1.3.(3).

(2) Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in$ **V**$\setminus\{\vec{O}_V\}$ coplanari $\Leftrightarrow$ $\vec{a}=\alpha\ \vec{b}+\beta\ \vec{c}$ (conform Teoremei 1.3.(2)) $\Leftrightarrow$ $a^1=\alpha\ b^1+\beta\ c^1,\quad a^2=\alpha\ b^2+\beta\ c^2,\quad a^3=\alpha\ b^3+\beta\ c^3$ (conform Proprietății 1.3.(2)) $\Leftrightarrow$ matricea $\begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha\ b^1+\beta\ c^1 & b^1 & c^1 \\ \alpha\ b^2+\beta\ c^2 & b^2 & c^2 \\ \alpha\ b^3+\beta\ c^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ are determinantul =0, deoarece coloana întâi este o combinație liniară a celorlalte $\Leftrightarrow$ rangul matricei coordonatelor celor trei vectori este strict mai mic ca 3.

(3) evidentă din Consecința 1.1.(2). □

DEFINIȚII 1.9. *Fie B = {* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *} o bază în* ***V****, un punct fixat O în* ***E₃*** *şi vecto-rii reprezentativi* $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$ *ai claselor* $\vec{a},\vec{b}$ *, respectiv* $\vec{c}$ *. Se numeşte* ***reper*** *în* ***E₃*** ***ansamblul*** *{****O****;(*$\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$ *)}****,*** *în care* ***punctul O*** *se numeşte* ***originea reperului .*** *Dacă dreptele suport au proprietatea că* $\sup \vec{OA} = Ox$ *,* $\sup \vec{OB} = Oy$ *,* $\sup \vec{OC} = Oz$ *şi sunt orientate în sensul vectorilor* $\vec{a},\vec{b}$ *, respectiv* $\vec{c}$ *, atunci în loc de reperul {O;(*$\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$ *)} considerăn* ***triedrul Oxyz*** *care are* ***axele de coordonate*** *Ox, Oy, Oz şi* ***planele de coordonate*** *xOy, yOz, zOx.*

Prin alegerea reperului în ***E₃****, oricărui punct* $P \in E_3$ *îi corespunde* ***vectorul*** $\vec{OP} \in \boldsymbol{T_O(E_3)}$ *care se numeşte* ***vectorul de poziție al punctului P*** *(în raport cu reperul ales) şi reci-proc, oricărui vector de poziție* $\vec{OP}$ *din* T_O*(****E₃****) îi corespunde un punct P din* ***E₃****, care este extremitatea lui* $\vec{OP}$.

1.5.Probleme rezolvate

1.Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, vectorii care coincid cu laturile unui triunghi ABC.

i) Să se arate că $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$.

ii) Să se exprime vectorii care coincid cu medianele triunghiului în funcție de $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

iii)Să se arate că vectorii care coincid cu medianele pot forma un triunghi.

Rezolvare. i) Folosind regula triunghiului pentru adunarea vectorilor (vezi paragraful 1.2.), în triunghiul ABC (fig.1.8.) avem $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$, de unde $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{O}$, deci $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}$.

ii) Tot din regula triunghiului rezultă

$\vec{AA'} = \vec{AB} + \vec{BA'}$, deci $\vec{AA'} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

Prin permutări circulare obținem vectorii care coincid cu celelalte mediane:

$$\vec{BB'} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad , \quad \vec{CC'} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \quad .$$

iii) Adunând membru cu membru egalitățile obținute la punctul ii), găsim

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \frac{3}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \text{ şi}$$

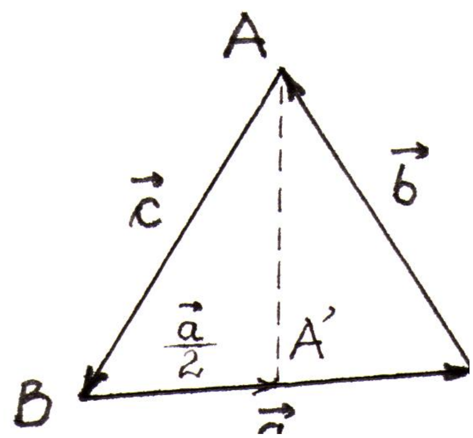


Figura 1.8.

conform cu i) rezultă $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{O}$ care reprezintă (conform cu i)) condiția ca trei vectori să formeze un triunghi.

2. Să se demonstreze că :

i) medianele unui triunghi sunt concurente,

ii) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{O}$, unde A,B,C sunt vârfurile triunghiului ABC şi G centrul de greutate.

Rezolvare . i) Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC (fig.1.9.).

Vectorii de poziție ai mijloacelor laturilor sunt :

$$\vec{OA'} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{OB'} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} \quad , \quad \vec{OC'} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

Considerăm că $\vec{AG} = 2\vec{GA'}$, unde G este punctul de intersecție al medianelor. Rezultă

$\vec{r}$ (G) − $\vec{r}$ (A) = 2($\vec{r}$ (A') − $\vec{r}$ (G)) $\Leftrightarrow$

$$3\vec{r}\,(G) = \vec{a} + 2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \Leftrightarrow \quad \vec{r}\,(G) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

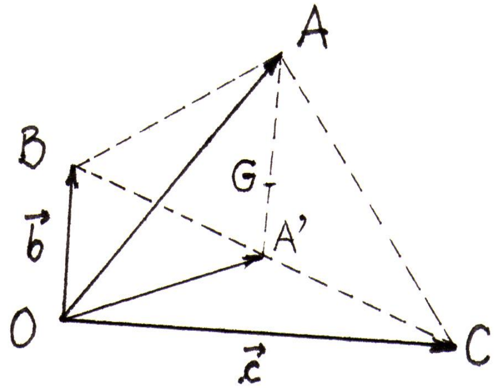


Figura 1.9.

Urmând acelaşi raţionament pentru vectorii medianelor $\vec{BB'}$ şi $\vec{CC'}$, obţinem acelaşi vector de poziţie pentru centrul de greutate. Rezultă că medianele sunt concurente într-un punct situat pe fiecare din ele la $\frac{2}{3}$ de vârf .

ii) Avem $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = (\vec{r}(A)-\vec{r}(G)) + (\vec{r}(B)-\vec{r}(G)) + (\vec{r}(C)-\vec{r}(G)) =$
$= \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{r}(G) = \vec{O}$, unde am folosit expresia lui $\vec{r}(G)$ din i).

3.Fie vectorii $\vec{r}_1 = m^1\vec{a}+n^1\vec{b}+p^1\vec{c}$, $\vec{r}_2 = m^2\vec{a}+n^2\vec{b}+p^2\vec{c}$, descompuşi după direcţiile vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ necoplanari. Să se determine relaţia care trebuie să existe între coeficienţii descompunerii, astfel ca

$$\textbf{i)}\ \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad ; \quad \textbf{ii)}\ \vec{r}_1 = \alpha\ \vec{r}_2 .$$

Rezolvare . i) $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m^1\vec{a}+n^1\vec{b}+p^1\vec{c} = m^2\vec{a}+n^2\vec{b}+p^2\vec{c} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(m^1-m^2\right)\cdot\vec{a}+\left(n^1-n^2\right)\cdot\vec{b}+\left(p^1-p^2\right)\cdot\vec{c} = \vec{O}$$

Ţinând seama de Consecinţa 1.1.2.$\Rightarrow$ $m^1-m^2=0, \quad n^1-n^2=0, \quad p^1-p^2=0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad m^1=m^2, \quad n^1=n^2, \quad p^1=p^2.$$

ii) Din $\quad m^1\vec{a}+n^1\vec{b}+p^1\vec{c} = \alpha\left(m^2\vec{a}+n^2\vec{b}+p^2\vec{c}\right) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \left(m^1-\alpha\ m^2\right)\vec{a}+\left(n^1-\alpha\ n^2\right)\vec{b}+\left(p^1-\alpha\ p^2\right)\vec{c} = \vec{O}.$$

Deci $m^1-\alpha\ m^2=0, \quad n^1-\alpha\ n^2=0, \quad p^1-\alpha\ p^2=0$, din care $\frac{m^1}{m^2}=\frac{n^1}{n^2}=\frac{p^1}{p^2}$.

4.Fie vectorii $\vec{r}_1 = -2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{r}_2 = 3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$ şi $\vec{r}_3 = -\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$, descompuşi după direcţiile vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ necoplanari.

i) Să se arate că vectorii $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ sunt coplanari.

ii) Să se interpreteze rezultatul obţinut.

Rezolvare . i) Din Teorema 1.3. (2.) rezultă $\alpha\ \vec{r}_1 + \beta\ \vec{r}_2 + \gamma\ \vec{r}_3 = \vec{O}$ şi $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ nu sunt simultan nuli. Deci

$$\alpha\ \left(-2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}\right) + \beta\ \left(3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}\right) + \gamma\ \left(-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\right) = \vec{O} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(-2\alpha + 3\beta - \gamma\right)\ \vec{a} + \left(-\alpha - 2\beta + 3\gamma\right)\ \vec{b} + \left(3\alpha - \beta - 2\gamma\right)\ \vec{c} = \vec{O}$$

şi $\mathrm{ind}_V\{\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ \} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$.

Soluția sistemului este $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$. Între vectorii dați există relația

$$\lambda\ \vec{r}_1 + \lambda\ \vec{r}_2 + \lambda\ \vec{r}_3 = \vec{O}, \quad \lambda \in \mathbf{R}\ .$$

ii) Pentru $\lambda = 1$ relația din i) devine $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{O}$ şi conform cu Problema 1, lungimile vectorilor $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3$ sunt laturile unui triunghi.

5.Să se descompună vectorul $\vec{d} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ după direcțiile vectorilor :

$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Rezolvare . Avem $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} = \alpha\ \left(\vec{i} + \vec{j}\right) + \beta\ \left(\vec{j} + \vec{k}\right) + \gamma\ \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$, de unde

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = -3 \\ \beta + 3\gamma = 2 \end{cases}$. Prin rezolvarea sistemului obținem $\alpha = -2,\ \ \beta = -7,\ \ \gamma = 3.$ Obținem descompunerea

$$\vec{d} = -2\vec{a} - 7\vec{b} + 3\vec{c}\ .$$

6. Mijloacele A_1, B_1, C_1 ale laturilor unui triunghi ABC sunt date prin vectorii de poziție $\vec{r}\ (A_1)$, $\vec{r}\ (B_1)$, $\vec{r}\ (C_1)$. Să se determine vectorii de poziție ai vârfurilor A, B, C.

Rezolvare . Notăm cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorii de poziție ai vârfurilor A, B, respectiv C.Avem:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{B_1A},\ \ \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{C_1B},\ \ \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{A_1C} \ \Leftrightarrow$$

$\vec{r}\,(C_1) - \vec{r}\,(A_1) = \vec{a} - \vec{r}\,(B_1)$

$\vec{r}\,(A_1) - \vec{r}\,(B_1) = \vec{b} - \vec{r}\,(C_1)$

$\vec{r}\,(B_1) - \vec{r}\,(C_1) = \vec{c} - \vec{r}\,(A_1)$

din care,

$\vec{a} = \vec{r}\,(B_1) + \vec{r}\,(C_1) - \vec{r}\,(A_1)$,
$\vec{b} = \vec{r}\,(C_1) + \vec{r}\,(A_1) - \vec{r}\,(B_1)$,
$\vec{c} = \vec{r}\,(A_1) + \vec{r}\,(B_1) - \vec{r}\,(C_1)$.

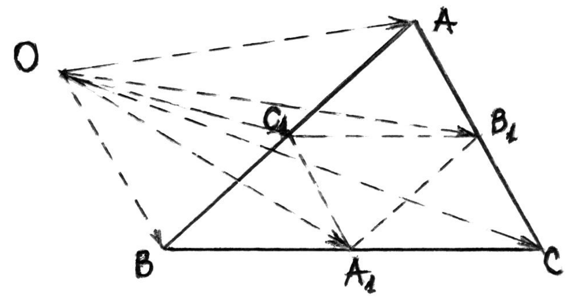


Figura 1.10.

1.6.Probleme propuse

1.Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ şi vectorii care coincid cu muchiile tetraedrului ce pornesc din A_1, $A_1\vec{A}_2 = \vec{a}_2$, $A_1\vec{A}_3 = \vec{a}_3$ şi $A_1\vec{A}_4 = \vec{a}_4$.Să se exprime cu ajutorul acestor vectori celelalte muchii ale tetraedrului.

2.Se dă triunghiul $A_1A_2A_3$ şi un punct oarecare O în planul său .Să se demonstreze că dacă G este centrul de greutate al trunghiului atunci

$$O\vec{A}_1 + O\vec{A}_2 + O\vec{A}_3 = 3O\vec{G}\,.$$

3.Vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt coplanari, concurenţi şi cu extremităţile pe aceeaşi dreaptă $\Leftrightarrow$ este satisfăcută relaţia $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + (1-\alpha)\cdot \vec{b}$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$.

4.Mijloacele laturilor unui triunghi ABC sunt $A_1(3,-2)$, $B_1(2,1)$, $C_1(4,4)$. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului.

5.Să se demonstreze că suma pătratelor distanţelor unui punct oarecare, situat în planul unui dreptunghi, la două vârfuri opuse ale dreptunghiului este egală cu suma pătratelor distanţelor aceluiaşi punct la celelalte două vârfuri ale dreptunghiului.

6.Dându-se vectorii $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k}$, $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, să se determine vectorii $\vec{r}_1 = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} + 4\vec{d}$ şi $\vec{r}_2 = 3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} - \vec{d}$.

7.Să se determine scalarul $\alpha \in$ **R** astfel încât vectorii $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ şi $\vec{b} = \vec{m} - \alpha\ \vec{n}$ să fie coliniari, atunci când $\vec{m}$ şi $\vec{n}$ nu sunt coliniari .

8.Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \alpha\ \vec{j} + \vec{k}$ şi $\vec{b} = \beta\ \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ cu $\alpha,\ \beta \in$ **R**. Să se determine sca-larii α şi β astfel încât vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ să fie coliniari.

9**.**Să se arate că punctele $P_1(2,4,1)$, $P_2(3,7,5)$, $P_3(4,10,9)$ sunt coliniare.

10.Fie E un punct oarecare pe mediana AD a triunghiului ABC. Dreptele BE şi CE în-tâlnesc laturile AC şi AB în F , respectiv G. Să se demonstreze că FG este paralelă cu BC.

11.Fiind date două drepte paralele AB şi CD, se unesc punctele A şi B cu mijlocul M al lui CD ; se notează cu E şi F punctele în care aceste drepte taie pe AC şi BD. Să se demonstreze că EF şi AB sunt paralele.

12.Se dă un paralelogram ABCD. O paralelă la laturile opuse AB şi CD întâlneşte pe AD în G şi pe CD în H. Dreptele EH şi GF se taie într-un punct I. Să se arate că pun-ctele A, C şi I sunt coliniare.

13.Într-un trapez isoscel ABCD se cunoaşte baza mare $\vec{AB} = \vec{a}$, una din laturile nepa-ralele $\vec{AD} = \vec{b}$ şi unghiul dintre ele $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Să se descompună după $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ toți vecto-rii care alcătuiesc celelalte laturi şi diagonalele trapezului.

14.Să se determine vectorul director al unei înălțimi dintr-un triunghi ABC dat.

15.Să se determine vectorul de poziție al piciorului înălțimii AA’ din triunghiul ABC.

2.OPERAȚII CU VECTORI LIBERI

2.1.*Proiecții. Definiții. Proprietăți.*

Fie Π mulțimea planelor din spațiul geometric $\mathbf{E_3}$. Se verifică uşor că relația de paralelism definită pe mulțimea Π este o relație de echivalență.

Clasa de echivalență a unui plan π_1:

$$\hat{\pi}_1 = \{\pi \in \Pi \mid \pi \parallel \pi_1\}$$

se numeşte direcția planului π_1.

DEFINIȚII 2.1. Proiecția unui punct M, după direcția unui plan π, ***pe o dreaptă d neparalelă cu*** π, *este intersecția M_0 cu dreapta d a planului care trece prin M şi este paralel cu π (fig.2.1.). Dacă π este perpendicular pe d,* $\boldsymbol{M_0}$ *se numeşte* ***proiecția ortogonală*** *sau, mai scurt,* $\boldsymbol{M_0}$ *este* ***proiecția lui M pe dreapta d .***

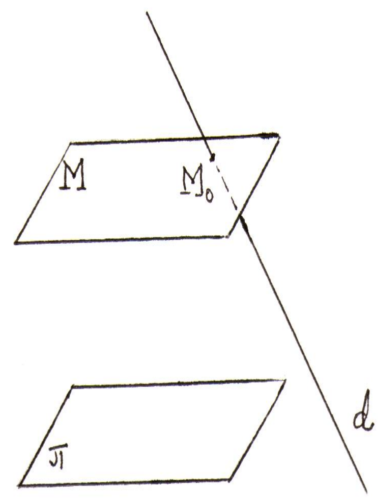


Figura 2.1.

DEFINIȚIA 2.2. Proiecția unui vector $\vec{x} = \vec{AB} \in \boldsymbol{V}$ ***pe o dreaptă d este vec-torul*** $\vec{x} = \vec{A_0B_0}$***,*** *unde A_0 şi B_0 sunt proiecțiile punctelor A şi B pe dreapta d.*

Notație. $\vec{x}_0 = \mathrm{Pr}_d\, \vec{x}$.

DEFINIȚIA 2.3. *Fie d o dreaptă arbitrară şi* $\vec{u}$*, un vector care are direcția dreptei d, cu* $\|\vec{u}\| = 1$. ***Perechea (d,*** $\vec{u}$ ***)*** *se numeşte* ***dreaptă orientată .***

Observația 2.1. O dreaptă d poate fi orientată în două feluri deoarece există doi vectori având direcția dreptei şi norma egală cu 1 şi anume $\vec{u}$ şi $-\vec{u}$. Dreptele ori-entate (d, $\vec{u}$) şi (d,$-\vec{u}$) au orientări opuse.

DEFINIȚIA 2.4. *Fie* $\vec{x} = A\vec{B}$ *un vector arbitrar din V, (d,* $\vec{u}$ *) o dreaptă orien-tată şi*

$$\vec{x}_0 = A_0\vec{B}_0 = \mathrm{Pr}_d\, \vec{x}$$

Fie $\lambda \in \mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $\vec{x}_0 = \lambda\vec{u}$*. Prin abuz de limbaj,* λ *se numeşte* ***pro-iecția lui*** $\vec{x}$ ***pe dreapta orientată (d,*** $\vec{u}$ ***)*** *sau încă,* ***proiecția lui*** $\vec{x}$ ***pe*** $\vec{u}$ *şi se notează*

$$pr_{(d,\vec{u})}\vec{x} = \lambda\,, \quad \text{respectiv} \;\; pr_{\vec{u}}\vec{x} = \lambda\,.$$

Fie $\vec{v} \neq \vec{O}$ arbitrar, având aceeaşi orientare cu versorul $\vec{u}$. Tot prin abuz de limbaj, λ se numeşte **proiecția lui** $\vec{x}$ **pe vectorul** $\vec{v}$ şi se scrie

$$pr_{\vec{v}}\vec{x} = \lambda\,.$$

O justificare a acestei definiții este următoarea : $\forall \vec{x} \in V, \quad pr_d\vec{x} = \vec{x}_0$ aparține subspațiului generat de $\vec{u}$ sau $\vec{v}$. Luând în acest spațiu ca bază $\{\vec{u}\}$ (cu u versor, respectiv $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$), λ este coordonata lui $\vec{x}_0$ în raport cu baza $\{\vec{u}\}$ şi îl determină complet pe $\vec{x}_0$ din acest subspațiu . Deci faptul că în locul unei drepte d am considerat dreapta orientată (d, $\vec{u}$) ne-a permis să reprezentăm proiecția unui vector $\vec{x} \in \mathbf{V}$ printr-un scalar λ, coordonata sa în raport cu $\{\vec{u}\}$.

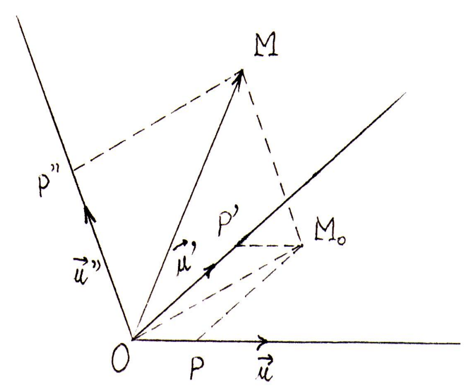


Figura 2.2.

Reținem, deci, **că proiecția unui vector pe o dreaptă este un vector, iar proiecția unui vector pe o dreaptă orientată este un scalar** (un număr real).

TEOREMA 2.1.*Proiecția pe o dreaptă orientată (d, $\vec{u}$), sau proiecția pe $\vec{u}$, are următoarele proprietăți:*

$$pr_{\vec{u}}(\vec{x}+\vec{y}) = pr_{\vec{u}}\vec{x} + pr_{\vec{u}}\vec{y} \quad , \ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V},$$
$$pr_{\vec{u}}(\lambda\ \vec{x}) = \lambda\ pr_{\vec{u}}\vec{x} \quad , \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R},\ \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V}.$$

Demonstrație . Fie O un punct pe dreapta d şi $\vec{u} = O\vec{U}$ versorul dreptei orientate (d, $\vec{u}$) (din fig.2.2.). Fie $\vec{u}' = O\vec{U}'$ şi $\vec{u}'' = O\vec{U}''$ doi vectori perpendiculari pe $\vec{u}$ şi perpendiculari între ei. Evident $\{\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}''\}$ este o bază în **V**. Repetând construcția din Teorema 1.4., pentru $\vec{x} = O\vec{M}$ arbitrar din **V** se obține

$$\vec{x} = O\vec{P} + O\vec{P}' + O\vec{P}''.$$

Se observă că $O\vec{P}$ = pr$_d\,\vec{x}$. Mai departe, cu

$$O\vec{P} = \alpha\ \vec{u} \quad , \quad O\vec{P}' = \alpha'\vec{u}' \quad , \quad O\vec{P}'' = \alpha''\vec{u}'',$$

avem

$$\vec{x} = \alpha\ u + \alpha'\vec{u}' + \alpha''\vec{u}'' \ ,$$

unde $\alpha = pr_{\vec{u}}\vec{x}$.

Procedând analog cu un vector arbitrar $\vec{y} \in$ **V**, obținem

$$\vec{y} = \beta\ \vec{u} + \beta\ \vec{u}' + \beta\ \vec{u}'' \ ,$$

unde $\beta = pr_{\vec{u}}\vec{y}$.

Deducem
$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha+\beta)\ \vec{u} + (\alpha'+\beta')\ \vec{u}' + (\alpha''+\beta'')\ \vec{u}'' \ ,$$
$$\lambda\ \vec{x} = (\lambda\alpha)\ \vec{u} + (\lambda\alpha')\ \vec{u}' + (\lambda\alpha'')\ \vec{u}'' \ ,$$

deci

$$pr_{\vec{u}}(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha + \beta = pr_{\vec{u}}\vec{x} + pr_{\vec{u}}\vec{y} \ ,$$
$$pr_{\vec{u}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\alpha = \lambda pr_{\vec{u}}\vec{x} \ . \qquad \square$$

DEFINIȚIA 2.5. Unghiul format de doi vectori *$\vec{x} = \vec{OA}$ şi $\vec{y} = \vec{OB}$ este unghiul $\theta \in [0,\pi]$, format de semidreptele OA şi OB.*

Notație. $\theta = (\vec{x}, \vec{y})$.

2.2.Produsul scalar. Ortogonalitate

DEFINIȚIA 2.6. *Se numeşte **produs scalar** pe V aplicația $\Im : V\times V \to \mathbf{R}$ dată prin*

$$\Im(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta, \qquad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}, \text{ cu } \theta = (\vec{x}, \vec{y})$$

Notație . $\Im(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Observații 2.2. 1.Dacă $\vec{x} \neq \vec{y}$, conform Definiției 2.4. şi din desenul alăturat (fig.2.3.),

$$\|\vec{x}\| \cos\theta = pr_{\vec{y}}\, \vec{x}\,.$$

Analog dacă $\vec{x} \neq \vec{O}$, $\|\vec{y}\| \cos\theta = pr_{\vec{x}}\, \vec{y}$. Cu acestea

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| pr_{\vec{x}}\, \vec{y} = \|\vec{y}\| pr_{\vec{y}}\, \vec{x}\,.$$

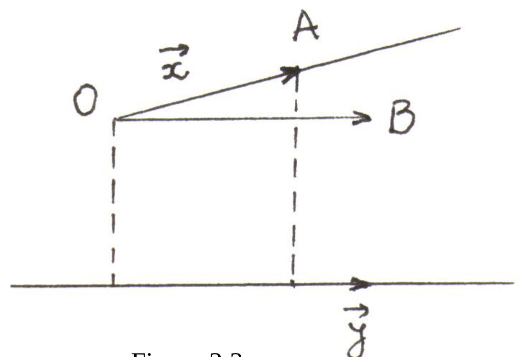


Figura 2.3.

2.Deoarece $|\cos\theta| \leq 1$, rezultă imediat

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \;, \; \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{V}.$$

3. $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \vec{x} = \vec{O}$ sau $\vec{y} = \vec{O}$ sau unghiul$(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{\pi}{2}$.

TEOREMA 2.2. *Produsul scalar are următoarele proprietăți :*

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \;, \; \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$;
2. $(\vec{x} + \vec{y})\, \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z} \;, \; \forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$;

3. $(\lambda\,\vec{x})\cdot\vec{y}=\lambda\,(\vec{x}\cdot\vec{y})$, $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}$ *şi* $\lambda\in\mathbf{R}$ *;*

4. $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0\ \ \forall\ \vec{x}\in\mathbf{V}$ *;* $\vec{x}\cdot\vec{x}=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{O}$.

Demonstrație . Prima şi ultima proprietate rezultă imediat din Definiția 2.6. Pentru celelalte folosim Observația 2.2.1. şi Teorema 2.1. Pentru proprietatea 2 :

– dacă $\vec{z}=\vec{O}$, proprietatea de distributivitate (2) este verificată ;

– dacă $\vec{z}\neq\vec{O}$, avem :

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z}=\|\vec{z}\|\cdot pr_{\vec{z}}(\vec{x}+\vec{y})=\|\vec{z}\|\cdot(pr_{\vec{z}}\,\vec{x}+pr_{\vec{z}}\,\vec{y})$$

şi , cum în mulțimea numerelor reale are loc distributivitatea înmulțirii față de adunare, obținem

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z}=\|\vec{z}\|pr_{\vec{z}}\,\vec{x}+\|\vec{z}\|pr_{\vec{z}}\,\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}\,.$$

Pentru proprietatea 3 :

– dacă $\vec{y}=\vec{O}$, proprietatea este verificată ;

– dacă $\vec{y}\neq\vec{O}$, avem :

$$(\lambda\,\vec{x})\cdot\vec{y}=\|\vec{y}\|pr_{\vec{y}}(\lambda\,\vec{x})=\|\vec{y}\|\lambda\ pr_{\vec{y}}\vec{x}=\lambda\,\|\vec{y}\|pr_{\vec{y}}\vec{x}\,,$$

deci

$$(\lambda\,\vec{x})\cdot\vec{y}=\lambda\,(\vec{x}\cdot\vec{y}).\qquad\square$$

DEFINIȚIA 2.7. Doi vectori $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}$ ***sunt ortogonali*** *dacă* $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$. *Se spune că un* ***vector*** *este* ***normat*** *dacă* $\|\vec{u}\|=1$.

Observația 2.3. Dacă $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{V}\setminus\{\vec{O}\}$, atunci $\vec{x}\cdot\vec{y}=0\Rightarrow$ unghiul($\vec{x},\vec{y}$) = $\dfrac{\pi}{2}$ şi vectorii $\vec{x},\vec{y}$ sunt ortogonali în sensul obişnuit al geometriei euclidiene. Dar $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ şi în cazul când $\vec{x}$ sau $\vec{y}$ este nul. Deci, vectorul nul a cărui direcție este nedetermina-tă, este ortogonal oricărui vector din **V** şi este ortogonal şi lui însuşi.

DEFINIȚIA 2.8. Un sistem de vectori *$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset$* ***V este ortogonal*** *dacă vectorii sunt ortogonali câte doi. Un sistem ortogonal format numai din versori se nu-meşte* ***ortonormat.***

Observații 2.4. 1.Sistemul $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset$**V** este ortonormat dacă şi numai dacă

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad \forall i,j=1,2,3,$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

2.Orice sistem ortonormat $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset$**V** este o bază a spațiului **V**.

3.Baza ortonormată din **V** se notează B=$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

TEOREMA 2.3. *Fie B=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$o bază în* ***V*** *şi doi vectori arbitrari*

$$\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3 ,$$

$$\vec{y} = y^1\vec{u}_1 + y^2\vec{u}_2 + y^3\vec{u}_3 .$$

Produsul scalar se poate scrie sub forma

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \quad , \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V},$$

dacă şi numai dacă B este o bază ortonormată.

Demonstrație . Oricare ar fi baza B,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i,j=1}^{3} x^i y^i \left(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j\right) , \qquad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}.$$

Dacă B este bază ortonormată $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$ şi avem

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{3} x^i \cdot y^i \quad .$$

Reciproc, dacă egalitatea din enunț este verificată $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in$**V** atunci

$$\sum_{i,j=1}^{3} x^i \cdot y^j \left(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j\right) = \sum_{i=1}^{3} x^i y^i \quad , \quad \forall x^i, \ y^i \in \mathbf{R}.$$

Pentru $x^k = y^k = 1$ (k fiind unul din indicii 1,2,3) şi $x^i = y^i = 0, \quad \forall i \neq k$ ega-litatea se reduce la $\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k = 1$. Pentru $x^k = 1, \quad y^m = 1, \quad k \neq m$ şi $x^i = 0, \quad \forall i \neq k,$ $y^i = 0, \quad \forall i \neq m,$ egalitatea din enunț devine $\vec{u}_k \cdot \vec{u}_m = 0$. Deci

$$\vec{u}_k \cdot \vec{u}_m = \delta_{km} \quad ,$$

adică baza B este ortonormată. □

Consecințe 2.1. (1) Dacă $\vec{a} = a^1\vec{i} + a^2\vec{j} + a^3\vec{k}$ este raportat la o bază ortonor-mată, avem $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$, deci

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2}\,.$$

(2)Dacă doi vectori $\vec{a} \neq \vec{O}$, $\vec{b} \neq \vec{O}$ sunt raportați la o bază ortonormată, atunci

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3}{\sqrt{\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2}\sqrt{\left(b^1\right)^2 + \left(b^2\right)^2 + \left(b^3\right)^2}}\,.$$

2.3.Produsul vectorial

Reamintim că direcția unui plan π este clasa de echivalență a lui π în raport cu relația de paralelism (începutul secțiunii 2.1.).

Direcției unui plan π i se poate asocia în mod unic direcția unei drepte d per-pendiculară pe planul π şi reciproc, direcției unei drepte d i se poate asocia în mod unic direcția unui plan π perpendicular pe d.
Există doi vectori normați (versori) care au direcția dreptei d, perpendiculară pe planul π. Fie aceştia $\vec{n}$ şi $-\vec{n}$.

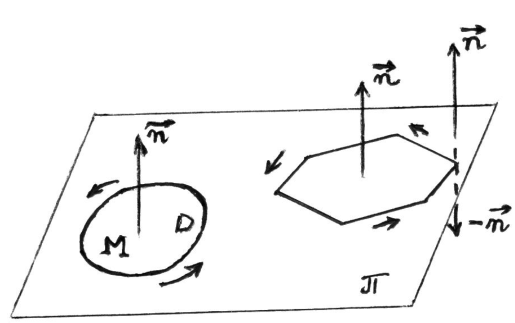


Figura 2.4.

DEFINIȚIA 2.9. ***Perechea (π, $\vec{n}$)*** *formată cu un plan π şi un versor $\vec{n}$ perpendicular pe π, se numeşte* ***plan orientat.***

Evident, unui plan π îi corespund două plane orientate : (π, $\vec{n}$) şi (π, $-\vec{n}$).

Vom spune că (π, $\vec{n}$) şi (π, $-\vec{n}$) au **orientări opuse.**

Într-un plan orientat (π, $\vec{n}$) se poate defini un sens pozitiv de parcurgere pen-tru orice curbă simplă închisă $C \subset \pi$. Curba C (de exemplu un cerc sau un poligon convex) determină în planul π un domeniu mărginit D având frontiera C (fig.2.4.). Un observator aşezat într-un punct $M \in D$ şi având poziția lui $\vec{n}$, distinge două sensuri în care poate fi parcursă curba C :

– **sensul trigonometric** pe care îl vom numi **sens pozitiv** în planul orientat ;

– **sensul contrar** pe care îl vom numi **sens negativ** în (π, $\vec{n}$).

Evident, sensul negativ în planul (π, $\vec{n}$) coincide cu sensul pozitiv în (π,$-\vec{n}$).

Reciproc, dacă într-un plan π s-a stabilit un sens de parcurgere pentru o curbă simplă închisă C, planul orientat (π, $\vec{n}$) în care acest sens de parcurgere este pozitiv, va fi complet determinat.

DEFINIȚIA 2.10. *Se numeşte produs vectorial o aplicație definită pe* ***V***×***V*** *cu valori în* ***V*** *prin care unei perechi* ($\vec{x}, \vec{y}$) ∈***V***×***V*** *îi corespunde un vector din* ***V*** *notat* $\vec{x} \times \vec{y}$, *dat prin relația:*

$$\vec{x} \times \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{n},$$

unde $\vec{n}$ este orientarea planului π determinat de reprezentanții claselor lui $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ cu originea comună, plan în care sensul pozitiv de parcurgere al paralelogramului este dat de primul vector $\vec{x}$ al perechii ($\vec{x}, \vec{y}$).

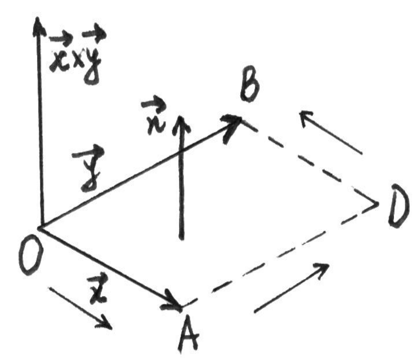


Figura 2.5.

Observația 2.5. Dacă $\vec{x} = \vec{OA}$ şi $\vec{y} = \vec{OB} \Rightarrow \|\vec{x} \times \vec{y}\|$ este egală cu aria paralelogramului de laturi OA şi OB.

TEOREMA 2.4. *Produsul vectorial are următoarele proprietăți :*

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \boldsymbol{V}$;
2. $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \boldsymbol{V}$;
3. $(\lambda\ \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda\ (\vec{x} \times \vec{y})$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$ *şi* $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \boldsymbol{V}$.

Demonstrație . 1.Din definiția produsului vectorial rezultă imediat că $\vec{x} \times \vec{y}$ şi $\vec{y} \times \vec{x}$ au normele egale şi sensurile opuse.

2.Fie O$\in$**E$_3$** un punct fix şi $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$, reprezentanții cu originea în O ai vectorilor $\vec{x}, \vec{y}$, respectiv $\vec{z}$.

Se observă că dacă $AA' \| OC$, atunci $\vec{OA} \times \vec{OC} = \vec{OA'} \times \vec{OC}$.

Fie π planul care trece prin O şi este perpendicular pe OC (fig.2.5'.). Luăm punctul A'=pr$_\pi$A, deci $\vec{OA'} = \vec{x}'$ este proiecția vectorului $\vec{OA}$ pe planul π şi

$$\vec{x} \times \vec{z} = \vec{x}' \times \vec{z} \ .$$

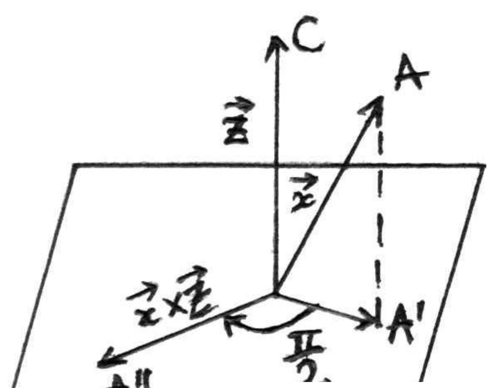


Figura 2.5'.

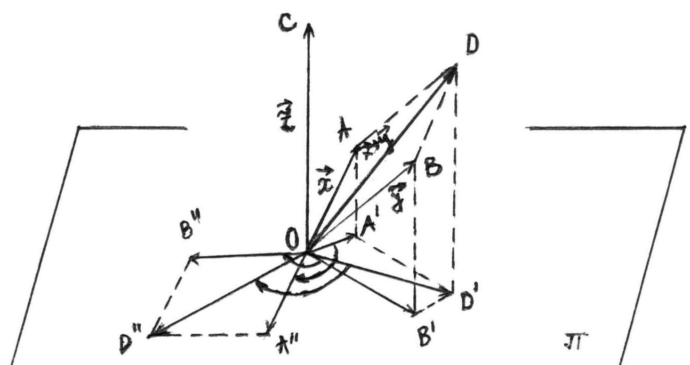


Figura 2.5''.

Orientarea vectorului $\vec{OA}'' = \vec{x}' \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z}$ se obține rotind în planul π vectorul $\vec{x}' = \vec{OA}'$ cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ în sens invers sensului trigonometric față de $\vec{z}$. Norma vectorului $\vec{OA}''$ este

$$\|\vec{OA}''\| = \|\vec{x}' \times \vec{z}\| = \|\vec{x}'\| \cdot \|\vec{z}\| \quad ,$$

deoarece $\vec{x}'$ şi $\vec{z}$ sunt perpendiculari. Deci produsul vectorial $\vec{x} \times \vec{z} = \vec{OA}''$ se obține din $\vec{x} = \vec{OA}$ prin următorul procedeu : se proiectează vectorul $\vec{x} = \vec{OA}$ pe planul π, proiecția sa $\vec{x}' = \vec{OA}'$ se roteşte în planul π cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani în sens negativ față de $\vec{z}$ şi se înmulțeşte vectorul obținut cu $\|\vec{z}\|$.

Vectorul $\vec{y} \times \vec{z} = \vec{OB}''$ se obține din $\vec{y} = \vec{OB}$ în acelaşi mod (fig.2.5″.).

Fie $\vec{x} + \vec{y} = \vec{OD}$. Aceleaşi procedee vor duce $\vec{OD}$ în $\vec{OD}'' = (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z}$.

Proiecția pe planul π a paralelogramului OADB este paralelogramul OA'D'B', deci

$$\vec{OD}' = \vec{OA}' + \vec{OB}'.$$

Celelalte două procedee transformă paralelogramul OA′D′B′ tot în paralelogram OA″D″B″, deci

$$\vec{OD}'' = \vec{OA}'' + \vec{OB}''.$$

Prin urmare

$$(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}.$$

3. Dacă $\lambda = 0$, egalitatea este evidentă.

Dacă $\lambda > 0$, vectorul $\lambda\, \vec{x}$ are sensul lui $\vec{x}$, $(\lambda\, \vec{x}) \times \vec{y}$ are sensul lui $\vec{x} \times \vec{y}$, ca şi membrul drept $\lambda(\vec{x} \times \vec{y})$.

Dacă $\lambda < 0$, $\lambda\, \vec{x}$ are sens opus lui $\vec{x}$, deci $(\lambda\, \vec{x}) \times \vec{y}$ are sens opus lui $\vec{x} \times \vec{y}$, ca şi $\lambda\, (\vec{x} \times \vec{y})$.

În ambele cazuri vectorii $(\lambda\ \vec{x})\times\vec{y}$ şi $\lambda\ (\vec{x}\times\vec{y})$ au acelaşi sens.Cei doi vectori au şi aceeaşi normă :

$$\left\|(\lambda\ \vec{x})\times\vec{y}\right\| = \left\|\lambda\ \vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\sin\theta = |\lambda|\cdot\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\sin\theta\,,$$

$$\left\|\lambda\ (\vec{x}\times\vec{y})\right\| = |\lambda|\cdot\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\| = |\lambda|\cdot\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\cdot\sin\theta\,,$$

unde θ = unghiul($\vec{x}, \vec{y}$). □

Consecințe 2.2. 1. $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$.

2. $\vec{x}\times(\mu\ \vec{y}) = \mu\ (\vec{x}\times\vec{y})$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$, $\forall \mu \in \mathbf{R}$.

DEFINIȚIA 2.11. *Vom spune că trei vectori necoplanari* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *, cu reprezentanți* $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$, *formează în această ordine un* **sistem drept** *(direct) dacă, notând* $\vec{OD} = \vec{a}\times\vec{b}$, *punctele C şi D sunt de aceeaşi parte față de planul determinat de punctele O, A şi B (fig.2.6.(a)). În cazul când C şi D sunt în părți opuse, vom spune că vectorii* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *formează un* **sistem stâng** *(indirect) (fig.2.6.(b)).*

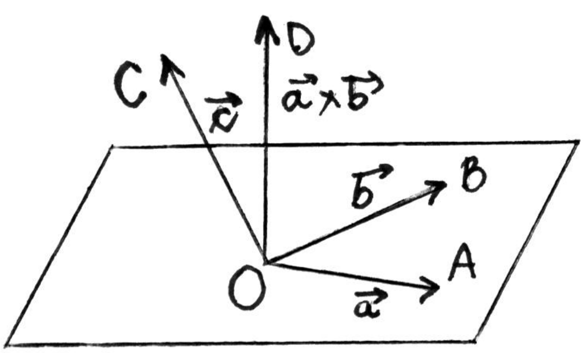


Figura 2.6.(a)

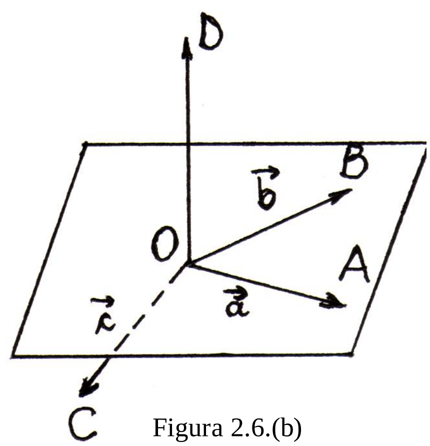


Figura 2.6.(b)

Observații 2.6. **1.**Se constată că dacă ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$) este un sistem drept, la fel sunt şi sistemele ($\vec{b},\vec{c},\vec{a}$), ($\vec{c},\vec{a},\vec{b}$) obținute prin permutări circulare. Sistemele ($\vec{a},\vec{c},\vec{b}$), ($\vec{b},\vec{a},\vec{c}$) şi ($\vec{c},\vec{b},\vec{a}$) obținute prin permutarea a doi vectori între ei , sunt sisteme stângi.

2.Dacă B=($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) este o bază ortonormată dreaptă, atunci

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{O},$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} \, .$$

TEOREMA 2.5. *Dacă $\vec{x},\vec{y}$ ∈**V** sunt exprimați într-o bază ortonormată dreaptă ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$), adică*

$$\vec{x} = x^1\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k}, \quad \vec{y} = y^1\vec{i} + y^2\vec{j} + y^3\vec{k},$$

atunci produsul vectorial se scrie sub forma

$$\vec{x}\times\vec{y} = \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{i} + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{j} + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{k} \quad .$$

Demonstrație . Ținând seama de proprietățile produsului vectorial, efectuăm dezvoltarea

$$\vec{x}\times\vec{y} = \left(x^1\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k}\right)\times\left(y^1\vec{i} + y^2\vec{j} + y^3\vec{k}\right) =$$

$$= \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{j}\times\vec{k} + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{k}\times\vec{i} + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{i}\times\vec{j} =$$

$$= \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{i} + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{j} + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{k}. \quad \square$$

Observația 2.7. Coordonatele produsului vectorial $\vec{x}\times\vec{y}$, în raport cu baza ortonormată dreaptă ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) , se pot obține din determinantul simbolic

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix},$$

dezvoltat după prima linie. Acest determinant simbolic nu are toate proprietățile determinanților. De exemplu, nu are sens să adunăm la elementele primei linii, elementele liniei a doua.

TEOREMA 2.6. (Identitatea lui Lagrange)

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2=\left\|\vec{a}\right\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2,\qquad \forall\ \vec{a},\vec{b}\in V.$$

Demonstrație . $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2=\left\|\vec{a}\right\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\sin^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{n}^2=\left\|\vec{a}\right\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2\left(1-\sin^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right).$ □

2.4.Produsul mixt

DEFINIȚIA 2.12*. Produsul scalar format cu un vector* $\vec{u}$ *şi un produs vecto-rial* $\vec{v}\times\vec{w}$***,*** *notat* $\vec{u}\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$*, se numeşte* ***produs mixt.***

Cu trei vectori $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ se pot forma şase produse mixte

$$\vec{u}\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\quad,\quad\vec{v}\left(\vec{w}\times\vec{u}\right)\quad,\quad\vec{w}\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\quad,$$
$$\vec{u}\left(\vec{w}\times\vec{v}\right)\quad,\quad\vec{v}\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)\quad,\quad\vec{w}\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)\quad,$$

care, după cum vom vedea, nu sunt toate distincte.

TEOREMA 2.7. *Fie O* $\in \boldsymbol{E_3}$ *fixat şi* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ *trei vectori necoplanari a căror reprezentanți sunt* $\vec{OA},\vec{OB}$*, respectiv* $\vec{OC}$ *.*

Dacă $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *este un sistem drept, atunci produsul mixt* $\vec{u}\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$ *este egal cu volumul paralelipipedului de laturi* OA,OB,OC*.*

Dacă, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *este un sistem stâng, atunci* $\vec{u}\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)<0$ *şi volumul paralelipipedului de laturi OA, OB, OC este egal cu* $-\vec{u}\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$*.*

Demonstrație . În primul caz, $\vec{u}$ şi $\vec{v}\times\vec{w}$ sunt reprezentați prin segmente ori-entate situate de aceeaşi parte a planului determinat de O, B, C (fig.2.7.a).

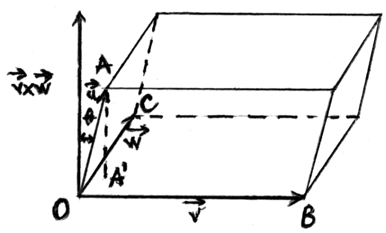


Figura 2.7.a

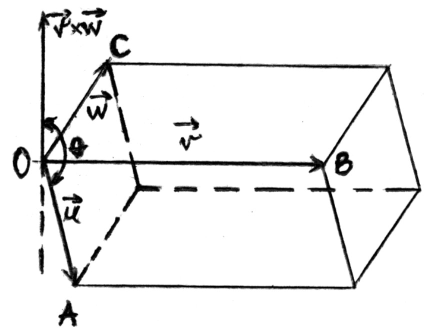


Figura 2.7.b

Unghiul θ format de $\vec{u}$ cu $\vec{v}\times\vec{w}$ este ascuțit, $\theta\in[0, \frac{\pi}{2})$.

În al doilea caz (fig.2.7.b), $\theta\in(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

În ambele cazuri avem

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\times\vec{w}\|\cdot\cos\theta = \|\vec{v}\times\vec{w}\|\cdot pr_{\vec{v}\times\vec{w}}\vec{u}\ .$$

Luăm ca bază a paralelipipedului de munchii OA, OB, OC,paralelogramul de laturi OB şi OC. Fie S, aria bazei, şi h, înălțimea paralelipipedului, corespunzătoare acestei baze. Evident,

$$\|\vec{v}\times\vec{w}\| = S \quad , \quad pr_{\vec{v}\times\vec{w}}\vec{u} = \pm h \ ,$$

luând semnul plus pentru cazul când $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ este un sistem drept, şi semnul minus, în cazul când $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ este un sistem stâng. Notând cu V volumul paralelipipedului de laturi OA, OB, OC avem

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \pm\ \mathrm{V}. \qquad \square$$

Observații 2.8. 1.Dacă $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sunt coplanari, $\vec{u}$ şi $\vec{v}\times\vec{w}$ sunt ortogonali şi $\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})= 0$. În acest caz volumul paralelipipedului este nul.

2. O condiție necesară şi suficientă ca $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ să fie coplanari este

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = 0.$$

TEOREMA 2.8. *(**1**) Produsul mixt este invariant la o permutare circulară a factorilor*

(1) $$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}(\vec{u}\times\vec{v}).$$

*(**2**) Dacă se permută doi factori între ei, produsul mixt îşi schimbă semnul*

(2) $$\vec{u}(\vec{w}\times\vec{v}) = \vec{v}(\vec{u}\times\vec{w}) = \vec{w}(\vec{v}\times\vec{u}) = -\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}).$$

Demonstrație . Dacă $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt coplanari, toate aceste produse mixte sunt nule şi egalitățile din enunț sunt satisfăcute.

În cazul în care $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nu sunt coplanari şi ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) este un sistem drept, sistemele ($\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$), ($\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$), obținute prin permutări circulare, sunt de asemenea drepte şi, deci,

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}(\vec{u}\times\vec{v}) = V,$$

unde V este volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori, reprezentați prin segmente orientate cu originea în acelaşi punct O.

Dacă ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) este un sistem stâng, aceeaşi proprietate o au şi sistemele obți-nute prin permutări circulare şi cele trei produse mixte sunt egale cu –V.

Deoarece $\vec{v}\times\vec{w} = -\vec{w}\times\vec{v}$, rezultă $\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = -\vec{u}(\vec{w}\times\vec{v})$. Pentru motive analoage au loc şi celelalte egalități din (2). □

Observația 2.9. Egalitatea

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\vec{w}$$

poate fi interpretată formal astfel : într-un produs mixt, semnul de înmulțire scalară şi semnul de înmulțire vectorială pot fi schimbate între ele.

Datorită acestei proprietăți, se obişnuieşte să se noteze valoarea comună a celor două produse mixte cu $\vec{u}\vec{v}\vec{w}$, adică

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = \vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\vec{w}$$

în care produsul vectorial se scrie totdeauna într-o paranteză.

TEOREMA 2.9. *Dacă $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in$ **V** sunt raportați la o bază ortonormată B=($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$),*

$$\vec{u} = u^1\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = v^1\vec{i} + v^2\vec{j} + v^3\vec{k} \quad , \quad \vec{w} = w^1\vec{i} + w^2\vec{j} + w^3\vec{k} \ ,$$

produsul lor mixt se poate scrie sub forma

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}.$$

Demonstrație . Din Teorema 2.5. şi Teorema 2.3. deducem

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = \vec{u}(\vec{v} \times \vec{w}) = \left(u^1\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3k\right) \left[\left(v^2w^3 - v^3w^2\right)\vec{i} + \left(v^3w^1 - v^1w^3\right)\vec{j} + \left(v^1w^2 - v^2w^1\right)\vec{k}\right]$$

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = u^1\left(v^2w^3 - v^3w^2\right) + u^2\left(v^3w^1 - v^1w^3\right) + u^3\left(v^1w^2 - v^2w^1\right),$$

care este dezvoltarea determinantului din enunț după prima linie. □

2.5.Dublul produs vectorial. Alte produse

DEFINIȚIA 2.13. *Un produs de forma $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ sau $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, format din trei vectori arbitrari $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in$ **V** , se numeşte dublu produs vectorial.*

TEOREMA 2.10. *Dublul produs vectorial se poate dezvolta sub forma*

(3) $$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\vec{v})\,\vec{w}$$

(4) $$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u}\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v}\vec{w})\,\vec{u}$$

Demonstrație .În (3), dacă $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt coliniari, $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{O}$ şi $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{O}$. Membrul drept a lui (3) este de asemenea nul. Într-adevăr, eliminând cazurile banale $\vec{v} = \vec{O}$, $\vec{w} = \vec{O}$ şi presupunând $\vec{v} \neq \vec{O}$, $\exists \lambda \in$ **R** astfel încât $\vec{w} = \lambda\,\vec{v}$ şi avem

$$(\vec{u}\vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u}\vec{v})\ \vec{w} = \lambda\ (\vec{u}\vec{v})\ \vec{v} - (\vec{u}\vec{v})(\lambda\ \vec{v}) = \vec{O}\ .$$

Aşadar, dacă $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt coliniari, egalitatea (3) este verificată.

În cazul în care $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ nu sunt coliniari, putem alege o bază ortonormată dreaptă $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, astfel încât $\vec{v} = v^1\vec{i}$, $\vec{w} = w^1\vec{i} + w^2\vec{j}$, $\vec{u} = u^1\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$. Vectorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ sunt în planul determinat de $\vec{v}$ şi $\vec{w}$, reprezentaţi prin segmente orientate cu originea în acelaşi punct O. Am ales $\vec{i}$ coliniar cu $\vec{v}$, $\vec{j} \perp \vec{i}$ şi $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$ (ca în fig.2.8.). Avem

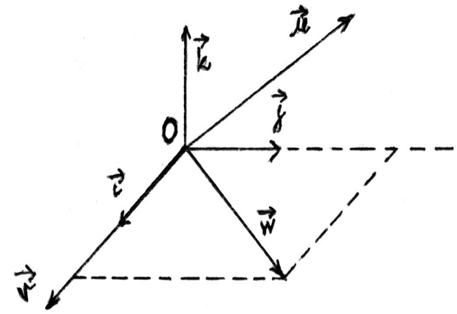


Figura 2.8.

$$\vec{v} \times \vec{w} = v^1 w^2 \vec{k}\ ,$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -u^1 v^1 w^2 \vec{j} + u^2 v^1 w^2 \vec{i}\ .$$

Expresia din membrul drept este

$$(\vec{u}\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\vec{v})\vec{w} = (u^1 w^1 + u^2 w^2) v^1 \vec{i} - u^1 v^1 (w^1 \vec{i} + w^2 \vec{j}) =$$
$$= u^2 v^1 w^2 \vec{i} - u^1 v^1 w^2 \vec{j}\ .$$

Vectorii celor doi membrii ai egalităţii (3) au aceleaşi coordonate în raport cu baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, deci sunt egali.

Dublul produs vectorial din (4) se poate reduce la (3) astfel

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = (\vec{u}\vec{w})\ \vec{v} - (\vec{v}\vec{w})\ \vec{u}\ . \qquad \square$$

Observaţia 2.10. Dublul produs vectorial este o combinaţie liniară formată din vectorii produsului vectorial din paranteză.

Observaţia 2.11. În general, dublul produs vectorial nu este asociativ,

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}.$$

Observaţia 2.12. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}$ şi $\vec{w}$ sunt coliniari.

Într-adevăr, din Teorema 2.10. deducem că această egalitate este echivalentă cu

(5) $$(\vec{u}\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{v}\vec{w})\cdot\vec{u}\ .$$

Pentru ca această egalitate să existe, este necesar ca $\vec{u}$ şi $\vec{w}$ să fie coliniari.

Reciproc, eliminând cazul banal $\vec{w}=\vec{O}$, rezultă că $\exists\ \lambda\in\mathbf{R}$ astfel încât $\vec{w}=\lambda\vec{u}$. Egalitatea (5) este satisfăcută,

$$(\vec{u}\vec{v})\cdot(\lambda\ \vec{u})=\lambda\ (\vec{v}\vec{u})\cdot\vec{u}\quad,\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{V}\text{ şi }\forall\lambda\in\mathbf{R}.$$

Precizări **:** Cu **doi vectori** $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, se pot forma două feluri de produse : produsul scalar $\vec{u}\vec{v}$ şi produsul vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$.

Folosind numai produsul scalar şi produsul vectorial, singurele produse care se pot forma cu **trei vectori** sunt produsul mixt şi dublul produs vectorial.

Dintre produsele formate cu **patru vectori** $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x}$ se întâlnesc mai frecvent, produsul scalar a două produse vectoriale şi produsul vectorial a două produse vectori-ale.

Produsul scalar a două produse vectoriale se poate scrie succesiv:

(6) $$(\vec{u}\times\vec{v})(\vec{w}\times\vec{x})=\vec{w}[\vec{x}\times(\vec{u}\times\vec{v})]=\left[(\vec{x}\vec{v})\ \vec{u}-(\vec{x}\vec{u})\ \vec{v}\right]\ \vec{w}=$$
$$=(\vec{u}\vec{w})\cdot(\vec{v}\vec{x})-(\vec{v}\vec{w})\cdot(\vec{u}\vec{x}).$$

Această dezvoltare se reţine uşor sub forma

(6′) $$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{x})=\begin{vmatrix}\vec{u}\vec{w} & \vec{u}\vec{x}\\ \vec{v}\vec{w} & \vec{v}\vec{x}\end{vmatrix}.$$

Produsul vectorial a două produse vectoriale se scrie sub oricare din formele

(7) $$(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{x})=[(\vec{u}\times\vec{v})\vec{x}]\vec{w}-[(\vec{u}\times\vec{v})\vec{w}]\vec{x}\,,$$

(8) $$(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{x})=-(\vec{w}\times\vec{x})\times(\vec{u}\times\vec{v})=[(\vec{w}\times\vec{x})\vec{u}]\vec{v}-[(\vec{w}\times\vec{x})\vec{v}]\vec{u}\ .$$

TEOREMA 2.11. *Dacă B=($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) este o bază în V, atunci orice vector $\vec{x}\in\mathbf{V}$ se poate exprima prin*

(9) $$\vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}\,\vec{u} + \frac{\vec{x}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})}{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}\,\vec{v} + \frac{\vec{x}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})}{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}\,\vec{w}.$$

Demonstrație . Din (7) şi (8) rezultă

$$\vec{x}\,\left[(\vec{u}\times\vec{v})\;\vec{w}\right] = \left[(\vec{w}\times\vec{x})\;\vec{v}\right]\,\vec{u} - \left[(\vec{w}\times\vec{x})\;\vec{u}\right]\,\vec{v} + \left[(\vec{u}\times\vec{v})\;\vec{x}\right]\,\vec{w}.$$

Folosind Teorema 2.8., avem forma echivalentă :

$$\vec{x}\,\left[\vec{u}\;\;(\vec{v}\times\vec{w})\right] = \left[\vec{x}\;\;(\vec{v}\times\vec{w})\right]\,\vec{u} + \left[\vec{x}\;\;(\vec{w}\times\vec{u})\right]\,\vec{v} + \left[\vec{x}\;\;(\vec{u}\times\vec{v})\right]\,\vec{w},$$

din care se obține relația (9). □

Notații . $\dfrac{\vec{v}\times\vec{w}}{\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})} := \vec{u}\,^*$, $\dfrac{\vec{w}\times\vec{u}}{\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})} := \vec{v}\,^*$, $\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})} := \vec{w}\,^*$

Observația 2.13. Vectorii $\vec{u}\,^*$, $\vec{v}\,^*$, $\vec{w}\,^*$ formează o bază a lui **V**, pe care o notăm B*.

DEFINIȚIA 2.14. *Vectorii $\vec{u}\,^*$, $\vec{v}\,^*$, $\vec{w}\,^*$ se numesc* ***vectori reciproci*** *ai vec-torilor $\vec{u}, \vec{v}$, respectiv $\vec{w}$ iar B* se numeşte* ***bază reciprocă*** *a bazei B.*

Observația 2.14. Cu ajutorul vectorilor reciproci, relația (9) se scrie sub forma

$$\vec{x} = (\vec{u}\,^*\vec{x})\;\vec{u} + (\vec{v}\,^*\vec{x})\;\vec{v} + (\vec{w}\,^*\vec{x})\;\vec{w}.$$

2.6.Probleme rezolvate

1.Să se demonstreze că cele trei înălțimi ale unui triunghi sunt concurente (fig.2.9.).

Rezolvare . Fie O punctul de intersecție al înălți-milor coborâte din vârfurile A şi B. Notăm $\vec{OA} = \vec{x}, \vec{OB} = \vec{y}$, $\vec{OC} = \vec{z}$ şi avem

$$\vec{a} = \vec{z} - \vec{y}\quad,\quad \vec{b} = \vec{x} - \vec{z}\quad,\quad \vec{c} = \vec{y} - \vec{x}.$$

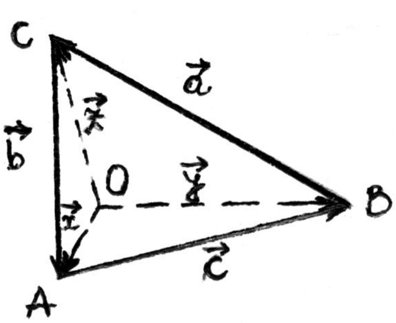


Figura 2.9.

Condiția de ortogonalitate dintre $\vec{OA}$ şi $\vec{BC}$, respectiv $\vec{OB}$ şi $\vec{CA}$ este :

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=\vec{x}\cdot(\vec{z}-\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{z}-\vec{x}\cdot\vec{y}=0$$

$$\vec{y}\cdot\vec{b}=\vec{y}\cdot(\vec{x}-\vec{z})=\vec{y}\cdot\vec{x}-\vec{y}\cdot\vec{z}=0\,.$$

Adunând cele două relații obținem $\vec{x}\cdot\vec{z}-\vec{y}\cdot\vec{z}=0 \Leftrightarrow (\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{z}=0 \Leftrightarrow -\vec{c}\cdot\vec{z}=0$, adică $\vec{OC}$ este perpendicular pe $\vec{AB}$ şi deci punctul O este situat pe înălțimea care porneşte din punctul C.

2.Se dau vectorii $\vec{a}=\vec{i}+2\lambda\,\vec{j}-(\lambda-1)\,\vec{k}$,

$$\vec{b}=(3-\lambda)\,\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\;.$$

Se cere :

a)valoarea lui λ pentru care $\vec{a}\perp\vec{b}$;

b)mărimea algebrică a proiecției vectorului $\vec{a}$ pe vectorul $\vec{a}+\vec{b}$, cu $\vec{a}\perp\vec{b}$;

c)expresia analitică a versorului perpendicular simultan pe $\vec{a}$ şi pe $\vec{b}$.

Rezolvare . a) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow (1,2\lambda,1-\lambda)\begin{pmatrix}3-\lambda\\1\\3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad 3-\lambda+2\lambda+3-3\lambda=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=3.$$

b)Pentru $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \lambda=3 \Rightarrow \vec{a}=\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$.

Pentru determinarea mărimii algebrice a proiecției vectorului $\vec{a}$ pe vectorul $\vec{a}+\vec{b}$, adică $pr_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{a})$, se foloseşte proprietatea produsului scalar a doi vectori, adică

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=pr_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{a})\cdot\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|,$$

din care rezultă

$$pr_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{a})=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}+\vec{b}\|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+7^2+1^2}}=\frac{41\sqrt{51}}{51}.$$

c) Din definiția produsului vectorial a doi vectori, rezultă că vectorul căutat este

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 6 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=20\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\ .$$

3.Fie vectorii $\vec{OA}=\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{AC}=4\vec{i}+7\vec{j}$, $\vec{BC}=4\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}$.

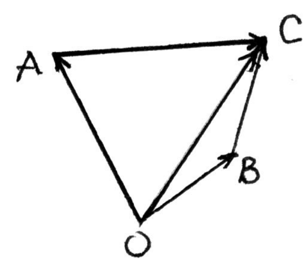
Se cere :

a)vectorul de poziție al punctului B, respectiv C ;

b)lungimea înălțimii triunghiului ABC coborâtă din A;

c)expresia analitică a unui vector $\vec{v}\in yOz$ astfel încât

$\vec{v}\perp\vec{BC}$ şi $\|\vec{v}\|=\|\vec{BC}\|$.



Rezolvare . a) Din figura alăturată, vectorii căutați sunt $\vec{r}$ (B)=$\vec{OB}$ şi $\vec{r}$ (C) =$\vec{OC}$. Folosind regula triunghiului pentru adunarea vectorilor, obținem pe rând :

$$\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{AC}=4\vec{i}+8\vec{j}-3\vec{k}\ ,$$

$$\vec{OB}=\vec{OC}+\vec{CB}=\vec{OC}-\vec{BC}=4\vec{i}+8\vec{j}-3\vec{k}-\left(4\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}\right)=5\vec{k}\ .$$

b)Din interpretarea geometrică a produsului vectorial, avem :

$$\mathcal{A}(\Delta ABC)=\|\vec{BA}\times\vec{BC}\|=\|\vec{BC}\|\cdot d(A,BC),$$

unde d(A, BC) este înălțimea triunghiului ABC coborâtă din A. Se obține

$$\text{d(A, BC)} = \frac{\left\|\vec{BA}\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|} = \frac{1}{\left\|\vec{BC}\right\|}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -8\\ 4 & 8 & -8\end{vmatrix} = \frac{1}{12}\left\|56\vec{i}-32\vec{j}-4\vec{k}\right\| = \frac{12\sqrt{29}}{12},$$

unde $\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BC} - \vec{AC} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k} - \left(4\vec{i} + 7\vec{j}\right) = \vec{j} - 8\vec{k}$.

Deci d(A, BC) $=\sqrt{29}$.

c)Luând pe rând datele problemei avem :

$$\vec{v} \in \text{yOz} \Rightarrow \vec{v} = y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k} \quad , \quad \text{cu } y, z \in \mathbf{R} - \text{necunoscute};$$

$$\vec{v} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{BC} = 0 \Rightarrow \left(y\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}\right) = 0 \Rightarrow 8y - 8z = 0,$$

$$\|\vec{v}\| = \left\|\vec{BC}\right\| \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 16 + 64 + 64 = 144,$$

din care obținem sistemul $\begin{cases} y - z = 0 \\ y^2 + z^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ 2y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 72 \Rightarrow y = \pm 6\sqrt{2}$

Deci vectorul $\vec{v}$ are forma

$$\vec{v} = \pm 6\sqrt{2}\,j \pm 6\sqrt{2}k .$$

4.Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{j} + 2\vec{k}$. Se cere :

1)volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative, cu origine comună ale vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

2)expresia analitică a vectorilor reciproci $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$;

3)volumul paralelipipedului construit pe vectorii reciproci $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$;

4)să se arate că $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \neq \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$, pentru vectorii dați mai sus.

Rezolvare . 1)Volumul cerut este

$$V = \left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}\right| = \left|2\cdot(4+1) - 1(3\cdot 2 - 1\cdot 0) + (-1)[3(-1) - 0\cdot 2]\right| = 7.$$

2)Avem pe rând vectorii reciproci :

$$\vec{a}'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}=\frac{1}{7}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{7}\left(5\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}\right)\quad,$$

$$\vec{b}'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}=\frac{1}{7}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{7}\left(-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\right)\quad,$$

$$\vec{c}'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}=\frac{1}{7}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{7}\left(3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}\right).$$

3)Volumul este

$$\mathbf{V'}=\left|\vec{a}'\cdot\left(\vec{b}'\times\vec{c}'\right)\right|=\left|\frac{1}{7^3}\begin{vmatrix}5 & -6 & 3\\ -1 & 4 & -2\\ 3 & -5 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{7^3}\left|5(4-10)+6(-1+6)+3(5-12)\right|=\frac{3}{49}.$$

4)Pentru a arăta că $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$, vom lua fiecare membru în parte şi-l vom aduce la o formă simplă :

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=(2,\quad 1,\quad -1)\cdot\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\vec{b}-(2\quad 1\quad -1)\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\cdot\vec{c}=$$

$$=\left[2\cdot 0+1(-1)+(-1)\cdot 2\right]\vec{b}-\left[2\cdot 3+1\cdot 2+(-1)1\right]\vec{c}=$$

$$=-3\left(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)-7\left(-\vec{j}+2\vec{k}\right)=-9\vec{i}+\vec{j}-17\vec{k}\ ,$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=-\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left[\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\right]=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}=$$

$$=-9\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}.$$

Se observă că $\quad -9\vec{i}+\vec{j}-17\vec{k}\neq-9\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}\quad$ q.e.d.

5. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezen-tative ale vectorilor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ dați prin relațiile :

$$\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}\ ,\ \ \vec{b}=3\vec{m}+5\vec{n}-4\vec{p}\ ,\ \ \vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}-3\vec{p}\ ,$$

ştiind că $\|\vec{m}\|=3$, $\|\vec{n}\|=2$, $\|\vec{p}\|=1$, unghiul $(\vec{n},\vec{p})=\dfrac{\pi}{6}$, iar unghiul format de vectorul $\vec{m}$ şi planul determinat de vectorii $\vec{n}$ şi $\vec{p}$ are măsura $\dfrac{\pi}{4}$.

Rezolvare . $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot[(3\vec{m}+5\vec{n}-4\vec{p})\times(2\vec{m}+7\vec{n}-3\vec{p})]=(\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p})\cdot$

$$\cdot(6\vec{m}\times\vec{m}+21\vec{m}\times\vec{n}-9\vec{m}\times\vec{p}+10\vec{n}\times\vec{m}+35\vec{n}\times\vec{n}-15\vec{n}\times\vec{p}-8\vec{p}\times\vec{m}-28\vec{p}\times\vec{n}+12\vec{p}\times\vec{p})=$$
$$=(\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p})\cdot(11\vec{m}\times\vec{n}-\vec{m}\times\vec{p}+13\vec{n}\times\vec{p})=13\vec{m}\cdot(\vec{n}\times\vec{p})+2\vec{n}\cdot(\vec{m}\times\vec{p})+11\vec{p}\cdot(\vec{m}\times\vec{n})=$$
$$=13\vec{m}\cdot(\vec{n}\times\vec{p})+2\vec{m}\cdot(\vec{p}\times\vec{n})+11\vec{m}\cdot(\vec{n}\times\vec{p})=22\vec{m}\cdot(\vec{n}\times\vec{p})=$$
$$=22\cdot\|\vec{m}\|\cdot\|\vec{n}\times\vec{p}\|\cdot\cos\frac{\pi}{4}=33\sqrt{2}\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{p}\|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=33\ .$$

2.7.Probleme propuse

1. Dacă D, E, F sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC, să se arate că avem relația vectorială :

$$\vec{OD}\cdot\vec{BC}+\vec{OE}\cdot\vec{CA}+\vec{OF}\cdot\vec{AB}=0\ \ ,\ \ \forall\ O\in E_3.$$

2. Să se calculeze expresia $E=\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+3\vec{c}\vec{a}$, ştiind că

$\vec{a}=3\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{c}=\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{m}^2=9$, $\vec{n}^2=3$ şi unghiul $(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Fie vectorii $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}$ şi $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, cu $\|\vec{m}\|=1$, $\|\vec{n}\|=2$ şi unghiul $(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$. Să se găsească :

i)lungimea diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

ii)unghiul dintre diagonalele paralelogramului

4.Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{p}=4\vec{m}-3\vec{n}$ şi $\vec{q}=\vec{m}+\vec{n}$, ştiind că $\vec{m}$ şi $\vec{n}$ sunt vectori unitari perpendiculari între ei.

5.Se consideră triunghiul ABC pentru care vectorii de poziție sunt :

$$\vec{OA}=2\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k} \quad , \quad \vec{OB}=-3\vec{i}-2\vec{j} \quad , \quad \vec{OC}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \ .$$

Se cere :

a) măsura unghiului ABC ;

b) perimetrul triunghiului ABC ;

c) aria triunghiului ABC ;

d) lungimea înălțimii BB′ .

6. Se dau vectorii $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$,$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,$\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Se cere:

i)volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative ale lui $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, cu originea comună;

ii)expresia analitică a vectorilor reciproci $\vec{a}\,*$, $\vec{b}\,*$, $\vec{c}\,*$;

iii)volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative ale lui $\vec{a}\,*$, $\vec{b}\,*$, $\vec{c}\,*$.

7. Se dau vectorii $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\alpha\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, cu $\alpha\in\mathbf{R}$. Să se determine scalarul α astfel încât vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ să fie coplanari.

8. Să se verifice identitățile :

i) $\vec{m}\,\left[(\vec{m}+\vec{n})\times(\vec{m}+\vec{n}+\vec{p})\right]=\vec{m}\,(\vec{n}\times\vec{p})$;

ii) $(\vec{m}+\vec{n})\,\left[(\vec{n}+\vec{p})\times(\vec{p}+\vec{m})\right]=2\vec{m}\,(\vec{n}\times\vec{p})$;

iii) $(-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p})\,\left[(\vec{m}-\vec{n}+\vec{p})\times(\vec{m}+\vec{n}-\vec{p})\right]=4\vec{m}\,(\vec{n}\times\vec{p})$.

9. Se dau vectorii $\vec{OA}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{OB}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{OC}=\vec{k}+\vec{i}$ .Să se calculeze :

i) volumul tetraedrului construit pe vectorii $\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$;

ii) înălțimea tetraedrului coborâtă din O pe planul ABC.

10. Se dau vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ şi $\vec{d}$. Să se verifice identitățile :

i) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]=-\left(\vec{a}\vec{b}\right)\left[\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]$;

ii) $\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right]=\left(\vec{b}\vec{d}\right)\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-\left(\vec{b}\vec{c}\right)\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)$;

iii) $\left(\vec{d}-\vec{a}\right)\left(\vec{b}-\vec{c}\right)+\left(\vec{d}-\vec{b}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+\left(\vec{d}-\vec{c}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$.

11. Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{k}-\vec{i}$ .Să se determine:

i) vectorii $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ astfel încât ei să formeze un reper triortogonal;

ii) orientarea şi versorii noului reper.

12. Dacă $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ şi $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, atunci $\vec{a}-\vec{d}$ şi $\vec{b}-\vec{c}$ sunt coliniari.

13. Să se rezolve ecuația vectorială $\vec{v}\times\vec{a}=\vec{v}\times\vec{b}$, unde $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt doi vectori cunoscuți .

14. Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale $\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}\\ \vec{x}+\vec{z}=\vec{b}\\ \left(\vec{x}\times\vec{y}\right)\vec{z}=\vec{c}\end{cases}$, unde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt trei vectori cunoscuți.

15. Muchiile OA şi OB ale unui cub pornesc din origine şi sunt date punctele $A(6,7,6)$, $B(2,6,-9)$. Să se determine:

i) coordonatele celorlalte vârfuri ale cubului ;

ii) volumul cubului ;

iii) unghiul dintre muchia OA şi diagonala cubului care pleacă din O ;

iv) proiecția vectorului $\vec{OA}$ pe diagonala care pleacă din O.

16. Dându-se vectorii $\vec{a}=4\vec{i}-7\vec{j}-4\vec{k}$ şi $\vec{b}=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$, să se determine vectorul bisectoarei unghiului format de cei doi vectori.

3.PLANUL ÎN SPAȚIU

În geometria elementară, punctul, dreapta şi planul sunt noțiuni fundamentale. De aceea, definițiile date pentru punct, dreaptă şi plan sunt definiții intuitive.

Fie $\mathbf{E_3}$ spațiul punctual tridimensional al geometriei elementare, $\mathbf{V}$ spațiul vectorilor liberi şi $\{O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\}$ un reper ortonormat drept căruia îi corespunde triedrul Oxyz.

DEFINIȚIA 3.1.*Vom spune că o ecuație* ***F(x,y,z)=0 este ecuația unei suprafețe S*** *în raport cu Oxyz dacă*

$$S=\{P(x,y,z)\in\mathbf{E_3} \mid F(x,y,z)=0\}.$$

Deci, oricare ar fi punctul $P\in S$, coordonatele sale verifică ecuația $F(x,y,z)=0$ şi oricare ar fi $P\in\mathbf{E_3}\setminus S$, coordonatele sale carteziene nu o verifică.

DEFINIȚIA 3.2. (intuitivă a planului) Se numeşte **plan** suprafața π care conține, odată cu două puncte oarecare ale sale, dreapta care trece prin aceste puncte.

Un plan în spațiu este determinat de condiții geometrice ca: trei puncte necoliniare, două drepte concurente, două drepte paralele, o dreaptă şi un punct exterior dreptei, un punct şi un vector normal la plan.

Ne propunem să stabilim ecuația planului sub formă vectorială sau carteziană, impunând anumite condiții geometrice care-l determină.

3.1. Planul determinat de un punct şi de un vector normal nenul

TEOREMA 3.1. *Dacă se dă un punct $P_0(x^0,y^0,z^0)$ al planului π şi direcția normalei determinată de vectorul* $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, *ecuația planului π este:*

(1) $$A\left(x - x^0\right) + B\left(y - y^0\right) + C\left(z - z^0\right) = 0$$

Demonstrație. Un punct $P \in E_3$ aparține planului π determinat de P_0 şi N dacă şi numai dacă $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N}$, condiție care se poate scrie sub forma

(2) $$\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Fie $\vec{r}_0 = \vec{r}(P_0)$ şi $\vec{r} = \vec{r}(P)$, vectorii de poziție ai punctelor $P_0(x^0,y^0,z^0)$ şi P(x,y,z) față de originea O a triedrului Oxyz (fig.3.1.). Rezultă

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \left(x - x^0\right)\cdot\vec{i} + \left(y - y^0\right)\cdot\vec{j} + \left(z - z^0\right)\cdot\vec{k}$$

şi condiția de ortogonalitate devine

(2') $$\vec{N} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) = 0$$

sau încă, folosind coordonatele,

$$A\left(x - x^0\right) + B\left(y - y^0\right) + C\left(z - z^0\right) = 0 \quad . \qquad \square$$

Denumiri. $\vec{N}$ se numeşte **vectorul normal** al planului. Punctul P care poate genera planul îl vom numi **punct curent.** Ecuația (2') se numeşte **ecuația vectorială** a planului π. Dacă notăm $Ax^0+By^0+Cz^0= - D$, ecuația (1) devine

(3) $$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

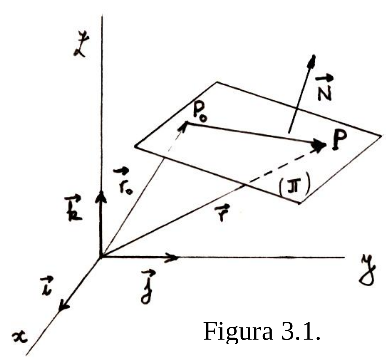


Figura 3.1.

Dacă notăm $\vec{r}_0 \cdot \vec{N} := \alpha$, ecuația (2') devine

(2'') $$\vec{r} \cdot \vec{N} - \alpha = 0$$

TEOREMA 3.2. *Orice ecuație de forma*

(3) $$Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

cu A, B, C nu toți nuli, este ecuația unui plan.

Demonstrație. *A, B, C* nu pot fi toți nuli (ar rezulta $D = 0$ şi ecuația (3) s-ar reduce la o identitate). Dacă tripletul (x^0, y^0, z^0) este o soluție a ecuației (3), atunci $Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D = 0$ ne dă $D = -Ax^0 - By^0 - Cz^0$ şi reînlocuind în (3) obținem $A(x - x^0) + B(y - y^0) + C(z - z^0) = 0$, care reprezintă ecuația unui plan care conține punctul $P_0(x^0, y^0, z^0)$ şi este perpendicular pe vectorul nenul (A, B, C). □

DEFINIȚIA 3.3. *Ecuația (3), pentru care $A^2+B^2+C^2\neq 0$, se numeşte* ***ecuația carteziană generală a unui plan.*** *Se notează (π): $Ax+By+Cz+D=0$.*

Observația 3.1. Un plan în spațiu este nucleul unei transformări liniare $\Im: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de forma

$$\Im(x,y,z)=Ax+By+Cz+D.$$

Plane particulare. 1) Dacă $D=0$ în ecuația (3), planul trece prin originea O a triedrului *Oxyz.*

2) Dacă unul dintre coeficienții *A, B, C* este nul, planul este paralel cu una dintre axele de coordonate. De exemplu, dacă $C=0$ avem

$$Ax+By+D=0,$$

care reprezintă ecuația unui plan paralel cu axa *Oz,* deoarece $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ este perpendicular pe versorul $\vec{k}$ al axei *Oz.*

3) Dacă doi dintre coeficienții *A, B, C* sunt nuli, planul este perpendicular pe una dintre axele de coordonate. Astfel ,dacă $B=C=0$, (3) se reduce la

$$Ax+D=0,$$

care este ecuația unui plan perpendicular pe axa *Ox*, deoarece $\vec{N} = A\vec{i}$ este paralel cu *Ox.*

3.2. Planul determinat de trei puncte necoliniare

TEOREMA 3.3. *Ecuația planului determinat de trei puncte necoliniare $P_0(x^0,y^0,z^0)$, $P_1(x^1,y^1,z^1)$, $P_2(x^2,y^2,z^2)$ se scrie sub forma*

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x^0 & y^0 & z^0 & 1 \\ x^1 & y^1 & z^1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Demonstrație. Se ştie că trei puncte necoliniare P_0, P_1, P_2 determină un plan π. Un vector normal la planul π este $\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$ (fig. 3.2.).O condiție necesară şi suficientă ca punctul $P \in \pi$ este ca $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$, adică

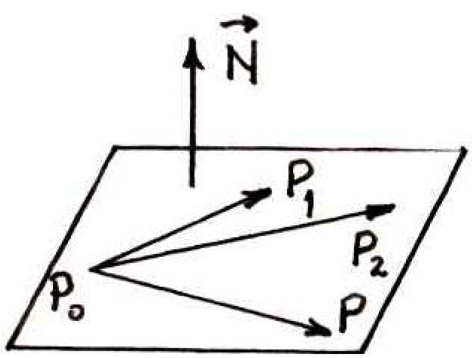


Figura 3.2.

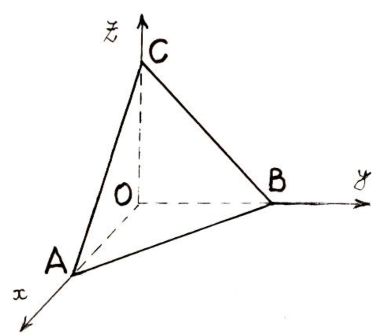


Figura 3.3.

$$(5)\qquad \overrightarrow{P_0P} \cdot \left(\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right) = 0 .$$

Folosind vectorii de poziție ai acestor puncte, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}, \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}, \vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, (5) devine

$$(5')\qquad (\vec{r} - \vec{r}_0)[(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)] = 0 .$$

Dacă raportăm vectorii la reperul $\{O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\}$ şi scriem produsul mixt sub formă de determinant, obținem

(5”)
$$\begin{vmatrix} x-x^0 & y-y^0 & z-z^0 \\ x^1-x^0 & y^1-y^0 & z^1-z^0 \\ x^2-x^0 & y^2-y^0 & z^2-z^0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Această ecuație este echivalentă cu (4), deoarece trecerea de la (4) la (5”) se face scăzând linia a doua a determinantului din toate celelalte linii. □

DEFINIȚIA 3.4. *Ecuația (5’) se numeşte* ***ecuația planului π sub formă vectorială. Ecuația (4) (sau(5”)) se numeşte*** ***ecuația carteziană a planului π.***

Caz particular (ecuația planului prin tăieturi). Dacă cele trei puncte care determină planul π sunt situate fiecare pe câte una din axele de coordonate şi nici unul nu coincide cu O (fig. 3.3.), fie acestea $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$, cu $abc\neq0$, ecuația planului π este

(4’)
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

(care se obține uşor nu numai din (4), ci şi direct din (3), punând condiția ca planul de ecuație $Ax+By+Cz+D=0$ să conțină pe fiecare din cele trei puncte).

3.3. Planul determinat de un punct şi de doi vectori necoliniari

TEOREMA 3.4. *Fie P_0, P_1, P_2 , trei puncte necoliniare ale unui plan π şi notațiile* $\vec{v}_1=\overrightarrow{P_0P_1}$, $\vec{v}_2=\overrightarrow{P_0P_2}$, $\vec{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$, $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$, *unde P este un punct arbitrar din* $\boldsymbol{E_3}$.

Pentru orice pereche $(\lambda,\mu)\in\boldsymbol{R}^2$, punctul P, care are vectorul de poziție

(6)
$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\,\vec{v}_1+\mu\,\vec{v}_2,$$

aparține planului π . Reciproc, pentru orice $P\in\pi$, există perechea $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$, astfel încât să fie verificată egalitatea (6).

Demonstrație. Deoarece $\vec{r}-\vec{r}_0=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}=\overrightarrow{P_0O}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{P_0P}$, egalitatea (6) se scrie sub forma

(6’) $$\overrightarrow{P_0P}=\lambda\,\vec{v}_1+\mu\,\vec{v}_2\,.$$

Pentru orice $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$, vectorii $\vec{v}_1=\overrightarrow{P_0P_1},\vec{v}_2=\overrightarrow{P_0P_2}$ și $\overrightarrow{P_0P}$, dat de (6’), sunt coplanari (fig. 3.4.), deci punctul $P\in\pi$.

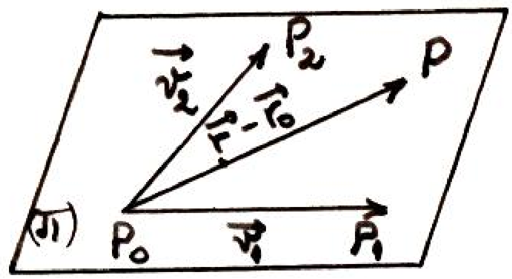


Figura 3.4.

Reciproc, $\forall P\in\pi$, vectorii $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ și $\overrightarrow{P_0P}$ sunt coplanari și cum $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ sunt necoliniari, vectorul $\overrightarrow{P_0P}$ admite o descompunere de forma (6’) , cu $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$.

□

DEFINIȚIA 3.5. *Aplicația $f:\mathbf{R}^2\to\pi$, definită de (6), respectiv (6’) se numește **reprezentare parametrică a planului π.** Se mai spune că (6), respectiv (6’), cu $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$, este o **ecuație parametrică vectorială a planului π.***

Evident, f este o bijecție.

Observația 3.2. Dacă notăm cu (x, y, z) coordonatele lui P și cu (x^s, y^s, z^s) coordonatele lui P_s, $s=0,1,2$, avem

$$\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}\ ,\quad \vec{r}_S=x^S\cdot\vec{i}+y^S\cdot\vec{j}+z^S\cdot\vec{k}\quad,\quad s=0,1,2;$$

$$\vec{v}_1=a^1\cdot\vec{i}+b^1\cdot\vec{j}+c^1\cdot\vec{k}=\left(x^1-x^0\right)\cdot\vec{i}+\left(y^1-y^0\right)\cdot\vec{j}+\left(z^1-z^0\right)\cdot\vec{k}\ ,$$

$$\vec{v}_2=a^2\cdot\vec{i}+b^2\cdot\vec{j}+c^2\cdot\vec{k}=\left(x^2-x^0\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2-y^0\right)\cdot\vec{j}+\left(z^2-z^0\right)\cdot\vec{k}\ .$$

Egalitatea (6) este echivalentă cu sistemul

$$(7)\qquad \begin{cases} x = x^0 + \lambda\ a^1 + \mu\ a^2 \\ y = y^0 + \lambda\ b^1 + \mu\ b^2 \\ z = z^0 + \lambda\ c^1 + \mu\ c^2 \end{cases} \qquad , (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$$

sau

$$(7')\qquad \begin{cases} x = x^0 + \lambda\ (x^1 - x^0) + \mu\ (x^2 - x^0) \\ y = y^0 + \lambda\ (y^1 - y^0) + \mu\ (y^2 - y^0) \\ z = z^0 + \lambda\ (z^1 - z^0) + \mu\ (z^2 - z^0) \end{cases} .$$

Eliminând λ şi μ între ecuațiile (7'), se obține ecuația planului π sub forma (5'').

În (7) şi (7') avem alte forme ale egalității (6) care determină bijecția f: $\mathbf{R}^2 \to \pi$. Din această cauză avem

DEFINIŢIA 3.6. *Se spune că ecuațiile (7), respectiv (7'), sunt* ***ecuațiile parametrice ale planului π.***

3.4.Ecuația normală a planului

Să considerăm un vector $\vec{v}$ cu originea în punctul O al reperului $\{O;(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\}$, Q extremitatea sa şi cosinusurile directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, adică

$$\vec{v} = q\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i} + q\cdot\cos\beta\cdot\vec{j} + q\cdot\cos\gamma\cdot\vec{k}, \qquad \|\vec{v}\| = q .$$

Dacă $P(x, y, z)$ este un punct curent al planului π,perpendicular pe $\vec{v}$ în Q, avem următoarea

TEOREMĂ 3.5. *Ecuația planului π perpendicular pe $\vec{v}$ în Q este*

$$(8)\qquad x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\gamma - q = 0 .$$

Demonstrație. Ţinând cont de Figura 3.5 , avem $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v} = 0$, însă

$$\overrightarrow{QP}=\vec{r}(P)-\vec{r}(Q)=\vec{r}-\vec{v}=(x-q\cos\alpha)\cdot\vec{i}+(y-q\cos\beta)\cdot\vec{j}+(z-q\cos\gamma)\cdot\vec{k}\,,$$

deci

$$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}\equiv xq\cos\alpha+yq\cos\beta+zq\cos\gamma-q^2=0$$

sau

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-q=0. \qquad \square$$

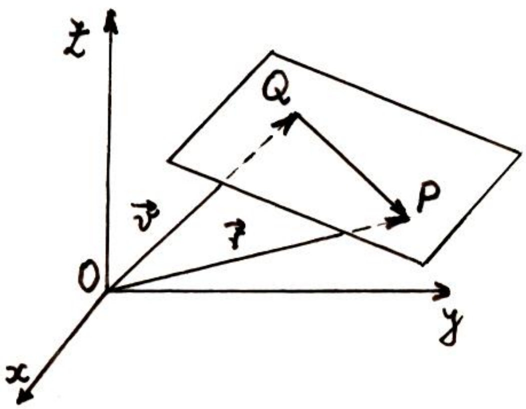


Figura 3.5.

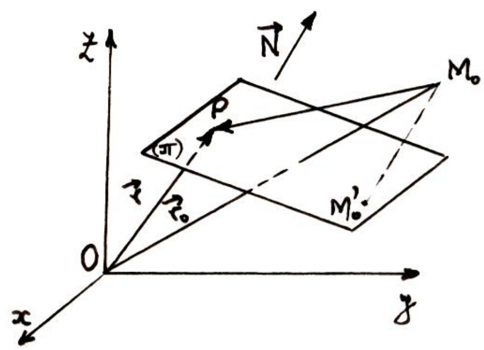


Figura 3.6.

DEFINIȚIA 3.7. *Ecuația (8) se numeşte* ***ecuația normală a planului*** $\pi\perp\vec{v}$ ***în Q.***

Observația 3.3. Lungimea vectorului $\vec{v}$ este chiar distanța de la originea O la planul π, adică

$$\|\vec{v}\|=q=d(O,\pi) \quad \text{şi} \quad Q=\mathrm{pr}_{\pi}O.$$

Observația 3.4. Ecuația carteziană generală a unui plan $Ax+By+Cz+D=0$ se scrie sub formă normală împărțind-o cu $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, deci

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$

$$-q = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3.5. Distanța de la un punct la un plan. Distanța dintre plane paralele

TEOREMA 3.6. *Distanța de la un punct M_0 de $\vec{r}_0 = x^0\vec{i} + y^0\vec{j} + z^0\vec{k}$ la planul π de ecuație $\vec{r}\cdot\vec{N} - \alpha = 0$ este dată de relația*

$$d(M_0, \pi) = \frac{\left|\vec{r}_0 \cdot \vec{N} - \alpha\right|}{\left\|\vec{N}\right\|}.$$

Demonstrație. Fie $M_0' = pr_\pi(M_0)$ şi $P(\vec{r})$ un punct curent din π (fig. 3.6.), atunci

$$d(M_0, \pi) = d\left(M_0, M_0'\right) = \left|pr_{\vec{N}}\, \overrightarrow{M_0P}\right| = \left|pr_{\vec{N}}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)\right| = \frac{\left|\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)\cdot\vec{N}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|} = \frac{\left|\vec{r}\cdot\vec{N} - \vec{r}_0\cdot\vec{N}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|}$$

şi cum $\vec{r}\cdot\vec{N} = \alpha$ (pentru că $P\in\pi$), rezultă

$$d(M_0, \pi) = \frac{\left|\vec{r}_0 \cdot \vec{N} - \alpha\right|}{\left\|\vec{N}\right\|}. \qquad \square$$

Observația 3.5. Dacă planul π este dat prin ecuația carteziană generală (3), atunci

$$d(M_0, \pi) = \frac{\left|Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Consecința 3.1. Distanța dintre două plane paralele (π_i) : $\vec{r}\cdot\vec{N} - \alpha^i = 0$, cu i=1,2, este dată de relația

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|\alpha^1 - \alpha^2\right|}{\left\|\vec{N}\right\|}.$$

Demonstrație. Fie două puncte arbitrare $P_1(\vec{r}_1) \in \pi_1$ şi $P_2(\vec{r}_2) \in \pi_2$. Considerăm $P_1' = pr_{\pi_2}(P_1)$, ca în fig. 3.7.

Atunci distanța dintre plane este

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, P_1') = \left| pr_{\vec{N}} \overrightarrow{P_1P_2} \right| =$$

$$= \left| pr_{\vec{N}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right| = \frac{\left| (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{N} \right|}{\|\vec{N}\|} = \frac{\left| \alpha^1 - \alpha^2 \right|}{\|\vec{N}\|}.$$

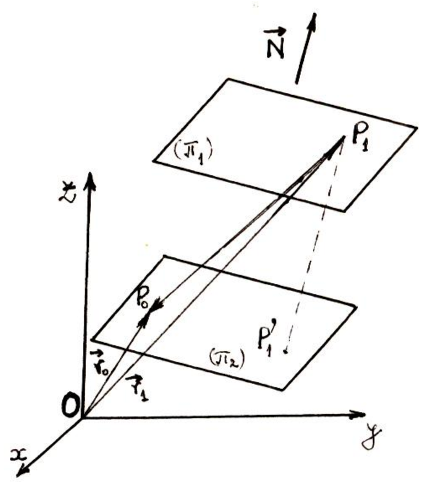


Figura 3.7.

Observația 3.6. Dacă planele paralele π_i sunt date prin ecuația generală $Ax+By+Cz+D^i=0$, i=1,2 atunci

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left| D^1 - D^2 \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3.6. Plan orientat. Semispații. Unghiul dintre două plane orientate

Referitor la un plan în spațiu sunt evidente următoarele afirmații :

1) planul are două fețe ;

2) elementul de bază în studiul planului în raport cu spațiul este normala ;

3) alegerea unui sens pe normală este echivalentă cu alegerea unei fețe a planului ;

4) alegerea unui sens de rotație în plan este echivalentă cu alegerea unui sens pe normală .

DEFINIȚIA 3.8. *Un plan π împreună cu alegerea unui sens pe normală se numeşte* ***plan orientat.***

Evident, este natural să alegem acel sens pe normală care să ne conducă la o orientare a planului coerentă cu orientarea spaţiului. În continuare vom subînţelege o asemenea orientare.

În aplicaţii, faţa care corespunde sensului ales pe normală se notează cu (+), iar faţa opusă cu (-) (ca în fig. 3.8.).

Evident, planele de coordonate *xOy, yOz, zOx* sunt plane orientate.

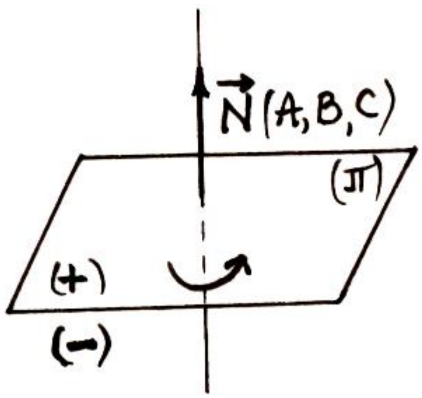


Figura 3.8.

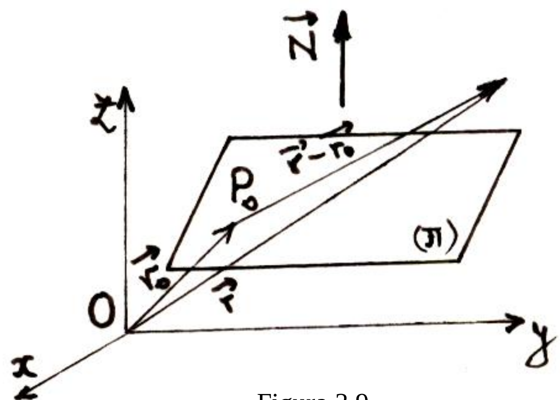


Figura 3.9.

TEOREMA 3.7. (a semispaţiilor). *Fie în spaţiul* $\boldsymbol{E_3}$ *planul de ecuaţie*

$$(\pi): \qquad f(\vec{r}) \equiv (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{N}=0\,, \quad cu\ \ P_0(\vec{r}_0)\in\pi.$$

Acest plan separă spaţiul $\boldsymbol{E_3}$ *în două submulţimi convexe*

$$\pi_+ = \{\, P(\vec{r})\in E_3 \,|\, f(\vec{r})\geq 0\}, \qquad \pi_- = \{\, P(\vec{r})\in E_3 \,|\, f(\vec{r})\leq 0\},$$

$$\pi_+ \cap \pi_- = \pi \quad , \quad \pi_+ \cup \pi_- = \boldsymbol{E_3}.$$

Demonstraţie. Considerăm π_+ şi pentru orice punct $P\in\pi_+$ avem $f(\vec{r})\geq 0$, care este echivalentă cu

$\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|\cdot\left\|\vec{N}\right\|\cdot\cos\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{N}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{N}\right)\geq 0 \Rightarrow \mu\left(\overrightarrow{P_0P},\vec{N}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$(unde μ înseamnă măsura în radiani a unghiului), adică punctul P este situat în submulţimea **spre** care este orientat vectorul $\vec{N}$.

Analog se arată că π_- este formată din punctele **dinspre** care este orientat $\vec{N}$. Problema convexității o lăsăm ca temă pentru cititor, reamintind că o mulțime C este convexă dacă, odată cu două puncte oarecare ale mulțimii C, este conținut în întregime în C şi segmentul care le uneşte. □

DEFINIȚIA 3.9. *Submulțimile π_+ şi π_- se numesc* ***semispații închise.***

DEFINIȚIA 3.10. *Se numeşte* ***unghi diedru*** *dintre planele orientate $(\pi_1, \vec{N}_1)$ şi $(\pi_2, \vec{N}_2)$, unghiul dintre vectorii normali $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$ determinat prin*

$$\cos\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left\|\vec{N}_1\right\| \cdot \left\|\vec{N}_2\right\|}.$$

Dacă $\vec{N}_S = A^S\vec{i} + B^S\vec{j} + C^S\vec{k}$, s=1,2, atunci

$$\cos\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right) = \frac{A^1A^2 + B^1B^2 + C^1C^2}{\sqrt{A^{1^2} + B^{1^2} + C^{1^2}} \cdot \sqrt{A^{2^2} + B^{2^2} + C^{2^2}}}.$$

Cazuri particulare. 1. $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow A^1A^2 + B^1B^2 + C^1C^2 = 0.$

2. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{O}_V \Leftrightarrow \vec{N}_1 = \lambda\, \vec{N}_2$, cu $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ şi $D^1 \neq D^2$.

3. $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 = \lambda\, \vec{N}_2$, cu $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ şi $D^1 = D^2$.

3.7.Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_1(0, -1, 3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_2(4, 3, 1)$.

Rezolvare. Fie π planul determinat, a cărui ecuație (conform cu (2)) este

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1P} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1P} = 0 \ ,$$

unde $P(x, y, z)$ este punctul curent al lui π.Punând $M_1(\vec{r}_1), M_2(\vec{r}_2)$ şi $P(\vec{r})$, avem

$$\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)=0 \Leftrightarrow \left(4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\right)\left[x\cdot\vec{i}+(y+1)\cdot\vec{j}+(z-3)\cdot\vec{k}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+4y-2z+10=0\,.$$

2.Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(x^0, y^0, z^0)$ şi determină pe axele Ox, Oy segmentele a, respectiv b.

Rezolvare . Folosind (4') avem

$$(\pi):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0\,,$$

unde c trebuie determinat prin condiția ca π să treacă prin M_0. Obținem

$$\frac{x^0}{a}+\frac{y^0}{b}+\frac{z^0}{c}-1=0\,,$$

de unde $c=\dfrac{z^0}{1-\dfrac{x^0}{a}-\dfrac{y^0}{b}}$. Deci $(\pi):\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\left(1-\dfrac{x^0}{a}-\dfrac{y^0}{b}\right)\dfrac{z}{z^0}-1=0.$

3.Să se scrie ecuația generală a planului care are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x=-2+3u-4v \\ y=1-2u-v \\ z=1+u+v \end{cases}\quad,\qquad (u,v)\in\mathbf{R}^2.$$

Rezolvare. Eliminăm între aceste trei relații parametrii u şi v. Pentru aceasta considerăm sistemul în necunoscutele u şi v şi exprimăm condiția de compatibilitate a sistemului prin

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & x+2 \\ 2 & 1 & -(y-1) \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix}=0\quad,$$

care reprezintă ecuația planului căutat în coordonate carteziene. Dezvoltând determinantul, obținem

$$(\pi):\ x+7y+11z-16=0.$$

4.Să se scrie ecuațiile planelor bisectoare ale diedrului format de două plane *(π_1) :* $A^1x+B^1y+C^1z+D^1=0$, (π_2) : $A^2x+B^2y+C^2z+D^2=0$.

Rezolvare . Planele bisectoare reprezintă locul geometric al punctelor egal depărtate de cele două plane π_1 şi π_2. Dacă $P(\vec{r})$ este punctul situat într-unul din planele bisectoare, vom avea

$$d(P, \pi_1)=d(P, \pi_2) \Leftrightarrow \text{(conform cu Observația 3.5.)}$$

$$\frac{\left|A^1x+B^1y+C^1z+D^1\right|}{\sqrt{A^{1^2}+B^{1^2}+C^{1^2}}}=\frac{\left|A^2x+B^2y+C^2z+D^2\right|}{\sqrt{A^{2^2}+B^{2^2}+C^{2^2}}},$$

deci ecuațiile celor două plane bisectoare la planele date sunt

$$\frac{A^1x+B^1y+C^1z+D^1}{\sqrt{A^{1^2}+B^{1^2}+C^{1^2}}}=\pm\frac{A^2x+B^2y+C^2z+D^2}{\sqrt{A^{2^2}+B^{2^2}+C^{2^2}}}.$$

5. a) Să se scrie ecuația planului care trece prin originea O a triedrului *Oxyz,* prin punctul $M_1(x^1, y^1, z^1)$ şi este perpendicular pe planul (π_1) : $ax+by+cz+d=0$.

b) Să se determine care din punctele A(1, 3, 2), B(-1, 2, 1), C(0, 1, -1), D(2, 0, -1) se găsesc de aceeaşi parte cu originea axelor de coordonate față de planul (π') : $2x+y-z-1=0$.

Rezolvare . a) Fie π planul căutat. Determinăm coeficienții A, B, C, D din ecuația (3) prin condițiile :

$O\in\pi \Leftrightarrow D=0$;

$M_1\in\pi \Leftrightarrow Ax^1+By^1+Cz^1=0$.

$\pi\perp\pi' \Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0$.

Din acest sistem de ecuații liniare şi omogene, cu necunoscutele A, B, C, D deducem

$$D=0 \text{ şi } \frac{A}{\begin{vmatrix} -z^1 & y^1 \\ -c & b \end{vmatrix}} = \frac{B}{\begin{vmatrix} x^1 & -z^1 \\ a & -c \end{vmatrix}} = \frac{C}{\begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ a & b \end{vmatrix}}.$$

Rezultă că ecuaţia planului π este :

$$(cy^1-bz^1)x+(az^1-cx^1)y+(bx^1-ay^1)z=0.$$

b)Considerăm (conform cu Teorema 3.7. în coordonate carteziene)

$$(\pi') : f(x, y, z) \equiv 2x+ y - z-1=0$$

şi, prin calcul, obţinem următoarele valori pentru f :

$$f(O)= -1 \;,\; f(A)=2 \;,\; f(B)= -2 \;,\; f(C)=1 \;,\; f(D)=4 \;.$$

Se observă că numai punctul B se află în acelaşi semispaţiu cu originea deoarece

$$f(B)= -2<-1=f(O)<0.$$

3.8. Probleme propuse

1. Se dau punctele A(1, 3, -2) şi B(7, -4, 4). Să se afle ecuaţia planului care conţine punctul B şi este perpendicular pe direcţia AB.

2. Să se scrie în coordonate carteziene ecuaţia planului a cărui ecuaţie sub formă vectorială este $\left(4\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k}\right)\vec{r}=9.$

3. Să se scrie ecuaţiile sub formă vectorială ale planelor de coordonate şi ale axelor de coordonate din triedrul $Oxyz$.

4. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin Oz şi conţine punctele $M(2,2,0)$ şi $N(4,0,0)$.

5. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele $M_1(3,-2,1)$, $M_2(5,4,1)$, $M_3(-1,-2,3)$.

6. Din punctul M(5, 16, 12) se duc două plane, din care unul conţine axa Ox, iar celălalt axa Oy. Să se calculeze unghiul dintre aceste plane.

7. Să se scrie ecuația planului care determină pe axele de coordonate *Ox, Oy, Oz* tăieturile $a=-1$, $b=3$, $c=-2$.

8. Să se determine tăieturile pe axele de coordonate ale planului $3x-4y+6z-24=0$.

9. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_1(1, 2, 3)$ şi este paralel cu vectorii $\vec{v}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ şi $\vec{v}_2=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.

10. Să se scrie ecuația planului care are în punctul $P(4,3,5)$ piciorul perpendicularei din origine pe plan.

11. Să se scrie ecuația planului echidistant față de planele $2x+y+3z=0$ şi $2x+y+3z+6=0$.

12. Să se calculeze :

i) distanța de la punctul M(1, 2, 3) la planul (π) : $16x+32y-5z+3=0$;

ii) distanța de la punctul N$\left(2, 0, -\frac{1}{2}\right)$ la planul (π') : $4x-4y+2z+17=0$.

13. Să se calculeze înălțimea h a piramidei SABC ştiind că S(0,6,4), A(3,5,3), B(-2,11,-5), C(1,-1,4).

14. Să se calculeze unghiurile următoarelor perechi de plane :

i) $x+2y-7z+17=0$ şi $9x+3y-6z+4=0$;

ii) $4x-5y+3z-1=0$ şi $x-4y-z+9=0$;

iii) $\vec{r}\left(2\vec{i}-6\vec{j}+10\vec{k}\right)=17$ şi $\vec{r}\left(3\vec{i}-9\vec{j}+15\vec{k}\right)=32$.

15. Să se determine valorile parametrilor reali λ şi m astfel încât următoarele perechi de ecuații să reprezinte plane paralele :

a) $2x+\lambda y+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

b) $mx+\lambda y+z-1=0$, $x-2y-3z=0$.

4. DREAPTA ÎN SPAȚIU

DEFINIȚIA 4.1. (intuitivă a dreptei) *Se numeşte* ***dreaptă*** *drumul unui punct mobil determinat între două puncte fixe, distincte din spațiu, fără să-şi schimbe direcția (altfel spus, urmând drumul cel mai scurt dintre cele două puncte fixe).*

DEFINIȚIA 4.2. (intuitivă a punctului) *Se numeşte* ***punct*** *intersecția a două drepte.*

La o examinare mai atentă, se observă că nu există definiții pentru noțiunile de plan, dreaptă şi punct. Legăturile dintre aceste elemente geometrice sunt reglementate de axiome.

O dreaptă în spațiu poate fi determinată de :

(i) un punct şi un vector nenul;

(ii) de două puncte distincte ;

(iii) intersecția a două plane secante.

4.1.Dreapta determinată de un punct şi un vector director

TEOREMA 4.1. *Fie punctul fixat $P_0(x^0, y^0, z^0)$, $\vec{r}_0 = x^0\vec{i} + y^0\vec{j} + z^0\vec{k}$ vectorul de poziție al punctului P_0 față de triedrul Oxyz şi $\vec{a}(l, m, n)$ un vector nenul din V.*

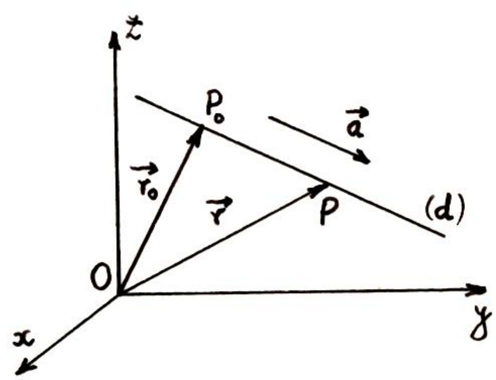


Figura 4.1.

1.Ecuația vectorială a dreptei d *care trece prin P_0 şi este paralelă cu $\vec{a}$ este:*

(1) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\, \vec{a}$, $\lambda \in$ **R.**

2.Ecuațiile parametrice ale dreptei d *se obțin prin proiecția relației (1) pe axele triedrului Oxyz*

(2) $x = x^0 + \lambda l\ ,\ y = y^0 + \lambda m\ ,\ z = z^0 + \lambda n\ ,\ \lambda \in$ **R.**

3.Ecuațiile carteziene ale dreptei d *se obțin din (2) prin eliminarea parametrului λ, adică*

(3)
$$\frac{x - x^0}{l} = \frac{y - y^0}{m} = \frac{z - z^0}{n}.$$

Demonstrație. 1. Din fig. 4.1.se observă că punctul curent P(x, y, z) aparține dreptei *d* dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{P_0P}$ si $\vec{a}$ sunt paraleli $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda\, \vec{a}$, λ∈**R** $\Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{a}$ ⇔(1).

2. Dacă $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, obținem (2) prin egalarea coeficienților lui $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

3. Se obține simplu prin eliminarea parametrului λ în ecuațiile (2). □

Denumiri. Vectorul $\vec{a}(l, m, n) \neq \vec{O}_V$, care dă direcția dreptei d se numeşte **vector director**, iar coordonatele sale l, m, n se numesc **parametrii directori ai dreptei.** Evident orice vector $k\vec{a}, k \neq 0$ joacă acelaşi rol ca $\vec{a}$.

Legătura dintre parametrii directori şi cosinusurile directoare ale dreptei. Scriind vectorul director $\vec{a}$ al dreptei în funcție de vectorul unitate, avem $\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{a}_0$, unde $\vec{a}_0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$, cu $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ şi , identificând coeficienții lui $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ în cei doi membri, obținem

$$l = \cos\alpha \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ ,$$

$$m = \cos\beta \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ ,$$

$$n = \cos\gamma \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ .$$

Observaţii 4.1. Deoarece $\vec{a}(l, m, n) \neq \vec{O}_V$, înseamnă că se pot anula cel mult două dintre numerele *l, m, n.*

1) Dacă $l=0,\ mn\neq 0$, atunci ecuaţiile carteziene sunt echivalente cu

$$x = x^0 \quad , \quad \frac{y - y^0}{m} = \frac{z - z^0}{n}$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu planul *yOz.*

2) Dacă $l=m=0,\ n\neq 0$, atunci ecuaţiile carteziene se reduc la

$$x = x^0, y = y^0$$

şi reprezintă o dreaptă paralelă cu Oz.

4.2. Dreapta determinată de două puncte distincte

Consecinţa 4.1. Două puncte distincte $M_1(x^1, y^1, z^1)$ şi $M_2(x^2, y^2, z^2)$ determină o dreaptă *d* şi numai una.

Într-adevăr, folosind Teorema 4.1, vom considera dreapta *d* ca fiind determinată de punctul M_1 şi de vectorul director $\vec{a}$ reprezentat de vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$ (fig. 4.2.). Din condiţia de coliniaritate a vectorilor $\overrightarrow{M_1P}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ rezultă $\overrightarrow{M_1P} = \lambda\ \overrightarrow{M_1M_2}$, cu $\lambda\in$**R,** adică

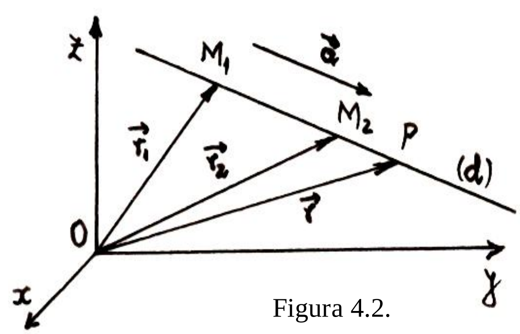


Figura 4.2.

(4) $$(\vec{r} - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{O}_V \Leftrightarrow$$

(4') $$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1),\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

Din condiţia de coliniaritate a vectorilor $\overrightarrow{M_1P}$ şi $\overrightarrow{PM_2}$ avem

(4”) $\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda\left(\vec{r}_2-\vec{r}\right)\Leftrightarrow$ (4”’) $\vec{r}=\dfrac{\vec{r}_1+\lambda\,\vec{r}_2}{1+\lambda}$, cu $\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{-1\}$.

Fiecare din relațiile (4)-(4”’) reprezintă **o ecuație vectorială a dreptei d .**

În (4’) considerând $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, vectorul de poziție al punctului curent P, $\vec{r}_S=x^S\vec{i}+y^S\vec{j}+z^S\vec{k}, s=1{,}2$, vectorii de poziție ai punctelor M_1, respectiv M_2 şi, eliminând parametrul λ, obținem

(5) $$\frac{x-x^1}{x^2-x^1}=\frac{y-y^1}{y^2-y^1}=\frac{z-z^1}{z^2-z^1}\ ,$$

care reprezintă **ecuațiile carteziene ale dreptei d.**

Prin proiecția ecuației vectoriale parametrice (4”’) pe axele de coordonate *Ox, Oy,* respectiv *Oz,* obținem

(5’) $$\begin{cases} x=\dfrac{x^1+\lambda x^2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y^1+\lambda y^2}{1+\lambda}\\ z=\dfrac{z^1+\lambda z^2}{1+\lambda}\end{cases}\quad \text{, cu } \lambda\in\mathbf{R}\backslash\{-1\}\ ,$$

care reprezintă **ecuațiile parametrice ale dreptei d** în coordonate carteziene.

4.3. Dreapta determinată de două plane secante

Orice dreaptă d∈**E3** poate fi considerată ca o intersecție a două plane distincte π_1 şi π_2. În general, orice curbă din **E3** poate fi privită ca intersecția a două suprafețe care conțin acea curbă şi care nu mai au alte puncte comune. De exemplu: orice cerc este intersecția unei sfere S cu un plan π, distanța de la centrul sferei la planul π fiind strict mai mică decât raza sferei; orice elipsă poate fi privită ca intersecția unui cilindru circular cu un plan care nu este paralel sau perpendicular pe generatoarele cilindrului.

DEFINIȚIA 4.3. *Vom spune că sistemul de ecuații*

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

este un ***sistem asociat mulțimii*** $A\subset \mathbf{E_3}$, *dacă*

$$A=\{P(x,y,z)\in \mathbf{E_3} \,/\, F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0\}.$$

Din cele ce urmează va rezulta că sistemul asociat unei mulțimi $A\in\mathbf{E_3}$, în general nu este unic. Cu toate acestea, prin abuz de limbaj, se obişnuieşte să se spună că **mulțimea A are ecuațiile F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0.**

TEOREMA 4.2. *Oricărei drepte* $d\in\mathbf{E_3}$ *i se poate asocia un sistem de ecuații de forma*

$$(6)\qquad \begin{cases} A^1x+B^1y+C^1z+D^1=0 \\ A^2x+B^2y+C^2z+D^2=0 \end{cases},$$

cu $\vec{N}_1\times\vec{N}_2\neq\vec{O}_V$, *unde* $\vec{N}_1=A^1\vec{i}+B^1\vec{j}+C^1\vec{k},\qquad \vec{N}_2=A^2\vec{i}+B^2\vec{j}+C^2\vec{k}$.

Reciproc, orice sistem de ecuații de forma (6), cu $\vec{N}_1\times\vec{N}_2\neq\vec{O}_V$, *este un sistem de ecuații asociat unei drepte* $d\in\mathbf{E_3}$.

Demonstrație. Fiind dată o dreaptă $d\in\mathbf{E_3}$, există două plane π_1 şi π_2 distincte, care conțin dreapta d. Evident, perechea (π_1,π_2) cu proprietatea $\pi_1\cap\pi_2=d$ nu este unică. Fie

(π_1): $A^1x+B^1y+C^1z+D^1=0$, $\qquad(\pi_2)$: $A^2x+B^2y+C^2z+D^2=0$

ecuațiile celor două plane.

Deoarece $d=\pi_1\cap\pi_2$, d este mulțimea punctelor $P(x,y,z)\in\mathbf{E_3}$ cu proprietatea că (x,y,z) verifică cele două ecuații, deci dreapta d poate fi reprezentată printr-un sistem de ecuații de forma (6). Cum cele două plane nu sunt paralele, $\vec{N}_1\times\vec{N}_2\neq\vec{O}_V$.

Reciproc, fiind date ecuațiile (6), prima este ecuația unui plan π_1, a doua este ecuația unui plan π_2. Datorită condiției $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{O}_V$, cele două plane nu sunt paralele şi intersecția lor, $d = \pi_1 \cap \pi_2$ (mulțimea punctelor P ale căror coordonate verifică ambele ecuații (6)) este o dreaptă. □

TEOREMA 4.3. *Dacă sistemul asociat unei drepte d este*

$$\begin{cases} A^1 x + B^1 y + C^1 z + D^1 = 0 \\ A^2 x + B^2 y + C^2 z + D^2 = 0 \end{cases},$$

notând $\vec{N}_S = A^S \vec{i} + B^S \vec{j} + C^S \vec{k}, s = 1,2,$ *atunci vectorul* $\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ *este un vector director al dreptei d, iar*

$$(7) \qquad a = \begin{vmatrix} B^1 & C^1 \\ B^2 & C^2 \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} C^1 & A^1 \\ C^2 & A^2 \end{vmatrix}, \qquad c = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix}$$

formează un sistem de parametri directori ai acestei drepte.

Demonstrație. Dreapta *d* este intersecția a două plane π_1 şi π_2, vectorul $\vec{N}_1$ este normal planului π_1, $\vec{N}_2$ este normal planului π_2, deci $\vec{N}_1$ şi $\vec{N}_2$ sunt perpendiculari pe *d*. Produsul lor vectorial $\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, fiind perpendicular şi pe $\vec{N}_1$ şi pe $\vec{N}_2$, are direcția dreptei *d*, deci $\vec{v}$ este un vector director al dreptei *d*. Evident, $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{O}_V$; în caz contrar, cele două plane ar fi sau paralele şi distincte, sau confundate şi atunci cele două ecuații nu ar mai reprezenta o dreaptă.

Numerele *a, b, c* sunt coordonatele vectorului director $\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ în raport cu baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, deci formează un sistem de parametri directori ai dreptei *d*. □

TEOREMA 4.4. *Fie trei plane π_1, π_2, π_3 de ecuații:*

$$A^1x+B^1y+C^1z+D^1=0 \;,$$
$$A^2x+B^2y+C^2z+D^2=0 \;,$$
$$A^3x+B^3y+C^3z+D^3=0 \;,$$

cu $\vec{N}_S = A^S\vec{i} + B^S\vec{j} + C^S\vec{k}, s = 1,2,3,$ *vectorii normali la fiecare dintre ele. O condiție necesară şi suficientă pentru ca cele trei plane să aibă un punct comun, unic, este*

(8) $$\vec{N}_1\left(\vec{N}_2 \times \vec{N}_3\right) \neq 0$$

sau, echivalent cu aceasta,

(8') $$\begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Demonstrație. Dacă cele trei plane au un punct comun şi numai unul singur, intersecția a două dintre ele, $d_3 = \pi_1 \cap \pi_2$, este o dreaptă şi intersecția acesteia cu π_3 este un punct $P_0 = d_3 \cap \pi_3 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$. Rezultă că $\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{0}_V$ şi $\vec{v}$ nu este paralel cu π_3, deci nu este ortogonal lui $\vec{N}_3$, adică $\left(\vec{N}_1 \times \vec{N}_2\right)\vec{N}_3 \neq 0$. Deci condiția este necesară.

Suficiența. $\vec{N}_1\vec{N}_2\vec{N}_3 \neq 0 \Rightarrow \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{v} \neq \vec{O}_V$ şi $\vec{v}\vec{N}_3 \neq 0$. Deci $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ este o dreaptă şi această dreaptă nu este paralelă cu π_3. Intersecția $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = d \cap \pi_3 = P_0$ este un punct. Determinantul din (8') este transcrierea produsului mixt $\vec{N}_1\vec{N}_2\vec{N}_3$ folosind coordonatele celor trei vectori în raport cu baza canonică $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, deci condiția (8) este echivalentă cu (8'). □

4.4. Unghiul a două drepte în spațiu. Aria unui triunghi din spațiu

Fie d_1 şi d_2 două drepte orientate prin vectorii directori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

DEFINIȚIA 4.4. *Prin* ***unghiul dintre dreptele*** $\boldsymbol{d_1}$ ***şi*** $\boldsymbol{d_2}$ *vom înțelege unghiul dintre* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *adică unghiul definit prin*

$$\cos(d_1,d_2)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\ \ sau\ \ \sin(d_1,d_2)=\frac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|},\quad \mu\ (d_1,d_2)\in[0,\pi].$$

Consecințe 4.2. (i) $d_1 \perp d_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\vec{b}=0$;

(ii) $d_1 \parallel d_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}_V$.

Fie un triunghi *ABC* din spațiu dat prin vectorii de poziție ai vârfurilor $\vec{r}(A),\vec{r}(B),\vec{r}(C)$ în raport cu triedrul *Oxyz*.

DEFINIȚIA 4.5. *Aria triunghiului ABC este dată de*

$$\sigma(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\left(\vec{r}(B)-\vec{r}(A)\right)\times\left(\vec{r}(C)-\vec{r}(A)\right)\right\|.$$

4.5. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuațiile dreptei d care trece prin punctul $P_0(2,-5,3)$ şi este paralelă cu dreapta $(d_1):\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$.

Să se determine apoi cosinusurile directoare pentru d.

Rezolvare. Dreapta d_1 are vectorul director $\vec{a}_1(4,-6,9)$. Dreapta d are vectorul director $\vec{a}\parallel\vec{a}_1$, deci $\vec{a}=\lambda\,\vec{a}_1$, cu $\lambda\in\mathbf{R}^*$. Ecuațiile carteziene ale dreptei d sunt (conform cu relația (3)):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}.$$

Pentru determinarea cosinusurilor directoare avem $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ şi

$$\vec{a}_0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k} = \frac{4\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}}{\pm\sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2}} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{133}}, \cos\beta = \mp\frac{6}{\sqrt{133}}, \cos\gamma = \pm\frac{9}{\sqrt{133}}.$$

2. Se consideră dreapta determinată de punctele A(1, 2, 3) şi B(-2, 1, 4). Să se găsească punctele ei de intersecţie cu planele de coordonate.

Rezolvare. Ecuaţiile dreptei AB sunt $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$ (conform cu relaţia (5)). Notând cu t valoarea comună a rapoartelor, avem $x = -2 + 3t$, $y = 1 + t$, $z = 4 - t$. Punctul de intersecţie a dreptei cu planul *xOy* are *z=0*. Deducem *t=4*. Deci coordonatele acestui punct sunt (10, 5, 0). În continuare, printr-un calcul analog, găsim că dreapta intersectează planul *yOz* în punctul $\left(0, \dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$, iar planul *xOz* în punctul (-5,0,5).

3. Dându-se dreapta (d): $\begin{cases} x - 3y + 5z + 6 = 0 \\ 2x + 5z - 3 = 0 \end{cases}$, să se scrie ecuaţiile ei punându-se în evidenţă un punct al dreptei.

Rezolvare. Direcţia dreptei d este dată de vectorul $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, unde $\vec{N}_1 = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Deci

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Alegem pe dreapta *d* un punct oarecare, dând o valoare arbitrară uneia din coordonate, de exemplu $y=0$. Obținem sistemul

$\begin{cases} x+5z+6=0 \\ 2x+5z-3=0 \end{cases}$, care are soluția $x=9$, $z=-3$, deci punctul $P_0(9, 0, -3)$. Ecuațiile dreptei *d*, ținând seama de relația (3), este $\dfrac{x-9}{-15}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+3}{6}$.

4. Să se determine unghiul dintre dreptele

$$(d_1):\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases} \quad \text{şi} \quad (d_2):\begin{cases} x=az+b \\ y=cz+d \end{cases}, \text{ cu } p, q, a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Rezolvare. Dreapta (d_1) este paralelă cu *Oz*, deci un vector director al ei este $\vec{a}_1=\vec{k}$. Pentru (d_2) : $\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{y-d}{c}=\dfrac{z}{1}$, obținem $\vec{a}_2=a\vec{i}+c\vec{j}+\vec{k}$. Deci

$$\cos(d_1, d_2)=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{\|\vec{a}_1\|\cdot\|\vec{a}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2+1}}.$$

5. Se consideră ecuația vectorială $\vec{r}=2\vec{i}-3\vec{j}+\lambda\left(6\vec{i}+2\vec{j}\right)$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate şi care sunt false ? Justificare.

Ecuația dată reprezintă

1° o dreaptă oarecare în spațiu;

2° un punct în plan;

3° o dreaptă situată într-un plan;

4° un plan;

5° o curbă.

Rezolvare. Sunt adevărate afirmațiile 3° şi 5°, deoarece ecuația dată este de forma (1), care caracterizează o dreaptă (adică cea mai simplă curbă). Este o dreaptă situată în plan deoarece fiecare vector considerat are proiecții numai pe două axe de coordonate. Afirmația

2^o este falsă, deoarece un punct este caracterizat (în plan) printr-o pereche ordonată de numere, nu de o ecuație depinzând de un parametru. De asemenea şi 4^o este falsă, deoarece vectorul $\vec{r}$ al unui punct curent de pe figură este funcție numai de un parametru λ şi nu de doi parametri (ceea ce ar caracteriza o suprafață).

4.6.Probleme propuse

1. Se consideră dreapta care trece prin punctul A(1, 1, 1) şi este paralelă cu dreapta care trece prin punctele B(1, 2, 5) şi C(-1, 0, 3). Să se scrie ecuațiile carteziene ale acestei drepte şi să se arate că este paralelă cu planul *xOy*.

2. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul A(1, -5, 3) şi formează cu axele de coordonate unghiuri respectiv egale cu 60^o, 45^o, 120^o.

3. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_1(x^1, y^1, z^1)$ şi este perpendiculară pe una din axele de coordonate ale triedrului *Oxyz*.

4. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M_1(x^1, y^1, z^1)$ şi este paralelă cu *Ox* (respectiv *Oy*, *Oz*).

5. Să se determine cosinusurile directoare ale dreptelor

$$(d_1):\quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12};\qquad (d_2):\quad \frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}.$$

6. a) Să se scrie ecuațiile parametrice ale următoarelor drepte

$$(d_1): \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}\ ;\qquad (d_2):\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}.$$

b) Să se scrie ecuațiile carteziene ale dreptelor

$$(d_3):\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases};\qquad (d_4):\begin{cases} x=2t+5 \\ y=-t+2 \\ z=t-7 \end{cases},\ t\in\mathbf{R}.$$

7. Fie dreapta AB cu A(1, 2, 3) şi B(-2, 1, 4). Să se determine punctele ei de intersecție cu planele de coordonate.

8. Să se scrie ecuațiile dreptei AB, unde A(2, -1, 0), B(-1, 1, $2\sqrt{3}$) şi apoi să i se calculeze cosinusurile directoare.

9. Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei care uneşte centrul de greutate al triunghiului ABC cu mijlocul segmentului AB, unde A(1,2,3), B(-1,-2,0) şi C(0,2,4).

10. Să se scrie ecuațiile parametrice ale înălțimii duse din A în triunghiul ABC ale cărui vârfuri sunt A(2, 3, 6), B(1, 1, 2), C(-1, 3, 4) şi să se găsească cosinusurile directoare ale direcției respective.

11. Se consideră triunghiul ABC cu A(2, -3, -1), B(1, 4, 0) şi C(-3, 2, -5). Să se dea o reprezentare parametrică a dreptei care uneşte centrul de greutate al triunghiului ABC cu punctul M, care împarte segmentul orientat AB în raportul $k = \frac{3}{2}$.

12. Se dau punctele A(2, 1, 0), B(0, 1, 5) şi C(1, -1, 1). Să se determine:

a) ecuațiile vectoriale, parametrice şi carteziene ale dreptelor AB şi AC;

b) locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele A şi B.

13. Să se determine direcția dreptei $(d):\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

14. Să se dea o reprezentare carteziană a dreptei care trece prin punctul A(2,1,1) şi este paralelă cu planele (π_1): $x\text{-}y\text{+}z\text{+}2\text{=}0$ şi (π_2): $x\text{+}y\text{+}2z\text{-}1\text{=}0$.

15. Să se scrie ecuația unei drepte care trece prin punctul A(2, 1, 1) şi este perpendiculară pe planele $x+2y-z+1=0$ şi $2x+y-z=0$.

5. PROBLEME ASUPRA PLANELOR

5.1. Pozițiile relative ale planelor

Fie **două plane** π_1 şi π_2 date sub formă vectorială

$$(\pi_1)\ :\ \vec{r}\cdot\vec{N}_1-\alpha^1=0\quad,\quad(\pi_2)\ :\ \vec{r}\cdot\vec{N}_2-\alpha^2=0\quad,$$

sau în coordonate carteziene

$$(\pi_1)\ :\ A^1x+B^1y+C^1z+D^1=0\quad,\quad(\pi_2)\ :\ A^2x+B^2y+C^2z+D^2=0\quad.$$

TEOREMA 5.1. *Două plane* π_1 *şi* π_2 *pot avea între ele următoarele poziții :*

$\underline{\overline{I}}$. $\pi_1=\pi_2 \iff \vec{N}_1=\lambda\,\vec{N}_2,\quad \alpha^1=\lambda\,\alpha^2,\quad \lambda\neq 0 \iff \dfrac{A^1}{A^2}=\dfrac{B^1}{B^2}=\dfrac{C^1}{C^2}=\dfrac{D^1}{D^2}=\lambda,$ $\lambda\neq 0.$

$\underline{\overline{II}}$. $\pi_1\|\pi_2 \iff \vec{N}_1=\lambda\,\vec{N}_2,\quad \alpha^1\neq\lambda\,\alpha^2,\quad \lambda\neq 0 \iff \dfrac{A^1}{A^2}=\dfrac{B^1}{B^2}=\dfrac{C^1}{C^2}\neq\dfrac{D^1}{D^2}.$

$\underline{\overline{III}}$. $\pi_1\cap\pi_2\neq\emptyset \iff \vec{N}_1\neq\lambda\,\vec{N}_2,\quad \lambda\neq 0.$

Demonstrație. ***Necesitatea*** $\underline{\overline{I}}$. Din $\pi_1=\pi_2 \Rightarrow \vec{N}_1\|\vec{N}_2 \iff \vec{N}_1\times\vec{N}_2=\vec{O}_V$

$\Rightarrow\ \vec{N}_1=\lambda\,\vec{N}_2,\quad \lambda\neq 0.$ Fie $P_1(\vec{r}_1)\in\pi_1$ şi $P_2(\vec{r}_2)\in\pi_2$, cu $P_1\neq P_2$. Atunci

$\begin{cases} \vec{r}_1 \cdot \vec{N}_1 = \alpha^1 \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{N}_2 = \alpha^2 \end{cases} \Big| \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda\, \vec{r}_1 \cdot \vec{N}_2 = \alpha^1 \\ \lambda\, \vec{r}_2 \cdot \vec{N}_2 = \lambda\, \alpha^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot \vec{N}_2 = \alpha^1 - \lambda\,\alpha^2$. Deoarece

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2P_1} \in \pi_1 = \pi_2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_2P_1} \cdot \vec{N}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot \vec{N}_2 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \alpha^1 = \lambda\, \alpha^2.$

Relațiile $\vec{N}_1 = \lambda\, \vec{N}_2$ şi $\alpha^1 = \lambda\, \alpha^2, \quad \lambda \neq 0$, ținând seama de legătura dintre forma vectorială şi forma carteziană a planelor devin

$$\frac{A^1}{A^2} = \frac{B^1}{B^2} = \frac{C^1}{C^2} = \frac{D^1}{D^2} = \lambda \ .$$

$\overline{II}$. Din $\pi_1 \| \pi_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 \| \vec{N}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 = \lambda\, \vec{N}_2, \quad \lambda \neq 0$. Cu $P_1(\vec{r}_1) \in \pi_1$ şi $P_2(\vec{r}_2) \in \pi_2$ avem

$\begin{cases} \vec{r}_1 \cdot \vec{N}_1 = \alpha^1 \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{N}_2 = \alpha^2 \end{cases} \Big| \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda\, \vec{r}_1 \cdot \vec{N}_2 = \alpha^1 \\ \lambda\, \vec{r}_2 \cdot \vec{N}_2 = \lambda\, \alpha^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot \vec{N}_2 = \alpha^1 - \lambda\,\alpha^2$. Deoarece

$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot \vec{N}_2 \neq \vec{O}_V \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 - \lambda\,\alpha^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 \neq \lambda\,\alpha^2$ şi

$$\frac{A^1}{A^2} = \frac{B^1}{B^2} = \frac{C^1}{C^2} \neq \frac{D^1}{D^2} \ .$$

$\overline{III}$. $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{O}_V \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_1 \neq \lambda\, \vec{N}_2, \quad \lambda \neq 0$.

Suficiența este imediată în toate situațiile. □

Fie **trei plane** π_1, π_2 şi π_3 date sub forma generală

$$(\pi_1) \ : \ A^1x + B^1y + C^1z + D^1 = 0, \quad (\pi_2) \ : \ A^2x + B^2y + C^2z + D^2 = 0,$$

$$(\pi_3) \ : \ A^3x + B^3y + C^3z + D^3 = 0 .$$

TEOREMA 5.2. *Trei plane pot avea între ele următoarele poziții:*

i) *Planele sunt concurente într-un punct când*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

ii) *Planele au o dreaptă comună când* $\Delta = 0$, *iar unul dintre determinanții de ordinul al doilea format din coeficienții necunoscutelor, de exemplu* $\delta = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix} \neq 0$

şi determinantul

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & D^1 \\ A^2 & B^2 & D^2 \\ A^3 & B^3 & D^3 \end{vmatrix} = 0 .$$

iii) *Planele nu au nici un punct comun, ele sunt paralele cu o dreaptă sau se taie după trei drepte paralele, fomând o prismă, când*

$$\Delta = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} A^1 & B^1 \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \Delta_1 \neq 0 \quad .$$

iv) *Planele sunt paralele când* $\Delta = 0$, *toți minorii de ordinul al* $\overline{\underline{II}}$ *– lea ai lui* Δ *sunt nuli şi, presupunând* $A^1 \neq 0$, *determinanții caractΔeristici sunt nenuli*

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A^1 & D^1 \\ A^2 & D^2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A^1 & D^1 \\ A^3 & D^3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

v) *Planele sunt confundate când sunt îndeplinite condițiile* $\Delta = 0$ *,toți minorii de ordinul al doilea ai lui Δ şi determinanții caracteristici* δ_1 *şi* δ_2 *sunt nuli.*

Demonstrație. ***i)*** Ecuațiile celor trei plane formează un sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute $x,\ \ y,\ \ z$. Sistemul are soluție unică dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

În acest caz, valorile lui $x, \ y, \ z$, găsite prin rezolvarea sistemului folosind regula lui Cramer, sunt coordonatele unui punct care verifică toate cele trei ecuații ale planelor, deci planele sunt concurente într-un singur punct.

ii) Pentru a arăta că planele au o dreaptă comună, facem o discuție asupra sistemului determinat de ecuațiile planelor, utilizând teorema lui Rouché. Considerăm matricea formată din coeficienții necunoscutelor

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{bmatrix}.$$

Dacă determinantul $\Delta \equiv \det A = 0$, presupunem că cel puțin un minor de ordinul al doilea al matricei A este diferit de zero, de exemplu $\delta \neq 0$, pe care îl putem lua ca determinant principal al sistemului. Condiția ca sistemul să fie compatibil este ca determinantul caracteristic Δ_1 să fie nul. În acest caz, sistemul este simplu nedeterminat şi, prin urmare, planele trec prin aceeaşi dreaptă de intersecție a planelor π_1 şi π_2.

iii) Dacă $\Delta = 0, \quad \Delta_1 \neq 0,$ atunci sistemul este incompatibil, deci cele trei plane nu au puncte comune. Cum $\delta \neq 0$, rezultă că cele trei plane se intersectează numai câte două, după drepte paralele, deci cele trei plane formează o prismă nelimitată.

iv) Dacă $\Delta = 0$ şi toți minorii de ordinul al $\overline{\underline{II}}$ – lea ai lui A sunt nuli, presupunând $A^1 \neq 0$, determinantul principal al matricei A este de ordinul $\overline{\underline{I}}$. Considerăm determinanții caracteristici δ_1, δ_2 şi dacă aceştia sunt nenuli, atunci sistemul este in-compatibil. Rezultă că cele trei plane luate câte două nu au nici un punct comun şi, prin urmare, cele trei plane sunt paralele.

v) Dacă $\Delta = 0$, toți minorii de ordinul al $\overline{\underline{II}}$ – lea ai lui A sunt nuli, iar $\delta_1 = \delta_2 = 0$, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat, ecuațiile se reduc la una singură şi planele sunt confundate. □

TEOREMA 5.3. *(Altă formă a condiției ca trei plane să se intersecteze după o dreaptă) Trei plane de ecuații (simbolice)* $\pi_1 = 0,\ \pi_2 = 0,\ \pi_3 = 0$ *trec prin aceeaşi dreaptă când există trei numere reale* $\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3$, *nu toate nule* $\left(\left(\lambda^1\right)^2 + \left(\lambda^2\right)^2 + \left(\lambda^3\right)^2 \neq 0 \right)$, *a.î.*

(1) $$\lambda^1\pi_1 + \lambda^2\pi_2 + \lambda^3\pi_3 = 0.$$

Demonstrație. Condiția (1) conduce la un polinom de gradul întâi, cu trei necunoscute $(x,\ y,\ z)$, care trebuie să fie identic nul, adică toți coeficienții nuli

(2) $$\begin{cases} \lambda^1 A^1 + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3 = 0 \\ \lambda^1 B^1 + \lambda^2 B^2 + \lambda^3 B^3 = 0 \\ \lambda^1 C^1 + \lambda^2 C^2 + \lambda^3 C^3 = 0 \\ \lambda^1 D^1 + \lambda^2 D^2 + \lambda^3 D^3 = 0 \end{cases}.$$

Obținem astfel un sistem de patru ecuații cu trei necunoscute $\left(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3\right)$, liniar şi omogen, care, conform teoremei lui Rouché (presupunând $\begin{vmatrix} A^1 & A^2 \\ B^1 & B^2 \end{vmatrix} \neq 0$), are condițiile de compatibilitate

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \Delta'_1 = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ D^1 & D^2 & D^3 \end{vmatrix} = 0,$$

pentru a avea soluții, nu toate nule. Acestea sunt aceleaşi cu condițiile din teorema 5.2 ii), în care s-au luat determinanții matricelor transpuse.

Prin urmare, dacă sunt îndeplinite condițiile $\Delta' = 0$ şi $\Delta'_1 = 0$, atunci sistemul(2) este compatibil, deci putem determina trei numere λ^1, λ^2, $\lambda^3 \in \mathbf{R}$, cu $\left(\lambda^1\right)^2 + \left(\lambda^2\right)^2 + \left(\lambda^3\right)^2 \neq 0$, care să verifice relația (1) şi astfel cele trei plane au o dreaptă comună. □

TEOREMA 5.4. *Condiția necesară şi suficientă ca* **patru plane** *date prin ecuațiile*

$$\left(\pi_i\right) \ : \ A^i x + B^i y + C^i z + D^i = 0 \quad , \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

să fie concurente este

$$D \equiv \begin{bmatrix} A^1 & B^1 & C^1 & D^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 & D^3 \\ A^4 & B^4 & C^4 & D^4 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{şi} \quad \det A \equiv \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstrație. Cele patru ecuații ale planelor formează un sistem de ecuații liniare cu trei necunoscute. Pentru ca cele patru plane să fie concurente, trebuie să existe un punct ale cărui coordonate $(x,\ y,\ z)$ să verifice sistemul format de ecuațiile plane-lor. Conform teoremei lui Rouché, condiția necesară şi suficientă ca un astfel de sistem să fie compatibil determinat este ca determinantul caracteristic să fie nul ($D = 0$) şi determinantul principal $\det A \neq 0$. □

5.2. Fascicol de plane. Stea de plane

DEFINIȚII 5.1. *Mulțimea tuturor planelor, care trec prin dreapta d de inter-secție a două plane date, formează un* ***fascicol de plane.***

Dreapta d se numeşte ***axa fascicolului,*** *iar planele date se numesc* ***plane de bază.***

TEOREMA 5.5. *Fiind date două plane*

$$(\pi_1)\ :\ A^1x + B^1y + C^1z + D^1 = 0 \quad ,$$

$$(\pi_2)\ :\ A^2x + B^2y + C^2z + D^2 = 0 \quad ,$$

cu condiția $\vec{N}_1\left(A^1, B^1, C^1\right) \times \vec{N}_2\left(A^2, B^2, C^2\right) \neq \vec{O}_V$ *, atunci orice plan care trece prin dreapta de intersecție a planelor* π_1 *şi* π_2 *are ecuația*

(3) $$\alpha\left(A^1x + B^1y + C^1z + D^1\right) + \beta\left(A^2x + B^2y + C^2z + D^2\right) = 0$$

sau, simbolic,

(3') $$\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = 0, \text{ cu } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Reciproc. *Ecuația (3) reprezintă toate planele care trec prin dreapta* $(d)\ :\ \begin{cases}\pi_1 = 0\\ \pi_2 = 0\end{cases}$*, deci ecuația (3') este ecuația fascicolului de plane.*

Demonstrație. Fie $\pi_3 = 0$ un plan care trece prin dreapta de intersecție a pla-nelor date π_1 şi π_2. Conform teoremei 5.3., avem

$$\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2 + \alpha^3\pi_3 = 0$$

de unde, presupunând $\alpha^3 \neq 0$,

$$\pi_3 = -\frac{\alpha^1}{\alpha^3}\pi_1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^3}\pi_2 .$$

Însă $\pi_3 = 0$, deci avem $\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = 0$, unde $\alpha = -\frac{\alpha^1}{\alpha^3}$ şi $\beta = -\frac{\alpha^2}{\alpha^3}$.

Reciproc. Ecuația $\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = 0$ reprezintă mulțimea tuturor planelor care trec prin dreapta d deoarece:

a) este o ecuație liniară în $x, \ y, \ z$, deci reprezintă un plan pentru α şi β dați;

b) coordonatele punctelor de pe dreapta d verifică atât ecuația planului π_1, cât şi ecuația planului π_2, deci verifică şi ecuația $\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = 0$. Rezultă că planul dat de ecuația (3') trece prin dreapta d . □

Observația 5.1. Presupunând $\alpha \neq 0$, ecuația fascicolului de plane se mai scrie

(3*) $\qquad \pi_1 + \lambda\, \pi_2 = 0 \qquad$ (unde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$), cu $\lambda \in \boldsymbol{R}$ **.**

Observații 5.2. (i) Dând lui α şi β din ecuația (3) diferite valori, vom obține diferite plane care trec prin dreapta d. Pentru fiecare pereche de valori neproporționale date lui α şi β , vom avea câte un plan din fascicol şi reciproc.

Planele de bază π_1 şi π_2 fac şi ele parte din fascicolul de plane pentru $\beta = 0$, respectiv $\alpha = 0$ sau, scriind ecuația fascicolului sub forma (3*), pentru $\lambda = 0$ obținem planul π_1 şi pentru $\lambda \ \to \ \infty$ obținem planul π_2.

(ii) Teorema este valabilă şi în cazul când planele de bază π_1 şi π_2 sunt paralele. În acest caz, ecuația fascicolului reprezintă totalitatea planelor paralele cu planele π_1 şi π_2, având coeficienții lui $x, \ y, \ z$ proporționali cu cei ai planelor π_1 şi π_2. (Ecuația fascicolului se scrie simplu $\pi_1 + \mu = 0, \quad \mu \in \mathbf{R}$).

(iii) Dacă printre coeficienţii A, B, C, D ai unui plan există funcţii liniare de un parametru (λ), adică

$$A(\lambda)x + B(\lambda)y + C(\lambda)z + D(\lambda) = 0,$$

atunci această ecuaţie reprezintă un fascicol de plane.

Într-adevăr, acest lucru se vede imediat scriind ecuaţia fascicolului

$$A^1x + B^1y + C^1z + D^1 + \lambda\left(A^2x + B^2y + C^2z + D^2\right) = 0$$

sub forma

$$\left(A^1 + \lambda A^2\right)x + \left(B^1 + \lambda B^2\right)y + \left(C^1 + \lambda C^2\right)z + \left(D^1 + \lambda D^2\right) = 0.$$

(iv) Pentru a găsi ecuaţia unui anumit plan din fascicol, trebuie să avem o condiţie geometrică suplimentară, cu ajutorul căreia vom determina valorile corespunzătoare ale lui α şi β, respectiv λ.

DEFINIŢIA 5.2. *Se numeşte* **stea de plane**, *determinată de punctul* $P_0(\vec{r}_0) \in$ ***E₃***, *mulţimea tuturor planelor din* ***E₃*** *care conţin punctul* P_0.

TEOREMA 5.6. *Fiind date trei plane*

$$(\pi_1)\ :\ \vec{r}\cdot\vec{N}_1 - \alpha^1 = 0 \quad , \quad (\pi_2)\ :\ \vec{r}\cdot\vec{N}_2 - \alpha^2 = 0 \quad , \quad (\pi_3)\ :\ \vec{r}\cdot\vec{N}_3 - \alpha^3 = 0 \quad ,$$

cu condiţia $\vec{N}_1\cdot\left(\vec{N}_2\times\vec{N}_3\right) \neq 0$, *atunci orice plan care trece prin punctul de intersecţie al celor trei plane are ecuaţia*

$$(4)\ \lambda^1\left(\vec{r}\cdot\vec{N}_1 - \alpha^1\right) + \lambda^2\left(\vec{r}\cdot\vec{N}_2 - \alpha^2\right) + \lambda^3\left(\vec{r}\cdot\vec{N}_3 - \alpha^3\right) = 0, \quad cu \quad \left(\lambda^1\right)^2 + \left(\lambda^2\right)^2 + \left(\lambda^3\right)^2 \neq 0.$$

Reciproc. *Ecuaţia (4) reprezintă toate planele care trec prin punctul de intersecţie al planelor* π_1, π_2, π_3 *şi, ca urmare, este ecuaţia stelei de plane.*

Demonstrație. Fie $(\pi)\ :\ \vec{r}\cdot\vec{N}-\alpha=0$ un plan oarecare din steaua de plane, cu $\vec{N}$ şi α necunoscuți. Deoarece $\vec{N}_1\cdot\left(\vec{N}_2\times\vec{N}_3\right)\neq 0$, tripletul $\left(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2,\ \vec{N}_3\right)$ poate fi considerat bază în **E3** şi atunci $\exists\ \lambda^1,\lambda^2,\lambda^3\ \in$ **R,** cu $\left(\lambda^1\right)^2+\left(\lambda^2\right)^2+\left(\lambda^3\right)^2\neq 0$, astfel încât $\vec{N}=\lambda^1\vec{N}_1+\lambda^2\vec{N}_2+\lambda^3\vec{N}_3$ $(*)$. Aceasta, înlocuită în ecuația planului π, ne dă

$$(\pi)\ :\ \lambda^1\vec{r}\cdot\vec{N}_1+\lambda^2\vec{r}\cdot\vec{N}_2+\lambda^3\vec{r}\cdot\vec{N}_3=\alpha\ .$$

Considerăm că $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\{P_0(\vec{r}_0)\}$ şi, prin urmare, $\vec{r}_0$ satisface ecuațiile celor trei plane şi ecuația planului π, astfel că obținem

$$\lambda^1\vec{r}_0\cdot\vec{N}_1+\lambda^2\vec{r}_0\cdot\vec{N}_2+\lambda^3\vec{r}_0\cdot\vec{N}_3=\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\lambda^1\alpha^1+\lambda^2\alpha^2+\lambda^3\alpha^3=\alpha\quad(**)$$

Înlocuind $\vec{N}$ şi α date de relațiile $(*)$ şi $(**)$ în ecuația planului π, avem tocmai ecuația (4).

Reciproc. Analog ca în teorema 5.5.

Observații 5.3. (i) Dacă se consideră ecuațiile simbolice ale celor trei plane

$$(\pi_1)\ :\ \pi_1=0\quad,\quad(\pi_2)\ :\ \pi_2=0\quad,\quad(\pi_3)\ :\ \pi_3=0\quad,$$

atunci ecuația stelei de plane (4) se scrie sub forma

(4') $$\lambda^1\pi_1+\lambda^2\pi_2+\lambda^3\pi_3=0,\qquad\text{cu}\quad\left(\lambda^1\right)^2+\left(\lambda^2\right)^2+\left(\lambda^3\right)^2\neq 0.$$

(ii) Presupunând că $\lambda^1\neq 0$, ecuația stelei de plane se mai scrie

(4*) $$\pi_1+\alpha\ \pi_2+\beta\ \pi_3=0\qquad(\text{ unde } \alpha=\frac{\lambda^2}{\lambda^1},\ \ \beta=\frac{\lambda^3}{\lambda^1}).$$

5.3. Ecuaţia planului determinat de o dreaptă şi de un punct nesituat pe dreaptă. Distanţa de la un punct la o dreaptă

TEOREMA 5.7. *Ecuaţia planului determinat de o dreaptă*

$$(d)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{a}=\vec{O}_V$$

şi un punct $M_0(\vec{r}_0)$ *nesituat pe d este*

$$(\pi)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot[(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\times\vec{a}]=0\,.$$

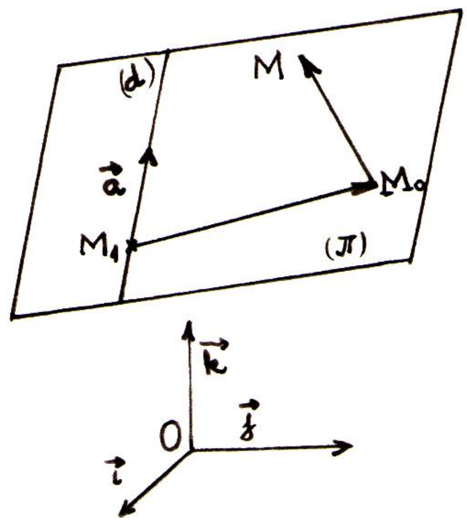


Figura. 5.1.

Demonstraţie. Dreapta d conţine punctul $M_1(\vec{r}_1)$ şi are vectorul director $\vec{a}$. Pentru a stabili ecuaţia planului π determinat de această dreaptă şi punctu $M_0(\vec{r}_0)\notin d$, ducem din punctul M_1 vectorul director $\vec{a}$ al dreptei d şi considerăm un punct curent $M(\vec{r})$ al planului π.

Vectorii $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_1M_0}$ şi $\vec{a}$ fiind coplanari, produsul lor mixt este nul

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\left(\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{a}\right)=0$$

Ecuaţia planului π determinat de dreapta d şi punctul M_0 este deci

$$(\pi)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot[(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\times\vec{a}]=0\,.$$

Dacă $\vec{a}=l\ \vec{i}+m\ \vec{j}+n\ \vec{k}$, atunci ecuaţia planului sub formă carteziană este

$$\begin{vmatrix} x-x^0 & y-y^0 & z-z^0 \\ x^0-x^1 & y^0-y^1 & z^0-z^1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 . \qquad \square$$

TEOREMA 5.8. *Distanța de la punctul* $M_0(\vec{r}_0)$ *la dreapta* (d) : $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{a}=\vec{O}_V$ *este dată de formula*

$$d(M_0,d)=\frac{\left\|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{a}\right\|}{\|\vec{a}\|}.$$

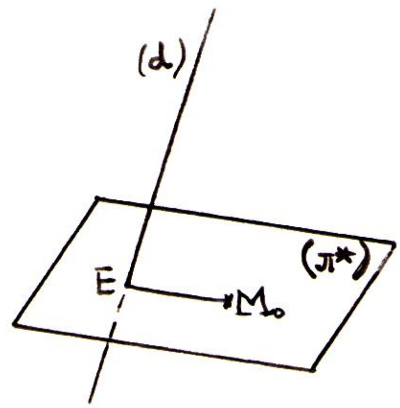


Figura 5.2.

Demonstrație. Pentru a găsi distanța de la punctul M_0 la dreapta d, ducem prin M_0 un plan π^* perpendicular pe d şi notăm cu E punctul unde dreapta d înțeapă planul π^*. Lungimea segmentului M_0E este distanța de la punctul M_0 la dreapta d şi se notează cu $d(M_0,d)$. Din formula care dă aria paralelogramului construit pe reprezentanții vectorilor $\vec{a}$ şi $\overrightarrow{M_1M_0}$ (fig. 5.1. şi fig. 5.2.), obținem

$$d(M_0,d)=\frac{\left\|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{a}\right\|}{\|\vec{a}\|}. \qquad \square$$

5.4.Probleme rezolvate

1. Să se stabilească poziția relativă a planelor $2x+y-z=5$, $-x+3y+2z=1$, $3x+5y=11$.

Rezolvare. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. Avem $|A|=0$ şi $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, deci rang $A=2$. Deoarece $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix}=0$, avem şi rang $\overline{A}=2$. Planele considerate fac parte din acelaşi fascicol de plane neparalele.

2. Să se scrie ecuațiile planelor duse prin intersecția a două plane şi sunt, respectiv, perpendiculare pe fiecare din ele.

Caz particular. Cele două plane au ecuațiile $3x+4y+z-1=0$, $x-y+2z+5=0$.

Rezolvare. Fie planele (π_S) : $A^S x+B^S y+C^S z+D^S=0$, $s=1, 2$. Ecuația fascicolului determinat de aceste plane este

$$\lambda^1\left(A^1x+B^1y+C^1z+D^1\right)+\lambda^2\left(A^2x+B^2y+C^2z+D^2\right)=0$$

sau

$$\left(\lambda^1A^1+\lambda^2A^2\right)x+\left(\lambda^1B^1+\lambda^2B^2\right)y+\left(\lambda^1C^1+\lambda^2C^2\right)z+\lambda^1D^1+\lambda^2D^2=0.$$

Planul fascicolului perpendicular pe planul π_1 este caracterizat de condiția ca normala sa să fie perpendiculară pe normala la planul π_1, adică să avem

$$A^1\left(\lambda^1 A^1+\lambda^2 A^2\right)+B^1\left(\lambda^1 B^1+\lambda^2 B^2\right)+C^1\left(\lambda^1 C^1+\lambda^2 C^2\right)=0$$

sau

$$\left(\left(A^1\right)^2+\left(B^1\right)^2+\left(C^1\right)^2\right)\lambda^1+\left(A^1A^2+B^1B^2+C^1C^2\right)\lambda^2=0.$$

Obținem $\lambda^2=-\dfrac{\left(A^1\right)^2+\left(B^1\right)^2+\left(C^1\right)^2}{A^1A^2+B^1B^2+C^1C^2}\lambda^1$, cu $A^1A^2+B^1B^2+C^1C^2\neq 0$, adică planele date să nu fie perpendiculare între ele. Înlocuind pe λ^2 astfel obținut în ecuația fascicolului determinat de π_1 și π_2, obținem ecuația planului căutat $\left(A^1A^2+B^1B^2+C^1C^2\right)$ $\left(A^1x+B^1y+C^1z+D^1\right)-\left(\left(A^1\right)^2+\left(B^1\right)^2+\left(C^1\right)^2\right)\left(A^2x+B^2y+C^2z+D^2\right)=0$.

În mod similar se obține pentru planul din fascicol, perpendicular pe planul π_2, ecuația $\left(\left(A^2\right)^2+\left(B^2\right)^2+\left(C^2\right)^2\right)\left(A^1x+B^1y+C^1z+D^1\right)-\left(A^1A^2+B^1B^2+C^1C^2\right)\left(A^2x+\right.$ $\left.+B^2y+C^2z+D^2\right)=0$.

Pentru cazul particular, avem $\vec{N}_1(3,\ 4,\ 1)$, $\vec{N}_2(1,\ -1,\ 2)$ și ecuația fascicolului $\lambda^1(3x+4y+z-1)+\lambda^2(x-y+2z+5)=0$ sau $\left(3\lambda^1+\lambda^2\right)x+\left(4\lambda^1-\lambda^2\right)y+\left(\lambda^1+\right.$ $\left.+2\lambda^2\right)z-\lambda^1+5\lambda^2=0$. Trebuie să avem îndeplinită condiția $3\left(3\lambda^1+\lambda^2\right)+4\left(4\lambda^1-\right.$ $\left.-\lambda^2\right)+\left(\lambda^1+2\lambda^2\right)=0$. Obținem $\lambda^2=-26\lambda^1$ și ecuația planului cerut este $23x-30y+$ $+51z+131=0$. În mod similar se obține al doilea plan căutat $17x+25y+4z-11=0$.

3. Să se stabilească ecuația planului determinat de dreapta (d) : $\dfrac{x-x^0}{l}=$ $=\dfrac{y-y^0}{m}=\dfrac{z-z^0}{n}$ și punctul $P_1\left(x^1,\ y^1,\ z^1\right)$, cu $P_1\notin d$.

Caz particular. Să se determine ecuația planului care trece prin punctul $P_1(-1,\ 1,\ 2)$ şi dreapta $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Rezolvare. Notăm cu $\vec{r}_0$ şi $\vec{r}_1$ vectorii de poziție ai punctelor date $P_0(x^0,\ y^0,\ z^0)\in d$ şi $P_1(x^1,\ y^1,\ z^1)$ din planul căutat, iar cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct curent $P(x,\ y,\ z)$ din acest plan. Exprimăm condiția că vectorii $\overrightarrow{P_0P},\ \overrightarrow{P_0P_1}$ şi $\vec{a}$ (vectorul director al dreptei d) sunt coplanari, adică avem produsul mixt $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot[(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\times\vec{a}]=0$

sau

$$\begin{vmatrix} x-x^0 & y-y^0 & z-z^0 \\ x^1-x^0 & y^1-y^0 & z^1-z^0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 .$$

Pentru cazul particular obținem $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ sau $x-y+z=0$.

4. Să se găsească distanța de la punctul $P(1,\ 2,\ -1)$ la dreapta $(d): x=y=z$.

Rezolvare. Considerăm prin P planul perpendicular pe d şi avem $(x-1)+(y-2)+$ $+(z+1)=0$. Căutăm intersecția dreptei d cu acest plan rezolvând sistemul $x=y=z$, $x+y+z-2=0$. Găsim punctul $P_1\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$. Calculăm distanța dintre punctele P şi P_1,

$$\left\|\overrightarrow{PP_1}\right\|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{2}{3}+1\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{42}=\sqrt{\frac{14}{3}} .$$

5. Să se determine proiecția ortogonală a punctului $P(-1,\ -1,\ 2)$ pe dreapta d a cărei reprezentare parametrică este $x = t + 2,\quad y = 2t - 1,\quad z = 3t + 1,\quad t \in \mathbf{R}.$

Rezolvare. Ecuațiile dreptei d se pot scrie sub forma $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Ecuația planului determinat de punctul P şi perpendicular pe această dreaptă este $(x+1)+ +2(y+1)+3(z-2)=0$. Rezolvăm sistemul $x = t + 2,\ \ y = 2t - 1,\ \ z = 3t + 1,\ \ x + 2y + +3z - 3 = 0$ şi obținem $t = 0$. Deci punctul căutat este $P_1(2,\ -1,\ 1)$.

5.5. Probleme propuse

1. Să se stabilească poziția relativă a planelor:

a) $x + y + 2z = 4,\ \ x + 2y - z - 2 = 0,\ \ 2x - y - z = 0$ şi $x + y + z - 3 = 0$;

b) $x + y + z - 6 = 0,\ \ 2x - y + z - 3 = 0,\ \ x + 2y - z - 2 = 0$.

2. Se dau planele : $(\pi_1)\ :\ 2x - y - z - 2 = 0$, $(\pi_2)\ :\ x + 2y + 2z + 1 = 0$, $(\pi_3)\ :\ x + 7y + 7z + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ şi punctul $A(1,\ -2,\ 5)$. Se cere :

a) expresia analitică a versorului direcției dreptei $d = \pi_1 \cap \pi_2$;

b) distanța de la punctul A la planul π_2;

c) simetricul punctului A față de planul π_2;

d) valoarea lui α astfel ca planele $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ să se taie după o dreaptă.

3. Se consideră familia de plane dată prin ecuația $\frac{x}{\lambda - a} + \frac{y}{\lambda - b} + \frac{z}{\lambda - c} - 1 = 0$, unde λ este un parametru real, iar a, b, c sunt constante diferite între ele.

i) Să se arate că prin oricare punct M al spațiului trec trei plane ale familiei. Să se calculeze coordonatele punctului M în funcție de λ^1, λ^2, λ^3, valorile lui λ corespunzătoare celor trei plane prin M;

ii) Unde se află punctul M, pentru ca două dintre aceste trei plane să fie confundate ?

iii) Unde se află punctul M, pentru ca cele trei plane să fie confundate ?

4. Să se determine ecuația planului paralel cu planul $x + y + 2z = 0$ şi care trece prin punctul de intersecție al planelor

$$2x + y - z - 2 = 0, \quad x - 3y + z + 1 = 0, \quad x + y + z - 3 = 0.$$

5. Să se scrie ecuația unui plan paralel cu planul $x + y + 2z = 0$ şi care trece prin punctul de intersecție al planelor

$$x + 2y - z - 2 = 0, \; 2x - y - z = 0, \; x + y + z - 3 = 0$$

fără a determina coordonatele punctului de intersecție al celor trei plane.

6. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$, astfel încât planele $x - y + z = 0$, $3x - y - z = 0$ şi $4x - y - 2z + \lambda = 0$ să se intersecteze după o dreaptă.

7. Să se afle ecuația planului din fascicolul $\alpha(3x - 4y + z + 6) + \beta(2x - 3y + z + 2) = 0$, echidistant față de punctele $P_1(3, -4, -6)$ şi $P_2(1, 2, 2)$.

8. Să se determine valorile parametrilor reali l şi m, astfel ca planul

$$5x + ly + 4z + m = 0$$

să aparțină fascicolului de plane de ecuație

$$\alpha\ (3x-7y+z-3)+\beta\ (x-9y-2z+3)=0,\quad \alpha,\ \beta\in\mathbf{R}.$$

9. Să se scrie ecuația planului dus prin $P_0(1,\ 2,\ -1)$ şi prin dreapta de ecuații

$$2x-z+1=0\,,\ 3y+2z-2=0\,.$$

10. Să se determine ecuaţia unui plan care trece prin punctul $P_1(\vec{r}_1=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k})$ şi prin dreapta de intersecție a planelor $(\pi_1)\ :\ \vec{r}(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=5$ şi $(\pi_2)\ :\ \vec{r}(\vec{i}+2\vec{k})=0$.

11. Să se scrie ecuația unui plan care trece prin dreapta de ecuații $2x+y+z=0$, $x+5y-z=2$ şi care

i) este paralel cu axa Ox;

ii) este perpendicular pe planul $x+y+2z-5=0$;

iii) trece prin punctul $P_1(2,\ 5,\ -3)$.

12. Să se calculeze distanța de la punctul $P_1(\vec{r}_1=2\vec{i}-\vec{j})$ la dreapta

$$\vec{r}\times(3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k})=10\vec{i}-15\vec{j}+25\vec{k}\ .$$

13. Să se determine vectorul de poziție al piciorului perpendicularei coborâte din originea triedrului $Oxyz$ pe dreapta $\vec{r}\times(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})=5\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.

14. Să se determine proiecția ortogonală a punctului $P_0(x^0,\ y^0,\ z^0)$ pe dreapta

$$(d)\ :\ \frac{x-x^1}{l}=\frac{y-y^1}{m}=\frac{z-z^1}{n}.$$

Caz particular. $P_0(5,\ 0,\ -2)$, $(d)\ :\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$.

15. Să se găsească proiecția ortogonală a punctului $M_0\left(x^0,\ y^0,\ z^0\right)$ pe dreapta Δ caracterizată de ecuațiile $A^1x+B^1y+C^1z+D^1=0,\quad A^2x+B^2y+C^2z+D^2=0$.

Caz particular. $M_0\left(x^0,\ y^0,\ z^0\right),\quad (\Delta)\ :\ x-2y+z-2=0,\ 2x-6y+z-1=0$

6. PROBLEME ASUPRA DREPTELOR

6.1. Intersecția unei drepte cu un plan

TEOREMA 6.1. *Fiind dată dreapta*

$$(d)\ :\quad \frac{x-x^0}{l}=\frac{y-y^0}{m}=\frac{z-z^0}{n}$$

şi planul

$$(\pi)\ :\quad Ax+By+Cz+D=0\,,$$

coordonatele punctului de intersecție dintre dintre dreaptă şi plan sunt date de soluția sistemului format de ecuațiile dreptei d şi ecuația planului π *.*

Demonstrație. Din ecuațiile dreptei d avem punctul $P_0\left(x^0,\ y^0,\ z^0\right)\in d$ şi vectorul director $\vec{a}\left(l,\ m,\ n\right)$, iar din ecuația planului avem vectorul normal $\vec{N}\left(A,\ B,\ C\right)$.

A intersecta dreapta d cu planul π înseamnă a rezolva sistemul format din e-cuațiile dreptei şi ecuația planului. Pentru aceasta, egalăm rapoartele din ecuațiile lui d cu λ

$$\frac{x-x^0}{l}=\frac{y-y^0}{m}=\frac{z-z^0}{n}=\lambda\,,$$

de unde, $x=x^0+\lambda\ l,\quad y=y^0+\lambda\ m,\quad z=z^0+\lambda\ n$ şi obținem sistemul

(1)
$$\begin{cases} x = x^0 + \lambda\, l \\ y = y^0 + \lambda\, m \\ z = z^0 + \lambda\, n \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

Substituim primele trei ecuații în ultima

$$Ax^0 + \lambda\, lA + By^0 + \lambda\, mB + Cz^0 + \lambda\, nC + D = 0$$

şi obținem

$$\lambda = -\frac{Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D}{lA + mB + nC}, \text{ cu } lA + mB + nC \neq 0.$$

Înlocuind valoarea lui λ astfel determinată în ecuațiile parametrice ale dreptei d (pri-mele trei ecuații din (1)), găsim coordonatele punctului de intersecție al dreptei d cu planul π :

(2)
$$\begin{cases} x = x^0 - \dfrac{Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D}{lA + mB + nC} \cdot l \\ y = y^0 - \dfrac{Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D}{lA + mB + nC} \cdot m, \\ z = z^0 - \dfrac{Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D}{lA + mB + nC} \cdot n \end{cases} \quad \text{cu} \quad lA + mB + nC \neq 0. \quad \square$$

Observația 6.1. Din discuția soluțiilor (2) reies **pozițiile relative ale dreptei d față de planul π :**

$\overline{\underline{I}}$ dacă

$$lA + mB + nC \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{N} \neq 0,$$

sistemul (1) este compatibil determinat şi **dreapta intersectează planul într-un punct ;**

$\overline{\underline{II}}$ dacă

$$\begin{cases} lA + mB + nC = 0 \\ Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \\ P_0 \notin \pi \end{cases},$$

sistemul (1) este incompatibil, deci dreapta nu are puncte comune cu planul la dis-tanță finită şi **dreapta este paralelă cu planul ;**

$\overline{\underline{III}}$ dacă

$$\begin{cases} lA + mB + nC = 0 \\ Ax^0 + By^0 + Cz^0 + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \\ P_0 \in \pi \end{cases},$$

sistemul (1) este compatibil nedeterminat şi admite o infinitate de soluții, deci toate punctele dreptei d sunt situate în planul π , adică **dreapta este conținută în plan.**

6.2. Unghiul unei drepte cu un plan

DEFINIȚIA 6.1. *Se numeşte* ***unghi al unei drepte cu un plan*** *cel mai mic dintre unghiurile formate de dreaptă cu proiecția ei pe plan.*

TEOREMA 6.2. *Unghiul dreptei d cu planul* π *, date prin ecuațiile*

$$(d) \ : \ \frac{x - x^0}{l} = \frac{y - y^0}{m} = \frac{z - z^0}{n} \quad , \quad (\pi) \ : \ Ax + By + Cz + D = 0 \quad ,$$

este dat de relația

$$\sin(d,\ \pi) = \frac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Demonstrație. Considerând unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi$ dintre vectorul $\vec{N}(A,\ B,\ C)$ normal

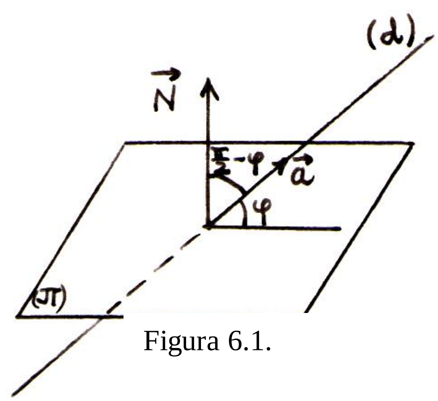


Figura 6.1.

la planul π (fig. 6.1) şi vectorul director $\vec{a}(l,\ m,\ n)$ al dreptei d, avem

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\vec{N}\cdot\vec{a}}{\|\vec{N}\|\cdot\|\vec{a}\|}$$, de unde rezultă relația cerută pentru $\varphi=(d,\ \pi)$. □

6.3. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

TEOREMA 6.3. *Fie dreptele d_1 şi d_2 date prin ecuațiile*

$$(d_1)\ :\ \frac{x-x^1}{l^1}=\frac{y-y^1}{m^1}=\frac{z-z^1}{n^1}\quad,\quad (d_2)\ :\ \frac{x-x^2}{l^2}=\frac{y-y^2}{m^2}=\frac{z-z^2}{n^2}.$$

Dacă facem notația

$$\Delta=\begin{vmatrix} x^2-x^1 & y^2-y^1 & z^2-z^1 \\ l^1 & m^1 & n^1 \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix},$$

atunci ***pozițiile relative a două drepte în spațiu sunt :***

$\underline{\overline{I}}$ **.** *Dacă $\Delta\neq 0$, dreptele d_1 şi d_2 nu sunt situate în acelaşi plan.*

$\underline{\overline{II}}$. *Dacă $\Delta=0$ şi vectorii directori $\vec{a}_1(l^1,\ m^1,\ n^1)$ şi $\vec{a}_2(l^2,\ m^2,\ n^2)$ nu sunt coliniari, atunci dreptele sunt concurente.*

$\underline{\overline{III}}$. *Dacă $\Delta=0$, vectorii directori $\vec{a}_1(l^1,\ m^1,\ n^1)$ şi $\vec{a}_2(l^2,\ m^2,\ n^2)$ sunt coliniari, însă vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}(x^2-x^1,\ y^2-y^1,\ z^2-z^1)$ nu este coliniar cu vectorii directori $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$, atunci dreptele sunt paralele.*

$\underline{\overline{IV}}$ *Dacă* $\Delta = 0$ *şi vectorii* $\vec{a}_1(l^1, m^1, n^1)$, $\vec{a}_2(l^2, m^2, n^2)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x^2 - x^1, y^2 - y^1, z^2 - z^1)$ *sunt coliniari , atunci dreptele coincid.*

Demonstrație. $\underline{\overline{I}}$ **.** Din ecuațiile dreptelor d_1 şi d_2 avem punctele $M_1(x^1,\ y^1,\ z^1) \in d_1$, $M_2(x^2,\ y^2,\ z^2) \in d_2$, vectorul $\overrightarrow{M_1M_2} = (x^2 - x^1)\ \vec{i} + (y^2 - y^1)\vec{j} + (z^2 - z^1)\ \vec{k}$ şi vectorii directori $\vec{a}_1(l^1,\ m^1,\ n^1)$ pentru dreapta d_1 şi $\vec{a}_2(l^2,\ m^2,\ n^2)$ pentru dreapta d_2. Cum $\Delta \neq 0$, vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ nu sunt coplanari, deci dreptele nu sunt situate în acelaşi plan (fig. 6.2).

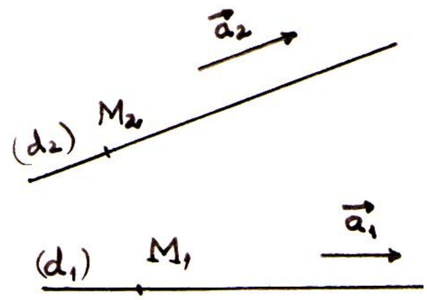


Figura 6.2.

$\underline{\overline{II}}$. $\Delta = 0 \ \Rightarrow$ vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ sunt coplanari, deci dreptele sunt situate în acelaşi plan şi, cum $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ nu sunt coliniari, rezultă că d_1 şi d_2 sunt concurente (fig.6.3).

$\underline{\overline{III}}$. $\Delta = 0$, vectorii $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ coliniari şi $\overrightarrow{M_1M_2}$, cu originea în punctul M_1 al dreptei d_1 şi extremitatea în punctul M_2 al dreptei d_2, nu este coliniar cu vectorii $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$, atunci $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ sunt coplanari, iar dreptele sunt situate în acelaşi plan şi sunt paralele (fig. 6.4.).

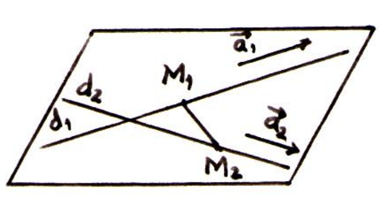


Figura 6.3.

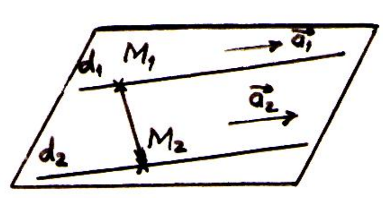


Figura 6.4.

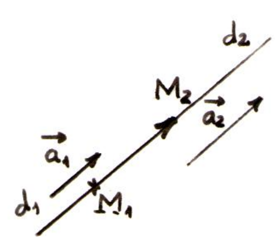


Figura 6.5.

$\overline{\underline{IV}}$. $\Delta = 0$, vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ coliniari, atunci dreptele coincid (fig. 6.5). □

Observația 6.2. Condițiile de concurență a două drepte din spațiu date prin e-cuațiile

$$(d_1) \ : \ \begin{cases} A^1 x + B^1 y + C^1 z + D^1 = 0 \\ A'^1 x + B'^1 y + C'^1 z + D'^1 = 0 \end{cases} \text{ şi } (d_2) \ : \ \begin{cases} A^2 x + B^2 y + C^2 z + D^2 = 0 \\ A'^2 x + B'^2 y + C'^2 z + D'^2 = 0 \end{cases}$$

sunt $\begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A'^1 & B'^1 & C'^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} \neq 0$ şi $\begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 & D^1 \\ A'^1 & B'^1 & C'^1 & D'^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \\ A'^2 & B'^2 & C'^2 & D'^2 \end{vmatrix} = 0$.

Aceste condiții sunt aceleaşi cu condițiile de concurență a patru plane, determinate la teorema 5.4.

6.4. Perpendiculara comună a două drepte în spațiu

DEFINIȚIA 6.2. *Se numeşte* ***perpendiculară comună a două drepte date*** *orice dreaptă care este perpendiculară simultan pe ambele drepte.*

Observația 6.3. Din definiție rezultă că există o infinitate de drepte perpendiculare pe două drepte date, toate paralele între ele. Printre acestea, există una singură care se sprijină pe ambele drepte date. În cele ce urmează, vom considera ca perpendiculară comună, perpendiculara care se sprijină pe ambele drepte.

Construcția perpendicularei comune a două drepte d_1 şi d_2. Dintr-un punct oarecare Q al dreptei d_2, ducem dreapta $d'_1 \| d_1$ şi considerăm planul π determinat de d_2 şi d'_1 (fig. 6.6). Ducem planul $\pi^* \perp \pi$ şi care conține dreapta d_2. Planul π^* se intersectează cu dreapta d_1 în M.

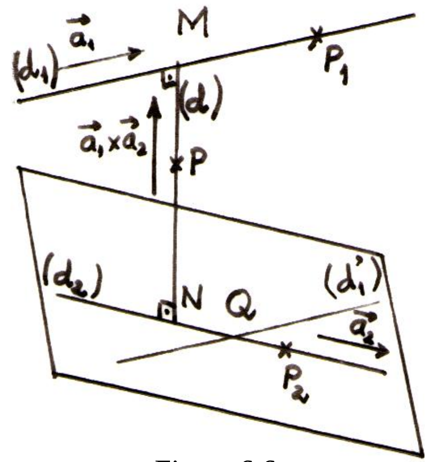


Figura 6.6.

Perpendiculara MN (din M pe d_2) este dreapta căutată. Într-adevăr, pentru că $\pi \perp \pi^*$, $MN \subset \pi^*$, $MN \perp d_2$, rezultă $MN \perp \pi$, deci $MN \perp d'_1$, deci $MN \perp d_1$. Din construcție $MN \perp d_2$.

TEOREMA 6.4. *Ecuațiile perpendicularei comune a două drepte date d_1 şi d_2, definite prin ecuațiile*

$$(d_1)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{a}_1 = \vec{O}_V \quad \text{şi} \quad (d_2)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_2)\times\vec{a}_2 = \vec{O}_V,$$

sunt date de ecuațiile

$$\begin{cases}(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot[\vec{a}_1\times(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)]=0\\(\vec{r}-\vec{r}_2)\cdot[\vec{a}_2\times(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)]=0\end{cases}.$$

Demonstrație. Notăm cu d dreapta care intersectează ambele drepte d_1 şi d_2 sub un unghi drept (fig. 6.6). Această dreaptă d, fiind perpendiculară pe ambele drepte d_1 şi d_2, are ca vector director $\vec{a}$, egal cu vectorul produs vectorial $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ al vecto-rilor directori ai dreptelor date. Dreapta d este definită ca dreapta de intersecție a pla-nului π_1, determinat de punctul P_1 şi dreptele d_1 şi d, cu planul π_2, determinat de punctul P_2 şi dreptele d_2 şi d. Pentru planul π_1, din condiția de coplanaritate a vec-torilor $\overrightarrow{P_1P}$, $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}$, avem ecuația

$$(\pi_1)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot[\vec{a}_1\times(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)]=0.$$

În mod analog se obține ecuația planului π_2 (din coplanaritatea vectorilor $\overrightarrow{P_2P}$, $\vec{a}_2$ şi $\vec{a}$)

$$(\pi_2)\ :\ (\vec{r}-\vec{r}_2)\cdot[\vec{a}_2\times(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)]=0.$$

Perpendiculara comună d pe dreptele date are ecuațiile

$$(d)\ :\ \begin{cases}\pi_1=0\\ \pi_2=0\end{cases}. \qquad \square$$

6.5. Distanța dintre două drepte în spațiu

DEFINIȚIA 6.3. Distanța dintre două drepte *este lungimea perpendicularei comune, cuprinsă între cele două drepte date.*

TEOREMA 6.5. *Fiind date două drepte de ecuații*

$$(d_1)\ :\ \frac{x-x^1}{l^1}=\frac{y-y^1}{m^1}=\frac{z-z^1}{n^1} \quad \text{şi} \quad (d_2)\ :\ \frac{x-x^2}{l^2}=\frac{y-y^2}{m^2}=\frac{z-z^2}{n^2},$$

care nu se intersectează ($\Delta\neq 0$ *în teorema 6.3), atunci distanța dintre ele este*

$$d(d_1,d_2)=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\right|}{\|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\|},$$

unde $\vec{a}_1(l^1,m^1,n^1)$ *şi* $\vec{a}_2(l^2,m^2,n^2)$ *sunt vectorii directori ai dreptelor.*

Demonstrație. Distanța căutată este chiar lungimea segmentului MN din fig. 6.6. şi reprezintă înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{P_2P_1}$, $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ considerați cu originea comună în $\vec{P}_2$, având ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ cu originea în P_2. Rezultă

$$d(d_1, d_2) = MN = \frac{\left|\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\right|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\right|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad . \quad \square$$

Observații 6.4. (1) Distanța dintre cele două drepte este egală cu distanța de la punctul $P_1(x^1, \ y^1, \ z^1)$ al dreptei d_1 la planul π, care conține dreapta d_2 şi este paralel cu dreapta d_1 (fig. 6.6).

(2) Distanța dintre două drepte paralele d_1, d_2 de vector director $\vec{a}$ (fig. 6.7) este

$$d(d_1, \ d_2) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a}\right\|}{\|\vec{a}\|} = d \ ,$$

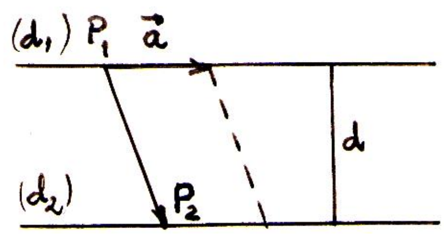


Figura 6.7.

care reprezintă înălțimea paraleleogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{P_1P_2}$ şi $\vec{a}$ considerați cu originea comună în punctul P_1 (unde $P_1 \in d_1$ şi $P_2 \in d_2$).

6.6. Probleme rezolvate

1. Se consideră dreapta care trece prin punctul A(1, 1, 1) şi este paralelă cu dreapta care trece prin punctele B(1, 2, 3) şi C(-1, 0, 3). Să se dea o reprezentare analitică a acestei drepte şi să se arate că este paralelă cu planul xOy.

Rezolvare. Fie d dreapta care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta BC de e-cuație $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{0}$. Vectorii directori $\vec{a}$ şi $\vec{a}_{BC}$ ai acestor drepte sunt în relația $\vec{a}=\lambda\,\vec{a}_{BC}$, $\lambda\neq 0$. Rezultă că dreapta d este dată de ecuațiile $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{0}$ sau $x=y,\ \ z=1$. Dreapta d fiind situată în planul $z=1$, rezultă că este paralelă cu planul xOy.

Observație. Paralelismul dreptei d cu planul xOy rezultă şi din $n_{BC}=0$, unde $n_{BC}=pr_{Oz}\vec{a}_{BC}$ (cu $\vec{a}_{BC}=l_{BC}\vec{i}+m_{BC}\vec{j}+n_{BC}\vec{k}$).

2. Să se scrie ecuația vectorială a dreptei care trece prin punctele $M_1(1,\ 2,\ 3)$ şi $M_2(-2,\ 1,\ 4)$. Care este unghiul format de dreaptă cu planul xOy?

Rezolvare. Folosind relația $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\ \overrightarrow{M_1M_2}$, cu $\lambda\in$ **R,** avem $\vec{r}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}+$ $+\lambda\left(-3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)$. Deoarece vectorul normal la planul xOy este $\vec{k}(0,\ 0,\ 1)$ şi vectorul director al dreptei M_1M_2 este $\vec{a}=-3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, ținând seama de teorema 6.2 , avem

$$\sin\left(M_1M_2,\ xOy\right)=\cos\left(M_1M_2,\ Oz\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{k}\|}=\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Rezultă $\mu\ \left(M_1M_2,\ xOy\right)\cong 17^0$.

3. Să se determine pozițiile relative ale dreptelor date prin

i) $$\begin{aligned}&(d_1)\ :\ \vec{r}\times\left(2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right)=-4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k},\\&(d_2)\ :\ \vec{r}\times\left(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k};\end{aligned}$$

ii) $(d_1)\ :\ \vec{r}\times\left(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k},$
$(d_2)\ :\ \vec{r}\times\left(2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right)=-4\vec{i}+2\vec{k};$

iii) $(d_1)\ :\ \vec{r}\times\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},$
$(d_2)\ :\ \vec{r}\times\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)=-\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k};$

iv) $(d_1)\ :\ \vec{r}\times\left(-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\right)=\vec{i}+\vec{k},$
$(d_2)\ :\ \vec{r}\times\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$

Rezolvare. Folosind ecuațiile vectoriale de forma $\vec{r}\times\vec{a}=\vec{b}$ pentru dreptele d_1 şi d_2, avem pe rând :

i) $\vec{a}_1=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{a}_2=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, iar $\vec{b}_1=-4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}_2=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$. Rezultă $\vec{a}_1=2\vec{a}_2$ şi $\vec{b}_1=2\vec{b}_2$, adică $d_1=d_2$.

ii) $\vec{a}_2=2\vec{a}_1$ şi $\vec{b}_2\neq 2\vec{b}_1$, adică $d_1 \| d_2$.

iii) Obținem $\vec{a}_1\times\vec{a}_2\neq\vec{O}_V$ şi $\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2+\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1=0$, adică $d_1\cap d_2=\{P_0(\vec{r}_0)\}$, cu

$$\vec{r}_0=\frac{\vec{b}_1\times\vec{b}_2}{\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1}=\frac{2}{3}\left(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right).$$

iv) $\vec{a}_1\times\vec{a}_2\neq\vec{O}_V$ şi $\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2+\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1=-2\neq 0$, deci $d_1\cap d_2=\varnothing$ şi d_1 neparalelă cu d_2.

4. Să se afle distanța dintre dreptele

$$(d_1)\ :\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3} \quad \text{şi} \quad (d_2)\ :\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}.$$

Rezolvare. Se observă că vectorii directori ai celor două drepte sunt $\vec{a}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = \vec{a}_2$, deci $d_1 \| d_2$. Tot din ecuațiile dreptelor avem $P_1 \in d_1$, cu $P_1(1,\ 0,\ -1)$, şi $P_2 \in d_2$, cu $P_2(-1,\ 1,\ 2)$. Distanța cerută este (conform cu (5))

$$d(d_1, d_2) = \frac{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}_1\|}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{\|-12\vec{i} + 4\vec{k}\|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{7}\sqrt{35}\,.$$

5. Să se afle distanța dintre dreptele

$$(d_1)\ :\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{şi} \quad (d_2)\ :\ \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}\,.$$

Rezolvare. Din ecuațiile date obținem vectorii directori $\vec{a}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ şi , respectiv, $\vec{a}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, precum şi punctele $P_1(1,\ -1,\ 0) \in d_1$ şi $P_2(-1,\ 0,\ 1) \in d_2$. Considerăm planul π determinat de punctul P_1 şi vectorii $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$, care are ecuația

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Calculăm distanța de la punctul P_2 la planul π şi avem $d(P_2,\ \pi) = d(d_1,\ d_2) = \sqrt{\dfrac{28}{5}}$.

6.7. Probleme propuse

1. Care sunt valorile lui A şi D pentru care dreapta $x = 3 + 4t,\ \ y = 1 - 4t,\ \ z = -3 + t$, cu $t \in \mathbf{R}$, aparține planului $Ax + 2y - 4z + D = 0$.

2. a) Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $M(2,\ 3,\ 5)$, este perpendicula-ră pe axa Oy şi intersectează una din axele reperului $Oxyz$.

b) Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei de la punctul a) pe planul $x + y - z + 5 = 0$.

3. Să se arate că dreapta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$ este situată în planul $2x + 2y - z + 3 = 0$.

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin dreapta $x + y + z = 0,\ \ 2x - y + 3z = 0$ şi este paralel cu dreapta $x = 2y = 3z$.

5. Să se calculeze unghiul dintre :

a) dreptele $\vec{r} \times \left(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right) = -21\vec{i} + 16\vec{j} + 11\vec{k}$ şi $\vec{r} \times \left(-7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) = \vec{i} - 16\vec{j} + 13\vec{k}$;

b) dreapta de ecuații $x + y + z + 3 = 0,\ \ 2x - y + z + 5 = 0$ şi planul $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 0$.

6. Să se determine proiecția dreptei $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z-1}{4}$ pe planul $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) + 8 = 0$.

7. Să se afle proiecția dreptei $x = 1 + 2y,\ \ z = 3y - 1$ pe planul $x + y + z = 0$.

8. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $P_1\left(x^1,\ \ y^1,\ \ z^1\right)$ şi este perpendi-culară pe una din axele reperului $Oxyz$.

9. Să se scrie ecuațiile dreptei care trece prin punctul $P_1\left(x^1,\ \ y^1,\ \ z^1\right)$ şi este paralelă cu axa Ox (respectiv cu $Oy,\ \ Oz$).

10. Să se stabilească condiția ca dreptele

$$(d_1)\ :\ \begin{cases} A^1x + B^1y + C^1z + D^1 = 0 \\ A^2x + B^2y + C^2z + D^2 = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (d_2)\ :\ \begin{cases} A^3x + B^3y + C^3z + D^3 = 0 \\ A^4x + B^4y + C^4z + D^4 = 0 \end{cases}$$

să fie secante.

11. Să se determine parametrul real λ astfel încât dreptele

$$(d_1)\ :\ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1} \quad , \quad (d_2)\ :\ \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{\lambda}$$

să fie coplanare. Să se afle coordonatele punctului lor de intersecție.

12. Să se calculeze distanța dintre dreptele

$$(d_1)\ :\ \vec{r} \times \left(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right) = -29\vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k},$$
$$(d_2)\ :\ \vec{r} \times \left(5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

13. Să se găsească simetricul punctului $P(2,\ 3,\ 5)$:

a) față de planul $x + 2y + 3z + 4 = 0$;

b) față de dreapta $\left(\vec{r} - 4\vec{i} + 3\vec{j}\right) \times \left(5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right) = \vec{O}_V$.

14. Să se determine proiecția punctului $M(2,\ 0,\ -1)$ pe

a) dreapta de ecuații $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$;

b) planul de ecuație $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) = 0$.

15. Să se afle ecuațiile dreptei care trece prin punctul $P_0(1,\ 0,\ 1)$ şi se sprijină pe drep-tele

$$(d_1)\ :\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2} \quad , \quad (d_2)\ :\ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

7. SFERA

Fie $\mathbf{E}_3$ spațiul punctual tridimensional, (Ox, Oy, Oz) un sistem de axe ortogona-le având ca versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, baza ortonormată $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ fiind considerată dreaptă.

7.1. Definiție. Ecuații. Reprezentări

DEFINIȚIA 7.1. *Fie punctul* $C(\vec{r}_0) \in \mathbf{E}_3$ *şi un număr real* $R \in [0, \infty)$. *Se numeş-te* ***sferă*** *de centru C şi rază R, suprafața determinată de mulțimea tuturor punctelor din spațiu care se află la distanța R față de punctul C, adică*

$$S(C,R) = \{\ P \in E_3 \ \mid \ d(C,P) = R\}.$$

TEOREMA 7.1. *Ecuația unei sfere S(C,R) care are centrul* $C(x^0, y^0, z^0)$ *şi raza R este*

$$(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2 + (z - z^0)^2 = R^2. \tag{1}$$

Demonstrație. Egalitatea $d(C,P)=R$ care caracterizează mulțimea $S(C,R)$ este echivalentă cu

$$d^2(C,P) = R^2, \tag{2}$$

deoarece distanța este pozitivă. Cu $C(x^0, y^0, z^0)$ şi $P(x, y, z)$ aceasta se traduce prin ecuația (1). □

Denumire. Ecuația (1) se numeşte **ecuația scalară în coordonate carteziene** a sferei (sau ecuația carteziană implicită).

Observația 7.1. Dacă notăm $\vec{r} = \vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$, $\quad \vec{r}_C = \vec{r}(C) = \overrightarrow{OC}$, egalitatea (2) se mai scrie $\|\vec{r}-\vec{r}_C\|^2=R^2$. Cu convenția de notație $\vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{x}^2$, această ecuație este e-chivalentă cu

(3) $$(\vec{r}-\vec{r}_C)^2=R^2$$

care se numeşte **forma vectorială a ecuației sferei S(C,R).**

TEOREMA 7.2. *Orice ecuație de forma*

(4) $$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+\delta=0,$$

în care $\delta\le a^2+b^2+c^2$, *este ecuația unei sfere cu centrul în C(a, b, c) şi raza* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-\delta}$.

Demonstrație. Ecuația (4) se poate aduce la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-\delta\ .$$

În cazul când $a^2+b^2+c^2-\delta\ge 0$, această ecuație este echivalentă cu egalitatea

$$d^2(C,P)=a^2+b^2+c^2-\delta\quad,$$

care caracterizează mulțimea S(C,R) cu $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-\delta}$. □

Denumire. Ecuația (4) se numeşte **ecuația carteziană generală a sferei.**

Observația 7.2. Dacă $\delta=a^2+b^2+c^2$, atunci R=0 şi sfera se reduce la mulțimea $\{C\}$ formată cu un singur punct, centrul sferei.

Observația 7.3. Orice ecuație de forma

(5) $A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+E=0,$

cu $A\neq 0$, prin împărțire cu A ia forma (4). Dacă inegalitatea din enunțul teoremei este verificată, (5) este de asemenea ecuația unei sfere.

TEOREMA 7.3. *Fie S(C,R), o sferă de centru C(a, b, c) şi rază R.*

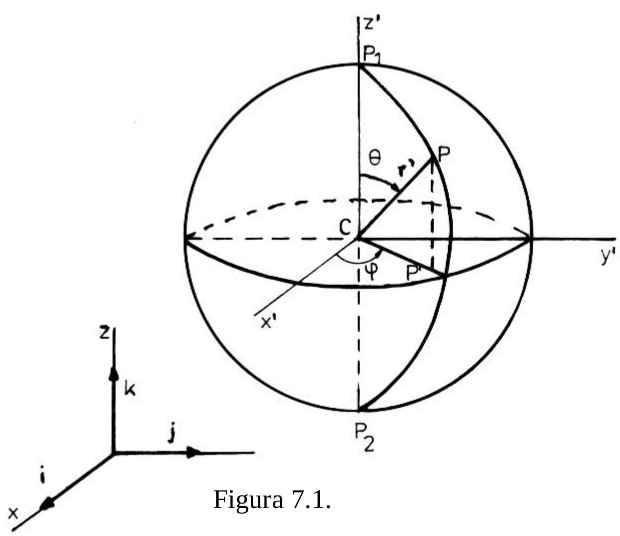


Figura 7.1.

Considerăm un sistem de axe (Cx', Cy',Cz') având aceleaşi orientări ca Ox, Oy, Oz (fig.7.1.). Dacă notăm cu (r', θ, φ) coordonatele polare ale unui punct $P \in$ ***E_3,*** *față de sistemul de axe (Cx', Cy', Cz') , atunci coordonatele carteziene ale punctului P al sferei, față de sistemul de axe (Ox, Oy, Oz), sunt*

(6) $$\begin{cases} x = a + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + R\sin\theta\sin\varphi \\ y = c + R\cos\theta \end{cases}, \qquad \theta\in[0,\pi] \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Demonstrație. Observăm că r'=R. De asemenea, coordonatele carteziene ale unui punct $P \in S(C,R)$ față de sistemul de axe (*Cx', Cy',Cz'*) sunt

(7) $$\begin{cases} x' = R\sin\theta\cos\varphi \\ y' = R\sin\theta\sin\varphi \\ z' = R\cos\theta \end{cases}, \qquad \theta\in[0,\pi] \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Axele *Cx', Cy', Cz'* şi *Ox, Oy, Oz* au aceiaşi versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, deci

$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{CP} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Deoarece

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad ,$$

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad ,$$

egalitatea $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}\,'$ este echivalentă cu sistemul

$$x = a + x', \qquad y = b + y', \qquad z = c + z'.$$

Înlocuind x', y', z' cu expresiile lor din (7), obținem (6). □

Observația 7.4. Fie domeniul $\Delta = [0, \ \pi] \times [0, \ 2\pi)$. Aplicația $f : \Delta \to S(C,R)$ definită prin $f(\theta, \varphi) = P(x, y, z)$, cu *x, y, z* dați de (6) , este surjectivă dar nu este injectivă. Punctele P_1 şi P_2 de pe sferă situate pe axa *Cz'* corespund lui $\theta = 0$, respectiv

$\theta = \pi$ dar au unghiul φ nedeterminat, $f(0, \varphi) = P_1$, $f(\pi, \varphi) = P_2$, $\forall\ \varphi \in [0,2\pi)$. Eliminând aceste două puncte, restricția f_1 a aplicației f la $\Delta' = [0,\ \pi] \times [0,\ 2\pi)$ este bijectivă şi $f_1(\Delta') = S(C,R) \setminus \{P_1, P_2\}$.

Denumiri. Aplicația f se numeşte **reprezentarea parametrică a sferei S(C,R),** iar ecuațiile (6), cu $(\theta,\varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, se numesc **ecuațiile parametrice ale sferei S(C,R).**

7.2. Poziția unei drepte față de o sferă

Fie sfera S(C,R) : $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = R^2$ şi dreapta (d) : $(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{a} = \vec{O}_V$.

TEOREMA 7.4. *Dreapta d intersectează sfera S în puncte ale căror coordona-te sunt date de soluțiile sistemului*

(8) $$\begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = R^2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\ \vec{a} \end{cases},\ cu\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație. Pentru ca un punct oarecare *P(x, y, z)* din $\mathbf{E_3}$ să fie un punct de intersecție al dreptei d cu sfera S, trebuie să avem

$$\left[\lambda\ \vec{a} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\right]^2 - R^2 = 0$$

sau

(9) $$\vec{a}^2 \lambda^2 + 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\ \vec{a}\lambda + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)^2 - R^2 = 0 .$$

Natura rădăcinilor ecuației (9) este dată de semnul discriminantului Δ care are expresia

$$\Delta = \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\ \vec{a}\right]^2 - \vec{a}^2\left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)^2 - R^2\right].$$

Ținând cont de identitatea lui Lagrange şi de expresia distanței de la centrul C, al sfe-rei S, la dreapta d

$$d(C,d)=\frac{\left\|(\vec r_0-\vec r_1)\times\vec a\right\|}{\|\vec a\|},$$

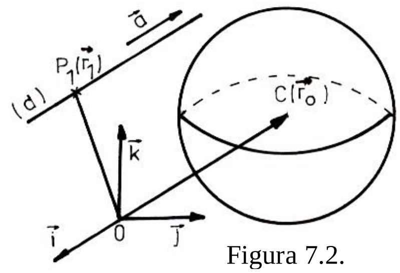


Figura 7.2.

obținem

$$\Delta=\vec a^{\,2}\left[R^2-d^2(C,d)\right].$$

Avem următoarele situații :

a) Dacă Δ > 0, adică d(C, d) < R, atunci ecuația (9) admite două rădăcini reale şi dis-tincte λ^1, λ^2 şi aceasta înseamnă că dreapta d intersectează sfera în două puncte diferite $M'(\vec r\,')$ şi $M''(\vec r\,'')$ cu $\vec r\,'=\vec r_1+\lambda^1\vec a$, $\vec r\,''=\vec r_1+\lambda^2\vec a$.

b) Dacă Δ = 0 ⇔ d(C,d) = R, atunci ecuația (9) admite două rădăcini confundate, ceea ce înseamnă că dreapta d are un singur punct comun cu sfera S, dreapta este în acest caz tangentă sferei în punctul T cu $\vec r(T)=\vec r_1+\lambda^0\vec a$, unde λ^0 este rădăcina dublă a ecuației (9).

c) Dacă Δ < 0 ⇔ d(C,d) > R, ecuația (9) are rădăcini complexe, ceea ce înseamnă că d nu are puncte reale comune cu sfera . Dreapta d este exterioară sferei. În acest caz spu-nem că dreapta d ″intersectează″ sfera în două puncte imaginare. □

7.3. Poziția unui plan față de o sferă

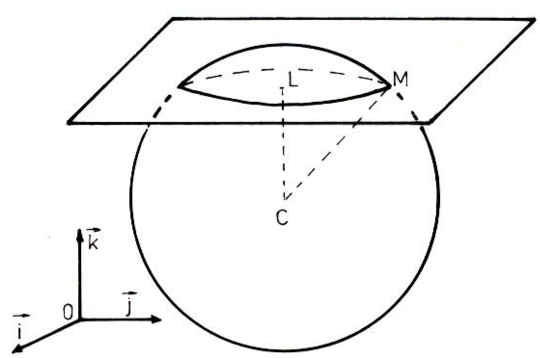


Figura 7.3.

TEOREMA 7.5. *Intersecția unei sfere cu un plan este un cerc ale cărui ecuații sunt*

$$(10)\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+\delta=0\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}.$$

Demonstrație. Orice punct comun *M(x, y, z)* (fig.7.3.), dintre sfera S de centru C(a, b, c) şi planul π de vector normal $\vec{N}(A, B, C)$, trebuie să verifice simultan atât ecuația sferei cât şi a planului, adică să satisfacă sistemul (10). Având în vedere că distanța ML, de la un punct M al intersecției până la L, piciorul perpendicularei dusă din centrul C al sferei pe plan, este dată de

$$ML^2 = MC^2 - CL^2$$

sau

$$ML^2 = R^2 - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} ,$$

unde $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \delta}$ este raza sferei date, rezultă că intersecția este un cerc, de ecuații (10) , a cărui rază este

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(C, \pi)}. \qquad \square$$

Observații 7.5. i) Dacă $|Aa + Bb + Cc + D| < R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, atunci raza *r* este reală ; intersecția dintre sferă şi plan este un cerc real.

ii) Dacă $|Aa + Bb + Cc + D| = R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, atunci r = 0 şi intersecția se reduce la un punct. Se spune că planul dat este tangent sferei.

iii) Dacă $|Aa + Bb + Cc + D| > R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, numărul r este complex iar curba de intersecție dintre sferă şi plan este imaginară.

7.4. Probleme de tangență

TEOREMA 7.6. (Plan tangent la o sferă într-un punct dat). *Ecuația planului tangent la sfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0 ,$$

într-un punct $M_0(x^0, y^0, z^0)$ de pe sferă, este

(11) $$xx^0 + yy^0 + zz^0 - a(x + x^0) - b(y + y^0) - c(z + z^0) + \delta = 0.$$

Demonstrație. Fie $\vec{r}_0$ vectorul de poziție al punctului $M_0(x^0, y^0, z^0)$, $\vec{r}_C$ vectorul de poziție al centrului C(a, b, c) al sferei şi $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct curent din planul π_{TM_0} tangent sferei. Dacă ținem seama de proprietatea, cunoscută din geometria euclidiană, că planul tangent la sferă într-un punct dat este perpendicular pe raza sferei dusă în punctul de contact, atunci ecuația lui vectorială este

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_C) = 0$$

sau în coordonate carteziene

$$(x - x^0) \cdot (x^0 - a) + (y - y^0) \cdot (y^0 - b) + (z - z^0) \cdot (z^0 - c) = 0.$$

Adunând la ambii membri ai acestei egalități relația

$$x^{0^2} + y^{0^2} + z^{0^2} - 2ax^0 - 2by^0 - 2cz^0 + \delta = 0,$$

care exprimă faptul că $M_0(x^0, y^0, z^0)$ se află pe sferă, obținem

$$xx^0 + yy^0 + zz^0 - a(x + x^0) - b(y + y^0) - c(z + z^0) + \delta = 0,$$

care este ecuația planului tangent dedusă prin dedublarea ecuației sferei în punctul M_0 (adică făcându-se transformările $\vec{r}^{\,2} \to \vec{r}_0\vec{r}$, $\vec{r} \to \dfrac{\vec{r} + \vec{r}_0}{2}$). □

TEOREMA 7.7. (Plan tangent la sferă paralel cu un plan dat). *Ecuația planului tangent la sfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0\ ,$$

paralel cu planul

(π) : $$Ax + By + Cz + D = 0\ ,$$

este

(12) $$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = \varepsilon R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ ,$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, *iar R este raza sferei.*

Demonstrație. Dacă notăm cu $P_0(x^0, y^0, z^0)$ coordonatele punctului de contact al planului tangent, ecuația sa va fi dată de (11). Scriem că planul tangent este paralel cu planul $Ax + By + Cz + D = 0$ şi obținem relațiile

$$\frac{x^0 - a}{A} = \frac{y^0 - b}{B} = \frac{z^0 - c}{C} = \frac{\sqrt{(x^0 - a)^2 + (y^0 - b)^2 + (z^0 - c)^2}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sau $x^0 - a = \dfrac{\varepsilon\ AR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\quad y^0 - b = \dfrac{\varepsilon\ BR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\quad z^0 - c = \dfrac{\varepsilon\ CR}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

cu $\varepsilon = \pm 1$.

Substituind aceste expresii în (11), obținem relațiile căutate (12), care reprezintă două plane tangente sferei paralele cu planul π. □

7.5. *Intersecția a două sfere. Unghiul dintre două sfere*

TEOREMA 7.8. *Intersecția a două sfere, ale căror ecuații sunt*

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0 \ ,$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + \delta' = 0 \ ,$$

este formată din cercul de ecuații

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0 \\ 2(a - a')x + 2(b - b')y + 2(c - c')z + \delta - \delta' = 0 \end{cases} .$$

Demonstrație. Orice punct comun M(x, y, z) dintre cele două sfere trebuie să verifice sistemul de ecuații $S = 0$ şi $S' = 0$, care este echivalent cu sistemul $S = 0$ şi $S - S' = 0$, care reprezintă o sferă şi respectiv un plan. Deci, intersecția dintre cele două sfere este un cerc care are ecuațiile (13). □

Observații 7.6. În cele ce urmează considerăm sferele S(C,R), S(C’,R’) cu razele R > R’.

i) Dacă $\left\|\overrightarrow{CC'}\right\| = \left\|\vec{r}(C') - \vec{r}(C)\right\| > R + R'$, atunci sferele sunt exterioare şi cercul lor de intersecție este imaginar.

ii) Dacă $\left\|\vec{r}(C') - \vec{r}(C)\right\| = R + R'$, atunci sferele sunt tangente exterioare şi cercul lor de intersecție se reduce la un punct.

iii) Dacă $R - R' < \left\|\vec{r}(C') - \vec{r}(C)\right\| < R + R'$, sferele sunt secante şi cercul de intersecție real.

iv) Dacă $\left\|\vec{r}(C') - \vec{r}(C)\right\| = R - R'$, sferele sunt tangente interioare şi cercul de intersecție se reduce la un punct.

v) Dacă $\left\|\vec{r}(C') - \vec{r}(C)\right\| < R - R'$, sferele sunt interioare, nesecante şi cercul de intersecție este imaginar.

vi) Dacă $\left\|\vec{r}(C') - \vec{r}(C)\right\| = 0$, atunci sferele sunt concentrice.

DEFINIȚIA 7.2. Unghiul dintre două sfere *este unghiul format de planele tangente celor două sfere în unul din punctele comune sferelor.*

Dacă punctul $M(\vec{r}) \in S(C, R) \cap S(C', R')$, atunci planele tangente în punctul M la cele două sfere au vectorii normali $\overrightarrow{CM}$ şi $\overrightarrow{C'M}$ şi unghiul dintre sfere este dat de

$$\cos C\hat{M}C' = \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{C'M}}{\left\|\overrightarrow{CM}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{C'M}\right\|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}(C)) \cdot (\vec{r} - \vec{r}(C'))}{R \cdot R'} = \frac{R^2 + R'^2 - (\vec{r}(C') - \vec{r}(C))^2}{2RR'}.$$

7.6. Puterea unui punct față de o sferă

DEFINIȚIA 7.3. Puterea unui punct *$M_0(x^0, y^0, z^0)$, față de sfera*

$$(S)\quad : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0 \quad ,$$

se numeşte expresia

$$\rho_S(M_0) = (x^0)^2 + (y^0)^2 + (z^0)^2 - 2ax^0 - 2by^0 - 2cz^0 + \delta \, .$$

TEOREMA 7.9. *Produsul* $M_0A \cdot M_0B$ *al segmentelor pe care le determină sfera S pe o secantă oarecare, care trece prin punctul* $M_0(x^0, y^0, z^0)$, *este constant şi egal cu puterea punctului* M_0 *(fig 7.4.).*

Demonstrație. Dacă prin M_0 ducem o dreaptă d, care este înclinată cu unghiurile α, β, γ față de axele *Ox, Oy,* respectiv *Oz,* şi dacă notăm cu ρ distanța de la M_0 la un punct curent $P(x, y, z)$ al dreptei d, atunci pentru d avem ecuațiile

$$(d): \quad \begin{cases} x = x^0 + \rho\cos\alpha \\ y = y^0 + \rho\cos\beta \\ z = z^0 + \rho\cos\gamma \end{cases} .$$

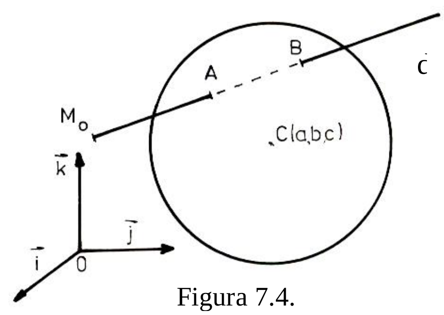


Figura 7.4.

Pentru ca punctul P să fie un punct de intersecție al dreptei d cu sfera S, trebuie să avem

$$\left(x^0 + \rho\cos\alpha\right)^2 + \left(y^0 + \rho\cos\beta\right)^2 + \left(z^0 + \rho\cos\gamma\right)^2 - 2a\left(x^0 + \rho\cos\alpha\right) - 2b\left(y^0 + \rho\cos\beta\right) -$$
$$- 2c\left(z^0 + \rho\cos\gamma\right) + \delta = 0$$

apoi, ordonând după puterile descrescătoare ale lui ρ şi ținând seama de Definiția 7.3., obținem

$$\rho^2 + 2\left[\left(x^0 - a\right)\cos\alpha + \left(y^0 - b\right)\cos\beta + \left(z^0 - c\right)\cos\gamma\right]\rho + \rho_S\left(M_0\right) = 0 \, .$$

Folosind relațiile între rădăcini şi coeficienți pentru ecuația de gradul al $\overline{\underline{II}}$ -lea în ρ, avem produsul rădăcinilor $\rho^1 \cdot \rho^2 = \rho_S\left(M_0\right) \Leftrightarrow M_0A \cdot M_0B = \rho_S(M_0)$. □

Observații 7.6. i) Puterea $\rho_S(M_0)$ se obține înlocuind *x, y, z* din polinomul $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta$ cu coordonatele x^0, y^0, z^0 ale punctului M_0.

ii) Dacă $\rho_S(M_0) > 0$, rădăcinile ρ^1 şi ρ^2 sunt de acelaşi semn şi, prin urmare, punctul M_0 este situat în afara sferei.

iii) Dacă puterea $\rho_S(M_0) < 0$, rădăcinile ρ^1 şi ρ^2 sunt de semne contrare, ceea ce înseamnă că M_0 este situat între A şi B, adică M_0 este situat în interiorul sferei.

iv) Dacă $\rho_S(M_0) = 0$, punctul M_0 se află pe sferă.

TEOREMA 7.10. *Locul geometric al punctelor care au aceeaşi putere față de două sfere este un plan numit* ***plan radical.***

Demonstrație. Fie două sfere S şi S' de ecuații:

$$S(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0,$$

$$S'(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + \delta' = 0.$$

Dacă $M_0(x^0, y^0, z^0)$ este un punct al locului atunci (conform Observației 7.6.i))

$S(x^0, y^0, z^0) = S'(x^0, y^0, z^0) \Leftrightarrow 2(a'-a)x + 2(b'-b)y + 2(c'-c)z + \delta - \delta' = 0$ care este un plan. □

Observații 7.7. i) Planul radical, cu normala la plan de parametri directori $(a'-a, b'-b, c'-c)$, este perpendicular pe dreapta determinată de centrele $C(a, b, c)$ şi $C'(a', b', c')$ ale sferelor.

ii) Ecuația planului radical se obține scăzând ecuațiile sferelor după ce acestea au fost puse sub forma în care x^2, y^2, z^2 au coeficienții egali cu 1.

iii) Planul de intersecție a două sfere secante coincide cu planul radical al sferelor.

TEOREMA 7.11. (1). *Planele radicale a trei sfere, luate câte două, care au centrele necoliniare, se taie după o dreaptă numită* ***axa radicală****.*

(2). *Planele radicale a patru sfere, luate câte două, a căror centre sunt necoplanare se intersectează într-un punct numit* ***centrul radical*** *al celor patru sfere.*

Demonstrație. (1). Fie $S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$, ecuațiile a trei sfere ale căror centre nu sunt pe o aceeaşi dreaptă. Planele radicale ale sferelor luate câte două au ecuațiile $S - S' = 0, \quad S' - S'' = 0, \quad S - S'' = 0$ (se presupune că x^2, y^2, z^2 au coeficienții egali cu 1).

Deoarece $S - S'' \equiv (S - S') + (S' - S'')$, rezultă că planul de ecuație $S - S'' = 0$ trece prin intersecția celor două, care există pentru că am presupus centrele sferelor necoliniare. În cazul când cele trei sfere au centrele pe o aceeaşi dreaptă, atunci planele radicale fiind perpendiculare pe linia centrelor sunt paralele între ele, deci se intersectează după o dreaptă de la infinit.

(2). Să considerăm acum patru sfere ale căror ecuații sunt $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, $S''' = 0$ şi ale căror centre sunt vârfurile unui tetraedru. În acest caz, oricare trei sfere nu au centrele pe aceeaşi dreaptă. Planele radicale ale sferelor S, S', S'' se intersectează după o dreaptă Δ, iar planul radical al sferelor S, S''' va tăia dreapta Δ într-un punct Q. Acest punct, numit centrul radical, are puteri egale față de cele patru sfere; prin urmare, oricare din cele şase plane radicale ale celor patru sfere conține punctul Q, ceea ce demonstrează teorema. □

7.7. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuația sferei care trece prin patru puncte necoplanare $M_i(x^i, y^i, z^i)$, i=1,2,3,4.Caz particular: M_1(1, 0, 0), M_2(0, 1, 0), M_3(0, 0, 1), O(0, 0, 0).

Rezolvare. Dacă scriem că tripletul (x^i, y^i, z^i), i=1,2,3,4 verifică ecuația sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \delta = 0 \ ,$$

obținem împreună cu însăşi ecuația sferei un sistem de 5 ecuații cu 4 necunoscute a, b, c, δ. Acest sistem este compatibil dacă avem

$$\text{(14)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x^{1^2} + y^{1^2} + z^{1^2} & x^1 & y^1 & z^1 & 1 \\ x^{2^2} + y^{2^2} + z^{2^2} & x^2 & y^2 & z^2 & 1 \\ x^{3^2} + y^{3^2} + z^{3^2} & x^3 & y^3 & z^3 & 1 \\ x^{4^2} + y^{4^2} + z^{4^2} & x^4 & y^4 & z^4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Se observă că numărul $A = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 1 \\ x^3 & y^3 & z^3 & 1 \\ x^4 & y^4 & z^4 & 1 \end{vmatrix}$

este coeficientul lui $x^2 + y^2 + z^2$, deci trebuie ca $A \neq 0$, adică punctele M_1, M_2, M_3, M_4 să nu fie coplanare. Dacă $A = 0$, atunci ecuația (14) reprezintă un plan. Pentru cazul particular ecuația sferei este

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0.$$

2. Să se determine punctele de intersecție ale dreptei

$$(d): \begin{cases} 2x - 3y - z + 2 = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

cu sfera $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Rezolvare. Sfera are centrul C(2, 1, -1) şi raza $R = \sqrt{5}$. Căutăm două puncte ale dreptei d:

- considerăm $y = 0$ şi obținem $x = 0$ şi $z = 2$, adică $M_1(0, 0, 2)$;
- luăm $z = 0$ şi obținem $x = 2$ şi $y = 2$, adică $M_2(2, 2, 0)$.

Scriind ecuația dreptei d determinată de punctele M_1 şi M_2 obținem vectorul director al dreptei $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ şi, prin urmare, $(d): \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\, \vec{a}$, $\lambda \in$ **R,** adică $(d): \vec{r} = 2\vec{k} + \lambda\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$. Scriind ecuația (9), obținem $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ cu rădăcinile $\lambda^1 = 1$ şi $\lambda^2 = 3$, reale şi distincte. Aşadar dreapta este secantă sferei, intersectând-o în punctele A şi B de vectori de poziție $\vec{r}(A) = \vec{r}_1 + \lambda^1\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ şi $\vec{r}(B) = \vec{r}_1 + \lambda^2\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, deci A(1, 1, 1) şi B(3, 3, -1).

3. Să se găsească centrul şi raza cercului de intersecție a sferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 2$ cu planul $(\pi): x - y + z = 3$.

Rezolvare. Ecuația sferei se mai scrie $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16$. Distanța de la centrul C(1,-2,-3) al sferei la plan este

$$d(C,\pi)=\frac{|1+2-3-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}.$$

Raza sferei este $R=4$, deci planul π intersectează sfera după un cerc de rază

$r=\sqrt{R^2-d^2(C,\pi)}=\sqrt{13}$.

Centrul cercului de intersecție se găseşte la intersecția normalei la planul π, dusă prin centrul sferei, cu planul π. Ecuația normalei este $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{1}$. Intersecția normalei cu planul π duce la rezolvarea sistemului de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{1} \\ x-y+z=3 \end{cases},$$

a cărui soluție (2, -3, 2) reprezintă coordonatele centrului cercului de intersecție.

4. Să se scrie ecuația vectorială a planului tangent la sfera $(S):\vec{r}^{\,2}-R^2=0$ în punctul $P_1(\vec{r}_1)\in S$..

Rezolvare. Se observă că sfera S are centrul în originea reperului. Deoarece punctul P_1 este pe sferă, rezultă $\vec{r}_1^{\,2}-R^2=0$. Planul tangent fiind perpendicular pe raza sferei dusă în punctul de contact, rezultă $(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{r}_1=0$ sau $\vec{r}\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_1^{\,2}=0$, adică $\vec{r}\cdot\vec{r}_1-R^2=0$, care reprezintă ecuația planului cerut.

5. Să se verifice vectorial că planul radical este perpendicular pe linia centrelor sferelor.

Rezolvare. Fie ecuațiile celor două sfere $\vec{r}^{\,2}-2\vec{r}_1\vec{r}+m_1=0$ şi $\vec{r}^{\,2}-2\vec{r}_2\vec{r}+m_2=0$ şi planul lor radical $2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{r}+m_1-m_2=0$. Considerăm două puncte arbitrare $M_1(\vec{v}_1)$ şi $M_2(\vec{v}_2)$

situate pe planul radical şi avem $2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot \vec{v}_1 + m_1 - m_2 = 0$, respectiv $2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot \vec{v}_2 + m_1 - m_2 = 0$. Scăzând aceste relații obținem $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$, ceea ce exprimă că dreapta care trece prin centrele sferelor $C_1(\vec{r}_1)$ şi $C_2(\vec{r}_2)$ este perpendiculară pe dreapta care trece prin punctele arbitrare $M_1(\vec{v}_1)$, $M_2(\vec{v}_2)$ ale planului radical. Rezultă, deci, că dreapta C_1C_2 este perpendiculară pe planul radical.

7.8. Probleme propuse

1. Să se scrie ecuația sferei în următoarele cazuri:

i) centrul C(1, -2, 3) şi raza $R=3$;

ii) centrul C(2, -1, 3) şi conține punctul $M(-2, 0, 1)$;

iii) centrul C(1, 2, 3) şi este tangentă planului $6x+7y-6z+31=0$;

iv) centrul C(5, 3, -2) şi este tangentă axei Ox.

2. Să se determine coordonatele centrului şi raza sferei $\vec{r}^{\,2} - (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k})\cdot\vec{r} - 2 = 0$.

3. Să se scrie ecuația carteziană a sferei a cărei ecuație vectorială este

$$\vec{r}^{\,2} - (3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})\cdot\vec{r} - 3 = 0 \ ,$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct curent al sferei.

4. i) Să se găsească ecuația sferei care admite ca diametru segmentul AB, cu A(1, 2, -3) şi B(-3, 4, 5).

ii) Să se arate că punctele A(1, -1, 0), B(1, 1, 2), C(-1, -1, 2), D(3, -1, 2) şi E(1, -3, 2) sunt pe o sferă.

5. Să se determine elementele comune sferei $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+1=0$ cu

i) planul $x+2y-z-3=0$;

ii) dreapta $x = y = z$.

6. Să se scrie ecuaţia unei sfere care trece prin punctul $P(0, 3, 1)$ şi intersectează planul xOy după cercul de ecuaţii $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$.

7. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor de secţiune pe care le determină planele $x - 2y - z + \lambda = 0$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$, pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 1 = 0$.

8. Să se scrie ecuaţia unei sfere care trece prin cercul $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 36 \\ 4x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$

şi prin punctul $P(7, -3, 1)$.

9. Să se determine ecuaţia sferei tangente la dreapta $(d_1): \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{3}$ în punctul $P_1(-1, 2, 3)$ şi la dreapta $(d_2): \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$ în punctul $P_2(-3, -2, 1)$.

10. Să se determine parametrul $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât planul $x + y + z = \lambda$ să fie tangent la sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ şi să se afle coordonatele punctului de contact.

11. Să se găsească centrul C şi raza r de secţiune a sferelor $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$.

12. Să se scrie ecuaţia sferei S cu centrul în punctul C(4, 5, -2), ştiind că sfera $(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 36 = 0$, este tangentă interioară lui S.

13. Să se scrie pe cale vectorială puterea unui punct $P_1(\vec{r}_1)$ faţă de o sferă.

14. O sferă are centrul pe dreapta $(d): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, este tangentă planului $(\pi): 2x - 2y + z - 1 = 0$ şi are raza 2. Să se scrie ecuaţia sferei şi ecuaţia planului tangent paralel cu π.

15. Să se scrie ecuaţia sferei care conţine cercurile $\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \\ y = 2 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x^2 + z^2 = 16 \\ y = 3 \end{cases}$.

16. Fie sfera $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$, planele

$(\pi_1): 4x - y + 3z - 13 = 0,\qquad (\pi_2): 4x - y + 3z - 39 = 0$ şi dreapta

$(d): 8x - 11y + 8z - 30 = 0,\ x - y - 2z = 0$.

i) Se cere centrul şi raza cercului $\Gamma = S \cap \pi_1$;

ii) Să se scrie ecuația sferei simetrice sferei S față de planul π_2;

iii) Să se arate că prin dreapta d se pot duce două plane tangente sferei S.

8. STUDIUL CUADRICELOR PE ECUAȚII REDUSE (CANONICE)

8.1. Cuadrice. Definiție. Generalități

DEFINIȚIA 8.1. *Se numeşte* **suprafață** *mulțimea punctelor din spațiul* $\mathbf{E_3}$ *ale căror coordonate carteziene* $(x,\ y,\ z)$ *satisface o ecuație de forma*

$$F(x,\ y,\ z) = 0\ ,$$

care verifică anumite condiții inițiale.

Observații 8.1. (1.) O condiție esențială poate fi de exemplu faptul că funcția $F(x,\ y,\ z)$ este continuă în toate variabilele.

(2.) În funcție de condițiile impuse, suprafețele au diferite forme.

Exemplu. Dacă funcția $F(x,\ y,\ z)$ este o funcție liniară în *x, y, z* de forma $Ax + By + Cz + D$, în care coeficienții *A, B, C* nu se anulează simultan, atunci ecuația $F(x,\ y,\ z) = 0$ reprezintă un plan.

DEFINIȚIA 8.2. *Se numeşte* ***suprafață de gradul al*** $\overline{\underline{II}}$ ***– lea*** *sau* ***cuadrică*** *mulțimea punctelor ale căror coordonate carteziene satisfac o ecuație algebrică de gradul al* $\overline{\underline{II}}$ *– lea, adică o ecuație de forma*

$$a^{11}x^2 + a^{22}y^2 + a^{33}z^2 + 2a^{12}xy + 2a^{13}xz + 2a^{23}yz + 2a^{14}x + 2a^{24}y + 2a^{34}z + a^{44} = 0\ ,$$

în care primii şase coeficienți nu sunt simultan egali cu zero.

Printr-o transformare liniară a coordonatelor (translație, rotație sau diferitele lor compuneri), o ecuație algebrică de gradul al $\overline{\underline{II}}$ – lea în *x, y, z* cu coeficienții a^{11} până la a^{44} va trece tot într-o ecuație algebrică de gradul al $\overline{\underline{II}}$ – lea în *x*, y*, z** cu coeficienții a_*^{11} până la a_*^{44} dar, cu unii dintre ei egali cu zero. Conform unor studii, s-a ajuns la concluzia că orice ecuație de gradul al $\overline{\underline{II}}$ – lea se poate reduce la una din cele 17 ecuații speciale formate din cel mult patru termeni, numite **ecuațiile sub formă redusă** sau **canonică a cuadricelor.** Acestea se împart în **cuadrice nedegenerate** (care conțin cinci tipuri: elipsoidul, hiperboloizii şi paraboloizii) şi **cuadrice degenerate** (care conțin 12 tipuri şi variantele).

8.2. Elipsoidul

DEFINIȚII 8.3. *Se numeşte* ***elipsoid*** *cuadrica de ecuație*

$$(E):\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\ ,$$

unde $a > b > c > 0$. *Numerele a, b, c se numesc* ***semiaxele elipsoidului.***

TEOREMA 8.1. *1) Planele de coordonate sunt plane de simetrie ale elipsoidului.*

2) Axele de coordonate sunt axe de simetrie ale elipsoidului.

3) Punctul O(0, 0, 0) este centru de simetrie al elipsoidului.

Demonstrație. Înlocuind pe x cu $-x$, ecuația elipsoidului nu se schimbă, ceea ce înseamnă că planul yOz este plan de simetrie al elipsoidului, etc. □

Datorită acestor proprietăți rezultă următoarele definiții.

DEFINIȚII 8.4. *Planele de coordonate se numesc* ***plane principale*** *ale elipsoidului. Axele de coordonate şi originea O a triedrului Oxyz se numesc* ***axele,*** *respectiv* ***centrul*** *elipsoidului. Punctele în care axele înțeapă suprafața se numesc* ***vârfuri.***

PROPRIETĂȚI 8.1. (i) *Intersecțiile elipsoidului cu planele de simetrie sunt elipse reale.*

(ii) *Intersecțiile elpsoidului cu planele paralele cu planele de simetrie sunt elipse.*

Demonstrație.(i) Sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ ne dă elipsa

$$(1): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

În mod analog obținem elipsele

$$(2): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}, \qquad (3): \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ (fig. 8.1).}$$

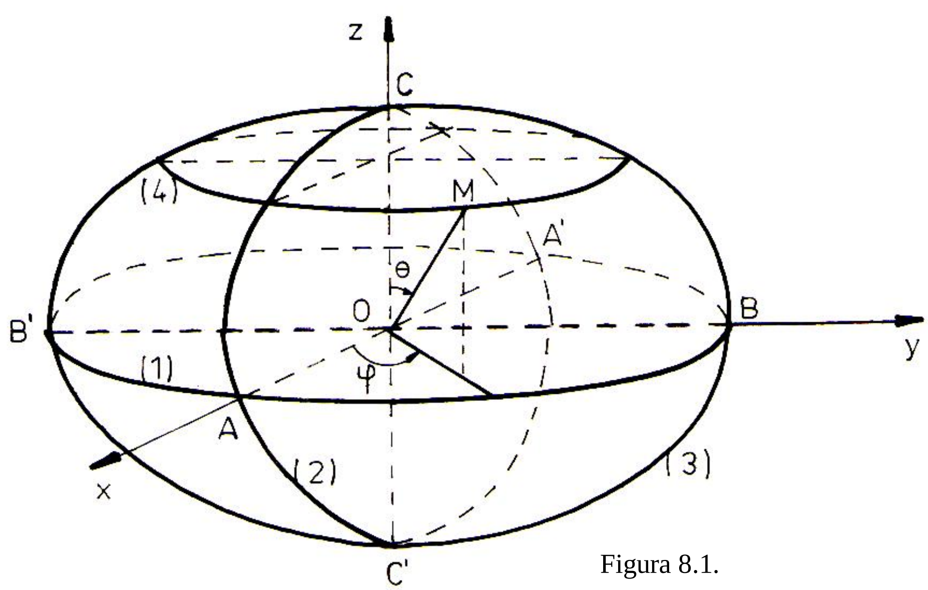


Figura 8.1.

ii) Sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=h \end{cases}$ este echivalent cu $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$ sau

$$(4): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h \end{cases}, \qquad h\in[-c,\ c],$$

care este o elipsă reală dacă $h^2<c^2$, un punct dacă $h^2=c^2$ şi o elipsă imaginară dacă $h^2>c^2$, etc. □

PROPRIETATEA 8.2. *O reprezentare parametrică a elipsoidului este*

$$(E): \begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=b\sin\theta\sin\varphi \\ z=c\cos\theta \end{cases}, \quad cu \quad \theta\in[0,\ \pi],\quad \varphi\in[0,\ 2\pi).$$

Observația 8.2. 1) Dacă $a=b$ atunci elipsoidul se numeşte **elipsoid de rotație în jurul axei *Oz*.**

2) Dacă $a=b=c$ elipsoidul devine sferă.

TEOREMA 8.2. (Dreaptă tangentă la elipsoid). *Dreapta d de parametri directori l, m, n este tangentă în punctul* $M_0(x^0,\ y^0,\ z^0)\in E$ *la elipsoid dacă*

$$\frac{lx^0}{a^2}+\frac{my^0}{b^2}+\frac{nz^0}{c^2}=0.$$

Demonstrație. Fie o dreaptă sub formă parametrică

$$(d)\quad x=x^0+\lambda\, l\ ,\quad y=y^0+\lambda\, m\ ,\quad z=z^0+\lambda\, n\ ,\quad \lambda\in\mathbf{R}.$$

Înlocuind pe $x,\ y,\ z$ în ecuația elipsoidului, obținem

$$\frac{(x^0)^2}{a^2}+\frac{(y^0)^2}{b^2}+\frac{(z^0)^2}{c^2}-1+2\lambda\left(\frac{lx^0}{a^2}+\frac{my^0}{b^2}+\frac{nz^0}{c^2}\right)+\lambda^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)=0,$$

ecuație de gradul al doilea în λ, de unde rezultă că o dreaptă taie elipsoidul în două puncte dacă discriminantul $\Delta\geq 0$.

Dacă punctul $M_0(x^0,\ y^0,\ z^0)\in E$ şi cerem ca dreapta d să fie tangentă la elipsoid, ecuația în λ trebuie să admită o rădăcină dublă, adică discriminantul $\Delta=0$.

Deoarece $\dfrac{(x^0)^2}{a^2}+\dfrac{(y^0)^2}{b^2}+\dfrac{(z^0)^2}{c^2}-1=0$, rezultă că trebuie să avem

$$\frac{lx^0}{a^2}+\frac{my^0}{b^2}+\frac{nz^0}{c^2}=0. \qquad \square$$

TEOREMA 8.3. (Generarea elipsoidului). *O elipsă variabilă, care se deformează şi se deplasează paralel cu ea însăşi*

$$(\gamma_{\lambda,\mu}): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \end{cases}, \text{ cu } \quad \lambda,\mu\in \mathbf{R}$$

şi care se sprijină pe elipsa fixă

$$(\gamma): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases},$$

generează elipsoidul $\quad (E)\ :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$.

Demonstrație. Pentru ca elipsa variabilă să se sprijine pe elipsa fixă, trebuie ca sistemul format din ecuațiile lor

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \\ y=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

să fie compatibil. Rezolvând primele trei ecuații din acest sistem obținem $x^2=a^2\lambda$, $y=0$, $z=\mu$, care, înlocuite în ultima ecuație a sistemului, dau condiția de compatibilitate

$$\lambda+\frac{\mu^2}{c^2}-=1=0.$$

Eliminând parametrii λ şi μ între ecuațiile elipsei generatoare şi condiția de compatibilitate obținem ecuația elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$. $\square$

8.3. Hiperboloidul cu o pânză

DEFINIŢII 8.4. *Se numeşte* ***hiperboloid cu o pânză*** *mulţimea punctelor* $M(x,\ y,\ z) \in \boldsymbol{E_3}$ *ale căror coordonate satisfac ecuaţia*

$$(H)\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0\,.$$

Numerele reale şi pozitive $a,\ b,\ c$ *se numesc* ***semiaxele hiperboloidului.***

TEOREMA 8.4. *Hiperboloidul cu o pânză are planele, axele şi originea sistemului de coordonate ca plane, axe şi, respectiv, centru de simetrie.*

Demonstraţie. Se observă că, în ecuaţia hiperboloidului, z este la puterea a $\overline{\underline{II}}$ – a, deci planul xOy este un plan de simetrie.
În mod analog yOz şi zOx sunt plane de simetrie.
Hiperboloidul cu o pânză are trei axe de simetrie deoarece planele de coordonate se intersectează câte două după axele de coordonate care devin axe de simetrie.
Cele trei plane de simetrie se intersectează în origine, deci *O* este centru de simetrie. □

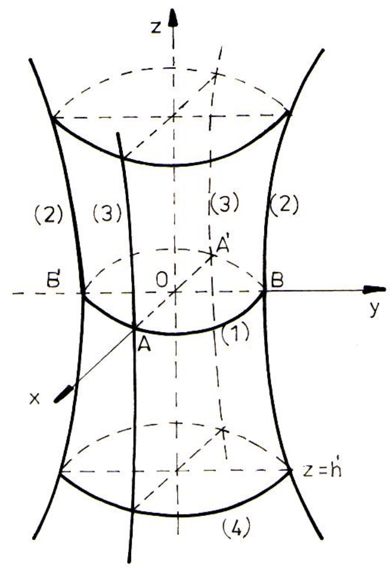


Figura 8.2.

PROPRIETĂŢI 8.3. (i) *Planele de simetrie intersectează hiperboloidul cu o pânză după o elipsă reală şi două hiperbole.*

(ii) *Secţiunile făcute într-un hiperboloid cu o pânză cu plane paralele cu planele de simetrie sunt elipse sau hiperbole.*

Demonstraţie. (i) Sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ ne dă elipsa

$$(1):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0\\ z=0\end{cases}.$$

În mod analog obținem hiperbolele $(2):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\\ y=0\end{cases}$, $(3):\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\\ x=0\end{cases}$.

(ii) Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu un plan $z=h^1$ paralel cu planul xOy este dată de sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\\ z=h^1\end{cases} \Leftrightarrow \quad (4):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{(h^1)^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{(h^1)^2}{c^2}\right)}-1=0\\ z=h^1\end{cases},$$

care reprezintă o elipsă reală pentru fiecare $h^1\in\mathbf{R}$.

Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu un plan $y=h^2$ paralel cu planul xOz este dat de sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\\ y=h^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{(h^2)^2}{b^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{(h^2)^2}{b^2}\right)}-1=0\\ y=h^2\end{cases},$$

care reprezintă o hiperbolă dacă $h^2\in(-b,\ b)$.

În mod analog se arată că intersecția hiperboloidului cu o pânză cu un plan $x=h^3$ paralel cu yOz este o hiperbolă, ale cărei ecuații sunt

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{(h^3)^2}{a^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{(h^3)^2}{a^2}\right)}-1=0\\ x=h^3\end{cases},\quad h^3\in(-a,\ a). \qquad \square$$

DEFINIȚIA 8.5. *Punctele* $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$ *se numesc* ***vârfurile hiperboloidului.***

PROPRIETATEA 8.4. *O reprezentare parametrică a hiperboloidului cu o pânză este*

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \cdot cht \\ y = b\sin\theta \cdot cht \\ z = c \cdot sht \end{cases}, \quad cu \quad \theta \in [0,\ 2\pi), \quad t \in \mathbf{R}$$

(unde $cht = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch^2 t - sh^2 t = 1$*).*

Observația 8.3. Dacă $a = b$ obținem hiperboloidul de rotație în jurul axei Oz.

Observația 8.4. Ecuațiile

$$(H_1): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ şi } (H_2): -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

definesc tot câte un hiperboloid cu o pânză de axă netransversă Oy, respectiv Ox.

TEOREMA 8.5. (Generarea hiperboloidului cu o pânză). *O elipsă variabilă, care se deformează şi se deplasează paralel cu ea însăşi*

$$(\gamma_{\lambda,\mu}): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \ cu \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R},$$

şi care se sprijină pe hiperbola fixă

$$(\gamma): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

generează hiperboloidul cu o pânză $(H): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Demonstrație. Analog ca la teorema 8.3.

Observația 8.5. Dacă intersectăm hiperboloidul cu o pânză cu ecuația în coordonate omogene scrisă sub forma

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = T^2,$$

cu planul $T = 0$, obținem curba

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=0 \\ T=0 \end{cases},$$

care este aceeaşi cu curba de intersecție a conului $(K)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ cu planul de la infinit $T=0$.

DEFINIȚIA 8.6. *Cuadrica de ecuație* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ *se numeşte* ***conul asimptot al hiperboloidului cu o pânză.***

DEFINIȚIA 8.7. *Se numeşte* ***suprafață riglată,*** *o suprafață generată prin mişcarea unei drepte care respectă o anumită lege. Dreptele, cu care coincide succesiv dreapta variabilă, atunci când generează suprafața riglată, se numesc* ***generatoare ale suprafeței.***

Observația 8.6. Hiperboloidul cu o pânză este o suprafață riglată. Ecuația lui se scrie

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

DEFINIȚIA 8.8. *Dreptele variabile*

$$(G_1)\colon \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases},\quad \lambda \in \boldsymbol{R^*}\ ,\quad (G_2)\colon \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases},\quad \mu \in \boldsymbol{R^*},$$

definesc ***două familii de generatoare rectilinii*** *pe suprafață.*

TEOREMA 8.6. *Prin fiecare punct al hiperboloidului cu o pânză*

$$(H)\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

trece câte o generatoare rectilinie din familiile (G_1) şi (G_2).

Demonstrație. Se observă că toate dreptele familiilor (G_1) şi (G_2) sunt pe hiperboloid. Pentru a determina generatoarele care trec prin punctul $M_0\left(x^0, y^0, z^0\right)\in H$ este suficient să determinăm pe λ şi μ. Avem

$$\lambda = \frac{\frac{x^0}{a} - \frac{z^0}{c}}{1 - \frac{y^0}{b}} \qquad , \qquad \mu = \frac{\frac{x^0}{a} + \frac{z^0}{c}}{1 - \frac{y^0}{b}} \quad . \qquad \square$$

Consecința 8.1. Două generatoare din acelaşi sistem nu se întâlnesc.

TEOREMA 8.7. *Orice generatoare din sistemul G_1 întâlneşte toate generatoarele din sistemul G_2 şi reciproc.*

Demonstrație. Pentru ca o generatoare oarecare a sistemului G_1 să întâlnească toate generatoarele sistemului G_2, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} ,$$

să fie compatibil, oricare ar fi $\lambda, \ \mu \in \mathbf{R}^*$. Acest lucru este îndeplinit deoarece sistemul format din patru ecuații cu trei necunoscute $x, \ y, \ z,$ liniar şi neomogen, este compatibil. Condiția de compatibilitate este ca determinantul format din coeficienții necunoscutelor şi termenii liberi să fie nul. Luând ca necunoscute pe $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ şi $\frac{z}{c}$, se arată uşor că aceste determinant este nul, $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbf{R}^*$. $\square$

8.4. *Hiperboloidul cu două pânze*

DEFINIȚII 8.9. *Se numeşte* **hiperboloid cu două pânze** *mulțimea punctelor $M(x, \ y, \ z) \in \boldsymbol{E_3}$ ale căror coordonate satisfac ecuația*

$$(H^*) \ : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

Numerele reale şi pozitive a, b, c *se numesc* ***semiaxele hiperboloidului.***

Hiperboloidul cu două pânze are forma din figura 8.3.

TEOREMA 8.8. *Hiperboloidul cu două pânze are planele de coordonate plane de simetrie, axele de coordonate axe de simetrie şi originea O a reperului centru de simetrie.*

Demonstrație. Analogă cu teorema 8.4.

PROPRIETĂȚI 8.5. (i) *Planele de simetrie intersectează hiperboloidul cu două pânze după o elipsă imaginară şi două hiperbole.*

(ii) *Secțiunile făcute într-un hiperboloid cu două pânze cu plane paralele cu planele de simetrie sunt elipse sau hiperbole.*

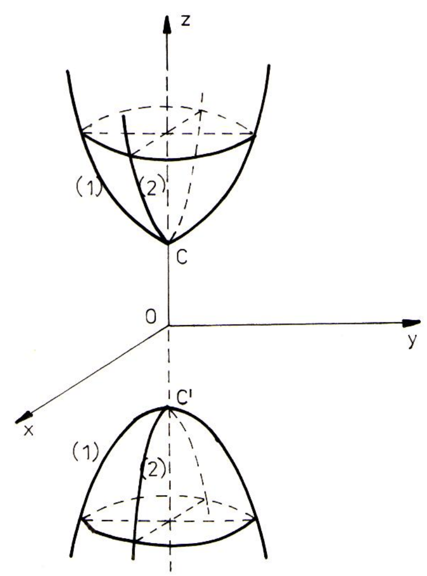


Figura8.3.

Demonstrație. (i) Intersecția hiperboloidului cu două pânze cu planul xOy este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ z=0 \end{cases}, \text{ echivalent cu } \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0 \\ z=0 \end{cases}, \text{ deci o elipsă imaginară.}$$

În mod analog obținem hiperbolele $(1):\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ y=0 \end{cases}$ şi $(2):\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ x=0 \end{cases}$.

(ii) Fie $z=h^1$ ecuația unui plan paralel cu xOy. Ecuațiile curbei de intersecție a hiperboloidului cu două pânze cu acest plan sunt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ z=h^1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{(h^1)^2}{c^2}-1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{(h^1)^2}{c^2}-1\right)}-1=0 \\ z=h^1 \end{cases},$$

care reprezintă elipsă reală pentru $h^1 \in (-\infty,-c) \cup (c,+\infty)$.

Intersecția hiperboloidului cu două pânze cu un plan paralel cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0 \\ x=h^2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{(h^2)^2}{a^2}+1\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{(h^2)^2}{a^2}+1\right)}+1=0 \\ x=h^2 \end{cases},$$

care reprezintă o hiperbolă pentru $h^2 \in \mathbf{R}$.

În mod analog, intersecția cu planul $y=h^3$ paralel cu xOz este dat de

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{(h^3)^2}{b^2}+1\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{(h^3)^2}{b^2}+1\right)}+1=0 \\ y=h^3 \end{cases}$$

, care reprezintă o hiperbolă pentru $h^3 \in \mathbf{R}$.

DEFINIȚIA 8.10. *Punctele $C(0,\ 0,\ c)$ şi $C'(0,\ 0,\ -c)$ se numesc **vârfurile hiperboloidului cu două pânze.***

PROPRIETATEA 8.6. *O reprezentare parametrică a hiperboloidului cu două pânze este*

$$\begin{cases} x=a\cos\theta\cdot sht \\ y=b\sin\theta\cdot sht \\ z=c\cdot cht \end{cases}, \quad cu \quad \theta\in[0,\ 2\pi) \quad , \quad t\in\boldsymbol{R}.$$

Observația 8.7. Dacă $a=b$, obținem hiperboloidul de rotație cu două pânze

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \ ,$$

cu axa de rotație Oz.

Observația 8.8. Ecuațiile

$$\left(H_1^*\right) \ : \ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0 \ \text{ şi } \ \left(H_2^*\right) \ : \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

definesc tot câte un hiperboloid cu două pânze de axe transverse Ox, respectiv Oy.

Observația 8.9. Dacă intersectăm hiperboloidul cu două pânze, cu ecuația în coordonate omogene scrisă sub forma

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{Z^2}{c^2}-T^2$$

cu planul de la infinit $T=0$, obținem curba

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}-\dfrac{Z^2}{c^2}=0\\ T=0\end{cases},$$

care este aceeaşi cu curba de intersecție a conului

$$(K)\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

cu planul de la infinit.

DEFINIȚIA 8.11. *Conul dat de ecuația (K) se numeşte* ***conul asimptot*** *al hiperboloidului cu două pânze.*

Observații 8.10. 1. Hiperboloidul cu o pânză şi hiperboloidul cu două pânze au acelaşi con asimptot.

2. Hiperboloidul cu două pânze nu are generatoare rectilinii.

8.5. Paraboloidul eliptic

DEFINIȚII 8.11. *Se numeşte* ***paraboloid eliptic*** *mulțimea punctelor* $M(x,\ y,\ z)\in$ ***E₃****, ale căror coordonate satisfac ecuația*

$$(P_E)\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Numerele reale şi pozitive a şi b se numesc ***semiaxele paraboloidului eliptic.***

Paraboloidul eliptic are forma din fig.8.4.

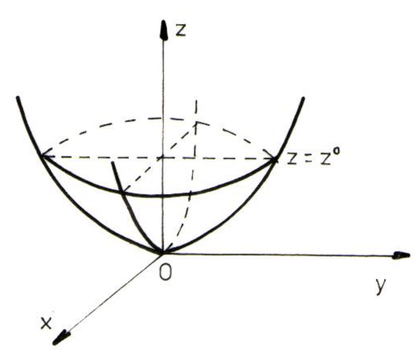


Figura 8.4.

TEOREMA 8.9. *Paraboloidul eliptic are două plane de simetrie* yOz *şi* xOz *şi o axă de simetrie* Oz.

Demonstrație. Analogă cu teorema 8.4.

Observații 8.11. 1. Ecuația paraboloidului eliptic nu are termen liber, deci suprafața trece prin origine.

2. Membrul stâng al ecuației paraboloidului eliptic fiind format dintr-o sumă de pătrate este totdeauna pozitiv. Rezultă că suprafața nu există decât pentru $z \geq 0$, deci cuadrica este situată deasupra planului xOy.

PROPRIETĂȚI 8.7. (i) *Planele de simetrie intersectează paraboloidul după două parabole.*

(ii) *Secțiunile făcute într-un paraboloid eliptic cu plane paralele cu planele de coordonate sunt elipse şi parabole.*

Demonstrație. (i) Intersecția paraboloidului eliptic cu planul yOz este dată de sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases}$, echivalent cu $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases}$, care reprezintă o parabolă a cărei axă de simetrie este axa Oz.

În mod analog, intersecția paraboloidului eliptic cu planul xOz este dată de sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases}$, care este tot parabolă cu axa de simetrie Oz.

(ii) Intersecțiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planul xOy sunt date de sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = h^1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2h^1 \\ z = h^1 \end{cases}$, care reprezintă elipse reale pentru $h^1 > 0$.

Intersecțiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planul xOz sunt date de $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ y=h^2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=2z-\dfrac{\left(h^2\right)^2}{b^2} \\ y=h^2 \end{cases}$, care reprezintă parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa Oz.

În mod analog, intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu planul yOz sunt date de sistemul $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=2z-\dfrac{\left(h^3\right)^2}{a^2} \\ x=h^3 \end{cases}$, adică parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa Oz.

DEFINIȚIA 8.12. *Punctul* $O(0,\ 0,\ 0)$ *se numeşte* ***vârful paraboloidului eliptic.***

PROPRIETATEA 8.8. *O reprezentare parametrică a paraboloidului eliptic este*

$$\begin{cases} x=au\sqrt{2}\cos v \\ y=bu\sqrt{2}\sin v \\ z=u^2 \end{cases},\quad cu\quad u\in[0,\ \infty)\ \ şi\ \ v\in[0,\ 2\pi).$$

Observația 8.12. Dacă $a=b$, ecuația $x^2+y^2=2a^2z$ reprezintă un paraboloid eliptic de rotație în jurul axei Oz.

Observația 8.13. Ecuațiile

$$\left(P_E^*\right)\ :\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2y \quad \text{şi} \quad \left(P_E^{**}\right)\ :\ \ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x$$

definesc tot câte un paraboloid eliptic de axă de simetrie Oy, respectiv Ox.

TEOREMA 8.10. (Generarea paraboloidului eliptic). *O elipsă variabilă, care se deformează şi se deplasează paralel cu ea însăşi*

$$(\gamma_{\lambda,\mu}):\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda \\ z=\mu \end{cases},\quad cu\quad \lambda,\mu\in\mathbf{R},$$

şi care se sprijină pe parabola fixă

$$(\gamma): \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases},$$

generează paraboloidul eliptic $(P_E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$.

Demonstraţie. Se face uşor ca exerciţiu (în mod analog cu teorema 8.3).

8.6. Paraboloidul hiperbolic

DEFINIŢII 8.13. *Se numeşte* **paraboloid hiperbolic** *sau* **şa** *mulţimea punctelor* $M(x,\ y,\ z) \in \boldsymbol{E_3}$ *ale căror coordonate satisfac ecuaţia*

$$(P_H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Numerele pozitive $a,\ b$ *se numesc* ***semiaxele paraboloidului hiperbolic*** *(fig. 8.5.).*

TEOREMA 8.11. *Paraboloidul hiperbolic are două plane de simetrie* $xOz,\ yOz$ *şi o axă de simetrie,* Oz.

Demonstraţie. Exerciţiu.

PROPRIETĂŢI 8.9.(i) *Planele de simetrie intersectează paraboloidul hiperbolic după două parabole.*

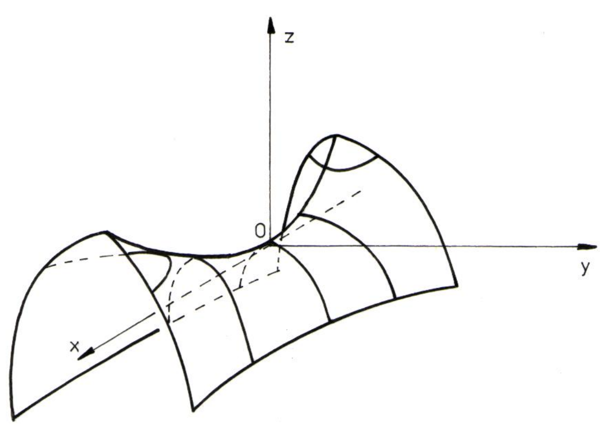


Figura 8.5.

(ii) *Secţiunile făcute într-un paraboloid hiperbolic cu planele paralele cu axele de coordonate sunt hiperbole şi parabole.*

Demonstraţie. (i) Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu planul yOz este dată de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases}, \text{ echivalent cu } \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = -2z \\ x = 0 \end{cases},$$

care este o parabolă cu axa Oz ca axă de simetrie.

În mod analog, intersecția paraboloidului hiperbolic cu planul xOz este dată de sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases}$, care este tot o parabolă cu axa de simetrie Oz.

(ii) Secțiunile făcute în paraboloidul hiperbolic cu plane paralele cu planul xOy sunt date de sistemul de ecuații $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = h^1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2h^1 \\ z = h^1 \end{cases}$, care reprezintă hiperbole.

Secțiunile făcute în paraboloidul hiperbolic cu plane paralele cu planul xOz sunt date de sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = h^2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z + \dfrac{(h^2)^2}{b^2} \\ y = h^2 \end{cases}$, care reprezintă parabole.

În mod analog, secțiunile făcute în paraboloidul hiperbolic cu plane paralele cu planul yOz sunt date de sistemul $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = h^3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = -2z + \dfrac{(h^3)^2}{a^2} \\ x = h^3 \end{cases}$, adică tot parabole.

DEFINIȚIA 8.14. *Punctul $O(0,\ 0,\ 0)$ se numeşte* ***vârful paraboloidului hiperbolic.***

PROPRIETATEA 8.10. *O reprezentare parametrică a paraboloidului hiperbolic este dată de sistemul*

$$\begin{cases} x = a\sqrt{2}u \cdot cht \\ y = b\sqrt{2}u \cdot sht \ , \ \ cu \ \ \ u \in [0, \ \infty) \ \ şi \ \ \ t \in \boldsymbol{R}. \\ z = u^2 \end{cases}$$

Observația 8.14. Ecuațiile

$$(P_H^*) \ : \ \ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x \quad \text{şi} \quad (P_H^{**}) \ : \ \ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2y,$$

definesc tot câte un paraboloid hiperbolic de axe de simetrie Ox, respectiv Oy.

Observația 8.15. Paraboloidul hiperbolic este o suprafață riglată. Ecuația lui se scrie

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

DEFINIȚIA 8.15. *Dreptele variabile*

$$(G_1) \ : \ \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2}{\lambda} \cdot z \end{cases}, \ cu \ \ \lambda \in \boldsymbol{R^*} \ \ , \ \ (G_2) \ : \ \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2}{\mu} \cdot z \end{cases}, \ cu \ \ \mu \in \boldsymbol{R^*},$$

*definesc **două familii de generatoare rectilinii** pe paraboloidul hiperbolic P_H.*

TEOREMA 8.12. *Prin fiecare punc al suprafeței*

$$(P_H) \ : \ \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

trece câte o generatoare rectilinie din familiile (G_1) şi (G_2).

Demonstrație. Se observă că toate dreptele familiilor (G_1) şi (G_2) se găsesc pe paraboloid. Pentru a găsi generatoarele care trec prin punctul $M_0(x^0, y^0, z^0) \in P_H$ este suficient să determinăm pe λ şi μ. Avem

$$\lambda = \frac{x^0}{a} - \frac{y^0}{b} \quad , \quad \mu = \frac{x^0}{a} + \frac{y^0}{b} \quad . \qquad \square$$

Consecința 8.2. Două generatoare din acelaşi sistem nu se întâlnesc.

TEOREMA 8.13. *Oricare dintre generatoarele sistemului G_1 întâlneşte toate generatoarele din sistemul G_2 şi reciproc.*

Demonstrație. Se procedează la fel ca la teorema 8.7, adică se arată că sistemul de 4 ecuații format din ecuațiile lui G_1 şi G_2 este compatibil, $\forall \lambda, \mu \in$ **R*.**

Observația 8.16. Pentru toate cuadricele nedegenerate (studiate în §8.2 - §8.6), ecuația planului tangent într-un punct al cuadricei se scrie prin dedublare (prin analogie cu Teorema 7.6. de la sferă).

8.7. Cuadrice degenerate

Acestea se mai numesc **cuadrice singulare** sau **suprafețe singulare de ordinul al doilea** şi sunt în număr de nouă :

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, **suprafața conică de gradul al doilea** a cărei intersecție cu planele perpendiculare pe axa Oz reprezintă elipse (pentru $a \neq b$) sau cercuri (dacă $a=b$), (fig. 8.6.).

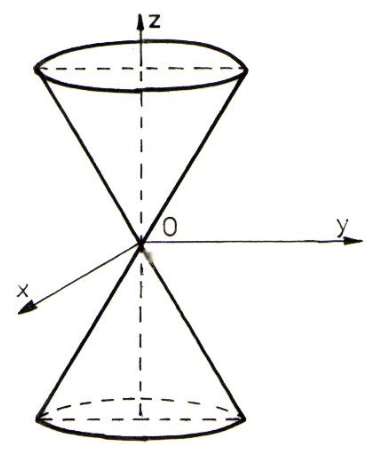
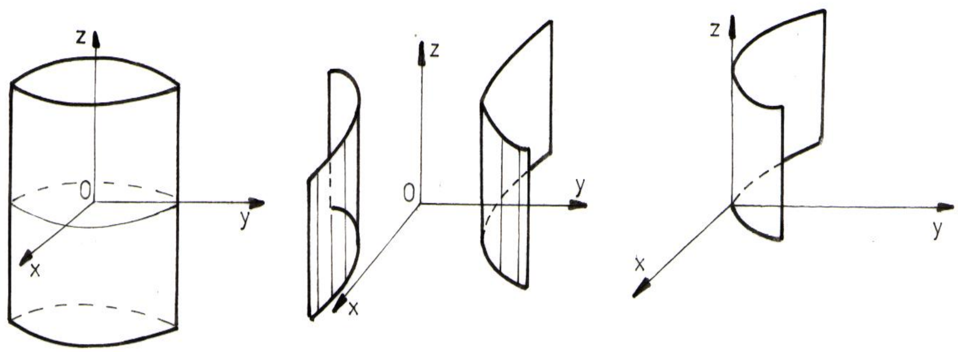


Figura 8.6

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, **suprafața cilindrică eliptică** a cărei intersecție cu planele perpendiculare pe axa Oz reprezintă elipse, paralele şi congruente cu elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ din planul xOy (fig. 8.7.a). Dacă $a=b$, atunci ele devin cercuri.

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, **suprafața cilindrică hiperbolică** a cărei intersecție cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă hiperbole paralele şi congruente cu hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ din planul xOy (fig. 8.7.b).

4) $x^2 - 2py = 0$, **suprafața cilindrică parabolică** a cărei intersecție cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă parabole paralele şi congruente cu parabola $x^2 - 2py = 0$ din planul xOy (fig. 8.7.c).



a) **b)** **c)**

Figura 8.7

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, **două plane** care intersectează perpendicular planul xOy după dreptele $y = \pm \dfrac{b}{a} x$.

6) $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, **două plane paralele** cu planul yOz la distanța $x = \pm a$.

7) $\dfrac{x^2}{a^2} = 0$, un plan, **planul** yOz.

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, o dreaptă, **axa** Oz**.**

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, un punct, **punctul origine** $O(0,\ 0,\ 0)$**.**

Observația 8.17. La ecuațiile 1.- 8. se pot adăuga şi formele similare ale acestora care se obțin prin permutările circulare ale variabilelor.

Încheiem prezentarea celor 17 ecuații speciale formate din cel mult patru termeni cu cele care se caracterizează **mulțimea vidă :**

1^0 $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$, cu $abc \neq 0$, **elipsoidul imaginar** ;

2^0 $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$, cu $ab \neq 0$, **cilindrul eliptic imaginar ;**

3^0 $\quad \frac{x^2}{a^2}+1=0$, cu $a \neq 0$, **plane paralele imaginare**.

8.8. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuațiile planelor tangente la elipsoidul $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{8}-1=0$, paralele cu planul $(\pi): 3x-2y+5z+1=0$.

Rezolvare. Ecuația planului tangent va fi de forma (scriind fascicolul de plane paralele)

$$(\pi_{II}) \quad : \quad 3x-2y+5z+\lambda=0 \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Notând cu $M_0(x^0, y^0, z^0)$ punctul de contact, ecuația planului tangent la E în M_0 este

$$(\pi_{TM_0}) \quad : \quad \frac{xx^0}{4}+\frac{yy^0}{9}+\frac{zz^0}{8}-1=0.$$

Identificând ecuațiile lui π_{II} și π_{TM_0} rezultă $3x-2y+5z \pm 72=0$.

2. Se dau dreptele

$$(d_1): \begin{cases} x-a=0 \\ x-z\cdot tg\theta=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (d_2): \begin{cases} x+a=0 \\ y+z\cdot tg\theta=0 \end{cases}, \quad \text{cu} \quad \theta \notin \left\{ k\pi+\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in Z \right\}.$$

Să se arate că locul geometric al punctelor, ale căror distanțe la dreptele date sunt într-un raport constant, este un hiperboloid cu o pânză.

Rezolvare. Vectorii directori ai celor două drepte sunt

$$\vec{a}_1=\vec{N}_1\times\vec{N}'_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -tg\theta\end{vmatrix}=tg\theta\cdot\vec{j} \text{ şi } \vec{a}_2=\vec{N}_2\times\vec{N}'_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & tg\theta\end{vmatrix}=-tg\theta\cdot\vec{j}+\vec{k}$$

Fie punctele $M_1(a,\ 0,\ a\cdot ctg\theta)\in d_1$, $M_2(-a,\ 0,\ 0)\in d_2$ şi $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ un punct al locului geometric cerut. Avem

$$d(P,\ d_1)=\lambda\ d(P,\ d_2),\quad \lambda\in\mathbf{R}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{\left\|\overrightarrow{M_1P}\times\vec{a}_1\right\|}{\|\vec{a}_1\|}=\lambda\frac{\left\|\overrightarrow{M_2P}\times\vec{a}_2\right\|}{\|\vec{a}_2\|},\quad \lambda\in\mathbf{R}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{|tg\theta|}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha-a & \beta & \gamma-actg\theta\\ 0 & tg\theta & 0\end{vmatrix}=\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha+a & \beta & \gamma\\ 0 & -tg\theta & 1\end{vmatrix}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{tg\theta}{|tg\theta|}\left[\vec{i}(actg\theta-\gamma)+\vec{k}(\alpha-a)\right]=\lambda\ |\cos\theta|\ \left[\vec{i}(\beta+\gamma tg\theta)-\vec{j}(\alpha+a)-\vec{k}(\alpha+a)tg\theta\right].$$

Pentru simplificarea calculelor ridicăm la pătrat şi avem

$$(\gamma-actg\theta)^2+(\alpha-a)^2=\lambda^2\left[(\beta\cos\theta+\gamma\sin\theta)^2+(\alpha+a)^2\right]$$

Înlocuind pe $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ cu $(x,\ y,\ z)$, obținem

$$(\lambda^2-1)x^2+\lambda^2\cos^2\theta\cdot y^2+(\lambda^2\sin^2\theta-1)z^2+2a(1+\lambda^2)x+2actg\theta\cdot z+$$
$$+2\lambda^2\sin\theta\cos\theta\cdot yz+\lambda^2a^2-a^2\frac{1}{\sin^2\theta}=0\qquad\Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2-1)\left[x^2+2a\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2-1}+a^2\left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2\right]-a^2\cdot\frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda^2-1}+\lambda^2\cos^2\theta\left(y^2+z^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\right.$$
$$\left.+2yz\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}\right)-\left(z^2-2a\cdot ctg\theta\cdot z+a^2ctg^2\theta\right)+a^2ctg^2\theta-a^2\frac{1}{\sin^2\theta}+\lambda^2a^2=0\quad\Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2-1)\left(x+a\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2+\lambda^2\cos^2\theta\left(y+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot z\right)-(z-a\cdot ctg\theta)^2+\frac{a^2}{\sin^2\theta}(\cos^2-1)+$$
$$+\lambda^2a^2=a^2\cdot\frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda^2-1}\quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda^2-1\right)\left(x+a\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2+\lambda^2\cos^2\theta\left(y+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot z\right)-\left(z-a\cdot ctg\theta\right)^2=\frac{4a^2\lambda^2}{\lambda^2-1}.$$

Pentru $\lambda^2>1 \Rightarrow \dfrac{4a^2\lambda^2}{\lambda^2-1}>0$ şi în membrul stâng un singur pătrat este cu coeficientul negativ, deci suprafaţa obţinută este un hiperboloid cu o pânză.

Pentru $\lambda^2<1$ avem $\dfrac{4a^2\lambda^2}{\lambda^2-1}<0$ şi în ecuaţia scrisă în felul următor

$$\left(1-\lambda^2\right)\left(x+a\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2-\lambda^2\cos^2\theta\left(y+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot z\right)^2+\left(z-a\cdot ctg\theta\right)^2=\frac{4a^2\lambda^2}{1-\lambda^2}$$

avem $\dfrac{4a^2\lambda^2}{1-\lambda^2}>0$. Şi în acest caz avem în membrul stâng tot un singur pătrat cu coeficientul negativ, prin urmare şi în acest caz locul geometric este un hiperboloid cu o pânză.

3. Să se determine secţiunile circulare în hiperboloidul cu o pânză

$$(H) \;:\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0\;,\;\text{cu}\quad b>a\,.$$

Rezolvare. Intersectăm hiperboloidul H cu sfera $(S)\;:\; x^2+y^2+z^2=b^2$, ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\\ x^2+y^2+z^2=b^2\end{cases}.$$

Acest sistem este echivalent cu sistemele

$$(\alpha):\begin{cases}x^2+y^2+z^2=b^2\\ \left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)x^2-\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)z^2=0\end{cases} \text{ şi } (\beta):\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)x^2-\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)z^2=0\end{cases}$$

sau

$$(\alpha'):\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=b^2 \\ z=\pm\dfrac{c}{a}\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+c^2}}\cdot x \end{cases} \quad \text{şi} \quad (\beta'):\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=\pm\dfrac{c}{a}\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+c^2}}\cdot x \end{cases},$$

unde $z=\pm\dfrac{c}{a}\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{b^2+c^2}}\cdot x$ reprezintă plane reale.

Sistemul (α') reprezintă cercuri, deci şi sistemul (β'), la fel, reprezintă cercuri. Prin urmare, în hiperboloid se obțin cercuri dacă îl secționăm cu planele de ecuații

$$(\gamma)\ :\quad z=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+c^2}}\cdot x$$

şi cu plane paralele cu planele γ .

4. Să se scrie ecuația planelor tangente ale dreptei $x=y=z$ cu

i) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=9z$;

ii) paraboloidul hiperbolic $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=9z$.

Rezolvare. i) Punctele de intersecție ale dreptei cu paraboloidul eliptic sunt $O(0,0,0)$ şi $M_0(12,\ 12,\ 12)$, deci planele tangente π_{TO} şi π_{TM_0} în punctele O şi M_0 au respectiv ecuațiile

$$(\pi_{TO})\ :\quad z=0$$

$$(\pi_{TM_0})\ :\quad \frac{12x}{2}+\frac{12y}{4}=9\cdot\frac{z+12}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 4x+2y-3z-36=0\,.$$

ii) Punctele de intersecție ale dreptei cu paraboloidul hiperbolic sunt $O(0,\ 0,\ 0)$ şi $P_0(36,\ 36,\ 36)$ (care se găsesc rezolvând sistemul format de ecuația dreptei şi ecuația paraboloidului hiperbolic). Planele tangente au ecuațiile

$$(\pi_{TO})\ :\quad z=0$$

$$(\pi_{TM_0}) \ : \quad \frac{36x}{2} - \frac{36y}{4} = 9 \cdot \frac{z+36}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 2y - z = 36 .$$

5. Să se determine ecuația suprafeței generate de o dreaptă d, care se sprijină pe dreptele

$$(d_1) \ : \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \quad , \quad (d_2) \ : \quad \frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$$

şi este paralelă cu planul

$$(\pi) \ : \quad 2x + 3y - 5 = 0 .$$

Să se scrie apoi generatoarele rectilinii ale suprafețelor obținute, care sunt paralele cu planul

$$(\pi *) \ : \quad 3x + 2y - 4z = 0 .$$

Rezolvare. Considerăm dreapta d de ecuație

$$(d) \ : \quad \frac{x-a}{\lambda} = \frac{y-b}{\mu} = \frac{z-c}{1} \ .$$

Faptul că dreapta care trece prin punctele $M(a,\ b,\ c) \in d$ şi $P_1(6,\ 0,\ 1) \in d_1$ este perpendiculară pe normala la planul determinat de d_1 şi d este echivalent cu condiția

$$\begin{vmatrix} a-6 & b & c-1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \lambda & \mu & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\ (b - 2c + 2) + \mu\ (3c - 3 - a + 6) + 2a - 3b - 12 = 0 .$$

În mod analog, condiția că d se rezeamă pe d_2 se scrie

$$\begin{vmatrix} a & b-8 & c+4 \\ 3 & 2 & -2 \\ \lambda & \mu & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda\ (4 - b - c) + \mu\ (2a + 3c + 12) + 2a - 3b + 24 = 0 .$$

Paralelismul dreptei d cu planul π conduce la condiția $2\lambda + 3\mu = 0$. Eliminând pe λ şi μ din aceste 3 condiții şi schimbând notația de la $(a,\ b,\ c)$ la $(x,\ y,\ z)$, obținem ecuația suprafeței generate de dreapta d

$$(\Sigma)\ :\quad 4x^2-9y^2=144z\,,$$

care este un paraboloid hiperbolic cu generatoarele date de

$$(G_\alpha)\ :\ \begin{cases}2x+3y=\alpha\\ 2x-3y=\dfrac{144}{\alpha}\cdot z\end{cases}\ ,\ \text{cu}\ \alpha\in\mathbf{R^*}\quad \text{şi}\quad (G_\beta)\ :\ \begin{cases}2x-3y=\beta\\ 2x+3y=\dfrac{144}{\beta}\cdot z\end{cases}\ ,\ \text{cu}\ \beta\in\ \mathbf{R^*}.$$

Pentru G_α condiția de paralelism cu planul π^* ne dă

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 2 & 3 & 0\\ 2 & -3 & -\dfrac{144}{\alpha}\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \alpha=15,\ \text{deci}\ \ (G_1)\ :\ \begin{cases}2x+3y=15\\ 2x-3y=\dfrac{48}{5}\cdot z\end{cases}.$$

Pentru G_β condiția de paralelism cu planul π^* ne dă

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & 3 & \dfrac{144}{\beta}\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \beta=-39,\ \text{deci}\ \ (G_2)\ :\ \begin{cases}2x-3y=-39\\ 2x+3y=-\dfrac{48}{13}\cdot z\end{cases}.$$

8.9. Probleme propuse

1. Să se recunoască următoarele cuadrice :

$i)$ $2x^2-8y^2+z^2+16=0$; $ii)$ $9x^2+16y^2+9z^2-144=0$;

$iii)$ $4x^2+9y^2=14z$; $iv)$ $x^2+2y^2+3z^2=0$.

2. Să se determine un elipsoid, definit de ecuația sa redusă, care trece prin punctele $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(1,\ 0,\ 1)$ şi $M_3(0,\ 2,\ 3)$.

3. Să se determine punctele de intersecție ale elipsoidului

$$(E)\ :\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}-1=0$$

cu dreapta (d) : $x=4+2t,\quad y=-6-3t,\quad z=-2-2t,\quad t\in\mathbf{R}.$

4. Să se determine curbele de intersecție ale elipsoidului (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1=0$ cu planele de coordonate.

5. Să se determine secțiunile circulare ale elipsoidului (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1=0$.

6. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei (d): $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$ cu cuadrica :

$$i)\ \frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}-1=0 \quad ; \quad ii)\ \frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}+1=0 \quad .$$

7. Să se scrie ecuația planului tangent la hiperboloidul

$i)$ $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{17}-1=0$, în punctul $M_0\left(2,\ -1,\ \frac{17}{3}\right)$;

$ii)$ $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{5}+1=0$, în punctul $P_0\left(4,\ -\sqrt{15},\ 10\right)$.

8. Să se determine locul geometric generat de dreptele :

(d_α): $\begin{cases} 2x-3\alpha y+6z-6\alpha=0 \\ 2\alpha x+3y-6\alpha z-6=0 \end{cases}$, cu $\alpha\in\mathbf{R}$ şi (d_β): $\begin{cases} 2x+3\beta y+6z-6\beta=0 \\ 2\beta x-3y-6\beta z-6=0 \end{cases}$, cu $\beta\in$ **R.**

9. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $M_0(6,\ 2,\ 8)$ şi se află pe hiperboloidul (H) : $16x^2+36y^2-9z^2-144=0$.

10. Să se determine secțiunile circulare în hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-z^2-1=0$.

11. Să se proiecteze curba de intersecție dintre cuadrica $x^2+4y^2=8z$ şi planul $y=\frac{x}{2}$ pe planele xOz şi yOz.

12. Să se scrie ecuația planelor tangente la

i) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$,

ii) paraboloidul hiperbolic $x^2-\frac{y^2}{4}=3z$, paralele cu planul $x-3y+2z-1=0$.

13. Să se determine ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$, care sunt paralele cu planul $3x+2y-4z=0$.

14. Să se determine, cu ajutorul ecuației reduse, paraboloidul hiperbolic care trece prin punctul $P_0(1,\ 1,\ 1)$ şi care taie planul xOy după două drepte, dintre care una este $2x-3y=0$.

15. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2-9y^2=36z$ care trece prin punctul $M\left(3\sqrt{2},\ 2,\ 1\right)$.

9. STUDIUL CUADRICELOR PE ECUAȚII GENERALE

9.1. Ecuația cuadricei, definiție, proprietăți

Se ştie, din tema precedentă, că o cuadrică este o suprafață algebrică de gradul al doilea, adică polinomul din ecuația suprafeței este de gradul al doilea în variabilele $x,\ y,\ z$ şi, în raport cu triedrul $Oxyz$, are forma

(1) $a^{11}x^2 + a^{22}y^2 + a^{33}z^2 + 2a^{12}xy + 2a^{13}xz + 2a^{23}yz + 2a^{14}x + 2a^{24}y + 2a^{34}z + a^{44} = 0$

Sub formă matriceală, aceasta se mai scrie

(2) $$(x,\ y,\ z)\cdot\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\left(a^{14},\ a^{24},\ a^{34}\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a^{44} = 0.$$

Introducând notațiile:

- $\vec{r} := x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = B[\vec{r}\,]_B$, cu $B = \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ bază în V, $\vec{r} = \vec{r}(P)$, cu P un punct curent al cuadricei,
- $A := \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix}$, cu $a^{ij} \in \mathbf{R},\ \ \forall i, j = 1,\ 2,\ 3$ şi $A^t = A$,
- $\vec{b} := a^{14}\vec{i} + a^{24}\vec{j} + a^{34}\vec{k} = B\left[\vec{b}\,\right]_B$,

ecuația cuadricei (2) se mai scrie

(3) $$[\vec{r}\,]_B^t A[\vec{r}\,]_B + 2\left[\vec{b}\,\right]_B^t[\vec{r}\,]_B + a^{44} = 0.$$

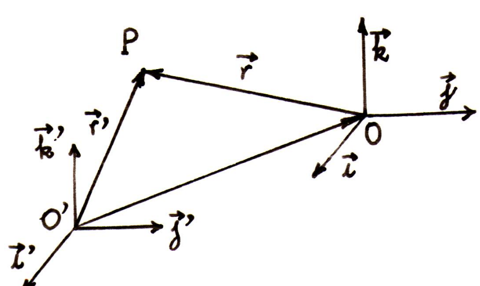


Figura 9.1.

Observația 9.1. Ecuația cuadricei este o sumă dintre o formă pătratică, o formă liniară şi o constantă.

Ecuația cuadricei în cazul unei translații.

Trecând de la reperul $R = \{O;\ (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ la reperul $R' = \{O';\ (\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')\}$ în care $\overrightarrow{O'O} = \vec{r}_0$, $\vec{i}\,' \| \vec{i}$, $\vec{j}\,' \| \vec{j}$, $\vec{k}\,' \| \vec{k}$, avem $\vec{r}\,' = \vec{r}_0 + \vec{r}$ şi ecuația (3), scrisă în $\vec{r}\,'$, devine

$$[\vec{r}_0 + \vec{r}]_B^t A[\vec{r}_0 + \vec{r}]_B + 2\left[\vec{b}\right]_B^t [\vec{r}_0 + \vec{r}]_B + a^{44} = 0 .$$

Efectuând calculele obținem

$$[\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}_0]_B + [\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}]_B + [\vec{r}]_B^t A[\vec{r}_0]_B + [\vec{r}]_B^t A[\vec{r}]_B + 2\left[\vec{b}\right]_B^t [\vec{r}_0]_B + 2\left[\vec{b}\right]_B^t [\vec{r}]_B + a^{44} = 0$$

sau

$$[\vec{r}]_B^t A[\vec{r}]_B + 2\left([\vec{r}_0]_B^t A + \left[\vec{b}\right]_B^t\right)[\vec{r}]_B + [\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}_0]_B + 2\left[\vec{b}\right]_B^t [\vec{r}_0]_B + a^{44} = 0 ,$$

care exprimă următoarea proprietate:

PROPRIETATEA 9.1. *Forma pătratică A, din ecuația cuadricei, este invariantă la o translație a axelor de coordonate.*

9.2. Poziția unei drepte față de o cuadrică

Fie o cuadrică Σ dată prin ecuația matriceală (3) şi o dreaptă d sub formă vectorial parametrică $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Intersectând dreapta cu cuadrica (considerând sistemul dat de ecuațiile cuadricei şi dreptei şi efectuând un calcul analog ca în proprietatea 9.1, substituind pe $\vec{r}$ cu $\lambda\vec{a}$) obținem ecuația

$$\text{(4)} \qquad \left([\vec{a}]_B^t A[\vec{a}]_B\right)\lambda^2 + 2\left([\vec{r}_0]_B^t A + \left[\vec{b}\right]_B^t\right)[\vec{a}]_B \lambda + [\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}_0]_B + 2\left[\vec{b}\right]_B^t [\vec{r}_0]_B + a^{44} = 0 .$$

Cu notațiile

$$\text{(5)} \qquad \alpha := [\vec{a}]_B^t A[\vec{a}]_B \quad , \quad \beta := \left([\vec{r}_0]_B^t A + \left[\vec{b}\right]_B^t\right)[\vec{a}]_B \quad , \quad \gamma := [\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}_0]_B + 2\left[\vec{b}\right]_B^t [\vec{r}_0]_B ,$$

ecuația (4) devine

$$\text{(4')} \qquad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = 0 .$$

Dacă $\alpha \neq 0$, atunci (4’) este o ecuație de gradul al doilea în λ cu discriminantul $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma$ şi avem următoarele cazuri :

$\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad d \cap \Sigma = \{P_1,\ P_2 \mid P_1 \neq P_2\}$, dreapta este secantă cuadricei ;

$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad d \cap \Sigma = \{P_1,\ P_2 \mid P_1 = P_2\}$, dreapta este tangentă cuadricei ;

$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad d \cap \Sigma = \varnothing$, dreapta nu intersectează cuadrica.

DEFINIȚIA 9.1. *Direcțiile $\vec{a}$ pentru care $\alpha = 0$ se numesc* ***direcții asimptotice în raport cu cuadrica.***

Observații 9.2. 1. Dacă $\alpha = 0$ şi $\beta \neq 0 \Rightarrow \quad d \cap \Sigma = \{P_1\}$ fără a fi tangente (dreapta înțeapă cuadrica într-un singur punct).

2. Dacă $\alpha = 0,\ \ \beta = 0,\ \ \gamma \neq 0$ (cu $P_0(\vec{r}_0) \notin \Sigma$) $\Rightarrow$ ecuația (4’) este incompatibilă, este cazul asimptotelor la hiperbole.

3. Dacă $\alpha = 0,\ \ \beta = 0,\ \ \gamma = 0$ ($P_0(\vec{r}_0) \in \Sigma$) $\Rightarrow$ ecuația (4’) este compatibil nedeterminată, verificată pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$ şi cum $P_0(\vec{r}_0) \in \Sigma$ înseamnă că $d \cap \Sigma = d$, adică d este generatoare rectilinie a cuadricei.

9.3. Centrul cuadricei. Planul diametral şi diametrul cuadricei

Există cuadrice care admit un centru de simetrie numit **centrul cuadricei** (de exemplu elipsoidul §8.2).

Fie cuadrica Σ dată de ecuația matriceală (3).

TEOREMA 9.1. *Dacă punctul* $P_0(\vec{r}_0)$ este centrul cuadricei Σ, atunci

$$[\vec{r}_0]_B = -A^{-1}[\vec{b}]_B \ .$$

Demonstrație. Fie $P_0(\vec{r}_0)$, centrul de simetrie al cuadricei Σ. Atunci dreapta

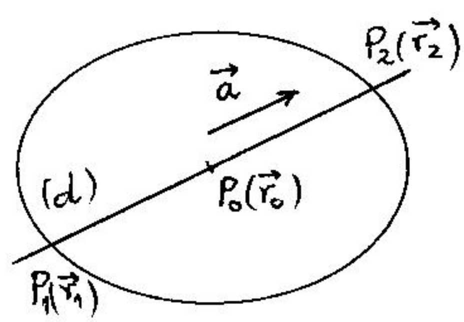


Figura 9.2.

$$(d)\ :\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

intersectează cuadrica în două puncte $P_1(\vec{r}_1)$ şi $P_2(\vec{r}_2)$ (fig. 9.2. unde este prezentată o secțiune în cuadrică cu un plan care conține centrul P_0 şi dreapta d). Avem relația $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$, în care, punând $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \lambda^1\vec{a}$ şi $\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \lambda^2\vec{a}$, obținem $\lambda^1 + \lambda^2 = 0$. Ținând seama de ecuația (4'), cu $\alpha \neq 0$, rezultă $\beta = 0$, adică $[\vec{r}_0]_B^t A + [\vec{b}]_B^t = 0 \iff A[\vec{r}_0]_B = -[\vec{b}]_B$. Dacă matricea A este nesingulară, atunci $[\vec{r}_0]_B = -A^{-1}[\vec{b}]_B$, adică avem o cuadrică cu centru . □

Observația 9.2. Cuadrica cu centru este caracterizată prin $\det A \neq 0$.

TEOREMA 9.2. *Locul geometric al mijloacelor coardelor cuadricei Σ, paralele cu direcția $\vec{a} \neq \vec{O}_V$, este o porțiune din planul π de ecuație*

(6) $$(\pi)\ :\quad [\vec{a}]_B^t A[\vec{r}]_B + [\vec{a}]_B^t[\vec{b}]_B = 0\,.$$

Demonstrație. Dacă punctul $P_0(\vec{r}_0)$ este mijlocul coardei de vector director $\vec{a}$, atunci extremitățile $P_1(\vec{r}_1)$ şi $P_2(\vec{r}_2)$ ale coardei, situate pe cuadrică, se află la distanțe egale de P_0 în sensuri opuse. Prin urmare $\lambda^2 = -\lambda^1$, adică $\lambda^1 + \lambda^2 = 0$ (fig. 9.3). Ținând seama de ecuația (4'), avem $\beta = 0$ $\iff \left([\vec{r}_0]_B^t A + [\vec{b}]_B^t\right)[\vec{a}]_B = 0$, cu vectorul director $\vec{a}$ dat. Punctul P_0 fiind arbitrar,

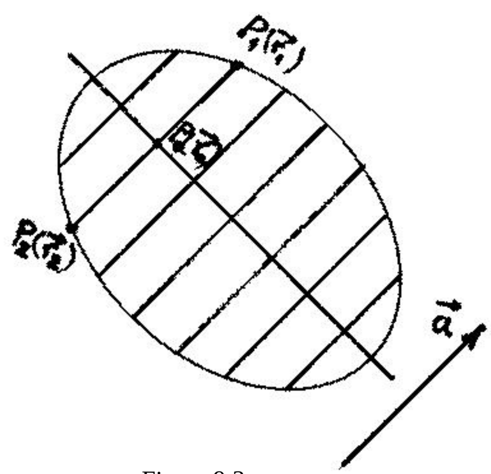


Figura 9.3.

considerăm punctul curent $P(\vec{r})$ al locului geometric care satisface ecuația $\left([\vec{r}]_B^t A + [\vec{b}]_B^t\right)[\vec{a}]_B = 0$, care prin transpunere devine $[\vec{a}]_B^t A[\vec{r}]_B + [\vec{a}]_B^t[\vec{b}]_B = 0$. □

DEFINIȚIA 9.2. *Planul π dat de ecuația (6) se numeşte* ***planul diametral al lui Σ conjugat direcției $\vec{a}$.***

Consecința 9.1. Matricea A transformă vectorul director $\vec{a}$ al coardelor în vector normal al planului diametral lui Σ conjugat direcției $\vec{a}$.

DEFINIȚIA 9.3. *Intersecția a două plane diametrale ale lui Σ conjugate cu două direcții $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ necoliniare, se numeşte **diametru.***

9.4. Planul de simetrie şi direcțiile principale ale cuadricei. Planul tangent la o cuadrică într-un punct al cuadricei

Planul de simetrie al cuadricei este planul diametral perpendicular pe direcția coardelor. Astfel, dacă $\vec{a}$ este vectorul director al coardelor conjugate cu planul de simetrie, vectorul normal la planul de simetrie trebuie să fie coliniar cu vectorul $\vec{a}$, adică

$$A[\vec{a}]_B = \lambda\ [\vec{a}]_B\ ,$$

ceea ce înseamnă că vectorul normal la planul de simetrie al cuadricei este vector propriu al matricei A.

DEFINIȚIA 9.4. *Direcțiile perpendiculare pe planele de simetrie ale cuadricei se numesc **direcțiile principale ale cuadricei.***

TEOREMA 9.3. *Fie cuadrica $(\Sigma)\ :\ [\vec{r}]_B^t A[\vec{r}]_B + 2[\vec{b}]_B^t[\vec{r}]_B + a^{44} = 0$ şi un punct $P_0(\vec{r}_0)\in\Sigma$. Atunci planul tangent în $P_0(\vec{r}_0)$ la cuadrică are forma*

$$(7)\qquad (\pi_{TP_0})\ :\ [\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}]_B + [\vec{b}]_B^t[\vec{r}+\vec{r}_0]_B + a^{44} = 0.$$

Demonstrație. Considerăm dreapta $(d)\ :\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a}\ ,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$, care trece prin punctul P_0. Din $P_0(\vec{r}_0)\in\Sigma$ rezultă că vectorul de poziție $\vec{r}_0$ satisface ecuația cuadricei şi avem $[\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}_0]_B + 2[\vec{b}]_B^t[\vec{r}_0]_B + a^{44} = 0$. Comparând această ecuație cu mărimile introduse prin intersecția dreptei $(d)\ :\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a}\ ,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$, cu cuadrica Σ, obținem $\gamma = 0$ şi ecuația (4') devine

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda = 0,$$

care are o rădăcină $\lambda^1 = 0$. Pentru ca dreapta d să fie tangentă cuadricei Σ, trebuie ca $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$, adică $\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left([\vec{r}_0]_B^t A + [\vec{b}]_B^t\right)[\vec{a}]_B = 0$ şi $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\, \vec{a} \quad \Rightarrow$

$\left([\vec{r}_0]_B^t A + [\vec{b}]_B^t\right)[\vec{r} - \vec{r}_0]_B = 0$, adică $[\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}]_B - [\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}_0]_B + [\vec{b}]_B^t[\vec{r}]_B - [\vec{b}]_B^t[\vec{r}_0]_B = 0$.

Din aceasta, folosind faptul că $P_0(\vec{r}_0) \in \Sigma$ (scris sub formă analitică), rezultă

$$[\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}]_B + 2[\vec{b}]_B^t[\vec{r}_0]_B + a^{44} + [\vec{b}]_B^t[\vec{r}]_B - [\vec{b}]_B^t[\vec{r}_0]_B = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[\vec{r}_0]_B^t A[\vec{r}]_B + [\vec{b}]_B^t[\vec{r} + \vec{r}_0]_B + a^{44} = 0 \qquad .$$

Rezultă că această ecuație reprezintă **locul geometric al dreptelor tangente la cuadrică în punctul P_0.** Cum această ecuație reprezintă un plan, înseamnă că locul geometric al dreptelor tangente la cuadrică este **planul tangent** la cuadrică în punctul P_0 şi are forma dedublată a ecuației cuadricei. □

9.5. Reducerea ecuației cuadricei la forma canonică

Fie cuadrica Σ dată prin ecuația generală

$(\Sigma): a^{11}x^2 + a^{22}y^2 + a^{33}z^2 + 2a^{12}xy + 2a^{13}xz + 2a^{23}yz + 2a^{14}x + 2a^{24}y + 2a^{34}z + a^{44} = 0$

Pentru stabilirea ecuației canonice a cuadricei Σ se poate proceda astfel :

$(\underline{\overline{I}})$ Dacă $a^{12} = a^{13} = a^{23} = 0$, se face o translație.

$(\underline{\overline{II}})$ Dacă cel puțin unul din numerele a^{12}, a^{13}, a^{23} este nenul, atunci tipul cuadricei Σ este determinat de expresia termenilor de gradul al doilea, adică de forma pătratică

$$a^{11}x^2 + a^{22}y^2 + a^{33}z^2 + 2a^{12}xy + 2a^{13}xz + 2a^{23}yz\,.$$

Matriceal această formă pătratică se scrie, cum am văzut deja, sub forma $(x, y, z)A(x, y, z)^t$ sau $[\vec{r}]_B^t A[\vec{r}]_B$, cu $A^t = A$.

Pentru matricea A se determină valorile proprii λ^1, λ^2, λ^3 şi vectorii proprii corespunzători care sunt ortogonali. Prin normare obținem versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Se notează cu R matricea formată de coordonatele versorilor $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ în baza canonică $B=(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, aşezate în coloane; având în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R=+1$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda^1 x'^2+\lambda^2 y'^2+\lambda^3 z'^2$.

Direcțiile noilor axe de coordonate sunt date de direcțiile versorilor proprii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, respectiv $\vec{e}_3$.

În final, dacă este cazul se face o translație.

9.6. *Probleme rezolvate*

1. Cuadrica Σ conține punctele $A(1,\ -1,\ 1)$, $B(0,\ 2,\ 2)$, trece prin axa Oz şi prin cercul Γ din planul xOy de rază egală cu unitatea şi tangent axei Oy în origine. Să se scrie ecuația cuadricei Σ şi coordonatele centrului său.

Rezolvare. Ecuațiile cercului Γ sunt

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$$

Ecuația cuadricei Σ este de forma $x^2+y^2-2x+z(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0$, deoarece intersecția acestei suprafețe cu planul xOy este cercul Γ.

Suprafața Σ conține axa Oz, deci ecuația ei devine identitate pentru $x=0$, $y=0$. Rezultă $\gamma=0$, $\delta=0$.

Din condițiile $A,\ B\in\Sigma$ rezultă sistemul $\alpha-\beta=0,\ 1+\beta=0$, cu soluția $\alpha=-1,\ \beta=-1$.

Deci $(\Sigma)\ :\quad x^2+y^2-xz-yz-2x=0$

sau, matriceal

$$[\vec r]_B^{\,t}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\cdot[\vec r]_B+2(-1,\ 0,\ 0)\cdot[\vec r]_B=0,$$

cu $\det A=-\frac{1}{2}\neq 0$. Deci cuadrica este cu centru şi folosind Teorema 9.1 avem

$$[\vec r_0]_B=-A^{-1}[\vec b]_B=-2\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

2. Să se găsească punctele de intersecție ale cuadricei $(\Sigma): x^2+xy-yz-4x=0$ cu dreapta $(d): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

Rezolvare. Punând $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}=\lambda$, avem

$$x=2\lambda\quad,\quad y=1-\lambda\quad,\quad z=2+\lambda.$$

Rezolvând sistemul format de ecuația cuadricei Σ şi de ecuațiile parametrice ale dreptei d, obținem $3\lambda^2-5\lambda-2=0$, de unde $\lambda^1=-\frac{1}{3}$ şi $\lambda^2=2$. Înlocuind aceste valori în ecuațiile lui d, obținem punctele $M_1\left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ şi $M_2(4,\ -1,\ 4)$.

3. Fiind dată cuadrica Σ prin ecuaţia generală, să se scrie ecuaţiile planelor diametral conjugate axelor de coordonate.

Rezolvare. Folosind versorul director $\vec{i}$ al axei Ox şi aplicând formula (6), planul diametral conjugat axei Ox este

$$(\pi_1)\ :\quad (1,\ 0,\ 0)A[\vec{r}]_B + (1,\ 0,\ 0)[\vec{b}]_B = 0$$

sau, explicitând termenii,

$$(\pi_1)\ :\quad (1,\ 0,\ 0)\cdot\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1,\ 0,\ 0)\cdot\begin{pmatrix} a^{14} \\ a^{24} \\ a^{34} \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\pi_1)\ :\quad a^{11}x + a^{21}y + a^{31}z + a^{14} = 0.$$

În mod analog, planul diametral conjugat axei Oy este

$$(\pi_2)\ :\quad a^{21}x + a^{22}y + a^{23}z + a^{24} = 0,$$

iar planul diametral conjugat axei Oz este

$$(\pi_3)\ :\quad a^{31}x + a^{32}y + a^{33}z + a^{34} = 0.$$

4. Să se găsească locul geometric al tangentelor duse din origine la cuadrica

$$(\Sigma)\ :\quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

Rezolvare. Orice dreaptă care trece prin origine are ecuaţiile

$$(d)\ :\quad \begin{cases} x = \alpha\ z \\ y = \beta\ z \end{cases},\quad \text{cu}\quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile lui Σ şi d obţinem

$$(\alpha^2 + 2\beta^2 + 2 + 2\alpha\beta)z^2 - 2(\alpha + 2\beta + 2)z + 2 = 0$$

Pentru toate dreptele tangente la cuadrică, această ecuaţie trebuie să aibă rădăcini reale şi egale, de unde rezultă

$$-\alpha^2 + 4\alpha + 8\beta = 0.$$

Considerând sistemul de ecuații format din această condiție şi ecuațiile dreptei d şi eliminând pe $\alpha,\ \beta$, obținem $x^2 - 4xz - 8yz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2z)^2 - 4(y+z)^2 - 4y^2 = 0$ care este o suprafață conică.

5. Să se găsească ecuația redusă a cuadricei

$$(\Sigma) \ : \ 3(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+xz+yz) + 2(x+y+z) + \delta = 0 \quad , \quad \delta \in \mathbf{R}.$$

Discuție.

Rezolvare. Matricea formei pătratice $3(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+xz+yz)$ este

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $\det A = 16 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma$ este o cuadrică cu centru $C(\vec{r}_0)$, unde

$$[\vec{r}_0]_B = -A^{-1}[\vec{b}]_B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sunt soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Obținem valorile proprii reale $\lambda^1 = 1$, $\lambda^2 = \lambda^3 = 4$.

Coordonatele $(u,\ v,\ w)$ ale vectorului propriu corespuzător valorii proprii λ, sunt soluțiile sistemului

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda^1 = 1$, sistemul are soluția $u = \alpha \ , \quad v = \alpha \ , \quad w = \alpha \ , \quad \alpha \in \mathbf{R}$; normalizăm şi obținem versorul propriu $\vec{e}_1 = B\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)_B^t$.

Pentru $\lambda^2 = \lambda^3 = 4$ sistemul devine

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cu soluția $\vec{x} = B\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B + B\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$. Considerăm $\vec{x}_2 = B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $\vec{x}_3 = B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, care prin normalizare devin

$\vec{e}_2 = B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)_B^t$ şi $\vec{e}_3 = B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_B^t$.

Cu baza $B = \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, obținem baza $B' = \left(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right)$, cu matricea de trecere

$$M\left(B,\ B'\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Prin transformarea

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M\left(B,\ B'\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases},$$

ecuația carteziană devine

$$x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 + 2\sqrt{3}x' + \delta = 0.$$

Completăm pătratele în x' şi obținem

$$\left(x'+\sqrt{3}\right)^2+4y'^2+4z'^2-3+\delta=0\,.$$

Efectuăm translația $\begin{cases} x'=-\sqrt{3}+x'' \\ y'=y'' \\ z'=z'' \end{cases}$ și avem ecuația redusă

$$x''^2+4y''^2+4z''^2-3+\delta=0\,.$$

Obținem următoarele cazuri :

$\underline{\overline{I}}$ pentru $\delta<3$, elipsoid real ;

$\underline{\overline{II}}$ pentru $\delta=3$, con imaginar ;

$\underline{\overline{III}}$ pentru $\delta>3$, elipsoid imaginar .

9.7. Probleme propuse

1. Să se discute natura cuadricelor reprezentate de ecuația

$$x^2+y^2+z^2+\delta(xy+yz+zx)=0 \quad , \quad \delta\in\mathbf{R}.$$

2. Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu pentru care suma coordonatelor lor și a distanței lor la origine să fie constantă și egală cu $2a$, cu $a\in\mathbf{R}$ fixat.

3. Cuadrica Σ conține punctele $P(-1,\ 2,\ 3)$, $Q(1,\ 1,\ -1)$, trece prin axa Oy și prin cercul Γ care are centrul în punctul $C(0,\ 0,\ 3)$ și este tangent axei Ox în origine. Să se scrie ecuația cuadricei Σ și coordonatele centrului său.

4. Să se stabilească natura cuadricelor de ecuație

$$9x^2(1+\delta)-16y^2(\delta-3)+36(\delta-2)z^2-18(1+\delta)x-64(\delta-3)y-55\delta+57=0,\ \ \delta\in\mathbf{R}.$$

5. Se consideră cuadrica (Σ): $x^2-4y^2+2z^2-6xy+13yz-12=0$ și punctele $M_1\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)$.

Să se determine punctele de intersecție ale dreptei M_1M_2 cu cuadrica Σ.

6. Să se determine punctele de pe cuadrica

$$(\Sigma): \ 2x^2 + y^2 + 4xz + 2yz - 4x - y - 4 = 0,$$

ale căror normale (la suprafaţă) sunt normale şi pentru planul

$$(\pi) \ : \quad 4x + 3y + 6z - 7 = 0.$$

7. Să se determine locul geometric al centrelor cuadricelor de ecuație

$$x^2 + 2ayz + bz^2 - 4ax + 2by + 1 = 0 \ , \quad a \in \mathbf{R}, \quad b \in \mathbf{R}.$$

8. Să se afle locul geometric al centrelor cuadricelor de ecuație

$$xy + \delta y(y+z) + \mu x(z+x) = 0 \ , \quad \delta \in \mathbf{R}, \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

9. Să se găsească locul geometric al dreptelor paralele cu axa Oz şi tangente la cuadrica

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

10. Să se studieze natura cuadricei (Σ): $2(x+y)(x+z) + (y-z)^2 + 1 = 0$.

11. Să se găsească ecuația redusă a cuadricei (Σ) : $z(x-y) = x + y$.

12. Să se reducă la forma canonică şi să se recunoască următoarele cuadrice:

$i)$ $\ 36x^2 + y^2 + 4z^2 + 72x + 6y - 40z + 109 = 0$,

$ii)$ $\ 5x^2 - 8y^2 + 5z^2 - 6xz + 8 = 0$,

$iii)$ $\ x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$,

$iv)$ $\ 2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$.

13. Să se reducă la forma canonică şi să se recunoască următoarele cuadrice:

$i)$ $\ x^2 - 16y^2 - 4z^2 - 32y + 16z - 16 = 0$,

$ii)$ $\ 2y^2 - 7z^2 + 112x - 16y - 14z - 87 = 0$,

$iii)$ $\ xy + z^2 - 2 = 0$,

$iv)$ $\ x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 5x - 1 = 0$,

$v)$ $\ x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$.

14. Să se găsească generatoarele rectilinii ale cuadricei

$$xy + yz - 3xz - 8 = 0.$$

15. Să se arate că ecuația

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$$

reprezintă trei plane care trec prin aceeaşi dreaptă.

Să se scrie ecuațiile dreptei.

III. GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

În această ultimă parte a cursului se studiază proprietățile diferențiale ale curbelor şi suprafețelor din spațiul obişnuit (al geometriei elementare).

Obiective care decurg din studiul acestui capitol sunt ca studenții:

- *să definească* funcția diferențială, matricea jacobian, curba n spațiul euclidian, ecuația curbei, vectorul viteză, tangenta şi planul normal într-un punct al curbei, câmpuri vectoriale pe o curbă, planul osculator şi planul rectificant, curbura şi torsiunea unei curbe, ecuațiile suprafeței, curbe coordonate pe o suprafață, plan tangent la o suprafață, elementul de arc al unei curbe, prima formă pătratică fundamentală a suprafeței, unghiul două curbe situate pe aceeaşi suprafață, elementul de arie al suprafeței, a doua formă pătratică fundamentală a suprafeței;
- *să calculeze* curbura şi torsiunea unei curbe, prima şi a doua formă pătratică fundamentală a suprafeței, lungimea unui arc de curbă, aria unei porțiuni de suprafață;
- *să deducă* elementele triedrului Frenet, formulele Frenet, planul tangent la o suprafață.

1. TRIEDRUL LUI FRENET

1.1. Curbe în spațiu

În cele ce urmează, vom presupune că funcțiile care intervin sunt continue şi au derivate (sau derivate parțiale) continue până la un ordin cerut p, adică sunt de clasa C^p. Se va recunoaşte destul de uşor clasa de indice minim impusa de context.

DEFINIȚIA 1.1. *Se numeşte* ***funcție diferențială*** *o funcție de clasa* C^∞.

DEFINIȚIA 1.2. *Fie o funcție de tipul* $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$*, cu m, n* $\in \mathrm{N}^*$. *Funcțiile* $f_i = y_i \circ f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$*, unde* y_i *sunt funcțiile coordonate ale lui* $\mathbf{R}^m$*, se numesc* ***coordonate euclidiene ale lui f*** *şi se scriu* $f = (f_1, f_2,..., f_m)$.

Funcția $f = (f_1, f_2,..., f_m)$ *este diferențiabilă dacă şi numai dacă* f_i *sunt diferențiabile, i=1,...,m. Unei funcții diferențiabile f i se asociază* ***matricea jacobian***

$$J(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \frac{\partial f_m}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Dacă $n = m$, atunci determinantul detJ(f) se numeşte **jacobianul lui f** şi se notează cu

$$\frac{D(f_1,..., f_m)}{D(x^1,...,x^n)}.$$

Funcția $f = (f_1, f_2,..., f_m)$ se numeşte **regulată** dacă rang J(f) = min(m,n).

Dacă funcția $f = (f_1, f_2,..., f_m)$ nu este regulată într-un punct P, atunci P se numeşte **punct singular** sau **punct critic**, iar f(P) se numeşte **valoare singulară** sau **valoare critică.**

În spațiul euclidian canonic cu trei dimensiuni R^3 considerăm Ox, Oy, Oz un sistem trirectangular. Notăm cu I un interval deschis din **R.**

DEFINIȚIA 1.3. *O funcție diferențiabilă* $\alpha: I \to \mathbf{R}^3$*, cu I*$\subseteq$***R*** *se numeşte* ***curbă*** *şi se notează cu* α.

Observația 1.1. Uneori, numai imaginea $\alpha(I)$ se numeşte **curbă**. În acest caz α se numeşte **parametrizare,** iar $t \in I$ se numeşte **parametru**. Vom folosi ambele accepțiuni ale cuvântului „curbă”, semnificația dorită decurgând din context.

Observația 1.2. Ne fixăm studiul pe compunerea marcată în fig. 1.1, unde $\mathscr{J}_0$ este izomorfismul canonic. Rezultă că lui α putem să-i ataşăm o funcție şi numai una de tipul $\vec{\alpha} : \mathrm{I} \to \mathrm{T}_0(\mathbf{R}^3)$, unde $\mathrm{T}_0(\mathbf{R}^3)$ este spațiul tangent în punctul O la $\mathbf{R}^3$, ceea ce ne

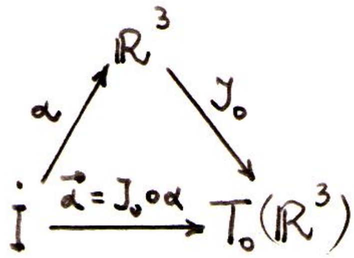


Figura 1.1

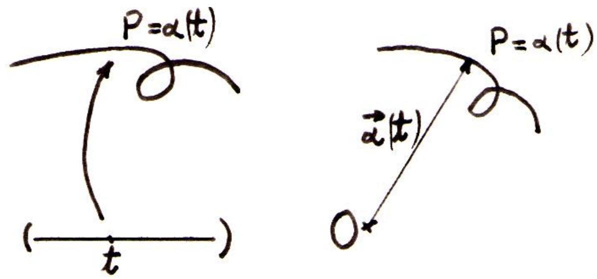


Figura 1.2.

permite să considerăm mulțimea $\vec{\alpha}(\mathrm{I})$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\vec{\alpha}$ cu originea fixată în originea O a reperului lui $\mathbf{R}^3$ (fig.1.2).

Observația 1.3. Din definiția lui $\alpha(\mathrm{I})$ rezultă

$$\alpha(\mathrm{I}) = \{\mathrm{P} \in \mathbf{R}^3 \mid \exists\ t \in \mathrm{I}\ \ a.i.\ \ \mathrm{P} = \alpha(t)\}$$

Dacă raportăm pe $\mathbf{R}^3$ la baza canonică , atunci funcțiile α şi $\vec{\alpha}$ sunt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ \ ,\ \ \mathrm{t} \in \mathrm{I}\ ,$$

$$\vec{\alpha}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3 \ \ ,\ \ \mathrm{t} \in \mathrm{I}\,.$$

Într-un context în care numai imaginea $\alpha(\mathrm{I})$ este numită curbă, relațiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ se numesc **ecuațiile parametrice** ale curbei, iar $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ se numeşte **ecuația vectorială** a curbei.

DEFINIȚIA 1.4. *Un punct P al lui* $\alpha(\mathrm{I})$ *se numeşte* ***simplu*** *dacă există o singură valoare* $t \in \mathrm{I}$ *astfel încât* $\mathrm{P} = \alpha(t)$. *Dacă există mai multe valori distincte t astfel încât* $P = \alpha(t)$ *, atunci punctul P se numeşte* ***multiplu.***

Exemplul 1. Dacă există numerele $t_1 \neq t_2$ şi numai acestea din I pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = Q$, atunci punctul Q se numeşte **dublu** (fig.1.3).

Figura 1.3.

Figura 1.4

Exemplul 2. Dacă există trei numere distincte t_1, t_2, t_3 şi numai acestea din I, pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_3) = Q$, atunci punctul Q se numeşte **triplu**(fig.1.4).

În general avem

DEFINIȚIA 1.5. *Cardinalul mulțimii* $\alpha^{-1}(P)$ *se numeşte* ***multiplicitatea*** *punctului P.*

Dacă toate punctele unei curbe α (I) sunt simple, atunci după definițiile anterioare aplicația α este injectivă. Deci, putem admite următoarea

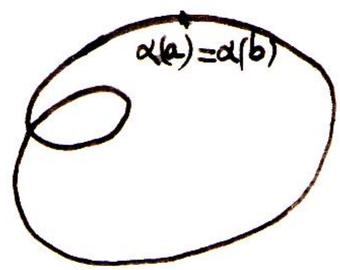


Figura 1.5.

DEFINIȚIE 1.6. *O funcție diferențiabilă şi injectivă* $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ *se numeşte* ***curbă simplă.***

DEFINIȚIA 1.7. *O funcție diferențiabilă* $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^3$*, cu* $\alpha(a) = \alpha(b)$*, se numeşte* ***curbă închisă*** *(fig.1.5).*

1.2. Tangenta şi planul normal. Curbă orientată

Fie $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ o curbă. Notăm cu t variabila din I şi $\alpha(t) = P$, $\alpha(t+h) = Q$, $t + h \in I$ (fig. 1.6.). Construim derivata

$$\vec{\alpha}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\alpha}(t+h) - \vec{\alpha}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{h}.$$

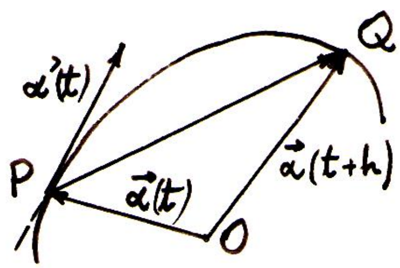


Figura 1.6.

DEFINIȚIA 1.8. *Vectorul* $\vec{\alpha}'(t)$*, cu* *originea în $\alpha(t)$=P, apare ca poziţie limită a vectorului $\overrightarrow{PQ}$, când $Q \in \alpha(I)$ se apropie de P şi se numeşte* **vector viteză**. *Dacă raportăm $\mathbf{R}^3$ la baza canonică, atunci*

$$\vec{\alpha}'(t) = x'(t)\vec{e}_1 + y'(t)\vec{e}_2 + z'(t)\vec{e}_3 .$$

Observaţia 1.4. $\vec{\alpha}'(t) \in \mathrm{T}_{\alpha(t)}(\mathbf{R}^3)$.

DEFINIŢII 1.9. *Un punct P=$\alpha(t)$ al curbei α în care $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, se numeşte* ***punct regulat.*** *Dacă $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in \mathrm{I}$, atunci curba se numeşte* ***regulată.***

Observaţia 1.5. Dacă P este un punct regulat, atunci punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ determină o dreaptă care apare ca limita dreptei PQ, când $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

DEFINIŢIA 1.10. *Fie P, un punct regulat al curbei α. Dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte* ***tangenta*** *la curba α in P. Planul care trece prin P şi are ca vector normal pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte* ***plan normal*** *la curba α în P (fig.1. 7 şi 1.8).*

Pentru mărimile definite avem următoarele ecuaţii:

$$d_{TP} \ : \ \frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)} \quad ,$$

$$\pi_{NP} \ : \ (x - x(t)) \cdot x'(t) + (y - y(t)) \cdot y'(t) + (z - z(t)) \cdot z'(t) = 0 \quad ,$$

cu M(x, y, z) un punct curent al mărimii respective.

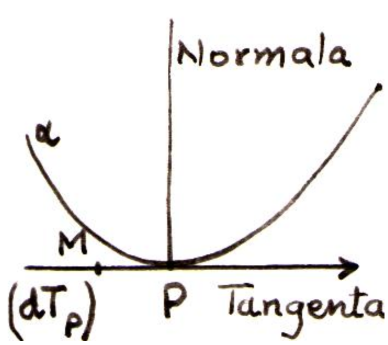


Figura 1.7.

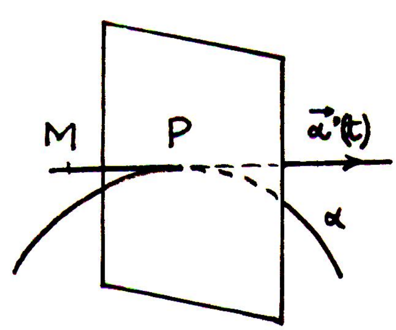


Figura 1.8.

Un punct al unei curbe poate să nu fie regulat. De aceea admitem

DEFINIȚIA 1.11. *Un punct $\alpha(t)=P\in\alpha(I)$, corespunzător unei valori a lui t pentru care $\vec{\alpha}'(t)=\vec{0}$, se numeşte* ***punct singular.***

Observația 1.6. Dacă $\vec{\alpha}'(t)=\vec{0}$, $\forall\ t\in J\subset I$, atunci $\vec{\alpha}=\vec{c}$, $\forall\ t\in J$ şi astfel restricția lui α la J se reduce la un punct. În consecință, dacă α admite puncte singulare şi nu se reduce la constante pe porțiuni, atunci aceste puncte sunt în general izolate.

DEFINIȚIA 1.12. *Dacă $\exists\, m>1$, $m\in\mathbf{N}$, astfel ca $\vec{\alpha}'(t)=\vec{\alpha}''(t)=...=\vec{\alpha}^{(m-1)}(t)=\vec{0}$ şi $\vec{\alpha}^{(m)}(t)\neq\vec{0}$, atunci punctul P corespunzător se numeşte* ***punct singular de ordinul m.***

În vecinătatea unui punct singular de ordinul m, formula lui Taylor dă

$$\vec{\alpha}(t+h)=\vec{\alpha}(t)+\frac{h^m}{m!}\left[\vec{\alpha}^{(m)}(t)+\vec{\varepsilon}(h)\right],\ \text{t + h}\in\text{I}\text{, cu } \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h)=\vec{0}.$$

Notând $P=\alpha(t)$ şi $Q=\alpha(t+h)$, avem

$$\lim_{h\to 0} m!\frac{\vec{\alpha}(t+h)-\vec{\alpha}(t)}{h^m}=\lim_{h\to 0} m!\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h^m}=\vec{\alpha}^{(m)}(t).$$

Vectorii $\vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}(t+h)$ au originea în O, iar vectorii $\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t), \ldots, \vec{\alpha}^{(m)}(t)$, au originea în extremitatea lui $\vec{\alpha}(t)$.

DEFINIȚIA 1.13. *Vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte* ***vector tangent*** *la curba α în punctul P singular de ordinul m.*

Punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ definesc o dreaptă care este limita dreptei PQ atunci când $P=\alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

DEFINIȚII 1.14. *Fie P un punct singular de ordinul m. Dreapta determinată de punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte* ***tangenta curbei*** *în punctul P.*

Planul care trece prin P şi are ca vector normal pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ *se numeşte* ***planul normal*** *la curba* α *în punctul P.*

Se deduce uşor că mărimile introduse au următoarele ecuații

$$d_{TP} \ : \ \frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)} = \frac{z - z(t)}{z^{(m)}(t)} \ ,$$

$$\pi_{NP} \ : \ (x - x(t)) \cdot x^{(m)}(t) + (y - y(t)) \cdot y^{(m)}(t) + (z - z(t)) \cdot z^{(m)}(t) = 0 \, .$$

Pe o curbă dată $\alpha(I)$, presupusă mulțime convexă, se pot stabili două şi numai două sensuri de parcurs (ordinea punctelor curbei care corespunde ordinii din I) pe care convenim să le notăm cu semnul + şi **-** .

DEFINIȚIA 1.15. *O curbă* α *împreună cu alegerea unui sens de parcurs pe* $\alpha(I)$ *se numeşte* ***curbă orientată.***

Fie α o curbă regulată. Dacă $\vec{\alpha}'(t)$ este vectorul tangent la α în $\alpha(t)$, atunci este evident să considerăm drept pozitiv acel sens de parcurs pe $\alpha(I)$ care să fie coerent cu sensul lui $\vec{\alpha}'(t)$ şi, deci, cu sensul pozitiv pe tangentă (analog cu orientarea unei drepte). Convenim să precizăm orientarea unei curbe şi a tangentei sale prin săgeți (fig. 1.9).

Dacă α posedă puncte singulare, atunci există situații când nu este posibilă alegerea pe curbă a unui sens de parcurs coerent cu cel de pe tangentă (fig.1.10).

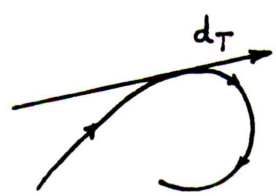


Figura 1.9.

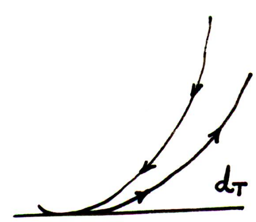


Figura 1.10

Clasificare. Curbele din spațiu se împart în două categorii: **curbe plane** şi **curbe strâmbe.**

DEFINIȚIA 1.16. *O curbă din spațiu se numeşte* ***curbă plană*** *dacă* $\forall \ t \in I$, $\exists \ a,b,c,d \in$ ***R,*** *astfel ca să aibă loc relația* $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$.

1.3. Câmpuri vectoriale pe o curbă

Noțiunea de câmp vectorial pe o curbă este o variantă a noțiunii generale de câmp vectorial.

Fie $\alpha\ :\ I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ o curbă şi $P = \alpha(t),\ t \in I$, un punct arbitrar al său.

DEFINIȚIA 1.17. *O funcție Y, care asociază fiecărui $t \in I$ un vector $\vec{Y}(t)$ tangent la $\boldsymbol{R}^3$ în punctul $\alpha(t)$, se numeşte **câmp vectorial pe curba** α (fig. 1.11).*

Exemplu. Viteza $\vec{\alpha}'$ este un câmp vectorial pe curba α. Acest câmp se mai numeşte şi **câmp tangent la curba** α (fig. 1.12).

Observația 1.7. Spre deosebire de $\vec{\alpha}'$, câmpurile vectoriale arbitrare pe α pot să conțină sau nu vectori al căror suport să fie tangent la curbă (fig. 1.11).

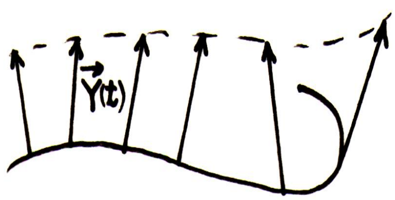


Figura 1.11

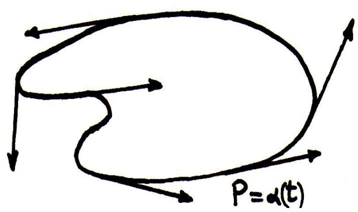


Figura 1.12

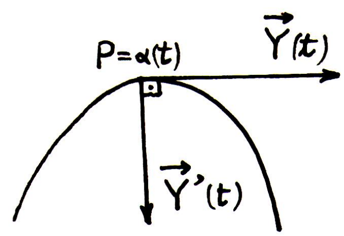


Figura 1.13.

tru câmpul $\vec{Y}(t)$ avem

$$\vec{Y}(t) = y_1(t)\vec{e}_1(\alpha(t)) + y_2(t)\vec{e}_2(\alpha(t)) + y_3(t)\vec{e}_3(\alpha(t)),$$

unde funcțiile $y_i : I \to \mathbf{R}$ se numesc **coordonatele euclidiene ale lui $\vec{Y}$.**

Funcțiile compuse $\vec{e}_1(\alpha(t)), \vec{e}_2(\alpha(t)), \vec{e}_3(\alpha(t))$ sunt câmpuri vectoriale pe α. Aceste câmpuri vor fi notate prescurtat $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

DEFINIȚIA 1.18. *Se admit prin definiție următoarele operații pentru câmpuri:*

$$\begin{aligned}
&(\vec{Y} + \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) + \vec{Z}(t),\\
&(f\vec{Y})(t) = f(t)\vec{Y}(t),\\
&(\vec{Y} \cdot \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) \cdot \vec{Z}(t),\\
&(\vec{Y} \times \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) \times \vec{Z}(t).
\end{aligned}$$

Observația 1.8. Aceste operații de câmpuri se traduc prin operațiile corespunzătoare asupra coordonatelor câmpurilor.

DEFINIȚIA 1.19. *Fie α o curbă regulată şi $\vec{\mathrm{Y}}$, un câmp vectorial pe α. Dacă $\left(\vec{\mathrm{Y}},\vec{\alpha}'\right)=0$, atunci $\vec{\mathrm{Y}}$ se numeşte* ***câmp normal*** *la α.*

Observații 1.9. 1. Deoarece $\vec{\mathrm{Y}}(t)=y_1(t)\vec{e}_1+y_2(t)\vec{e}_2+y_3(t)\vec{e}_3$, deducem că orice câmp $\vec{\mathrm{Y}}$ este echivalent cu o aplicație de tipul $\mathrm{F}:\mathrm{I}\to\mathbf{R}^3$. De aceea apare evidentă definiția : $\vec{\mathrm{Y}}$ se numeşte **diferențiabil** dacă toate coordonatele sale sunt diferențiabile.

2.Derivata unui câmp $\vec{\mathrm{Y}}$ este tot un câmp pe curba α :

$$\vec{\mathrm{Y}}'=\frac{dy_1}{dt}\vec{e}_1+\frac{dy_2}{dt}\vec{e}_2+\frac{dy_3}{dt}\vec{e}_3$$

3. În particular, derivata $\vec{\alpha}''$ a câmpului viteză $\vec{\alpha}'$ asociat lui α dă **câmpul accelerație,** care în general nu este dirijată după tangenta la curbă.

Avem

$$\left(a\vec{\mathrm{Y}}+b\vec{\mathrm{Z}}\right)'=a\vec{\mathrm{Y}}'+b\vec{\mathrm{Z}}' \;,\; \mathrm{a,b}\in\mathbf{R},$$

$$\left(f\vec{\mathrm{Y}}\right)'=f'\vec{\mathrm{Y}}+f\vec{\mathrm{Y}}',$$

$$\left(\vec{\mathrm{Y}}\cdot\vec{\mathrm{Z}}\right)'=\vec{Y}'\cdot\vec{Z}+\vec{Y}\cdot\vec{Z}',$$

$$\left(\vec{\mathrm{Y}}\times\vec{\mathrm{Z}}\right)'=\left(\vec{\mathrm{Y}}'\times\vec{\mathrm{Z}}\right)+\left(\vec{\mathrm{Y}}\times\vec{\mathrm{Z}}'\right).$$

4. Penultima formulă arată că dacă $\left(\vec{\mathrm{Y}},\vec{\mathrm{Z}}\right)$=const.$\Rightarrow$ $\left(\vec{\mathrm{Y}}',\vec{\mathrm{Z}}\right)+\left(\vec{\mathrm{Y}},\vec{\mathrm{Z}}'\right)$=0. În particular, dacă $\vec{\mathrm{Y}}$ are o lungime constantă, atunci $\vec{\mathrm{Y}}$ şi $\vec{\mathrm{Y}}$ ’ sunt ortogonali în orice punct (fig. 1.13). Într-adevăr, relația $\left\|\vec{\mathrm{Y}}\right\|^2=\left(\vec{\mathrm{Y}},\vec{\mathrm{Y}}\right)$=const., implică $\left(\vec{\mathrm{Y}},\vec{\mathrm{Y}}'\right)=0$. De aceea, dacă ne imaginăm ca α este traiectoria unui punct material care se deplasează cu o viteză de modul constant, atunci accelerația este un câmp normal la α (dirijat după normala la curbă).

DEFINIȚIA 1.20. *Un câmp $\vec{\mathrm{Y}}$ se numeşte* ***paralel*** *dacă toate coordonatele sale sunt constante.*

TEOREMA 1.1. *Fie curba* $\alpha : I \to \boldsymbol{R}^3$, *unde* $I \subset \boldsymbol{R}$ *este un interval deschis.*

1) *Curba* α *este constantă (se reduce la un punct) dacă şi numai dacă câmpul viteză* $\vec{\alpha}'$ *este identic nul.*

2) *Curba neconstantă* α *este o dreaptă dacă şi numai dacă câmpul accelerație este identic nul (câmpul viteză este paralel).*

3) *Un câmp* $\vec{Y}$ *pe* α *este paralel dacă şi numai dacă* $\vec{Y} = \vec{O}$.

Demonstrație. 1) Fie curba $\vec{\alpha}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$. Dacă $x(t) = a$, $y(t) = b$, $z(t) = c$, $\forall\ t \in I$ şi $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci $\vec{\alpha}(t) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ şi $\vec{\alpha}'(t)$ =(0,0,0), $\forall\ t \in I$.

Reciproc, din $\vec{\alpha}'(t) = 0$, $\forall\ t \in I$, rezultă $\alpha'(t) = 0$, $y'(t) = 0$, $z'(t) = 0$, $\forall\ t \in I$ şi, deci, $x(t) = a$, $y(t) = b$, $z(t) = c$ (fig. 1.14).

2) Fie $\vec{\alpha}(t) = (a^1 + a^2 t)\vec{e}_1 + (b^1 + b^2 t)\vec{e}_2 + (c^1 + c^2 t)\vec{e}_3$. Găsim $\vec{\alpha}'(t) = a^2\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + c^2\vec{e}_3$ şi $\alpha''(t) = (0,0,0)$.

Reciproc, din $x''(t) = 0, \quad y''(t) = 0, \quad z''(t) = 0, \quad \forall\ t \in I$, rezultă $x(t) = a^1 + a^2 t$, $y(t) = b^1 + b^2 t$, $z(t) = c^1 + c^2 t$ (fig. 1.15).

3) Fie $\vec{Y} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$. Rezultă $\vec{Y}' = (0,0,0)$.

Reciproc, din $\vec{Y}' = 0$, rezultă $\dfrac{dy_1}{dt} = 0$, $\dfrac{dy_2}{dt} = 0$, $\dfrac{dy_3}{dt} = 0$, $\forall\ t \in I$, sau $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$ (fig. 1.16).

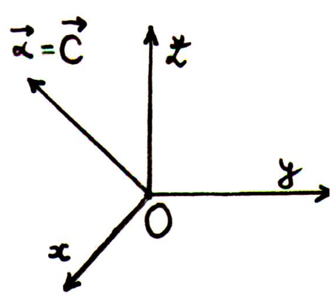


Figura 1.14.

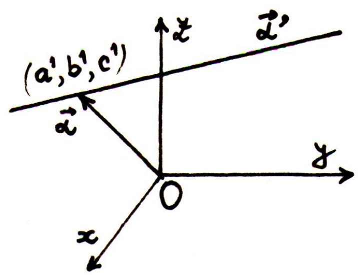


Figura 1.15.

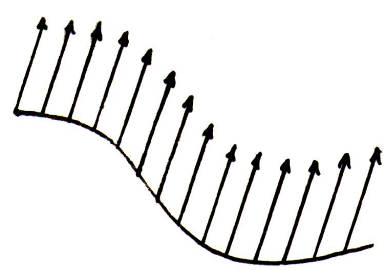


Figura 1.16.

1.4. Curbe definite prin ecuații carteziene implicite

DEFINIȚII 1.21. Curbele din $\mathbf{R}^3$ *mai pot fi introduse şi pornind de la funcții diferențiabile de tipul* $F=(f,\ g)\ :\ \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,\ F(x,\ y,\ z)=(f(x,\ y,\ z),\ g(x,\ y,\ z)).$ *Deoarece*

$$J(F)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{bmatrix},$$

punctele critice *ale lui F se află, prin definiție, rezolvând sistemul*

$$\frac{D(f,g)}{D(y,z)}=0\ ,\ \frac{D(f,g)}{D(z,x)}=0\ ,\ \frac{D(f,g)}{D(x,y)}=0\ .$$

Punctele în care cel puțin unul dintre aceşti determinanți este diferit de zero sunt ***puncte regulate.*** *Mulțimea*

$$C=F^{-1}(a,b)=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ f(x,y,z)=a,g(x,y,z)=b,cu\ \ a,b\in\mathbf{R}\ \ fixati\right\}$$

se numeşte ***mulțime de ecuații carteziene implicite*** $f(x,y,z)=a,\ \ g(x,y,z)=b$.

O mulțime de forma $f^{-1}(a)=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ (x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ f(x,y,z)=a,\ \ a\in\mathbf{R}\ \ fixat\right\}$

se numeşte ***mulțime de nivel constant a*** *sau* ***mulțime de ecuație carteziană implicită f(x, y, z)=a***.

Revenind la mulțimea C, aceasta este de fapt intersecția a două mulțimi de nivel constant. Ea poate să conțină atât puncte regulate, cât şi puncte critice ale lui F.

Fie $(x^0,y^0,z^0)\in C$. Mulțimea tuturor punctelor din C, a căror distanță față de (x^0,y^0,z^0) este mai mică decât un număr $\varepsilon>0$, se numeşte **vecinătate** a lui (x^0,y^0,z^0) în C.

TEOREMA 1.2. *Dacă* (x^0, y^0, z^0) *este un punct regulat din C, atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuațiile*

$$f(x,y,z)=a \ , \ g(x,y,z)=b$$

definesc o curbă simplă şi regulată.

Demonstrație. Deoarece ecuațiile $f(x,y,z)=a$, $g(x,y,z)=b$ reprezintă, respectiv, mulțimi de nivel constant diferite, mulțimea C apare ca fiind intersecția acestor mulțimi.

În ipoteza $\frac{D(f,g)}{D(y,z)}(x^0, y^0, z^0) \neq 0$, teorema funcțiilor implicite asigură că sistemul $f(x,y,z)=a$, $g(x,y,z)=b$ defineşte două funcții $x \to y(x)$, $x \to z(x)$, în vecinătatea I a punctului x^0, pentru care $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{D(f,g)}{D(z,x)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{D(f,g)}{D(x,y)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}}$.

Astfel, porțiunea din C din jurul punctului (x^0, y^0, z^0) poate fi gândită în mai multe feluri (fig. 1.17):

- intersecția a două suprafețe,
- graficul aplicației $h: I \to \mathbf{R}^2$,

$$h(x) = (y(x), \ z(x)),$$

- imaginea lui I prin aplicația $\alpha: x=t$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

De aceea , această porțiune este o curbă simplă şi regulată.

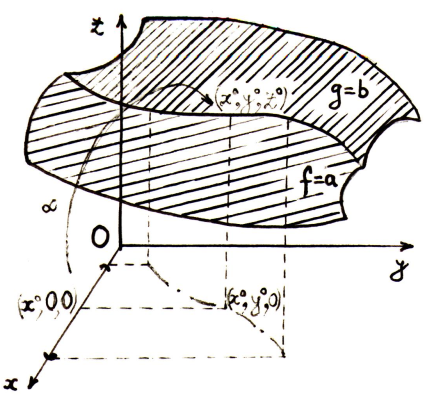


Figura 1.17

Observația 1.10. În ipoteza teoremei 1.2, mulțimea C este reuniunea imaginilor unor curbe simple şi regulate şi se numeşte **curbă de ecuații carteziene implicite** $f(x,y,z)=a$, $g(x,y,z)=b$. Această denumire se pastrează uneori chiar dacă C conține şi puncte critice.

Daca f şi g sunt polinoame, atunci C se numeşte **curbă algebrică.**

Observația 1.11. Fie P$\left(x^0, y^0, z^0\right)$, un punct regulat al lui C. Conform definițiilor 1.10. şi a teoremei1.2, deducem că tangenta la C în P are ecuațiile

$$(d_{TP}): \frac{x-x^0}{\frac{D(f,g)}{D\left(y^0,z^0\right)}} = \frac{y-y^0}{\frac{D(f,g)}{D\left(z^0,x^0\right)}} = \frac{z-z^0}{\frac{D(f,g)}{D\left(x^0,y^0\right)}} ,$$

iar planul normal corespunzător are ecuația

$$(\pi_{NP}) \ : \ \left(x-x^0\right)\frac{D(f,g)}{D\left(y^0,z^0\right)} + \left(y-y^0\right)\frac{D(f,g)}{D\left(z^0,x^0\right)} + \left(z-z^0\right)\frac{D(f,g)}{D\left(x^0,y^0\right)} = 0 .$$

Exemple. 1) **Dreapta.** Ecuațiile carteziene implicite ale unei drepte din spațiu (intersecție de plane) sunt

$$(d): \begin{cases} a^1x + b^1y + c^1z + d^1 = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2 = 0 \end{cases} , \quad rang\begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 2 ,$$

iar ecuațiile ei parametrice sunt

$$(\alpha) \ : \ x = x^0 + lt \ , \ y = y^0 + mt \ , \ z = z^0 + nt \ , \ t \in \mathbf{R}.$$

2) **Conicele.** În general, intersecția dintre un plan şi o cuadrică este o conică :

$$(C): \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} ,$$

unde $f(x,y,z)$ este un polinom de gradul al doilea în x, y şi z .

1.5. Formulele Frenet pentru curbe de viteză unu

Pentru început vom face câteva observații în legatură cu studiul formei unei curbe din spațiu în vecinătatea unui punct de-al său.

O mai bună aproximare a formei unei curbe din spațiu se poate obține utilizând trei derivate liniar independente. De exemplu, presupunem că P este un punct regulat şi că $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_P(\mathbf{R}^3)$**.** Folosind formula lui Taylor de ordinul trei

$$\vec{PQ} = \frac{h}{1!}\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2!}\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^3}{3!}\vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{3!}\vec{\varepsilon}(h)\ ,\ \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = 0\ ,$$

ajungem la concluzia că, pentru $|h|$ suficient de mic, tripletul $\left(h, \frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6}\right)$ dă cu aproximație coordonatele lui $\vec{PQ}$ în baza aleasă . Când h trece prin zero, prima şi ultima coordonată îşi schimbă semnul, iar cea din mijloc şi-l păstrează. Astfel, în vecinătatea punctului P, arcul se află în acelaşi semispațiu cu $\vec{\alpha}''(t)$, traversează pe $\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}'''(t)$ şi planul determinat de P, $\vec{\alpha}'(t)$ şi $\vec{\alpha}'''(t)$(fig. 1.18).

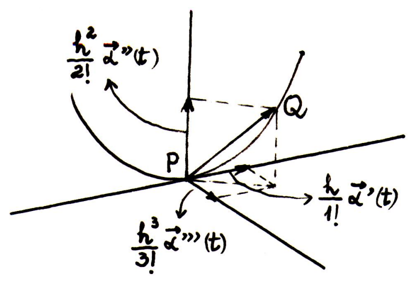


Figura 1.18.

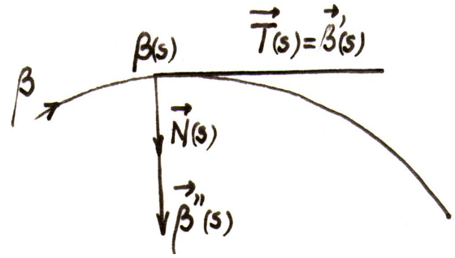
DEFINIȚIA 1.22. *Planul determinat de* $P, \vec{\alpha}'(t)$ *si* $\vec{\alpha}'''(t)$ *se numeşte* ***plan osculator.***

Astfel, în vecinătatea punctului P, curba considerată are o abatere de la tangentă (**curbare**) şi o abatere de la planul osculator (**torsionare**).

Ne propunem să găsim elementele matematice care măsoară curbarea şi torsionarea unei curbe regulate din $\mathbf{R}^3$**.**

Reperul Frenet. Fie $\beta : J \to \mathbf{R}^3$**,** o curbă cu viteza unu, adică $\|\vec{\beta}'(s)\| = 1, \forall s \in J$.

Câmpul $\vec{T} = \vec{\beta}'$ se numeşte câmp **tangent unitar** al lui β. Derivând pe $\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}' = 1$, deducem $\vec{\beta}''\cdot\vec{\beta}' = 0$ şi deci $\vec{T}' = \vec{\beta}''$, $\vec{\beta}'' \perp \vec{\beta}'$. Curba β se încovoaie în acelaşi sens cu $\vec{T}' = \vec{\beta}''$. Pe măsură ce $\|\vec{\beta}''\|$ creşte, încovoierea lui β creşte. În acest fel, $\vec{T}' = \vec{\beta}''$ controlează curbarea lui β, iar lungimea lui $\vec{T}'$ dă o măsură numerică a acestei curbări.



De aceea $\vec{T}'$, se numeşte **câmp curbură**, iar funcția

$$k : J \to [0,\infty) \ , \ k(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\|$$

se numeşte **curbura lui** β (fig. 1.19).

Figura 1.19

Câmpul vectorial $\vec{N} = \frac{1}{k}\vec{T}'$, cu k>0, se numeşte **câmp normal principal al lui** β**.** Câmpul $\vec{N}$ indică în fiecare punct sensul în care se curbează β. Evident, $\vec{T}(s)$ şi $\vec{N}(s)$ determină planul osculator al curbei β. Pentru controlul abaterii curbei de la planul osculator (**torsionare**), în vecinătatea punctului $\beta(s)$ se utilizează versorul normal al acestui plan.De aceea se introduce câmpul unitar $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$, care se numeşte **câmp normal pe** β**.**

Evident, câmpurile vectoriale $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, definite pe β sunt ortonormate. Ansamblul $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ se numeşte **câmpul reperului Frenet** pe β, iar ansamblul $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ se numeste **reper Frenet ataşat punctului** $\beta(s)$ **de pe curbă.** Acest reper determină un triedru Frenet mobil, ale cărui muchii se numesc **tangentă, normala principală** şi **binormala**.

Planele de coordonate ale acestui reper se numesc, respectiv, **plan normal**, **plan rectificant** şi **plan osculator** (fig. 1.20).

Utilitatea câmpului reperului Frenet în studiul unei curbe regulate β constă în faptul că dă mai multe informații despre curbă decât ar da folosirea oricărui alt câmp de repere. Ideea de bază în acest sens constă în posibilitatea exprimării derivatelor $\vec{T}', \vec{N}', \vec{B}'$ cu ajutorul lui $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$.

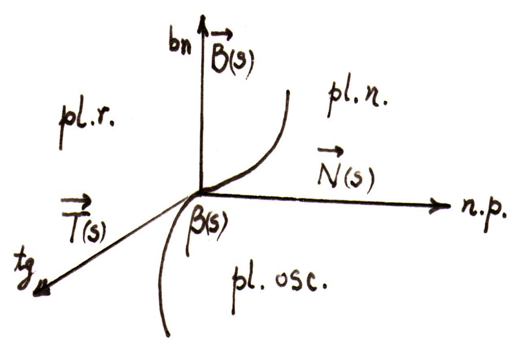


Figura 1.20

Ştim că $\vec{T}' = k\vec{N}$ (din definiția curburii k).

Să arătăm că $\vec{B}'$ este coliniar cu $\vec{N}$. Pentru aceasta este suficient să dovedim că $\vec{B}'\cdot\vec{B}=0$ şi $\vec{B}'\cdot\vec{T}=0$. Prima relație este adevărată deoarece $\vec{B}(s)$ este un versor. Pen-tru a demonstra a doua relație, derivăm pe $\vec{B}\cdot\vec{T}$ =0 şi avem

$$\vec{B}'\cdot\vec{T}+\vec{B}\cdot\vec{T}'=0 \text{ sau } \vec{B}'\cdot\vec{T}=-\vec{B}\cdot\left(k\vec{N}\right)=0.$$

DEFINIȚIA 1.23. *Funcția reală*

$$\vec{\tau} : J \rightarrow \mathbf{R}, \text{ definită pe } \vec{B}'=-\tau\vec{N},$$

se numeşte **torsiunea curbei** *(semnul minus este pus prin convenție). $\tau(s)$ poate fi un număr negativ, nul sau pozitiv.*

Să exprimăm acum pe $\vec{N}'$ în funcție de $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$. Avem

$$\vec{N}'=\left(\vec{N}'\cdot\vec{T}\right)\vec{T}+\left(\vec{N}'\cdot\vec{N}\right)\vec{N}+\left(\vec{N}'\cdot\vec{B}\right)\vec{B}.$$

Din $\vec{N}(s)$ versor, rezultă $\vec{N}'\cdot\vec{N}=0$

Prin derivarea lui $\vec{N}\cdot\vec{T}$ =0, în raport cu s , găsim

$$\vec{N}'\cdot\vec{T}=-\left(\vec{N}\cdot\vec{T}'\right)=-\vec{N}\cdot\left(k\vec{N}\right)=-k.$$

Prin derivarea în raport cu s a lui $\vec{N}\cdot\vec{B}=0$, găsim

$$\vec{N}'\cdot\vec{B}=-\left(\vec{N}\cdot\vec{B}'\right)=-\vec{N}\cdot\left(-\tau\vec{N}\right)=\tau.$$

Am obținut astfel

$$\vec{N}'=-k\vec{T}+\tau\vec{B}$$

şi am demonstrat

TEOREMA 1.3.(formulele lui Frenet). *Dacă $\beta : J \rightarrow \mathbf{R}^3$ este o curbă cu viteza unu, de curbură $k>0$ şi torsiune τ, atunci*

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \quad\quad k\vec{N} \\ \vec{N}' &= -k\vec{T} \quad\quad +\tau\vec{B} \\ \vec{B}' &= \quad\quad -\tau\vec{N}. \end{aligned}$$

1.6. Formulele Frenet pentru curbe de viteză oarecare

Fie $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$, $t \to \alpha(t)$, o curbă regulată care nu are viteza unu şi $\beta : J \to \mathbf{R}^3$, $s \to \beta(s)$, reprezentarea sa normală. Dacă $s : I \to J$ este abscisa curbilinie, atunci

$\forall t \in I,\ \alpha(t) = \beta(s(t))$

Dacă $k_\beta > 0, \tau_\beta, \vec{T}_\beta, \vec{N}_\beta$ şi $\vec{B}_\beta$ sunt elementele Frenet pentru β, atunci pentru α definim:

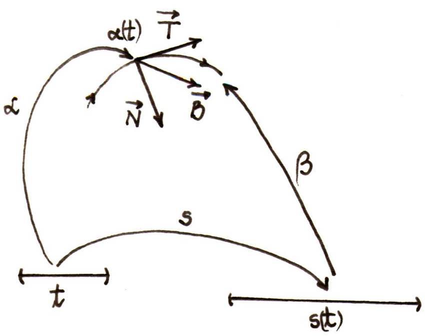


Figura 1.21.

-funcţia curbură $k = k_\beta \circ s$,

-funcţia torsiune $\tau = \tau_\beta \circ s$,

-câmpul tangent unitar $\vec{T} = \vec{T}_\beta \circ s$,

-câmpul normal principal $\vec{N} = \vec{N}_\beta \circ s$,

-câmpul binormal $\vec{B} = \vec{B}_\beta \circ s$

şi astfel obţinem elementele Frenet pentru o curbă cu viteză oarecare (fig. 1.21).

TEOREMA 1.4. (formulele Frenet pentru o curbă de viteză oarecare). *Dacă $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ este o curbă regulată de viteză v şi curbură k>0, atunci*

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \phantom{-kv\vec{T}} \quad kv\vec{N} \\ \vec{N}' &= -kv\vec{T} \qquad\quad + \tau v\vec{B} \\ \vec{B}' &= \phantom{-kv\vec{T}} \quad -\tau v\vec{N} \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie β, reprezentarea normală a lui α. Prin definiţie $\vec{T}(t) = \vec{T}_\beta(s(t))$, $t \in I$ şi prin derivare găsim

$$\vec{T}'(t) = s'(t)\cdot\vec{T}_\beta'(s(t)).$$

Pe de altă parte teorema 1.3 dă

$$\vec{T}_\beta'(s) = k_\beta(s)\vec{N}_\beta(s).$$

Prin înlocuirea lui s cu $s(t)$ în ultima relație şi revenind la $\vec{T}'(t)$, avem

$$\vec{T}'(t) = s'(t)k_\beta(s(t))\cdot\vec{N}_\beta(s(t)) = v(t)k(t)\vec{N}(t).$$

La fel se demonstrează şi celelalte formule. □

LEMA 1.1. Dacă v este o curbă regulată cu viteza v, atunci câmpurile viteză şi accelerație ale lui α sunt date de

$$\vec{\alpha}' = v\vec{T}\ ,\ \vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

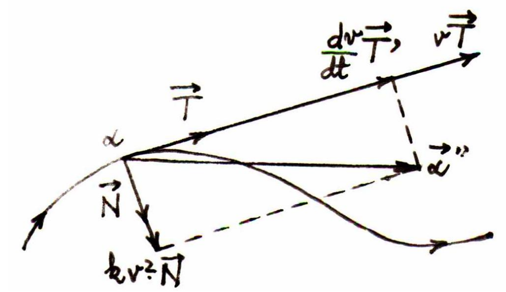


Figura 1.22

Demonstrație. Deoarece $\vec{\alpha} = \vec{\beta}(s)$, găsim

$$\vec{\alpha}' = s'(t)\cdot\vec{\beta}'(s(t)) = \vec{v}(t)\vec{T}_\beta(s(t)) = \vec{v}(t)\vec{T}(t).$$

Derivând încă o dată obținem (fig. 1.22)

$$\vec{\alpha}''(t) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\vec{T}' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$ □

Observația 1.12. Prin definiție, $\vec{\alpha}''$ este variația vitezei $\vec{\alpha}'$ în unitatea de timp şi, în general, se schimbă atât lungimea lui $\vec{\alpha}'$ cât şi direcția. De aceea formula care dă accelerația este mai complicată decât formula care dă viteza.

DEFINIȚIA 1.24. ***Componenta tangențială*** *$\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{\mathrm{T}}$ a lui $\vec{\alpha}''$ indică variația lungimii lui $\vec{\alpha}'$, iar* ***componenta normală*** *$kv^2\vec{N}$ indică variația direcției lui $\vec{\alpha}'$.*

Să dăm acum formulele explicite pentru determinarea elementelor Frenet.

TEOREMA 1.5. *Dacă $\alpha : I \to \boldsymbol{R}^3$ este o curbă regulată, atunci*

$$\vec{\mathrm{T}} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\ ,\ \vec{\mathrm{N}} = \vec{\mathrm{B}}\times\vec{\mathrm{T}}\ ,\ \vec{\mathrm{B}} = \frac{\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|}\ ,\ k = \frac{\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}\ ,\ \tau = \frac{(\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}'')\cdot\vec{\alpha}'''}{\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|^2}\ ,$$

unde semnul „' ” înseamnă derivata în raport cu t.

Demonstrație. Deoarece $v=\|\vec{\alpha}'\|>0$, formula $\vec{\mathrm{T}}=\dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este echivalentă cu $\vec{\alpha}'=v\vec{\mathrm{T}}$.

Din lema 1.1 găsim

$$\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''=kv^3\vec{\mathrm{B}}$$

Deoarece $\|\vec{\mathrm{B}}\|=1$, $k\geq 0$ şi $v>0$, obținem

$$kv^3=\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|$$

Această relație arată că pentru curbele regulate condiția k>0 este echivalentă cu $\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|>0$. De aceea , pentru k>0, vectorii $\vec{\alpha}'$ şi $\vec{\alpha}''$ sunt liniar independenți şi determină planul osculator în fiecare punct ca $\vec{\mathrm{T}}$ şi $\vec{\mathrm{N}}$. Rezultă

$$\vec{\mathrm{B}}=\frac{\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''}{kv^3}=\frac{\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|}.$$

Pentru obținerea produsului mixt $(\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}'',\vec{\alpha}''')$ este suficient să exprimăm pe $\vec{\alpha}'''$ cu ajutorul lui $\vec{\mathrm{T}},\vec{\mathrm{N}}$, $\vec{\mathrm{B}}$. Avem

$$\vec{\alpha}'''=\left(\frac{dv}{dt}\vec{\mathrm{T}}+kv^2\vec{\mathrm{N}}\right)'=kv^3\tau\vec{\mathrm{B}}+\ldots$$

unde ceilalți termeni nu ne interesează, deoarece $\vec{B}\cdot\vec{T}=0$, $\vec{B}\cdot\vec{N}$ =0.
Rezultă

$$(\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}'')\cdot\vec{\alpha}'''=k^2v^6\tau$$

şi, cum $kv^3=\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|$, găsim formula pentru τ. □

1.7. Aplicații la calcularea curburii şi torsiunii

Pe baza rezultatelor din § 1.5 şi § 1.6 este suficient să facem raționamente numai pentru curbele cu viteza unu (în loc de curbe regulate) şi le preferăm deoarece sunt mai simple.

TEOREMA 1.6. *O curbă cu viteza unu* $\beta : J \to \mathbf{R}^3$ *este o parte a unei drepte dacă şi numai dacă k=0.*

Demonstrație. Deoarece $k(s)=\left\|\vec{\beta}''(s)\right\|$, relația k>0 este echivalentă cu $\vec{\beta}''(s)=\vec{0}$, $\forall\ s\in J$.

TEOREMA 1.7. *Fie* $\beta : J \to \mathbf{R}^3$*, o curbă cu viteza unu, cu k>0. Curba* β *este plană dacă şi numai dacă* τ*=0.*

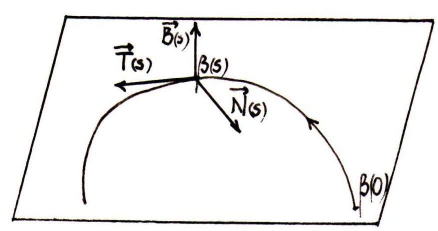


Figura 1.23

Demonstrație. Fie planul $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}=0$.

Dacă β se află în acest plan, atunci $(\vec{\beta}-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}=0$.

Derivând, avem $\vec{\beta}'\cdot\vec{a}=\vec{\beta}''\cdot\vec{a}=0$. Rezultă că $\vec{a}$ este perpendicular pe $\vec{T}=\vec{\beta}'$ şi $\vec{N}=\dfrac{\vec{\beta}''}{k}$. Astfel $\vec{B}=\pm\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, adică $\vec{B}'=0$ şi, prin urmare, τ=0.

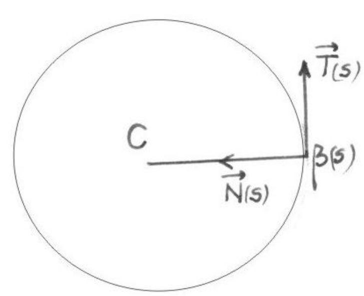
Invers, presupunem τ=0. Din teorema 1.3 rezultă $\vec{B}'=\vec{0}$ şi deci $\vec{B}=\vec{a}_0$. Vom arăta că β se află în planul care trece prin $\beta(0)$ şi este perpendicular pe $\vec{B}$ (fig. 1.23). Pentru aceasta considerăm funcția

$$f : J \to \mathbf{R},\ f(s)=(\vec{\beta}(s)-\vec{\beta}(0))\cdot\vec{B}.$$

Avem $\dfrac{df}{ds}=\vec{\beta}'\cdot\vec{B}=0$ şi deci $f(s)=const$. Cum $f(0)=0$, rezultă $f(s)=0$.

Astfel,

$$(\vec{\beta}(s)-\vec{\beta}(0))\cdot\vec{B}=0,\ \forall\ s\in J.$$



TEOREMA 1.8. *Fie* $\beta : J \to \boldsymbol{R}$ *o curbă cu viteza unu care are curbura* $k>0$ *şi torsiunea* τ*. Curba* β *este o parte a unui cerc de raza* $\dfrac{1}{k}$ *dacă şi numai dacă* $k=const.$ *şi* $\tau=0$*.*

Figura 1.24.

Demonstrație. Fie $\tau=0$, adică o curbă plană.

Considerăm curba $\vec{\delta} = \vec{\beta} + \dfrac{1}{k}\vec{\mathrm{N}}$. Avem $\vec{\delta}' = \vec{\beta}' + \dfrac{1}{k}\vec{\mathrm{N}}' = \vec{\mathrm{T}} + \dfrac{1}{k}\left(-k\vec{\mathrm{T}}\right) = 0$.

Astfel, curba δ se reduce la un punct, adică

$$\forall\ s \in J\ ,\ \vec{\beta}(s) + \frac{1}{k}\vec{\mathrm{N}}(s) = \vec{C}\ \Rightarrow\ \left\|\vec{\beta}(s) - \vec{C}\right\| = \left\|-\frac{1}{k}\vec{\mathrm{N}}\right\| = \frac{1}{k}.$$

Rezultă că β se află pe cercul cu centrul în C şi de rază $\dfrac{1}{k}$ (fig. 1.24).

Invers, fie β o parte a unui cerc de rază r. Deoarece cercul este o curbă plană, avem $\vec{\beta}(s) = \vec{C} - r\vec{\mathrm{N}}(s)$ şi $\tau=0$. De aici şi din teorema 1.3 rezultă $\vec{\beta}'(s) = -r\vec{\mathrm{N}}'(s) = rk\vec{\mathrm{T}}(s)$, adică $rk = 1$ sau $k = \dfrac{1}{r}$. □

În continuare ne vom ocupa de elici circulare.

DEFINIȚIA 1.25. *O curbă regulată* $\alpha : J \to \boldsymbol{R}^3$, $t \to \alpha(t)$ *al cărei vector tangent unitar* $\vec{\mathrm{T}}(t)$ *face în fiecare punct un unghi constant cu un vector* $\vec{u}$ *dat, adică* $\vec{T}(t)\cdot\vec{u} = \cos\theta$, $\forall\, t \in I$, *se numeşte* ***elice circulara****.*

Observația 1.12. Condiția impusă nu este afectată de reparametrizare. De aceea ne vom ocupa de elicea cilindrică $\beta : J \to \mathbf{R}^3$, care are viteza unu.

Observația 1.13. Fie β o curbă de viteză unu, pentru care $\vec{T}\cdot\vec{u}=\cos\theta$. Luând pe $\beta(0)$ ca origine, funcția $h(s)=(\vec{\beta}(s)-\vec{\beta}(0))\cdot\vec{u}$ arată cum se ridică $\beta(s)$ în direcția lui $\vec{u}$ (fig. 1.25). Pe de altă parte

$$\frac{dh}{ds}=\vec{\beta}'\cdot\vec{u}=\vec{T}\cdot\vec{u}=\cos\theta \ ,$$

din care

$$h(s)=s\cos\theta \ .$$

Observația 1.14. Dacă prin fiecare punct al lui β se duce o dreaptă paralelă cu $\vec{u}$, atunci se obține o suprafață cilindrică pe care se află β. Considerentele de mai sus arată că pentru orice elice cilindrică β există o curbă γ astfel încât

$$\vec{\beta}(s)=\vec{\gamma}(s)+s\cos\theta\,\vec{u} \ ,$$

unde abscisa curbilinie s este măsurată, de exemplu, de la zero. Curba γ se numeşte **curba secțiunii transversale** a suprafeței cilindrice pe care se află β . Ea se află în planul determinat de punctul $\beta(0)$ şi de vectorul normal $\vec{u}$ (fig. 1.26). De asemenea, dacă curbura lui β este k, atunci, printr-un calcul simplu, se obține că funcția curbură a lui γ este $\dfrac{k}{\sin^2\theta}$.

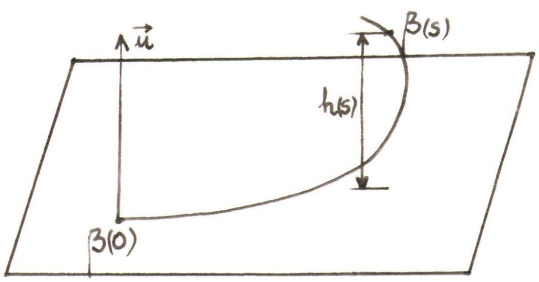


Figura 1.25.

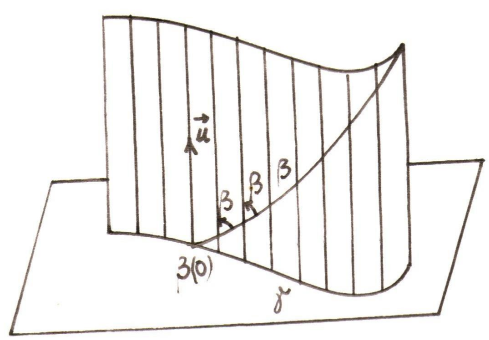


Figura 1.26.

Observația 1.15. Pentru o parametrizare oarecare avem

$$\vec{\alpha}(t)=\vec{\gamma}(t)+s(t)\cos\theta\ \vec{u}\,\text{,}$$

unde $s=s(t)$ este abscisa curbilinie.

TEOREMA 1.9. *Fie* $\beta : J \to \mathbf{R}^3$**,** *o curbă cu viteza unu, care are curbura k>0 şi torsiunea τ. Curba* β *este o elice cilindrică dacă şi numai dacă* $\frac{\tau}{\beta}$ *=const.*

Demonstrație. Dacă β este o elice cilindrică cu $\vec{T} \cdot \vec{u}$ =cosθ, atunci

$$0 = \left(\vec{T} \cdot \vec{u}\right)' = \vec{T}' \cdot \vec{u} = (k\vec{N}) \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{u} = 0 .$$

Astfel, $\forall\ s \in J$, $\vec{u}$ se află în planul lui $\vec{T}(s)$ şi $\vec{B}(s)$. Deoarece $\vec{u}$ este un versor, avem $\vec{u} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$ şi prin derivare găsim

$$0 = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\vec{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{k} = ctg\theta = const .$$

Invers, fie $\frac{\tau}{k} = const$. Alegem pe θ astfel încât $\frac{\tau}{k} = ctg\theta$ şi construim câmpul $\vec{U} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$. Deoarece $\vec{U}' = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\vec{N} = \vec{0}$, rezultă că $\vec{U}$ este un câmp de vectori paraleli şi, deci, el se reprezintă prin vectorul $\vec{u}$ astfel încât $\vec{T} \cdot \vec{u}$ =cosθ . De aceea curba β este o elice cilindrică.

Caz particular: elicea circulară. În acest caz suprafața cilindrică este un cilindru circular drept iar secțiunea transversală este un cerc cu raza $\frac{\sin^2\theta}{k}$.

1.8. Probleme rezolvate

1. Să se arate că

$$(C): \quad \vec{r} = a\left(\sin t\cos t\ \vec{i} + \sin^2 t\ \vec{j} + \cos t\ \vec{k}\right) \quad , \quad t \in \mathbf{R}$$

este o curbă sferică şi apoi să se afle cosinusurile directoare ale tangentei la curba (C).

Rezolvare. Eliminând parametrul t între ecuațiile

$$x = a\sin t\cos t \quad , \quad y = a\sin^2 t \quad , \quad z = a\cos t \quad ,$$

obținem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, adică o sferă cu centrul în originea reperului $Oxyz$ şi de rază a.

Deoarece curba (C), dată prin ecuația vectorială $\vec{r} = \vec{r}(t)$, cu $t \in$ **R,** este o curbă regulată, versorul tangentei la curba (C) într-un punct $P(\vec{r}(t))$ este

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}.$$

Prin calcul, avem

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = a\left(\cos 2t\ \vec{i} + \sin 2t\ \vec{j} - \sin t\ \vec{k}\right),$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = a\sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + \sin^2 t} = a\sqrt{1+\sin^2 t},$$

$$\vec{T} = \frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{1+\sin^2 t}\left(\cos 2t\ \vec{i} + \sin 2t\ \vec{j} - \sin t\ \vec{k}\right).$$

Rezultă

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{1+\sin^2 t}\cos 2t \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{1+\sin^2 t}\sin 2t \quad ; \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{1+\sin^2 t}\sin t.$$

2. Fie curba $x = 1 + t^3 \quad , \quad y = t^2 + t^3 \quad , \quad z = 5t^3 + 2t^2 + 2 \quad , \quad t \in$ **R.**

1) Să se arate că este o curbă simplă, plană şi să se găsească planul curbei.

2) Să se determine punctul singular al curbei, tangenta şi planul normal în acest punct.

Rezolvare. 1) Ecuația vectorială a curbei este

$$\vec{r} = \left(1+t^3\right)\vec{i} + \left(t^2+t^3\right)\vec{j} + \left(5t^3+2t^2+2\right)\vec{k} \quad , \quad t \in \mathbf{R},$$

care este o funcție diferențiabilă şi injectivă, deci (conform definiției 1.6) reprezintă o curbă simplă.

Calculăm torsiunea $\tau = \dfrac{\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'',\ \vec{r}\,'''\right)}{\|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\|^2}$

şi avem

$$\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'',\ \vec{r}\,'''\right)=\begin{vmatrix}3t^2 & 2t+3t^2 & 4t+15t^2\\ 6t & 2+6t & 4+30t\\ 6 & 6 & 30\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}3t^2 & 2t & 4t\\ 6t & 2 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\ ,$$

deoarece coloanele 2 şi 3 sunt proporționale. Prin urmare $\tau=0$ şi curba este plană (conform teoremei 1.5).

Pentru a găsi planul curbei (conform definiției 1.16), trebuie ca să determinăm numerele reale $a,b,c,d,$ astfel ca $ax(t)+by(t)+cz(t)+d=0\ ,\quad \forall t\in\mathbf{R}.$ Înlocuind x,y şi z cu ecuațiile parametrice ale curbei şi folosind metoda coeficienților nedeterminați, obținem soluția

$$(a,\ b,\ c,\ d)=-d(3,\ 2,\ -1,\ -1)\text{, cu }\ d\in\mathbf{R},$$

adică, planul curbei este de ecuație $3x+2y-z-1=0$.

2) Folosind definiția 1.11, avem $\vec{r}\,'(t)=0$ pentru $t=0$. Deci, punctul singular este punctul $M_0(1,\ 0,\ 2)$ de pe curba dată. Din definițiile 1.12 obținem că M_0 este un punct singular de ordinul al doilea, pentru că $\vec{r}\,'(0)=\vec{0}_V$ şi $\vec{r}\,''(0)=2\vec{j}+4\vec{k}\neq\vec{0}_V$. Utilizând definițiile 1.14, obținem mărimile cerute. Astfel, tangenta curbei în punctul M_0 este

$$d_{TM_0}\ :\ \frac{x-x(0)}{x''(0)}=\frac{y-y(0)}{y''(0)}=\frac{z-z(0)}{z''(0)}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{4}\quad ,$$

iar planul normal la curbă în punctul M_0 este

$$\pi_{NM_0}\ :\ (x-x(0))x''(0)+(y-y(0))y''(0)+(z-z(0))z''(0)=0\quad\Leftrightarrow\quad y+2z-4=0\,.$$

3. Fie curba

$$(\Gamma)\ :\ \vec{r}=t\ \vec{i}+\frac{t^2}{2}\vec{j}+\frac{t^3}{6}\vec{k}\quad ,\quad t\in\mathbf{R}\text{ şi punctele }M_1(t^1),\ M_2(t^2)\in\Gamma\,.$$

i) Să se scrie ecuațiile planelor osculatoare la curbă în cele două puncte.

ii) Să se arate că aceste plane sunt ortogonale în punctele $M_1,\ M_2 \in \Gamma$, pentru care produsul absciselor este egal cu -2.

Rezolvare. i) Din definiția 1.22 rezultă că planul osculator în punctul $M_S\left(t^S\right)$, cu $s=1,\ 2$, are ecuația

$$\left(\pi_{O_S}\right)\ :\ \begin{vmatrix} x-x\left(t^S\right) & y-y\left(t^S\right) & z-z\left(t^S\right) \\ x'\left(t^S\right) & y'\left(t^S\right) & z'\left(t^S\right) \\ x''\left(t^S\right) & y''\left(t^S\right) & z''\left(t^S\right) \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-t^S & y-\dfrac{\left(t^S\right)^2}{2} & z-\dfrac{\left(t^S\right)^3}{6} \\ 1 & t^S & \dfrac{\left(t^S\right)^2}{2} \\ 0 & 1 & t^S \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\left(\pi_{O_S}\right)\ :\ \frac{\left(t^S\right)^2}{2}\cdot x - t^S\cdot y + z - \frac{\left(t^S\right)^3}{6} = 0\ ,\ \text{cu}\ \ s=1,\ 2.$$

ii) Din $M_1\left(t^1\right),\ M_2\left(t^2\right) \in \Gamma$ şi produsul absciselor egal cu -2, rezultă că $x^1 x^2 = -2$, adică $t^1\cdot t^2 = -2$. Condiția ca planele osculatoare să fie ortogonale este ca $\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2 = 0$, unde vectorul $\vec{N}_S$ este normal planului $\pi 0_S$, cu $s=1,\ 2$. Calculând produsul scalar obținem

$$\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2 = \left(\frac{\left(t^1\right)^2}{2},\ -t^1,\ 1\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\left(-t^2\right)^2}{2} \\ -t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\left(t^1 t^2\right)^2}{4} + t^1 t^2 + 1 = 0.\ \text{q.e.d.}$$

4. Fie curba (Γ) : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t \\ z = 2t^2 - 1 \end{cases}$, cu $t \in$ **R*.**

Să se determine punctele curbei ale căror binormale sunt perpendiculare pe dreapta (d) : $\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$.

Rezolvare. Se observă că dreapta d este dată prin intersecția a două plane de vectori normali $\vec{N}_1(1,\ 1,\ 0)$ şi, respectiv, $\vec{N}_2(4,\ 0,\ -1)$. Prin urmare, vectorul director al dreptei d este $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$.

Ecuația vectorială a curbei este

$$(\Gamma)\ :\ \vec{\alpha} = \frac{1}{t}\vec{i} + t\ \vec{j} + (2t^2 - 1)\vec{k} \quad , \quad t \in \mathbf{R}^*.$$

Deoarece aceasta este o curbă regulată, expresia binormalei (conform teoremei 1.5) este

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|} \ ,$$

unde

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dfrac{1}{t^2} & 1 & 4t \\ \dfrac{2}{t^3} & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \frac{12}{t^2}\vec{j} - \frac{2}{t^3}\vec{k}$$

Condiția ca dreapta d să fie ortogonală binormalei $\vec{B}$ este echivalentă cu

$$\vec{a} \cdot (\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 + \frac{12}{t^2} + \frac{8}{t^3} = 0 \ ,$$

ale cărei soluții sunt $t_1 = t_2 = -1,\ t_3 = 2$. Deci punctele căutate sunt $M_1(-1,\ -1,\ 1)$ şi $M_2\left(\frac{1}{2},\ 2,\ 7\right)$.

5. Să se scrie ecuațiile axelor şi planelor triedrului Frenet în punctul $M_0(-1,\ 0,\ 1)$ la curba Γ de ecuație $\vec{\alpha} = (2t-1)\vec{i} + t^3\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}$, cu $t \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Cum M_0 se află pe curba Γ, coordonatele acestuia satisfac ecuațiile parametrice ale curbei, adică

$$\begin{cases} 2t-1=-1 \\ t^3 = 0 \\ 1-t^2 = 1 \end{cases}$$ şi rezultă $t = 0$ (pentru $M_0 = M_0(-1,\ 0,\ 1) = M_0(\vec{\alpha}(0))$).

Pentru obținerea mărimilor cerute calculăm

$$\vec{\alpha}'(t) = 2\vec{i} + 3t^2\vec{j} - 2t\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}'(0) = 2\vec{i}$$

$$\vec{\alpha}''(t) = \qquad 6t\vec{j} - 2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}''(0) = -2\vec{k} \quad \text{şi} \quad \vec{\alpha}'(0)\times\vec{\alpha}''(0) = 4\vec{j}\,.$$

Ecuația tangentei în M_0, de versor director $\vec{T}$ (coliniar cu $\vec{\alpha}'(0)$) este

$$\left(d_{TM_0}\right)\ :\ \frac{x-x(0)}{x'(0)} = \frac{y-y(0)}{y'(0)} = \frac{z-z(0)}{z'(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(d_{TM_0}\right)\ :\ \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$, o dreaptă situată în planul xOz, paralelă cu axa Oz.

Ecuația normalei principale în M_0, de versor $\vec{N}$ (coliniar cu $\vec{\alpha}''(0)$) este

$$\left(d_{NM_0}\right)\ :\ \frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Ecuația binormalei în M_0, de versor director $\vec{B}$ (coliniar cu $\vec{\alpha}'(0)\times\vec{\alpha}''(0)$) este

$$\left(d_{BM_0}\right)\ :\ \frac{x+1}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}.$$

Planele triedrului Frenet sunt :

- planul normal (cu vectorul normal $\vec{T}$)

(π_{NM_0}) : $(x+1)\cdot 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1=0$, care este un plan paralel cu yOz;

- planul rectificant (cu vectorul normal $\vec{N}$)

(π_{RM_0}) : $(z-1)\cdot(-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z-1=0$, care reprezintă un plan paralel cu xOy;

- planul osculator (de vector normal $\vec{B}$)

(π_{OM_0}) : $y\cdot 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0$, care este chiar planul xOz.

6. Să se afle raza de curbură şi raza de torsiune a curbei

$$\vec{\alpha} = (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j} + 4\sin\frac{t}{2}\vec{k}, \text{ cu } t\in \mathbf{R}.$$

Rezolvare. Inversa curburii se numeşte **rază de curbură** şi este dată (conf. T. 1.5) de

$$R = \frac{1}{k} = \frac{\|\vec{\alpha}'\|^3}{\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|}.$$

Calculăm

$$\vec{\alpha}' = (1-\cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j} + 2\cos\frac{t}{2}\vec{k},$$

$$\|\vec{\alpha}'\| = \sqrt{4\sin^4\frac{t}{2} + 4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} + 4\cos^2\frac{t}{2}} = 2,$$

$$\vec{\alpha}'' = \sin\vec{i} + \cos t\vec{j} - \sin\frac{t}{2}\vec{k},$$

$$\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\sin^2\frac{t}{2} & \sin t & 2\cos\frac{t}{2} \\ \sin t & \cos t & -\sin\frac{t}{2} \end{vmatrix} = -2\cos^3\frac{t}{2}\vec{i} + 2\sin\frac{t}{2}\left(1+\cos^2\frac{t}{2}\right)\vec{j} - 2\sin^2\frac{t}{2}\vec{k},$$

$$\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\| = 2\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$$

şi obţinem

$$R = \frac{1}{k} = \frac{4}{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}.$$

Inversa torsiunii se numeşte **rază de torsiune** şi este dată (conf. T.1.5) de

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\|\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}''\|^2}{(\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}'',\ \vec{\alpha}''')}.$$

Calculăm

$$\vec{\alpha}''' = \cos t\ \vec{i} - \sin t\ \vec{j} - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\vec{k}\ ,$$

$$(\vec{\alpha}'\times\vec{\alpha}'',\ \vec{\alpha}''') = -\cos\frac{t}{2}\left(2+\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

şi avem

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4\left(1+\sin^2\frac{t}{2}\right)}{-\cos\frac{t}{2}\left(2+\sin^2\frac{t}{2}\right)} = -\frac{4}{\cos\frac{t}{2}} + \frac{4}{\cos\frac{t}{2}\left(2+\sin^2\frac{t}{2}\right)}.$$

1.9. Probleme propuse

1. Să se reprezinte curba

$(C)\ :\ x = t\ ,\ y = t^2\ ,\ z = e^k\ ,\ t\in\mathbf{R}$ **,** constanta $k\in\mathbf{R}$ fixată ,

ca intersecţie a două suprafeţe.

2. a) Să se determine proiecţia pe planul xOy a curbei de intersecţie a paraboloidului hiperbolic $z = x^2 - y^2$ cu planul $x + y - z - 1 = 0$.

b) Să se arate că proiecţia elicei

$$\vec{r} = a\cos t\ \vec{i} + a\sin t\ \vec{j} + bt\ \vec{k}\text{, cu } t \in \mathbf{R},$$

pe planul xOz este o sinusoidă.

3. Să se arate că următoarele curbe sunt sferice :

(i) $\vec{r} = a\sin t\cos t\ \vec{i} + a\sin^2 t\ \vec{j} + a\cos t\ \vec{k} \quad , \quad t \in \mathbf{R}$ **;**

(ii) $\vec{r} = 2\sin 2t\ \vec{i} + (1-\cos 2t)\vec{j} + 2\cos t\ \vec{k} \quad , \quad t \in \mathbf{R}$ **;**

(iii) $\vec{r} = \sin^2 t\ \vec{i} + \sin t\cos t\ \vec{j} + (1-\cos t)\vec{k} \quad , \quad t \in \mathbf{R}$ **.**

4. Să se determine funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ astfel încât curba

$$(\Gamma)\ :\ x = t^2 \quad , \quad y = -\ln t \quad , \quad z = f(t) \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

să fie o curbă plană. Să se determine curbura curbei în punctul în care aceasta taie planul xOz.

5. Să se scrie ecuaţia tangentei la curba strâmbă

$$(C)\ :\ x = u \quad , \quad y = u^2 \quad , \quad z = u^3 \quad , \text{ cu } u \in \mathbf{R},$$

în punctul corespunzător lui $u = 1$. Orientând tangenta în sensul pozitiv al curbei, să se obţină punctul a cărui abscisă este -2.

6. Să se găsească ecuaţiile tangentei şi planului normal la curba

$$x = 2t^2 + 1 \quad , \quad y = t - 1 \quad , \quad z = 3t^3 \quad , \quad t \in \mathbf{R},$$

în punctul unde aceasta întâlneşte planul xOz.

7. Pentru curbele de mai jos să se scrie ecuaţia planului osculator în câte un punct oareca-re al fiecărei curbe :

$$(C)\ :\ y^2 = x \quad , \quad x^2 = z \quad , \text{ cu } x \in [0,\ \infty)\ ;$$

$$(\Gamma)\ :\ x = e^t \quad , \quad y = e^{-t} \quad , \quad z = t\sqrt{2} \quad , \text{ cu } t \in \mathbf{R}.$$

8. Să se găsească ecuaţiile normalei principale şi binormalei la curba :

$$(C)\ :\ x = y^2 \quad , \quad z = x^2 \quad , \text{ în punctul } M(1,\ 1,\ 1)\ ;$$

$$(\Gamma)\ :\ x = \frac{t^2}{2} \quad , \quad y = \frac{2t^2}{3} \quad , \quad z = \frac{t^4}{2} \quad , \text{ în punctul } P\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}\right).$$

9. Se dă curba $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = -\ln|\cos t|$, cu $t \in$ **R.** Se cere :

(i) să se calculeze versorii normalei principale şi ai binormalei ;

(ii) să se scrie ecuațiile binormalei şi a planului rectificant în punctul $t = 0$;

(iii) să se calculeze curbura într-un punct oarecare al curbei.

10. Să se găsească într-un punct oarecare al elicei

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = a\sin\theta \quad , \quad z = k\theta \quad , \text{ cu } \theta \in \mathbf{R} \text{ şi } k \in \mathbf{R}_+^* \text{ fixat ,}$$

triedrul lui Frenet. Să se demonstreze că într-un punct oarecare al elicei, normala principală întâlneşte axa cilindrului într-un punct I.

11. Fie curba $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 6t^3\vec{j} + t\ \vec{k}$, cu $t \in$ **R.** Să se scrie expresiile analitice ale versorilor şi planele triedrului mobil ataşat curbei.

12. Se dă curba $\vec{r} = t\ \vec{i} + (1 - t^2)\vec{j} + \frac{2}{3}t^3\vec{k}$, cu $t \in$ **R.** Se cere:

(i) să se calculeze versorii fundamentali în punctul $t = 1$;

(ii) să se scrie ecuațiile carteziene şi vectoriale ale normalei principale şi ale planului osculator ;

(iii) să se calculeze torsiunea în acelaşi punct.

13. Să se arate că :

(i) la elicea cilindrică (dată în problemele 2 şi 10) curbura şi torsiunea sunt constante ;

(ii) la elicea conică

$$x = t\cos t \quad , \quad y = t\sin t \quad , \quad z = at \quad , \text{ cu } t \in \mathbf{R} \text{ şi } a \in \mathbf{R}_+^* \text{ fixat ,}$$

curbura în origine este $k = \dfrac{2}{1 + a^2}$.

14. Să se demonstreze că la curba

$$x = acht\cos t \quad , \quad y = acht\sin t \quad , \quad z = at \quad , \text{ cu } t \in \mathbf{R} \text{ şi } a \in \mathbf{R}_+^* \text{ fixat ,}$$

segmentul de normală, cuprins între punctul de pe curbă şi axa Oz , este egal cu raza de torsiune a curbei.

15. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbelor de ecuație :

(i) $\vec{r} = a\cos^3 t\ \vec{i} + a\sin^3 t\ \vec{j} + \cos 2t\ \vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$, $a > 0$;

(ii) $\vec{r} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j} + 4a\cos\frac{t}{2}\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$, $a > 0$;

(iii) $\vec{r} = e^t \cos t\ \vec{i} + e^t \sin t\ \vec{j} + e^t \vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

16. Să se calculeze razele de curbură ale curbelor :

a) $\vec{r} = -\cos 2t\ \vec{i} + (2t - \sin 2t)\vec{j} + 4t\cos t\ \vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

b) $\vec{r} = \sin 2t\ \vec{i} + (1 - \cos 2t)\vec{j} + 2\cos t\ \vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

c) $\vec{r} = e^t \vec{i} + e^t \vec{j} + \sqrt{2}t\ \vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

17. Se dă elicea cilindro-conică

$$x = ae^{ht}\cos t \quad , \quad y = ae^{ht}\sin t \quad , \quad z = be^{ht} \quad , \quad t \in \mathbf{R} \text{ şi } a, h \in (0, \infty).$$

Să se arate că raportul curburilor în punctele consecutive, pentru care t variază în progresie aritmetică, este constant.

2. ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ A SUPRAFEȚELOR

2.1.Ecuațiile suprafețelor

Fie D un domeniu dreptunghiular din **E₂,** adică

$$D=\left\{\ M\left(u,v\right)\ \mid\ \left(u,v\right)\in\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\ \right\}.$$

Considerăm o aplicație continuă a lui D în $\mathbf{E_3}$

$$\vec{r}\ :\ D\to\mathbf{E_3}$$
$$\left(u,v\right)\to\left(f\left(u,v\right),\ g\left(u,v\right),\ h\left(u,v\right)\right),$$

f, g, h fiind funcții continue pe D.

DEFINIȚII 2.1. *Mulțimea*

$$\Sigma=\left\{\ P\left(\vec{r}\left(u,v\right)\right)\ \mid\ \left(u,v\right)\in D\right\}=\vec{r}\left(D\right)$$

se numeşte ***suprafață.***

Ecuația

(1) $$\left(\Sigma\right)\ :\ \vec{r}=\vec{r}\left(u,v\right),\ cu\ \ \left(u,v\right)\in D$$

se numeşte ***ecuația vectorială*** *a suprafeței, care este echivalentă cu*

(1') $$\vec{r}\left(u,v\right)=f\left(u,v\right)\vec{i}+g\left(u,v\right)\vec{j}+h\left(u,v\right)\vec{k}\ ,$$

iar ecuațiile

(2) $$\left(\Sigma\right)\ :\ \begin{cases}x=f\left(u,v\right)\\ y=g\left(u,v\right)\\ z=h\left(u,v\right)\end{cases},\quad\left(u,v\right)\in D$$

se numesc ***ecuațiile parametrice*** *ale suprafeței* Σ.

Denumire. u şi v se numesc **coordonatele curbilinii** ale punctului P şi vom nota $P(u,v)$.

Presupunem că funcțiile f, g şi h sunt diferențiabile şi au derivate parțiale continue într-o vecinătate a punctului $M_0\left(u^0,v^0\right)$, iar determinanții funcționali

$$\frac{D(f,g)}{D(u,v)}\ ,\quad \frac{D(g,h)}{D(u,v)}\ ,\quad \frac{D(h,f)}{D(u,v)} \tag{3}$$

nu sunt toți nuli. Astfel, într-o vecinătate U a lui M_0 se pot elimina u şi v din ecuațiile parametrice şi suprafața poate fi reprezentată sub forma (carteziană) implicită

$$F(x,\ y,\ z)=0.$$

Dacă una din derivatele parțiale ale funcției F este nenulă în punctul M_0, de exemplu $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x^0} \neq 0$, atunci suprafața se defineşte într-o vecinătate a punctului M_0 sub forma explicită $z=\psi(x,y)$.

Un sistem de două ecuații reprezintă în general o curbă

$$(\Gamma)\ :\ \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Definiția suprafeței are la bază ideea că orice regiune suficient de mică dintr-o suprafață Σ trebuie să semene cu o regiune din plan . Astfel, proprietatea suprafeței Σ de a fi netedă este asigurată de **regularitatea funcției** $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$**,** adică de condiția ca cel puțin unul din jacobieni să fie nenul.

Proprietatea lui $\Sigma\ :\ \vec{r}=\vec{r}(u,v)$ de a nu se tăia pe ea însăşi este asigurată de **injectivitatea funcției** $\vec{r}$ **.**

Exemplu. Fie $S(C,R)$ cu $C(a,b,c)$ dată prin formulele echivalente:

$(S)\ :\ \vec{r}=(a+R\cos u\sin v)\ \vec{i}+(b+R\sin u\sin v)\,\vec{j}+(c+R\cos v)\ \vec{k}$ (vectorială),

$$(S)\ :\ \begin{cases} x = a + R\cos u \sin v \\ y = b + R\sin u \sin v \\ z = c + R\cos v \end{cases} \qquad (u,v)\in[0,2\pi)\times[0,\pi) \qquad \text{(parametrică)},$$

$$(S)\ :\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R \qquad \text{(implicită)}.$$

Condiția de regularitate a funcției

$$\vec r\,(u,v) = x(u,v)\,\vec i + y(u,v)\,\vec j + z(u,v)\,\vec k \quad , \quad (u,v)\in D\subset \mathbf{R}^2 \quad ,$$

poate fi exprimată cu ajutorul derivatelor parțiale

$$\vec r_u = \frac{\partial \vec r\,(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\vec i + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\vec j + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\vec k \quad ,$$
$$\vec r_v = \frac{\partial \vec r\,(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\vec i + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\vec j + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\vec k \quad ,$$

sub forma

$$\vec r_u \times \vec r_v \neq \vec 0_V \ ,$$

adică

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

pentru că jacobienii sunt nenuli, unde $x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}$ etc.

2.2.Curbe coordonate. Plan tangent

DEFINIȚIA 2.2. *Se numeşte* ***curbă*** *pe suprafața* $(\Sigma)\ :\ \vec r = \vec r(u,v)$, *cu* $(u,v)\in D\subset$ ***E₂****, o mulțime* Γ *de puncte de pe* Σ *care verifică o ecuație de forma*

$$(\Gamma)\ :\ \vec r = \vec r\big(u(t),\ v(t)\big) \quad , \quad t\in I\subseteq \boldsymbol{R} \ ,$$

unde $u(t)$ *şi* $v(t)$ *sunt funcții diferențiabile.*

DEFINIŢIA 2.3. *Se numeşte* ***curbă coordonată de tip u*** *pe suprafaţa*

$$(\Sigma)\ :\ \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ cu\ \ (u,v) \in D \subset \boldsymbol{E_2},$$

curba

(4) $$(\Gamma_u)\ :\ \vec{r}_1 = \vec{r}\left(u,v^0\right)\quad ,\quad \left(u,v^0\right) \in D\quad .$$

Deci $\Gamma_u \subset \Sigma$ şi $(\Gamma_u)\ :\ v = v^0$.

DEFINIŢIA 2.4. *Se numeşte* ***curbă coordonată de tip v*** *pe suprafaţa* Σ***,*** *curba*

(5) $$(\Gamma_v)\ :\ \vec{r}\left(u^0,v\right)\quad ,\quad \left(u^0,v\right) \in D\quad .$$

Deci $\Gamma_v \subset \Sigma$ şi $(\Gamma_v)\ :\ u = u^0$.

Pe suprafaţa $\Sigma = \vec{r}(D)$ se găsesc două familii de curbe coordonate Γ_u, Γ_v care sunt imaginile prin $\vec{r}$ ale dreptelor $v = v_0$, respectiv, $u = u_0$ din planul uOv. Prin orice punct regulat al suprafeţei Σ trece câte o singură curbă din fiecare din familiile (u) şi (v) (vezi fig. 2.1). Vectorii viteză în punctul regulat $P_0(u_0,v_0) \in \Sigma$ la curbele Γ_u şi Γ_v, care trec prin acest punct, sunt necoliniari (ceea ce am arătat prin $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}_V$) .

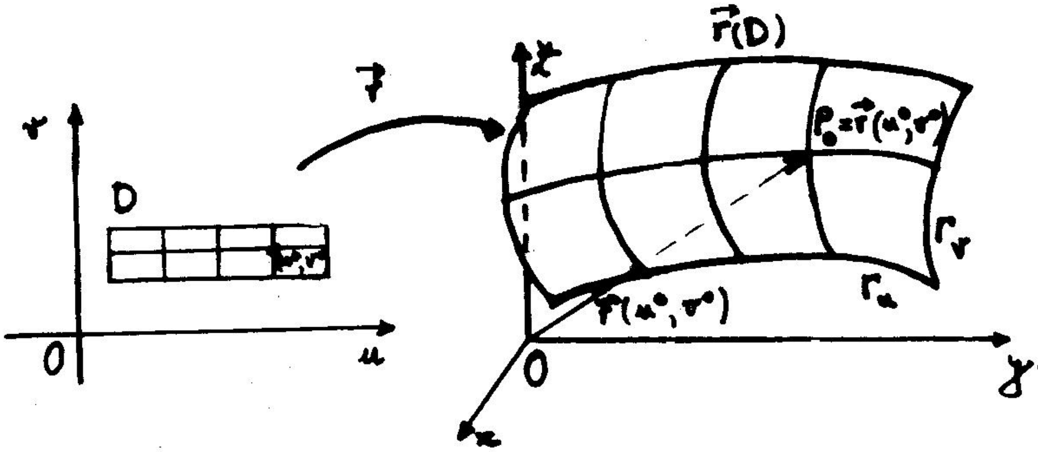


Figura 2.1.

TEOREMA 2.1. *Fie o suprafață regulată* Σ *dată prin ecuația (1). Dacă punctul* $M_0\left(x^0, y^0, z^0\right) \in \Sigma$, *atunci prin punctul* M_0 *trece o singură curbă coordonată* Γ_v.

Demonstrație. Fie curbele coordonate Γ_u şi Γ_v date de (4) şi (5) care trec prin punctul M_0, adică $M_0 \in \Gamma_u \cap \Gamma_v$ şi coordonatele punctului M_0 verifică sistemul

$$\begin{cases} x^0 = f\left(u^0, v^0\right) \\ y^0 = g\left(u^0, v^0\right) \\ z^0 = h\left(u^0, v^0\right) \end{cases}.$$

Presupunem că prin punctul M_0 ar trece şi curbele coordonate Γ_u^* şi Γ_v^* date prin

$$\left(\Gamma_u^*\right) \ : \ \vec{r} = \vec{r}\left(u, v_*^0\right) \text{ şi } \left(\Gamma_v^*\right) \ : \ \vec{r} = \vec{r}\left(u_*^0, v\right),$$

adică $M_0 \in \Gamma_u^* \cap \Gamma_v^*$ şi coordonatele punctului M_0 verifică sistemul $\begin{cases} x^0 = f\left(u_*^0, v_*^0\right) \\ y^0 = g\left(u_*^0, v_*^0\right) \\ z^0 = h\left(u_*^0, v_*^0\right) \end{cases}$.

Cum suprafața Σ este regulată, funcțiile $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$ stabilesc o corespondență biunivocă între punctele $M \in \Sigma$ şi perechile ordonate (u,v), adică punctului M_0 îi corespunde o singură pereche $\left(u^0, v^0\right)$, şi reciproc. Deci

$$u_*^0 = u^0 \quad , \quad v_*^0 = v^0 \quad ,$$

adică $\Gamma_u^* = \Gamma_u$, $\Gamma_v^* = \Gamma_v$.

Aşadar, prin M_0 trece o singură curbă coordonată Γ_u şi o singură curbă coordonată Γ_v (fig. 2.1). □

Observații 2.1. (i) Dacă Γ_u, Γ_v sunt curbele coordonate care trec prin M, atunci vectorii viteză $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ sunt tangenți, respectiv, la curbele Γ_u, Γ_v, în punctul M (fig. 2.2).

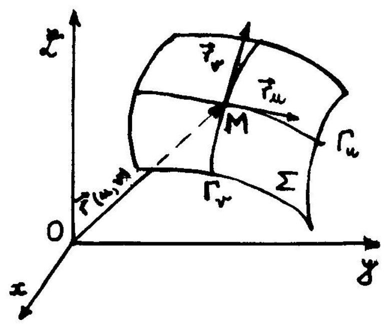


Figura 2.2.

Într-adevăr, din $M \in \Gamma_u \cap \Gamma_v$ rezultă că :

- $M \in \Gamma_u$, va avea vectorul de poziție $\vec{r} = \vec{r}(u, v^0)$ şi, conform definițiilor 1.8 şi 1.10, derivata $\vec{r}_u$ este tangentă la curba Γ_u în punctul M.
- $M \in \Gamma_v$, în mod analog, derivata $\vec{r}_v$ este tangentă la curba Γ_v în M.

(ii) Vectorii viteză $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ nu sunt coliniari.

Într-adevăr, din

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(g,h)}{D(u,v)}\vec{i} + \frac{D(h,f)}{D(u,v)}\vec{j} + \frac{D(f,g)}{D(u,v)}\vec{k} \ ,$$

şi din regularitatea funcției $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, adică cel puțin unul din jacobieni să fie nenul, rezultă $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{O}_V$.

TEOREMA 2.2. *Fie Σ o suprafață regulată dată prin $(\Sigma)\ :\ \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ şi un punct $M(\vec{r}(u,v)) \in \Sigma$. Dacă $(\Gamma)_M$ este mulțimea tuturor curbelor Γ situate pe suprafața Σ care trec prin punctul M, atunci mulțimea tuturor tangentelor la curbele Γ în punctul M sunt situate într-un plan π_{TM}.*

Demonstrație. Fie $\Gamma \in (\Gamma)_M$ o curbă arbitrară de pe suprafața Σ care trece prin punctul M, dată de ecuația vectorială

$$(\Gamma)\ :\ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)).$$

Vectorul

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

este tangent curbei Γ în punctul M . Această relație arată că vectorii $\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sunt coplanari. Conform observației 2.1(i), vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sunt tangenți la curbele coordonate Γ_u, respectiv, Γ_v, care trec prin punctul M . Cum prin punctul M trece o singură pereche de curbe, Γ_u, Γ_v, rezultă că vectorii $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ determină un plan unic π_{TM} . Deoarece curba $\Gamma \in (\Gamma)_M$ a fost luată arbitrar, rezultă că toți vectorii $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vor fi situați în planul π_{TM} , adică toate tangentele la curbele Γ, care trec prin M , sunt situate în planul π_{TM} . □

DEFINIȚIA 2.5. (Plan tangent) *Fie* Σ *o suprafață şi fie* $M \in \Sigma$ *un punct regulat. Se numeşte* ***plan tangent la suprafața*** Σ ***în punctul*** M *(notat* π_{TM} *) locul geometric al tangentelor la toate curbele* Γ *care trec prin punctul* M *şi sunt situate pe suprafața* Σ .

Observația 2.2. Dacă $M(\vec{r}(u,v))\in\Sigma$, conform teoremei 2.2, planul tangent π_{TM} este determinat de $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, calculați în punctul M (fig. 2.3), astfel :

(i) dacă Σ este dată prin ecuația vectorială (1), atunci

(6) $$(\pi_{TM}) \;:\; (\vec{r}-\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)=0 \;;$$

(ii) dacă Σ este dată prin ecuațiile parametrice (2), atunci

(7) $$(\pi_{TM}) \;:\; \begin{vmatrix} x-f(u,v) & y-g(u,v) & z-h(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}=0 .$$

Într-adevăr, dacă $Q(x,y,z)$ este un punct curent al planului π_{TM} , vectorul $\overrightarrow{MQ}$ este situat în planul π_{TM} şi, prin urmare, vectorii $\overrightarrow{MQ}$, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ sunt coplanari, adică

$$\overrightarrow{MQ} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0 .$$

Cum $\overrightarrow{MQ} = \vec{r} - \vec{r}(u, v)$, avem (6).

Transcriind analitic pe (6) obținem (7). □

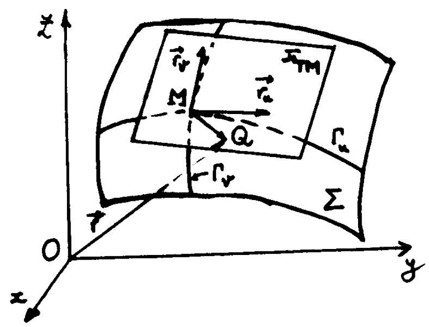


Figura 2.3.

Exemplu. Fie suprafața

$$(\Sigma) \ : \ \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases} .$$

Să se scrie ecuația planului tangent π_{TM} la suprafața Σ în punctul $M(u = 2, v = 1)$.

Avem

$$\begin{array}{lll} x_u = 1 \ , & y_u = 1 \ , & z_u = v \\ x_v = 1 \ , & y_v = -1 \ , & z_v = u \end{array}$$

Luând $u = 2, v = 1$ şi înlocuind în ecuația planului tangent (7), obținem

$$(\pi_{TM}) \ : \ \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$(\pi_{TM}) \ : \ 3x - y - 2z - 4 = 0 .$$

Observația 2.3. Din ecuația vectorială (6) a planului tangent π_{TM}, se deduce că vectorul normal este $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

2.3. Elementul de arc. Prima formă pătratică fundamentală a suprafeței

Fie o suprafată $(\Sigma) \ : \ \vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset$ **E**2 şi o curbă $\Gamma \subset \Sigma$, $(\Gamma) \ : \ \vec{r} = \vec{r}(u(t), \ v(t))$, $t \in I \subseteq$ **R,** Γ fiind presupusă regulată de clasă C^1.

***DEFINIȚIA 2.6. Elementul de arc** al curbei Γ în punctul curent $P \in \Gamma$, $P(\vec{r}(t))$, este dat de*

$$ds \stackrel{def}{=} \|d\vec{r}\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| \cdot dt .$$

***TEOREMA 2.3.** Elementul de arc ds în punctul $P \in \Gamma$ de pe Σ este dat de*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 ,$$

unde

(8) $$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \|\vec{r}_u\|^2 \quad , \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \quad , \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \|\vec{r}_v\|^2 .$$

Demonstrație. Avem

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \left(\vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \right) dt \quad \Rightarrow$$

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(du)^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)dudv + (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v)(dv)^2 .$$

Folosind notațiile pentru $E,\ F,\ G$ obținem expresia pătratului elementului de arc. □

Observația 2.4. Elementul de arc al curbei coordonate $\Gamma_u \subset \Sigma$ este $ds = \sqrt{E}du$, iar al lui Γ_v este $ds = \sqrt{G}dv$.

***DEFINIȚIA 2.7.** Se numeşte **prima formă pătratică fundamentală a suprafeței** Σ **într-un punct** $P(u,v)$ al ei, expresia*

$$\Phi_1(P) = Edu^2 + 2Fdu \cdot dv + Gdv^2 ,$$

unde $E,\ F,\ G$ sunt numere reale date de relatiile (8).

Denumiri. $E,\ F,\ G$ se numesc **coeficienții formei pătratice Φ_1.**

Prima formă fundamentală ds^2 se mai numeşte şi **metrica suprafeței Σ.**

***TEOREMA 2.4.** Într-un punct regulat $P \in \Sigma$, vectorul normal la Σ are norma dată de*

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{EG - F^2} .$$

Demonstrație. $\|\vec{N}\|^2 = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \cdot \|\vec{r}_v\|^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2 \quad \Rightarrow \quad q.e.d.$

DEFINIȚIA 2.8. Unghiul θ dintre două curbe Γ şi Γ’ *este unghiul θ dintre tangentele la curbe duse printr-un punct comun curbelor.*

TEOREMA 2.5. *Fie două puncte $\Gamma, \Gamma' \in \Sigma$, un punct $P \in \Gamma \cap \Gamma'$, $d\vec{r}, du, dv \in \Gamma$ şi $\delta\vec{r}, \delta u, \delta v \in \Gamma'$. Atunci unghiul θ dintre cele două curbe este*

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Demonstrație. Fie $\theta =$ unghiul dintre Γ şi Γ' în punctul comun P. θ este unghiul dintre dreptele tangente în P la Γ şi Γ', deci

$$\theta = \measuredangle(d\vec{r}, \delta\vec{r}),$$

cu

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \ \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v \ \Rightarrow \ \cos\theta = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{\|d\vec{r}\| \cdot \|\delta\vec{r}\|},$$

cu $\|d\vec{r}\| = ds = \sqrt{\Phi_{1\Gamma}}$, iar $\|\delta\vec{r}\| = \delta s = \sqrt{\Phi_{1\Gamma'}}$ în P.

Efectuând produsul scalar $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}$ şi ținând seama de (8) din T. 2.3 $\Rightarrow$ q.e.d.

Consecințe 2.1. (i) Pentru curbele coordonate $\Gamma_u, \Gamma_v \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad dv = 0$, respectiv, $\delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\Gamma_u, \Gamma_v) = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$.

(ii) Curbele de coordonate sunt ortogonale dacă $F = 0$.

Observația 2.5. Geometria pe Σ derivată din prima formă fundamentală a suprafeței Σ este o **geometrie intrinsecă,** care constă din acele proprietăți ale suprafeței care sunt invariante la o schimbare a axelor de coordonate (roto-translație). Conținutul acestei geometrii rezultă din faptul că funcția Φ_1 permite calcularea lungimii unui arc de curbă de pe Σ, a unghiului dintre două tangente la Σ, a ariei unei porțiuni din suprafața Σ etc. De exemplu, dacă $\alpha \ : \ [a,b] \to \Sigma$ este o curbă regulată, atunci lungimea lui α este

$$l(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right\| dt .$$

Presupunem că Σ este o suprafață conexă şi notăm cu $\mathscr{M}$ mulțimea curbelor regulate $\alpha \; : \; [a,b] \to \Sigma$ care unesc punctele $P = \alpha(a)$ şi $Q = \alpha(b)$.

DEFINIȚIA 2.9. Distanța de la P la Q *se defineşte prin*

$$d(P,Q) = \inf_{\alpha \in \Sigma} l(\alpha) \quad , \; cu \quad l(\alpha) = lungimea \;\; lui \;\; \alpha \, .$$

Observația 2.6. Această expresie defineşte o **distanță (metrică)** pe Σ şi, prin urmare, o suprafață conexă este un exemplu de spațiu metric.

DEFINIȚIA 2.10. *Dacă* $\alpha \; : I \to \boldsymbol{E_3}$ *este o curbă pe suprafața* Σ *şi* $[a,b] \subset I$, *atunci restricția* $\alpha \; : \; [a,b] \to \Sigma$ *se numeşte* ***segment de curbă.***

DEFINIȚIA 2.11. *Se numeşte* ***suprafață conexă,*** *o suprafață* Σ *care are proprietatea că pentru oricare două puncte* $P, Q \in \Sigma$, *există un segment de curbă dat de functia* $\alpha \; : \; [a,b] \to \Sigma$ *cel puțin continuă, astfel încât* $\alpha(a) = P$ *şi* $\alpha(b) = Q$, *adică imaginea* $\alpha([a,b]) \subset \Sigma$ *şi uneşte punctele* P *şi* Q *(fig. 2.4).*

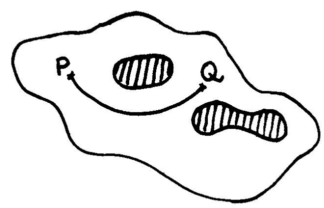


Figura 2.4.

TEOREMA 2.6. (Lungimea unui arc de curbă pe o suprafață). *Dacă pe suprafața*

$$(\Sigma) \; : \; \vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad , \quad (u,v) \in D \quad ,$$

se consideră curba de ecuație

$$(\Gamma) \; : \; \vec{r} = \vec{r}\big(u(t), \;\; v(t)\big) \quad , \quad t \in I \subseteq \boldsymbol{R}$$

şi două puncte $M_1, M_2 \in \Gamma$ *corespunzătoare valorilor lui* $t = t_1$ *şi* $t = t_2$, *atunci lungimea arcului* $s = M_1 M_2$ *este dată de relația*

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

Demonstrație. Avem

$$s=\int_{M_1M_2}ds\overset{T.2.3.}{=}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\,.\qquad\square$$

2.4. Aria unei porțiuni de suprafață

Fie Σ o suprafață, D_0 un dreptunghi închis, $D=\operatorname{int}D_0$, funcția $\vec{r}:D_0\to\Sigma$ şi σ o porțiune din suprafața Σ reprezentată de r adică $\sigma=\vec{r}\left(D_0\right)$.

Presupunem că funcția $\vec{r}:D\to\Sigma$ este diferențiabilă, regulată şi injectivă. Vom defini aria lui σ, unde $(\sigma):\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D_0$.

Curbele coordonate împart pe σ în patrulatere curbilinii, dintre care considerăm patrulaterul mărginit de curbele (u), (v), $(u+\Delta u)$, $(v+\Delta v)$ - fig. 2.5.

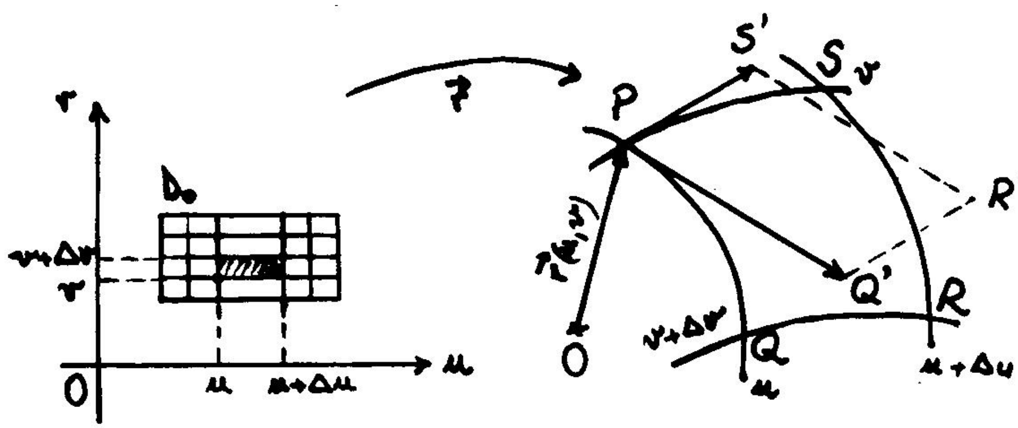


Figura 2.5.

Construim paralelogramul rectiliniu $PQ'R'S'$ în planul tangent π_{TP} în P la Σ, astfel ca $\overrightarrow{PQ'} = \vec{r}_u \Delta u$ şi $\overrightarrow{PS'} = \vec{r}_v \Delta v$. Se aproximează aria lui $PQRS$ cu aria lui $PQ'R'S'$ astfel :

Aria $PQRS = \left\|\vec{r}_u \Delta u \times \vec{r}_v \Delta v\right\| = \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| \Delta u \cdot \Delta v$,

Aria $\sigma = \Sigma Aria PQRS = \Sigma \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| \Delta u \cdot \Delta v$,

unde semnul de sumare Σ se referă la toate ariile patrulaterelor curbilinii în care a fost divizată suprafața σ. Pe baza acestei relații putem defini elementul de arie şi aria unei porțiuni de suprafață.

DEFINIȚII 2.12. i) *Se numeşte* ***element de arie*** *al suprafeței σ forma diferențială*

$$d\sigma = \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| dudv .$$

ii) *Aria suprafeței σ este dată de integrala* $A = \iint_D \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| dudv$.

Observații 2.7. (i) Dacă suprafața Σ este dată în **reprezentare vectorială**

$$(\Sigma) \ : \ \vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad , \quad (u,v) \in D \quad ,$$

atunci

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv .$$

Într-adevăr, conform teoremei 2.4, $\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| = \left\|\vec{N}\right\| = \sqrt{EG - F^2}$.

(ii) Dacă suprafața Σ este dată prin **ecuațiile parametrice**

$$(\Sigma) \ : \ \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} ,$$

atunci elementul de arie are expresia

$$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv \quad ,$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \quad , \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \quad .$$

Într-adevăr, din

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \ .$$

(iii) Dacă suprafaţa Σ este dată sub formă carteziană explicită

$$(\Sigma) \ : \ z = z(x, y),$$

atunci elementul de arie are expresia

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy \, ,$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \ .$$

Într-adevăr, suprafaţa Σ poate fi exprimată parametric prin

$$(\Sigma) \ : \ \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad ,$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} x_u &= 1 \quad , & x_v &= 0 \quad , \\ y_u &= 0 \quad , & y_v &= 1 \quad , \\ z_u &= \frac{\partial z}{\partial u} = p \quad , & z_v &= \frac{\partial z}{\partial v} = q \quad , \end{aligned}$$

deci

$$A^2 = p^2 \quad , \quad B^2 = q^2 \quad , \quad C^2 = 1 \quad ,$$

adică $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dudv$.

(iv) Dacă suprafaţa Σ este dată sub formă carteziană implicită

$$(\Sigma)\ :\ F(x,y,z)=0\ ,$$

atunci

$$d\sigma=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\cdot dudv\,.$$

Într-adevăr, considerând

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad ,\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ .$$

şi introducându-le în expresia elementului de arie din (iii), obținem expresia dorită (din (iv)).

Observația 2.8. Fie Σ o suprafață şi $\sigma_i\subset\Sigma$, cu $i=1,\ldots,n$, un număr finit de imagini de tipul $r_i(D_{0i})$ care au în comun frontierele (fig. 2.6). Prin definiție avem

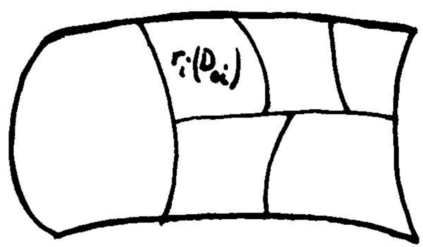


Figura 2.6.

$$\text{Aria }(\sigma_1\cup\sigma_2\cup\ldots\cup\sigma_n)=\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i}d\,\sigma\ .$$

2.5. A doua formă pătratică fundamentală a suprafeței

Fie suprafața $(\Sigma)\ :\ \vec{r}=\vec{r}(u,v)\ ,\ (u,v)\in D\ ,\ \vec{r}\in C^2_{(D)}$.

DEFINIȚIA 2.13. *Se numeşte* ***a doua formă pătratică fundamentală a suprafeței*** Σ *într-un punct* $P(u,v)$ *expresia*

$$\Phi_2(P)=\vec{n}d^2\vec{r}\ ,$$

unde $\vec{n}$ *este versorul normalei la suprafata* Σ *in punctul* P .

TEOREMA 2.7. 1) *Dacă* $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, *cu* $(u,v) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$, *atunci*

$$\Phi_2(P) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

unde

$$L = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_{uu}}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \quad , \quad M = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_{uv}}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \quad , \quad N = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{r}_{vv}}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \ .$$

2) *Dacă* $\Sigma : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, *cu* $(u,v) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$,

atunci coeficienții formei $\Phi_2(P)$ *sunt dați de*

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix} \quad , \quad M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} \quad ,$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix} \ .$$

Demonstrație. 1) Vectorul director al normalei la Σ în punctul regulat $P \in \Sigma$ este $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$, deci versorul normalei este

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \ .$$

Diferențiind $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \quad \Rightarrow \quad d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv} du dv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$

şi cum $\vec{n} \perp \vec{r}_u \quad , \quad \vec{n} \perp \vec{r}_v \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{r}_u = 0$ şi $\vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0$,

deci

$$\Phi_2(P) = \vec{n} d^2\vec{r} = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{uu})(du)^2 + 2(\vec{n} \cdot \vec{r}_{uv}) du dv + (\vec{n} \cdot \vec{r}_{vv})(dv)^2$$

în care, înlocuind $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ şi adoptând notațiile din enunț, obținem expresia cerută pentru $\Phi_2(P)$.

2) Dacă Σ este dată parametric, trecând la coordonate în $L,\ M,\ N$ din **1)** şi înlocuind $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ se obțin expresiile cerute pentru $L,\ M,\ N$. □

Observația 2.9. Dacă suprafața Σ este dată sub formă carteziană explicită

$$(\Sigma)\ :\ z = z(x,y)\ ,$$

atunci

$$\Phi_2(P) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\left(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2\right)\ ,$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\quad ,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\quad ,$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\quad ,\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\quad ,\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\quad \textbf{(notațiile lui Monge)}\ .$$

Într-adevăr, suprafața Σ poate fi exprimată parametric astfel

$$(\Sigma)\ :\ \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}\ ,$$

de unde

$$\begin{array}{lll} x_u = 1 & y_u = 0 & z_u = p \\ x_v = 0 & y_v = 1 & z_v = q \\ x_{uu} = 0 & y_{uu} = 0 & z_{uu} = r \\ x_{uv} = 0 & y_{uv} = 0 & z_{uv} = s \\ x_{vv} = 0 & y_{vv} = 0 & z_{vv} = t\ . \end{array}$$

Deci

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\quad,\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\quad,\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ .$$

2.6. Probleme rezolvate

1. Fie suprafața $\vec{r}=u^2\vec{i}+uv\vec{j}+\left(au+v^2\right)\vec{k}$, cu $u,v,a\in\mathbf{R}$ (u,v parametri).

Se cere :

i) ecuația carteziană a suprafeței ;

ii) să se afle coordonatele punctelor $A(u=2,v=1)$ şi $B(u=1,v=2)$;

iii) să se verifice dacă punctele $M(4,2,3)$ şi $N(3,2,1)$ aparțin suprafeței, pentru $a=1$.

Rezolvare. i) Scriem ecuațiile parametrice ale suprafeței

$$x=u^2\quad,\quad y=uv\quad,\quad z=au+v^2$$

şi eliminând pe u şi v între aceste ecuații, obținem

$$\left(xz-y^2\right)^2=a^2x^3\ .$$

ii) $A(4,2,2a+1)$, $B(1,2,a+4)$**.**

iii) Punctul M aparține suprafeței, dacă sistemul

$$\begin{cases}u^2=4\\ uv=2\\ u+v^2=3\end{cases}$$

este compatibil.

Înmulțind prima cu a treia ecuație, obținem $u^3+u^2v^2=12$ şi ținând seama de primele două ecuații, avem $\pm 8+4=12$, care este satisfăcută pentru $u=2$.

Similar, se constată că N nu aparține suprafeței.

2. Se consideră suprafața $x = u^2 + v$, $y = u^2 - v$, $z = uv$, cu $u, v \in$ **R.**

a) Să se scrie ecuațiile carteziene ale familiei de curbe $u =$ constant şi să se arate că aces-te curbe sunt drepte.

b) Să se scrie ecuațiile carteziene ale familiei de curbe $v =$ constant şi să se arate că aces-tea sunt curbe plane.

c) Să se scrie ecuațiile carteziene ale curbei $v = u$ şi să se arate că este curbă plană.

Rezolvare. a) Ecuațiile parametrice ale curbei $u = k$ sunt

$$x = k^2 + v \quad , \quad y = \quad k^2 - v \quad , \quad z = kv \quad ,$$

din care rezultă ecuațiile carteziene ale curbei $u = k$, cu $k \neq 0$,

$$x + y = 2k^2 \quad , \quad x = k^2 + \frac{z}{k} \quad .$$

Curba fiind exprimată prin intersecția a două plane înseamnă că este o dreaptă.

b) Pentru $v = k*$, obținem curba $x = u^2 + k*$, $y = u^2 - k*$, $z = k*u$, de unde rezultă e-cuațiile carteziene ale curbei $v = k*$, cu $k* \neq 0$,

$$x - y = 2k* \quad , \quad x = \frac{z^2}{k*^2} + k* \quad .$$

Prima ecuație ne indică faptul că $v = k*$ este situată într-un plan.

c) Pentru curba $v = u$, ecuațiile parametrice sunt

$$x = u^2 + u \quad , \quad y = u^2 - u \quad , \quad z = u^2 \; .$$

Rezultă ecuațiile carteziene

$$x + y = 2z \quad , \quad z = \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 \quad ,$$

care ne arată că $u = v$ este situată într-un plan.

3. Să se calculeze lungimea arcului curbei $u = 0$ pe suprafața

$$x = u^2 + v \quad , \quad y = u + v^2 \quad , \quad z = u + v \quad , \quad \text{cu} \quad u, v \in \mathbf{R},$$

între punctele $P_0(u=0, v=0)$ şi $P_1(u=0, v=1)$.

Rezolvare. Pentru $u=0$, $du=0$,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = Gdv^2 \quad \Rightarrow \quad s = \int_0^1 \sqrt{G}dv \quad ,$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \|\vec{r}_v\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 2 + 4v^2 \quad ,$$

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2}+v^2}dv = 2\left[\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+v^2} + \frac{1}{4}\ln\left(v+\sqrt{\frac{1}{2}+v^2}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \ln\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}} .$$

4. Fie elicoidul drept dat de ecuaţiile parametrice

$$(\Sigma) \ : \ \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = av \end{cases} , \text{ cu } \ u, v \in \mathbf{R}, \quad a > 0 \ ,$$

cu metrica

$$ds^2 = du^2 + \left(u^2 + a^2\right)dv^2 \quad ,$$

şi fie curbele $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subset \Sigma$ date prin ecuaţiile

$$(\Gamma_1) \ : \ v = 1 \quad ,$$

$$(\Gamma_2) \ : \ u = \frac{1}{2}av^2 \quad ,$$

$$(\Gamma_3) \ : \ u = -\frac{1}{2}av^2 \quad .$$

Să se determine unghiurile θ_1, θ_2, θ_3 ale curbelor Γ_1, Γ_2, Γ_3 luate câte două

$$\theta_1 = \angle\left(\Gamma_1, \Gamma_2\right) \ ,$$

$$\theta_2 = \angle\left(\Gamma_2, \Gamma_3\right) \ ,$$

$$\theta_3 = \angle\left(\Gamma_3, \Gamma_1\right) \ .$$

Rezolvare. Pe curbele Γ_1, Γ_2, Γ_3 avem următoarele diferenţiale:

- pe curba Γ_1 , $dv = 0$,
- pe curba Γ_2 , $du = avdv$,
- pe curba Γ_3 , $du = -avdv$.

Conform teoremei 2.5 avem

$$\cos\theta = \frac{du\delta u + \left(u^2 + a^2\right)dv\delta v}{\sqrt{du^2 + \left(u^2 + a^2\right)dv^2} \cdot \sqrt{\delta u^2 + \left(u^2 + a^2\right)\delta v^2}} \quad ,$$

de unde

$$\cos\theta_1 = \left[\frac{avdu\delta v}{\sqrt{du^2} \cdot \sqrt{a^2v^2\delta v^2 + \left(u^2 + a^2\right)\delta v^2}}\right]_{\substack{u=\frac{1}{2}a \\ v=1}} = \left[\frac{av}{\sqrt{a^2v^2 + u^2 + a^2}}\right]_{\substack{u=\frac{1}{2}a \\ v=1}} = \frac{2}{3} \ ,$$

$$\cos\theta_2 = \left[\frac{-a^2v^2dv\delta v + \left(u^2 + v^2\right)dv\delta v}{\sqrt{\left(a^2v^2 + u^2 + a^2\right)}dv \cdot \sqrt{\left(a^2v^2 + u^2 + a^2\right)}\delta v}\right]_{\substack{u=0 \\ v=0}} = \left[\frac{-a^2v^2 + u^2 + v^2}{a^2v^2 + u^2 + a^2}\right]_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 1,$$

$$\cos\theta_3 = \left[\frac{-avdv\delta u}{\sqrt{\left(a^2v^2 + u^2 + a^2\right)dv^2} \cdot \sqrt{\delta u^2}}\right]_{\substack{u=-\frac{1}{2}a \\ v=1}} = \left[\frac{-av}{\sqrt{a^2v^2 + u^2 + a^2}}\right]_{\substack{u=-\frac{1}{2}a \\ v=1}} = -\frac{2}{3} \ .$$

5. Fie elicoidul

$$(\Sigma) \ : \ \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = av \end{cases} \ , \quad \text{cu} \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2$$

şi curbele Γ_1, Γ_2, Γ_3 pe suprafața Σ, date de ecuațiile

$$(\Gamma_1): \ u = av \ ,$$
$$(\Gamma_2): \ u = -av \ ,$$
$$(\Gamma_3): \ v = 1 \ .$$

Să se calculeze aria triunghiului curbiliniu determinat pe suprafața Σ de intersecția celor trei curbe.

Rezolvare. Conform observației 2.7.i), aria cerută este

$$A = \iint_D \left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\| du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv \ ,$$

unde D este triunghiul curbiliniu $M_1M_2M_3$ cu $\{M_1\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\{M_2\} = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$, $\{M_3\} = \Gamma_3 \cap \Gamma_1$, iar E, F, G sunt coeficienții primei forme pătratice fundamentale a suprafeței Σ dați prin

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = u^2 + a^2 \ .$$

Avem $M_1 \ : \ \begin{cases} u = av \\ u = -av \end{cases} \Rightarrow \ M_1(u = 0, v = 0)$,

$M_2 \ : \ \begin{cases} u = -av \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \ M_2(u = -a, v = 1)$

$M_3 \ : \ \begin{cases} v = 1 \\ u = av \end{cases} \Rightarrow \ M_3(u = a, v = 1)$.

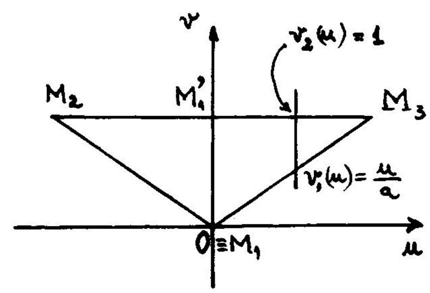


Figura 2.7.

care, în reperul plan Ouv, formează triunghiul $M_1M_2M_3$ ca în fig. 2.7, simetric în raport cu Ov. Deci

$$A = 2 \iint_{M_1M_2M_3} \sqrt{u^2 - a^2}\, du dv \ .$$

Domeniul $D' = M_1M'_1M_3$ este cuprins între axa Ov, dreapta $v = 1$ şi dreapta M_1M_3 de ecuație $v = \frac{u}{a}$. Cum D' este un domeniu simplu în raport cu ambele axe de coordonate (orice paralelă la una din axe intersectează domeniul după un interval), avem

$$v_1(u) = \frac{u}{a} \quad , \quad v_2(u) = 1 \quad , \quad cu \quad u \in [0, a] \ .$$

Obținem

$$A = 2\int_0^a \sqrt{u^2 - a^2}\, du \int_{\frac{u}{a}}^1 dv = 2\int_0^a \sqrt{u^2 + a^2} \left(1 - \frac{u}{a}\right) du =$$

$$= 2\int_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\,du - \frac{2}{a}\int_0^a u\sqrt{u^2 + a^2}\,du = 2I_1 - \frac{2}{a}I_2 \quad ,$$

unde :

$$I_1 = \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\,du = \int_0^a \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + a^2}}\,du + a^2\int_0^a \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} =$$

$$= \int_0^a u\left(\sqrt{u^2 + a^2}\right)' du + a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \left[u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)\right]_0^a - \int_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\,du \ ,$$

adică

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)\right]_0^a$$

şi

$$I_2 = \int_0^a u\sqrt{u^2 + a^2}\,du = \int_0^a \left(u^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(u^2 + a^2\right)' \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{3}\left(u^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a \ .$$

Deci

$$A = 2I_1 - \frac{2}{a}I_2 = a^2\sqrt{2} + a^2 \ln\left(a + a\sqrt{2}\right) - a^2 \ln a - \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(2a^2\right)^{\frac{3}{2}} - a^3\right] =$$

$$= a^2\left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] .$$

2.7. Probleme propuse

1. Să se găsească ecuația carteziană a suprafeței dată prin :

a) ecuația vectorială $\vec{r} = u^2\,\vec{i} + uv\,\vec{j} + \left(au + v^2\right)\vec{k}$, cu $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ **;**

b) ecuațiile parametrice $x = u + \sin v$, $y = u + \cos v$, $z = u + a$, cu $(u, v) \in \mathbf{R^2}$ şi a fixat în **R.**

2. Să se dea o reprezentare parametrică a paraboloidului hiperbolic

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a} \quad , \quad cu \quad a \in \mathbf{R^*} .$$

3. Să se demonstreze că suprafețele

$$(\Sigma_1) \ : \ \vec{r} = \frac{u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + \vec{k}}{u^2 + v^2} \ , \ \text{cu} \ (u, v) \in \mathbf{R^2},$$

$$(\Sigma_2) \ : \ \vec{r} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + u^2\,\vec{k} \ , \ \text{cu} \ (u, v) \in \mathbf{R^2},$$

sunt identice .

4. Se dă suprafața

$$x = u^2 + v + 1 \quad , \quad y = u^2 - v + 1 \quad , \quad z = uv + 2 \quad , \quad cu \quad (u, v) \in \mathbf{R^2}$$

şi punctul $M(u = 1, v = -1)$ pe suprafață.

Să se scrie ecuațiile carteziene ale curbelor $u =$ const. şi $v =$ const. care trec prin punctul M .

5. Să se găsească elemental de arc al suprafeței

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = uv \quad , \quad cu \quad (u, v) \in \mathbf{R^2} .$$

6. Se dă suprafața

$$\vec{r}(u, v) = \left(3u + 3uv^2 - u^3\right)\vec{i} + \left(3u + 3u^2v - v^3\right)\vec{j} + 3\left(u^3 - v^2\right)\vec{k} \quad , \quad cu \quad (u, v) \in \mathbf{R^2} .$$

Să se determine raportul dintre pătratul elementului de arc şi $du^2 + dv^2$.

7. Se consideră

$$ds^2 = du^2 + \left(u^2 + a^2\right)dv^2$$

elementul liniar al unei suprafețe. Să se găsească perimetrul triunghiului curbiliniu format prin intersecția curbelor

$$u = \pm\frac{1}{2}av^2 \quad \text{şi} \quad v = 1 \ .$$

8. Să se calculeze unghiul dintre curbele

$$v = u + 1 \quad \text{şi} \quad v = 3 - u$$

de pe suprafața de rotație

$$\vec{r} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + u^2\,\vec{k} \quad , \quad cu \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2 \,.$$

9. Să se găsească pe suprafața

$$x = u\cos v \quad , \quad y = u\sin v \quad , \quad z = a\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| \quad , \quad cu \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2, \;\; a \in \mathbf{R},$$

curbele care intersectează liniile $v =$ constant sub un unghi constant *(curbele loxodromice)*.

10. Să se găsească unghiul format de liniile coordonate pe suprafețele al căror element liniar este

$$ds^2 = \sqrt{2}v^2du^2 + 2uvdudv + \sqrt{2}u^2dv^2 \,.$$

11. Să se determine elementul de arie al paraboloidului de rotație definit de ecuația $z = x^2 + y^2$.

12. Pe suprafața

$$x = u\cos v \quad , \quad y = u\sin v \quad , \quad z = v \quad , \quad cu \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

se consideră triunghiul curbiliniu determinat de curbele

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad u + v = 1 \,.$$

Să se calculeze : aria S, perimetrul $\mathscr{P}$ şi unghiurile triunghiului .

13. Se dă torul de ecuație

$$\vec{r} = (a + b\cos u)\cos v\,\vec{i} + (a + b\cos u)\sin v\,\vec{j} + b\sin u\,\vec{k} \quad , \quad cu \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

$a, b \in \mathbf{R}$, unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct curent al torului.

1) Să se arate că suprafața are curbele $u =$ const. şi $v =$ const. ortogonale .

2) Să se calculeze elementul de arie al torului.

14. Fiind dată sfera de centru O şi rază R prin ecuațiile ei parametrice,

i) să se calculeze prima şi a doua formă pătratică fundamentală ;

ii) să se arate că două curbe $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ oarecare sunt ortogonale.

15. Să se găsească a doua formă pătratică fundamentală a suprafeței

$$(\Sigma) \ : \ x = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad , \quad y = u^3 + 1 \quad , \quad z = \frac{u^2 + 1}{2} \quad , \quad cu \quad (u, v) \in \mathbf{R^2} \, .$$

BIBLIOGRAFIE

1. Abramescu, N., *Lecții de geometrie analitică,* Editura Universității, Cluj, 1947.
2. Acher, J., Gardelle, J., *Algèbre linéaire et programation linéaire,* Dunod, Paris, 1970.
3. Barbilian, D., *Opera didactică,* Vol. 1-2, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968, 1971.
4. Bercovici, M., Rimer, S., Triandaf, A., *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferențială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
5. Bourbaki, N., *Les structures fondamentales de l'Analyse,* Livre II, Algebre, Paris, Hermann.
6. Bowen, R. M., Wang, C. C., *Introduction to vectors and tensors,* Vol. 1-2, Plenum Press, New York, London, 1976.
7. Chițescu, I., Cristescu. R., Grigore, Gh., Gussi, Gh., Halanay, A., Jurchescu, M., Marcus, S., *Dictionar de analiză matematică,* Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.
8. Creangă, I., Gheorghief, Gh., Haimovici, A., Haimovici, M., Mayer, O., Popa, I., Roth, M., *Curs de geometrie analitică,* Editura Tehnică , Bucureşti, 1951.
9. Creangă, I., Reischer, C., *Algebra liniară,* Ediția a II-a completată, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.
10.Cruceanu, V., *Elemente de algebră liniară şi geometrie,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
11. Flondor, D., Donciu, N., *Algebră şi analiză matematică – culegere de probleme,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

12. Galbură, Gh., Rado, F., *Geometrie,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
13. Gutmann, M., *Probleme de calcul vectorial,* Editura Tehnică , Bucureşti, 1961.
14. Haimovici, A., Cohal, L., Corduneanu, A., Papuc, D., *Elemente de geometrie a planului,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
15. Ion, D. I., Nicolae, R., *Algebra,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
16. Lalescu, Tr., *Tratat de geometrie analitică,* Bucureşti, 1938.
17. Măneanu, V., Carp, D., Antonescu, I., *Algebră liniară ,geometrie analitică şi diferenţială,* Vol. 1-2, Editura Academiei Navale, Constanţa, 1991.
18. Mihăileanu, N., *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.
19. Moisil, Gr. C., *Curs de geometrie analitică,* Iaşi, 1935.
20. Moisil, Gr., *Introducere în algebră I.,* Editura Academiei, Bucureşti, 1954.
21. Murgulescu, E., Flexi, S., Kreindler, O., Sacter, O., Târnoveanu, M., *Geometrie analitică şi diferenţială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
22. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S., *Analiză matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
23. Niewenglowski, B., *Cours de géomètrie analytique,* Gauthier-Villers, Paris, 1929.
24. Postelnicu, T. V. s. a., *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferenţială,* Editura Tehnică , Bucureşti, 1970.
25. Radu, C., Drăguşin, C., Drăguşin, L., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.
26. Roşculeţ, M., *Analiză matemetică,* Ediţia a IV-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.
27. Roşculeţ, M., *Algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
28. Rudner, V., *Probleme de matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

29. Sarian, M., Caragheorghe, E., Boiangiu, D. D., Voiculescu, D., Ghermănescu-Ionescu, L., Enescu, N., Staicu, S., Haseganu-Zamfirescu, E., Rugescu, D., Coman, D., *Probleme de mecanică pentru ingineri şi subingineri,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
30. Stan, A., Grumăzescu, M., *Culegere de probleme de mecanică tehnică,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.
31. Şabac, I. Gh., *Matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
32. Teleman, C., *Geometrie diferențială şi globală,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
33. Teodorescu, I. D., *Geometrie analitică şi elemente de algebră liniară,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.
34. Țițeica, Gh., *Culegere de probleme de geometrie analitică,* Bucureşti, 1932.
35. Udrişte, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O., *Probleme de algebră, geometrie şi ecuații diferențiale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
36. Udrişte, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O., *Algebră, geometrie şi ecuații diferențiale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
37. Vrânceanu, Gh., *Geometrie analitică şi proiectivă,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1953.
38. Vrânceanu, Gh., Hangan, Th., Teleman, C., *Geometrie elementară din punct de vedere modern,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.
39. Vrânceanu, Gh., *Geometria analitică, proiectivă şi diferențială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
40. Vrânceanu, G. G., Mărgulescu, D., *Geometrie analitică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.