

3. POLARIZAREA ELECTRICĂ

Este cunoscută proprietatea dielectricilor de a produce câmp electric în exterior și de a fi supuși acțiunii unui câmp electric exterior, fără a se afla în stare de electrizare. Această proprietate este atribuită *stării lor de polarizare electrică*, numită pe scurt *stare de polarizare*. Ea poate fi *permanentă* (independentă de existența unui câmp electric exterior) sau *temporară* (manifestată numai în prezența câmpului electric exterior).

3.1. Polarizarea dielectricilor

Fizica microscopică explică starea de polarizare printr-o relativă ordonare a moleculelor sau atomilor, astfel încât sarcinile pozitive și cele negative pot exercita acțiuni exterioare care nu se compensează reciproc*. Dielectricii care posedă în mod permanent această proprietate sunt dielectricii cu molecule *polare* (materiale *paraelectrice*). Dielectricii cu molecule *nepolare* (materiale *diaelectrice*) pot căpăta starea de polarizare numai în prezența unui câmp exterior. Starea de polarizare permanentă a corpului nu exclude posibilitatea unei polarizări suplimentare, temporare, sub acțiunea câmpului electric exterior.

Spre deosebire de starea de electrizare, care presupune exces de purtători de sarcină de un anumit semn, starea de polarizare este datorată purtătorilor legați în atomi și în molecule.

3.1.1. Un model al polarizării

Se poate forma o imagine la scară macroscopică asupra fenomenului folosindu-se raționamentul următor (fig. 3.1).

Presupunem o distribuție de sarcină, cu densitatea $\rho(x, y, z)$, în volumul Ω . Ne propunem calculul câmpului produs de această distribuție de sarcină în punctul îndepărtat P . Elementul de volum $d\Omega$, poziționat prin \vec{r} față de originea sistemului de axe ales arbitrar, produce în P potențialul:

$$dV_p = \frac{\rho(x, y, z)d\Omega}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (3.1)$$

unde $R = (z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{-1/2}$.

Prin urmare:

$$dV_p = \frac{\rho d\Omega}{4\pi\epsilon_0} (z^2 + r^2 - 2zr \cos\theta)^{-1/2}$$

sau

$$dV_p = \frac{\rho d\Omega}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \left[1 + \left(\frac{r^2}{z^2} - \frac{2r}{z} \cos\theta \right) \right]^{-1/2}. \quad (3.2)$$

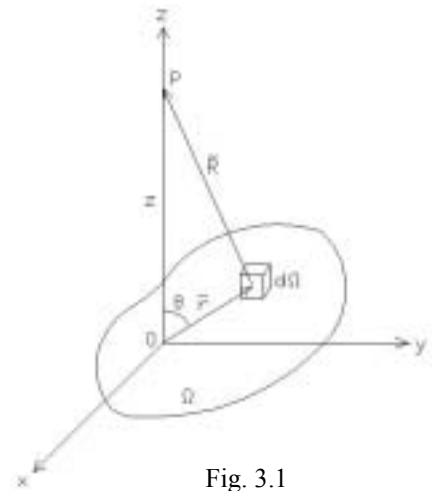


Fig. 3.1

* Edward M. Purcell, *Electricitate și Magnetism*, Cursul de Fizică Berkeley, EDP, 1982.

Dezvoltând paranteza mare în serie de puteri după regula binomului lui Newton:

$$(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \dots$$

se obține:

$$(z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta)^{-1/2} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{r}{z} \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{r}{z} \right)^2 + \dots \right].$$

Cu cât punctul P se îndepărtează de sistemul de sarcini termenii care conțin puteri ale lui $\frac{1}{z}$ devin neglijabili, astfel că seria se poate limita numai la primii doi termeni, relația (3.2) devenind:

$$(3.3) \quad dV_P = \frac{\rho d\Omega}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \left(1 + \frac{r}{z} \cos \theta \right).$$

Potențialul produs în P de întreaga sarcină va fi:

$$(3.4) \quad V_P = \frac{1}{z} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \frac{1}{z^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho r \cos \theta d\Omega,$$

care poate fi scris sub forma:

$$(3.5) \quad V_P = \frac{K_0}{4\pi\epsilon_0 z} + \frac{K_1}{4\pi\epsilon_0 z^2}.$$

Pentru a înțelege mecanismul formării câmpului în P nu este necesar să se recurgă la relația $\vec{E} = -\text{grad}V$, fiind suficientă analiza factorilor notați cu K_0 și K_1 :

$K_0 = \int_{\Omega} \rho d\Omega$ reprezintă sarcina totală. Dacă sarcinile din volumul Ω sunt în cantități egale, pozitive și negative, atunci $K_0 = 0$;

$K_1 = \int_{\Omega} \rho r \cos \theta d\Omega$ depinde de poziția $z' = r \cos \theta$ a sarcinii, care se dovedește astfel ca fiind determinantă pentru producerea câmpului de către corpul neutru.

Rămâne să se arate că, pentru $K_0 = 0$, K_1 nu depinde de alegerea originii sistemului de axe. Într-adevăr, dacă se înlocuiește z' prin $(z' + z_0)$ rezultă:

$$\int_{\Omega} (z' + z_0) \rho d\Omega = \int_{\Omega} z' \rho d\Omega + z_0 \int_{\Omega} \rho d\Omega,$$

unde ultimul termen este nul. Evident, nici axa z nu este luată după o direcție privilegiată deoarece nu s-a presupus o anumită simetrie a distribuției de sarcină.

3.1.2. Clase de polarizare

Fizica modernă confirmă un asemenea model identificând patru clase de polarizare:

- *polarizarea electronică* și *polarizarea ionică*, numite *polarizări de deformare*, care se datoresc deformării învelișurilor electronice ale atomilor și, respectiv, deplasării ionilor în cristalele ionice sub efectul câmpului electric și apar în toate corpurile, dar sunt relativ slabe, fiind perceptibile numai la materiale nepolare, la care nu există alte tipuri de polarizare;

- *polarizarea de orientare*, caracteristică materialelor cu molecule polare, realizată prin orientarea ca un tot a moleculelor în câmpul electric (*polarizare nestructurală*) sau numai prin rotirea unor radicali mobili din moleculă (*polarizare structurală*);

- *polarizarea de relaxare*, datorată acumulărilor de sarcini electrice pe suprafețele de discontinuitate din interiorul materialelor neomogene, determinată de neomogenitatea permitivităților și rezistivităților acestora, numită *polarizare interfacială* sau *de interstraturi*.

Această clasificare ajută să se înțeleagă comportarea corpului neutru, dar polarizat electric, în câmpul electric exterior uniform: asupra lui nu se exercită forțe ($K_0 = 0$), în schimb este supus unui *cuplu de forțe* care tinde să-l orienteze după o direcție privilegiată. Prin $K_1 \neq 0$ se înțelege astfel o componentă a *momentului dipol* al distribuției de sarcină, moment care este pus în evidență prin acțiunea ponderomotoare la care este supus un mic corp polarizat în câmpul electric uniform, așa cum s-a arătat în paragraful 1.2.1, și care a condus la definirea macroscopică a mărimii primitive de stare electromagnetică numită *moment electric*.

3.2. Dipolul electric

Comportarea micului corp polarizat în câmpul electric justifică asocierea unui model constituit din două sarcini punctiforme, egale și opuse, situate la o distanță finită l , numit *dipol electric* sau *dublet de sarcină*. Dacă lungimea l a dipolului tinde către zero iar sarcina dipolară către infinit, astfel că, la limită, produsul lor este finit, adică:

$$\lim_{q_d \rightarrow \infty, l \rightarrow 0} q_d \bar{l} = \bar{p}_d,$$

sistemul se numește *dipol electric elementar* sau *dublet elementar de sarcină*. Mărimii vectorială \bar{p}_d se numește *moment dipolar* sau *momentul dipolului electric*.

3.2.1. Teorema echivalenței dintre un mic corp polarizat electric și un dipol electric elementar

Se demonstrează că cele două sisteme sunt echivalente, atât din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare ce se exercită asupra lor în câmpul electric în care sunt situate, cât și din punctul de vedere al câmpului electric pe care îl produc în vidul din exteriorul lor, dacă:

$$\bar{p} = \bar{p}_d. \quad (3.6)$$

Se constată că în câmpul electric neomogen un mic corp polarizat este supus atât cuplului $\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}_v$ cât și unei forțe. La o rotire elementară $d\alpha$ a micului corp polarizat, variația energiei sistemului corespunde lucrului elementar:

$$dL_r = \bar{C} \cdot d\alpha = (\bar{p} \times \bar{E}_v) \cdot d\alpha = \bar{p} \cdot (\bar{E}_v \times d\alpha) = \bar{p} \cdot d\bar{E}_v, \quad (3.7)$$

unde, cu $d\bar{E}_v = \bar{E}_v \times d\alpha$ s-a notat variația elementară a vectorului \bar{E}_v .

La o translație elementară de vector $d\bar{s}$, efectuată de către același mic corp polarizat în câmpul exterior, suficient de lent, ca o succesiune de stări statice, variația energiei sistemului se poate exprima tot prin produsul scalar dintre momentul electric, care rămâne constant, și variația elementară a câmpului între punctele inițial și final ale mișcării :

$$dW = dL_t = \bar{F}_p \cdot d\bar{s} = \bar{p} \cdot d\bar{E}_v = d(\bar{p} \cdot \bar{E}_v^\downarrow). \quad (3.8)$$

Săgeata indică vectorul asupra căruia se aplică operatorul diferențial.

Diferențiala produsului scalar $\bar{p} \cdot \bar{E}_v$ este:

$$d(\bar{p} \cdot \bar{E}_v^\downarrow) = \text{grad}(\bar{p} \cdot \bar{E}_v^\downarrow) d\bar{s}, \quad (3.9)$$

unde:

$$\text{grad}(\bar{p} \cdot \bar{E}_v^\downarrow) d\bar{s} = \bar{p} \times \text{rot} \bar{E}_v + (\bar{p} \text{grad}) \bar{E}_v.$$

Deoarece $\text{rot} \bar{E}_v = 0$, așa cum s-a arătat în § 2.2.3, rezultă expresia forței \bar{F}_p :

$$\bar{F}_p = \text{grad}(\bar{p} \cdot \bar{E}_v^\downarrow) = (\bar{p} \text{grad}) \bar{E}_v. \quad (3.10)$$

Fie acum un dipol electric elementar, caracterizat prin lungimea l și prin valoarea absolută a sarcinii q_d , situat în câmpul electric neomogen caracterizat local prin vectorul $\vec{E}_v(\vec{r})$, ca în figura 3.2.

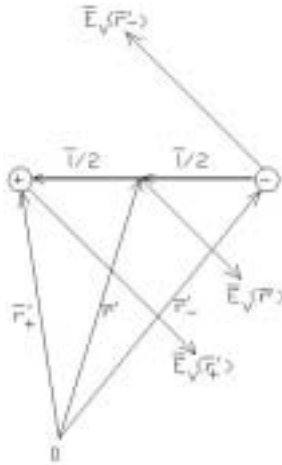


Fig. 3.2

Intensitățile locale ale câmpului în punctele în care se află sarcinile dipolare sunt $\vec{E}_v(\vec{r}'_+)$ și, respectiv, $\vec{E}_v(\vec{r}'_-)$. Dezvoltând acești vectori în serie Taylor și luând numai primii doi termeni se obține:

$$\vec{E}_v(\vec{r}'_+) = \vec{E}_v(\vec{r}' + \vec{l}/2) = \vec{E}_v(\vec{r}') + \left(\frac{\vec{l}}{2} \text{grad}\right) \vec{E}_v(\vec{r}'),$$

respectiv:

$$(3.11) \quad \vec{E}_v(\vec{r}'_-) = \vec{E}_v(\vec{r}' - \vec{l}/2) = \vec{E}_v(\vec{r}') - \left(\frac{\vec{l}}{2} \text{grad}\right) \vec{E}_v(\vec{r}').$$

Forțele exercitate asupra celor două sarcini vor fi:

$$\vec{F}_q(\vec{r}'_+) = q_d \vec{E}_v(\vec{r}'_+) = q_d \vec{E}_v(\vec{r}') + q_d \left(\frac{\vec{l}}{2} \text{grad}\right) \vec{E}_v(\vec{r}')$$

și

$$\vec{F}_q(\vec{r}'_-) = -q_d \vec{E}_v(\vec{r}'_-) = -q_d \vec{E}_v(\vec{r}') + q_d \left(\frac{\vec{l}}{2} \text{grad}\right) \vec{E}_v(\vec{r}').$$

Forța rezultantă este:

$$(3.12) \quad \vec{F}_d = \vec{F}_q(\vec{r}'_+) + \vec{F}_q(\vec{r}'_-) = (q_d \vec{l} \text{grad}) \vec{E}_v(\vec{r}') = (\vec{p}_d \text{grad}) \vec{E}_v(\vec{r}'),$$

adică $\vec{F}_p = \vec{F}_d$.

Cuplul raportat la centrul dipolului are expresia:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \vec{C}_d &= \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_q(\vec{r}'_+) + \left(-\frac{\vec{l}}{2}\right) \times \vec{F}_q(\vec{r}'_-) = \frac{\vec{l}}{2} \times q_d \vec{E}_v(\vec{r}') + \\ &+ \frac{\vec{l}}{2} \times q_d \vec{E}_v(\vec{r}') = q_d \vec{l} \times \vec{E}_v(\vec{r}') = \vec{p}_d \times \vec{E}_v(\vec{r}'), \end{aligned}$$

de unde rezultă $\vec{C}_p = \vec{C}_d$.

Echivalența câmpurilor electrice ale corpului polarizat electric și dipolului pot fi ușor intuite dacă se ține seama că în regim staționar se verifică principiul acțiunii și reacțiunii: dacă aceeași distribuție de sarcină electrică q produce câmpul în care s-au studiat acțiunile ponderomotoare asupra micului corp polarizat, respectiv asupra dipolului, rezultă, drept urmare a principiului amintit, că dipolul și corpul polarizat vor stabili aceleași forțe și aceleași momente asupra sarcinii q .

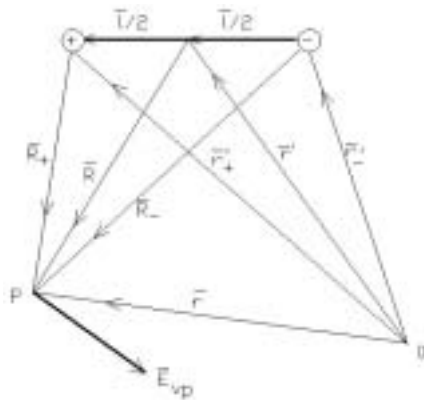


Fig. 3.3

Pentru a fundamenta această afirmație se va calcula mai întâi câmpul produs în punctul $P(\vec{r})$ de dipolul din figura 3.3, al cărui centru este poziționat prin vectorul \vec{r}' față de referința O .

Cu notațiile de pe figură rezultă:

$$(3.14) \quad \vec{E}_{vp} = \vec{E}_{v+} + \vec{E}_{v-} = \frac{q_d}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{R}_+}{R_+^3} - \frac{\vec{R}_-}{R_-^3} \right),$$

unde:

$$\vec{R}_+ = \vec{R} - \frac{\vec{l}}{2} \quad \text{și} \quad \vec{R}_- = \vec{R} + \frac{\vec{l}}{2}.$$

Se descompun în serie Taylor funcțiile \vec{R}_+/R_+^3 și

\bar{R}_- / R_-^3 și reținându-se numai primii doi termeni reiese:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{R}_+}{R_+^3} &= f(R_+) = f(\bar{R} - \frac{\bar{l}}{2}) = f(\bar{R}) - (\frac{\bar{l}}{2} \text{grad}') f(\bar{R}) = \frac{\bar{R}}{R^3} - (\frac{\bar{l}}{2} \text{grad}') \frac{\bar{R}}{R^3}; \\ \frac{\bar{R}_-}{R_-^3} &= f(R_-) = f(\bar{R} + \frac{\bar{l}}{2}) = f(\bar{R}) + (\frac{\bar{l}}{2} \text{grad}') f(\bar{R}) = \frac{\bar{R}}{R^3} + (\frac{\bar{l}}{2} \text{grad}') \frac{\bar{R}}{R^3},\end{aligned}$$

în care grad' operează în raport cu coordonatele centrului dipolului.

Ținându-se cont de aceste expresii, ecuația 3.14 devine:

$$\bar{E}_{vp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_d (\bar{l} \text{grad}') \frac{\bar{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\bar{p}_d \text{grad}') \frac{\bar{R}}{R^3}. \quad (3.15)$$

Dacă se raportează vectorul câmp la coordonatele punctului P , atunci operatorul grad' se va aplica vectorului $-\bar{R}$ sau, cu notația $\text{grad} = -\text{grad}'$, se va putea scrie:

$$\bar{E}_{vp} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\bar{p}_d \text{grad}) \frac{\bar{R}}{R^3}. \quad (3.16)$$

Vectorul \bar{p}_d este constant, astfel că:

$$\bar{E}_{vp} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\bar{p}_d \text{grad}) \frac{\bar{R}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\bar{p}_d \cdot \bar{R}}{R^3} \right). \quad (3.17)$$

Dacă se folosește dezvoltarea:

$$\text{grad} \left(\frac{\bar{p}_d \cdot \bar{R}}{R^3} \right) = \frac{1}{R^3} \text{grad}(\bar{p}_d \cdot \bar{R}) + \bar{p}_d \cdot \bar{R} \text{grad} \frac{1}{R^3} = \frac{\bar{p}_d}{R^3} - \frac{3\bar{R}(\bar{p}_d \cdot \bar{R})}{R^5},$$

se obține:

$$\bar{E}_{vp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\bar{R}(\bar{p}_d \cdot \bar{R})}{R^5} - \frac{\bar{p}_d}{R^3} \right]. \quad (3.18)$$

Fie acum un mic corp polarizat electric, având momentul \bar{p} , în prezența unei sarcini punctiforme q (fig. 3.4).

Sarcina q stabilește câmpul electric de vector:

$$\bar{E}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{R}}{R^3}$$

și exercită asupra corpului de moment \bar{p} forța:

$$\bar{F}_p = \text{grad}(\bar{p} \cdot \bar{E}_v) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{\bar{p} \cdot \bar{R}}{R^3}.$$

Micul corp polarizat produce, la rândul său, asupra sarcinii q forța:

$$\bar{F}_q = -\bar{F}_p = q\bar{E}_{vp},$$

\bar{E}_{vp} fiind vectorul câmp electric stabilit de el în punctul în care se află sarcina q .

Din ultimele două ecuații rezultă pentru \bar{E}_{vp} expresia:

$$\bar{E}_{vp} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{R}}{R^3} \right), \quad (3.19)$$

identică cu (3.17) stabilită pentru dipolul care are $\bar{p}_d = \bar{p}$.

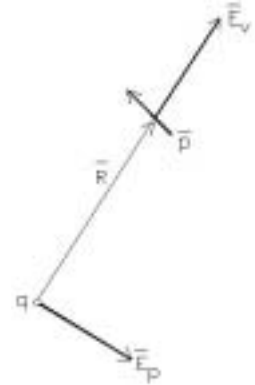


Fig. 3.4

3.2.2. Sistemul complet de sarcini

Modelul dipolar poate fi în general asociat oricăror sisteme complete de sarcini, nu numai aceluia legate în atomi și în molecule (sistemul de sarcini a căror sumă algebrică este nulă alcătuiesc *un sistem complet de sarcini*). Raționamentul de la paragraful 3.1.1 arată însă că dacă sistemul de sarcini nu este complet atunci momentul dipol va depinde de alegerea originii sistemului de coordonate.

Fie un sistem complet de n sarcini q_k :

$$(3.20) \quad \sum_{k=1}^n q_k = 0,$$

cu $\sum_{k=1}^i q_k = q_d$ și $\sum_{k=i+1}^n q_k = -q_d$. Se notează cu \vec{r}_k vectorii de poziție ai sarcinilor q_k față de punctul O (fig. 3.5) și se definesc vectorii:

$$(3.21) \quad \vec{r}_+ = \frac{\sum_{k=1}^i q_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^i q_k} = \frac{\sum_{k=1}^i q_k \vec{r}_k}{q_d} \quad \text{și} \quad \vec{r}_- = \frac{\sum_{k=i+1}^n q_k \vec{r}_k}{\sum_{k=i+1}^n q_k} = \frac{\sum_{k=i+1}^n q_k \vec{r}_k}{-q_d}.$$

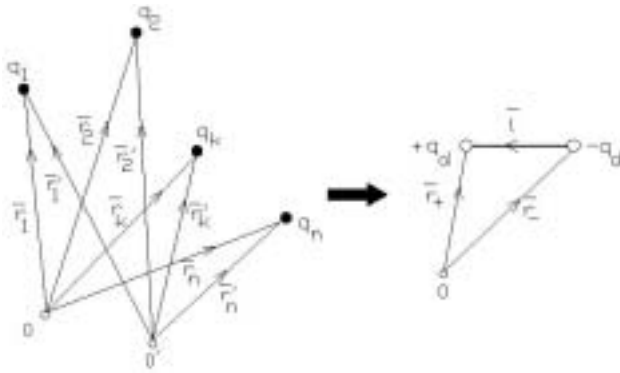


Fig. 3.5

Sistemul a două sarcini punctiforme, de valori q_d și $-q_d$, poziționate prin vectorii \vec{r}_+ , respectiv, \vec{r}_- în raport cu punctul O constituie un dipol cu momentul:

$$(3.22) \quad \vec{p}_d = q_d(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q_d \vec{l},$$

unde:

$$(3.23) \quad \vec{l} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k}{q_d}$$

și

$$(3.24) \quad \vec{p}_d = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k.$$

Momentul \vec{p}_d este invariant față de alegerea originii sistemului de referință dacă sistemul sarcinilor este complet. Într-adevăr, în raport cu o nouă origine O' a sistemului de referință, poziționată față de O' prin vectorul \vec{r}_0 , momentul dipol va fi:

$$\vec{p}'_d = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}'_k = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k + \vec{r}_0 \sum_{k=1}^n q_k,$$

iar $\vec{p}'_d = \vec{p}_d$ dacă $\sum_{k=1}^n q_k = 0$, sistemul sarcinilor fiind complet.

Asocierea unui dipol la un sistem de sarcini distribuite, cu densități de volum ρ_v , de suprafață ρ_Σ , sau lineice ρ_l , ține seama că sarcina dipolară va fi egală cu sarcina totală de un anumit semn:

$$(3.25) \quad q_d = \int dq = \left| \int dq \right|,$$

iar în relațiile (3.21) sumele se transformă în integrale:

$$\bar{r}_+ = \frac{\int \bar{r} dq}{q_d}, \quad \bar{r}_- = \frac{\int \bar{r} dq}{q_d} . \quad (3.26)$$

Integrarea se face, după caz, pe curbe, pe suprafețe sau în volum.

Momentul electric dipolar echivalent va fi caracterizat prin:

$$\bar{p}_d = q_d(\bar{r}_+ - \bar{r}_-) = q_d \bar{l} \quad \text{și} \quad \bar{l} = \bar{r}_+ - \bar{r}_- . \quad (3.27)$$

3.3. Sarcina electrică de polarizație

Studiul stării de polarizare electrică a corpurilor de dimensiuni mari se face pe modelul repartiției de dipoli, admițând că ele sunt constituite din elemente de volum luate ca fragmente de-a lungul tuburilor liniilor de câmp ale polarizației \bar{P} (fig. 3.6). Acestea sunt mici corpuri polarizate, al căror moment electric se calculează cu relația (v. § 1.2.1):

$$d\bar{p} = \bar{P} dv$$

și care sunt echivalente cu dipoli elementari având $d\bar{p}_d = d\bar{p}$.

Prin *sarcină electrică de polarizație* se înțelege sistemul fictiv de sarcini a căror repartiție în volumul sau pe suprafața unui corp este echivalentă cu starea reală de polarizare a acelui corp.

3.3.1. Sarcina de polarizație echivalentă

Pentru a se stabili sarcina de polarizație echivalentă volumului delimitat de suprafața Σ , aflată în interiorul corpului polarizat electric, se vor considera dipolii echivalenți elementelor de volum luate în lungul liniilor de polarizație (fig. 3.6a). Ea corespunde excesului de sarcină dipolară existent pe frontieră, datorat dipolilor intersectați de suprafața Σ . Dipolii echivalenți elementelor corpului care au ambele extremități în interiorul sau în exteriorul suprafeței, nu contribuie la valoarea sarcinii de polarizație dq .

Sarcina dipolară, echivalentă unui element de corp intersectat de suprafața Σ , rezultă din relația (v. fig. 3.6b):

$$dq_d = P dv / l = P l dA \cos \alpha / l = P dA \cos \alpha = \bar{P} \cdot d\bar{A}, \quad (3.28)$$

iar cea corespunzătoare, rămasă în interior și care contribuie la sarcina de polarizație q_p din Σ este:

$$dq_p = -dq_d = -\bar{P} \cdot d\bar{A}. \quad (3.29)$$

În consecință, sarcina totală de polarizație localizată în interiorul unei suprafețe închise Σ din interiorul unui corp rezultă ca fiind egală cu fluxul polarizației electrice prin acea suprafață:

$$q_p = -\oint_{\Sigma} \bar{P} \cdot d\bar{A}. \quad (3.30)$$

Potrivit teoremei Gauss-Ostrogradski se poate scrie:

$$q_p = -\oint_{\Sigma} \bar{P} \cdot d\bar{A} = -\int_{\Omega_{\Sigma}} \operatorname{div} \bar{P} dv \quad (3.31)$$

și dacă, analog modului în care a fost definită densitatea de volum a sarcinii electrice adevărate (v. § 1.2.1), se definește și densitatea de volum ρ_{vp} a sarcinii de polarizație, se va scrie în

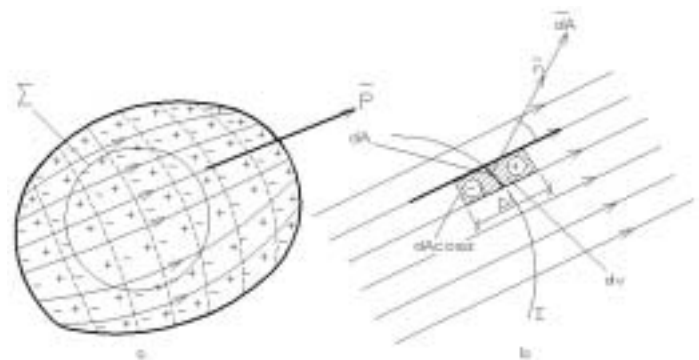


Fig. 3.6

continuare:

$$(3.32) \quad q_p = \int_{\Omega_s} \rho_{vp} dv,$$

astfel că, din ultimele două ecuații se deduce expresia sarcinii de polarizație sub forma locală:

$$(3.33) \quad \rho_{vp} = -\text{div} \bar{P}.$$

Relația (3.33) rămâne valabilă pentru domeniile în care polarizația este o funcție continuă de punct.

3.3.2. Sarcina de polarizație pe suprafețe de discontinuitate

Pe suprafețe de discontinuitate ale polarizației \bar{P} , sarcina de polarizație este repartizată cu densitate de suprafață, ρ_{sp} , exprimată prin:

$$(3.34) \quad \rho_{sp} = -\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\int_{\Sigma} \bar{P} \cdot d\bar{A}}{\Delta A} = -\text{div}_s \bar{P}.$$

Pentru a calcula *divergența de suprafață* $\text{div}_s \bar{P}$ pe o suprafață care separă două domenii de continuitate a polarizației, în funcție de valorile \bar{P}_1 și \bar{P}_2 ale polarizației pe cele două fețe ale suprafeței de discontinuitate, se va considera cilindrul elementar din figura 3.7 care închide exact un element al suprafeței. Generatoarea cilindrului este paralelă cu normala la elementul de suprafață.

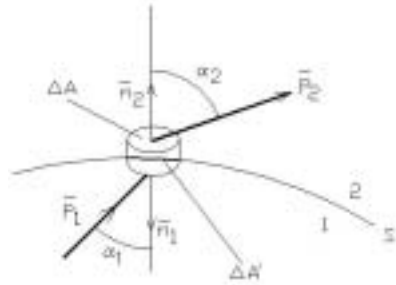


Fig. 3.7

Cu notațiile de pe figură și ținându-se cont de faptul că fluxul polarizației prin suprafața laterală de înălțime neglijabilă a cilindrului este practic nul, sarcina de polarizație se exprimă cu ajutorul relației (3.29):

$$(3.35) \quad \Delta q_p = -[\bar{P}_1 \cdot \bar{n}_1 - \bar{P}_2 \cdot \bar{n}_2] \Delta A.$$

Deoarece:

$$\rho_{sp} = \lim_{\Delta A' \rightarrow 0} \frac{\Delta q_p}{\Delta A'}$$

și $\Delta A' \approx \Delta A$, rezultă:

$$(3.36) \quad \rho_{sp} = -[\bar{P}_1 \cdot \bar{n}_1 + \bar{P}_2 \cdot \bar{n}_2] = \bar{n}_{12} \cdot [\bar{P}_1 - \bar{P}_2],$$

unde \bar{n}_{12} este versorul normalei orientat dinspre domeniul 1 către domeniul 2.

Valoarea densității ρ_{sp} a polarizației pe suprafața unui corp situat în vid va fi:

$$(3.37) \quad \rho_{sp} = \bar{P} \cdot \bar{n},$$

\bar{n} fiind versorul normalei la suprafață orientat spre vid.

Sarcina electrică de polarizație q_p și densitățile ei de volum ρ_{pv} și de suprafață ρ_{sp} sunt mărimi derivate, unitățile lor de măsură fiind aceleași cu cele ale sarcinii electrice, respectiv ale densităților acestora (v. § 1.2.1).

3.4. Câmpul electric în medii polarizate

Fie sarcini electrice distribuite punctiform, în volume, pe suprafețe sau lineic, în domenii având polarizația $\bar{P} \neq 0$, conținând suprafețe de discontinuitate și aflate în prezența unor mici corpuri polarizate de momente \bar{p}_k .

3.4.1. Determinarea câmpului produs de sarcinile de polarizație

Ecuțiile (2.19) stabilite pentru câmpul sarcinii punctiforme și principiul superpoziției câmpurilor electrostatice au condus, în vid, la expresia:

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_v \frac{\rho_v \bar{R}}{R^3} dv + \int_s \frac{\rho_s \bar{R}}{R^3} dA + \int_c \frac{\rho_l \bar{R}}{R^3} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k \bar{R}}{R^3} \right). \quad (3.38)$$

În mod analog se poate ține seama de contribuția la formarea câmpului sarcinilor de polarizație localizate în volume, pe suprafețe de discontinuitate sau formate din mici corpuri polarizate cu momentul \bar{p}_k (v. § 1.2.1):

$$\bar{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_v \frac{-\operatorname{div} \bar{P}}{R^3} \bar{R} dv + \int_s \frac{-\operatorname{div}_s \bar{P}}{R^3} \bar{R} dA + \sum_{k=1}^n \left(3 \frac{(\bar{p}_k \cdot \bar{R}) \bar{R}}{R^5} - \frac{\bar{p}_k}{R^3} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Expresia:

$$\bar{E} = \bar{E}_v + \bar{E}_p \quad (3.40)$$

este soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{E} &= \operatorname{div} \left[\frac{1}{\epsilon_0} (\bar{D} - \bar{P}) \right] = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v + \rho_{pv}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

unde $\operatorname{div} \bar{D} = \rho_v$ și $\operatorname{div} \bar{P} = -\rho_{pv}$.

3.4.2. Determinarea potențialelor datorate mediilor polarizate

Potențialul electrostatic satisface ecuația:

$$\operatorname{divgrad} V = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v + \rho_{pv}) \quad (3.42)$$

în condiții corespunzătoare de unicitate.

În cazul în care sarcinile și polarizațiile sunt localizate în volum finit, potențialul se poate calcula în raport cu potențialul punctului de referință cu relația:

$$V = \int_P^P \bar{E} \cdot d\bar{s}. \quad (3.43)$$

Se obține:

$$V = V_q + V_p, \quad (3.44)$$

în care:

$$V_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_v \frac{\rho_v}{R} dv + \int_s \frac{\rho_s}{R} dA + \int_c \frac{\rho_l}{R} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R} \right), \quad (3.45)$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_v \frac{-\operatorname{div} \bar{P}}{R} dv + \int_s \frac{-\operatorname{div}_s \bar{P}}{R} dA + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{p}_k \cdot \bar{R}}{R^3} \right]. \quad (3.46)$$

Divizând volumul v în care $\bar{P} \neq 0$ în elemente de volum având momentul $\bar{P} dv$, ultima relație se mai poate scrie:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_v \frac{\bar{P} \cdot \bar{R}}{R^3} dv + \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\bar{p}_k \cdot \bar{R}}{R^3} \right). \quad (3.47)$$

3.5. Materiale dielectrice

În electrotehnică, dielectrii se folosesc în două scopuri: pentru a forma izolația electrică a căilor de curent ale mașinilor, aparatelor și instalațiilor electrice și pentru obținerea de condensatoare cu capacități mari.

Teoretic, *izolații electrice* sunt corpuri care prezintă rezistivitate infinită și permitivitate apreciabilă, neinfluențabile de temperatură, de starea mediului sau de modul de variație în timp a câmpului electric în care sunt folosiți. În realitate, izolații reali (numiți și izolații tehnici) au rezistivitate foarte mare, dar nu infinită, permitivitate și proprietăți care variază cu factorii menționați și cu structura lor fizico - chimică.

3.5.1. Clasificarea dielectricilor

Clasificarea după starea fizică a izolanților se face în izolanți solizi, lichizi și gazoși, iar după compoziția chimică se disting două clase mari: izolanți organici și izolanți anorganici.

Pe baza modului de polarizare ei se pot clasifica în cinci grupe importante:

- *grupa I* cuprinde dielectrii care au numai polarizare electronică, de exemplu corpurile solide neutre sau slab polare, în stare cristalină sau amorfă (parafină, polistiren, sulf etc), precum și gaze sau lichide neutre sau slab polare (hidrogen, heliu, argon, benzen etc);
- *grupa a II-a* cuprinde dielectrii care prezintă polarizare electronică și ionică în același timp și care sunt dielectrii cristalini cu o așezare compactă a ionilor: cuarț, mică, rutil etc;
- *grupa a III-a* este formată din dielectrii cu polarizare electronică și structurală, unii având și polarizare ionică: celuloza, masele plastice termoreactive, porțelanul, micalexul etc;
- *grupa a IV-a* conține dielectrii lichizi și viscoși cu polaritate electronică și dipolică: compoundurile cu colofoniu, uleiul de ricin, sovolul etc;
- *grupa a V-a* cuprinde materialele seignettoelectrice caracterizate prin polarizare electronică și spontană: sarea lui Seignette (tartrat dublu de sodiu și potasiu), titanatul de bariu (BaTiO_3), diferiți monohidrați ai unor tartrați micști (KH_2PO_4 , KH_2AsO_4 , $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$) etc.

3.5.2. Mărimi de stare electrică specifice dielectricilor

Caracteristicile în funcție de care sunt aleși dielectrii pentru utilizări în electrotehnică sunt caracteristici electrice, fizice, chimice, mecanice și termice. În cele ce urmează ne propunem numai o trecere în revistă a caracteristicilor electrice, deoarece un studiu complet asupra proprietăților și caracteristicilor materialelor dielectrice se face la cursul Știința Materialelor.

Așa zisele caracteristici electrice ale dielectricilor sunt, de fapt, mărimile de material specifice izolanților; acestea sunt: susceptivitatea electrică χ_e , permitivitatea absolută ε , permitivitatea relativă ε_r , rigiditatea dielectrică E_{rd} și rezistența de izolație R .

Primele mărimi au fost definite, în general, în § 1.2.3 ($\chi_e, \varepsilon, \varepsilon_r$ – v. tabelul 1.1), iar rigiditatea dielectrică a fost tratată pe larg în paragraful 2.4.3. În continuare vor fi prezentate câteva amănunte cu privire la aceste mărimi, legat de utilizarea materialelor dielectrice în tehnică.

Susceptivitatea electrică este –pentru dielectrii liniari, izotropi și aflați într-un câmp electrostatic– o constantă scalară adimensională, definită –după cum s-a arătat (v. § 1.2.3)– prin raportul: $\chi_e = \frac{|\overline{P}_t|}{\varepsilon_0 |\overline{E}|}$, unde $|\overline{P}_t|$ și $|\overline{E}|$ sunt valorile absolute ale polarizației electrice temporare și – respectiv – intensității câmpului electrostatic exterior (care a produs în materialul considerat polarizația \overline{P}_t). Tot pentru materialele liniare și izotrope, dar plasate într-un câmp în regim variabil, se constată –la cei mai mulți dielectrii– o "rămânere în urmă" a polarizației față de valoarea instantanee a intensității câmpului electric și dacă un dielectric este introdus brusc într-un câmp electric constant, cu intensitatea E_0 (ceea ce se exprimă, în planul modelării, printr-un câmp

electric de tip treaptă a lui Heaviside: $t < 0 \Rightarrow E = 0$ și $t \geq 0 \Rightarrow E = E_0$), atunci se constată că polarizația electrică temporară nu crește și ea tot brusc, ci este –în general– o funcție de timp $P_t(t)$, tranzitorie aperiodică, în general de formă exponențială, care tinde asimptotic către o valoare staționară $\varepsilon_0 \chi_e E_0$. Acest fenomen se numește *postefect* și se explică printr-o așa numită "viscozitate electrică" a materialului izolant ce prezintă acest efect.

Unele materiale dielectrice cu viscozitate electrică, dacă sunt introduse în câmp electric cu variație armonică, adică într-un câmp cu intensitatea $E(t) = E_0 \sin \omega t$, capătă o polarizație temporară $P_t(t)$ care variază de asemenea sinusoidal dar care –din cauza fenomenului de postefect– este defazată în urma câmpului electric, adică are forma: $P_t(t) = \varepsilon_0 \chi_e E_0 \sin[\omega t - \varphi(\omega)]$ care arată că susceptivitatea χ_e și defazajul φ depind de pulsația ω a câmpului. În acest fel, dacă dependența dintre $P_t(t)$ și $E(t) = E_0 \sin \omega t$ este liniară, adică $P_t(t) = \varepsilon_0 \chi_e E_0 \sin \omega t$, ceea ce se întâmplă la materialele fără postefect, fiind reprezentată printr-o dreaptă în planul E, P_t , dependența determinată de postefect, cu $\chi_e = \chi_e(\omega)$ și $\varphi = \varphi(\omega)$, reprezintă o elipsă.

Permitivitatea (constanta dielectrică) este o caracteristică a dielectricului în legătură directă cu modul de polarizare (v. Teoria constantelor de material).

Corpurile gazoase au polarizare neânsemnată, permitivitatea lor relativă ε_r , la temperatura normală, fiind apropiată de unitate.

Lichidele nepolare au permitivitatea relativă practic egală cu pătratul indicelui de refracție a luminii, $\varepsilon_r = n^2$ (relația lui Maxwell). Ea variază liniar cu temperatura.

Lichidele polare, cum este sovolul (pentaclordifenil: $C_6H_2Cl_2$ - $C_6H_2Cl_2$) au permitivități mari cu variație complexă în funcție de temperatură.

Permitivitatea dielectricilor solizi are cele mai variate valori în funcție de particularitățile structurale ale dielectricului. La cei formați din molecule nepolare, care au numai polarizare electronică, permitivitatea relativă are cele mai mici valori.

Dielectricii solizi dipolici, cu structură amorfă și cristalină, dielectricii amorfii ionici cum sunt rășinile și polimerii polari (bachelită, șelac, plexiglas, ebonită, clorură de polivinil), celuloza și produsele din celuloză (hârtie, textile, acetat de celuloză), precum și alți dielectrici (sticla etc), având polarizare electronică, ionică și structurală, se împart din punctul de vedere al permitivității în două subgrupe: în prima sunt cuprinși dielectricii amorfii ionici a căror permitivitate relativă variază între 4 și 20; cealaltă subgrupă cuprinde restul dielectricilor solizi, amorfii și cristalini, a căror permitivitate depinde în mare măsură de temperatura și de frecvența tensiunii aplicate.

Majoritatea dielectricilor cu structura cristalină, deși liniari, sunt anizotropi, ceea ce înseamnă că permitivitatea absolută ε , care –după cum s-a arătat în paragraful 1.3.5 (referitor la legea polarizației electrice temporare)– se poate exprima prin relația: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, unde permitivitatea relativă este dată de $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, are valori ce depind de direcția considerată în sistemul cristalin al corpului. În acest caz, legea polarizației temporare (condiderându-se corpul anizotrop raportat la un sistem de referință triortonormal $Oxyz$) are forma matricială $\bar{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}_0$, adică:

$$\begin{bmatrix} P_{tx} \\ P_{ty} \\ P_{tz} \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezx} & \chi_{ezy} & \chi_{ezz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix},$$

unde matricea χ_e (cu nouă componente scalare) este *tensorul susceptivității electrice*.

În consecință, legea legăturii între inducția electrică \bar{D} , intensitatea câmpului electric \bar{E} și polarizația electrică \bar{P} (v. § 1.3.3), devine:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}_t + \bar{P}_p = \varepsilon_0 \bar{E} + \varepsilon_0 \chi_e \bar{E} + \bar{P}_p = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} + \bar{P}_p = \varepsilon \bar{E} + \bar{P}_p,$$

unde ε este *tensorul permitivității absolute*, adică:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 + \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & 1 + \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezz} & \chi_{ezy} & 1 + \chi_{ezz} \end{bmatrix}$$

Dielectricii solizi *seignettoelectrici*, numiți și *feroelectrici*, cu polarizare electronică, ionică și spontană au permitivități foarte mari și cu o pronunțată dependență de temperatură. Caracteristic lor este fenomenul de hysterezis dielectric, manifestat prin întârzierea variației deplasărilor electrice față de variația intensității câmpului electric și prin saturația electrică, analogă saturației magnetice a materialelor feromagnetice (fig. 3.8).

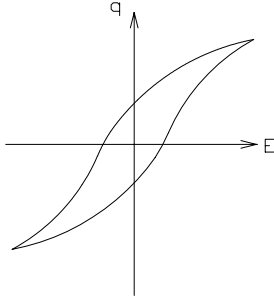


Fig. 3.8

Rezistența electrică este definită aici ca *rezistență totală* (de izolație), *rezistență de volum* și *rezistență de suprafață*.

Rezistența de volum R_v se definește ca și rezistența conductorilor electrice. Rezistența specifică de volum se numește *rezistivitate de volum*, se notează cu ρ_v și se măsoară în Ωm sau Ωcm .

Rezistența de volum, a dielectricilor stratificați se măsoară perpendicular pe straturi. Ea este mai mare decât rezistența măsurată în lungul straturilor (*rezistența interioară*).

Rezistivitatea de volum are valori diferite, după felul tensiunii aplicate. În curent continuu, citirile se fac după stabilirea unui curent constant în dielectric, pentru a elimina influența curenților inițiali de deplasare și de absorbție. În curent alternativ, la materialele cu sarcini spațiale importante (din categoria rășinilor) rezistivitatea de volum este de sute de ori mai mare decât în curent continuu.

Substanțele cristaline au rezistivitate mai mică decât cele amorfe și prezintă anizotropie. Compoziția, modul de legătură al elementelor de bază, structura materialelor etc. sunt factori care influențează în cea mai mare măsură rezistivitatea lor de volum și de suprafață.

Rezistența de suprafață R_s se calculează ca raport între tensiunea U aplicată la doi electrozi în formă de cuțit, apăsați cu o anumită presiune pe suprafața izolanului și curentul care ia naștere între acești electrozi (fig. 3.9)

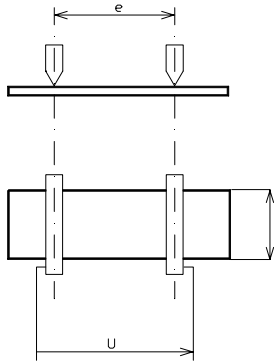


Fig. 3.9

Cu notațiile din figura 3.9 rezistivitatea de suprafață se exprimă prin:

$$(3.48) \quad \rho_s = R_s \frac{l}{e} \quad [\Omega].$$

Ea depinde de absorbția umezelii pe suprafața dielectricului care, la rândul ei, depinde de natura suprafeței, de structura materialului, de condițiile de mediu. Astfel, dielectricii polari sau slab polari, a căror absorbție de apă este foarte redusă (parafina, polistirenul, chihlimbarul, unele materiale ceramice), au rezistivitate de suprafață foarte mare și foarte puțin variabilă cu umiditatea relativă a aerului. În schimb, dielectricii higroscopici (diferite sticle industriale, materialele cu structură poroasă, marmora, materialele fibroase organice și anorganice, majoritatea maselor plastice) au rezistivitate de suprafață mică și influențată în mare măsură de umiditatea relativă a aerului.

Prezența impurităților pe suprafața dielectricilor influențează de asemenea rezistivitatea de suprafață dar în mod apreciabil pe aceea a dielectricilor cu higroscopicitate mai mare.

Rezistența totală a izolanului R este rezistența echivalentă în paralel a rezistenței de volum și a celei de suprafață, măsurarea făcându-se cu conectarea în paralel a electrozilor respectivi:

$$(3.49) \quad R = \frac{R_v R_s}{R_v + R_s}$$

3.5.3. Pierderile în dielectrici

În câmpuri electrice exterioare dielectricii au pierderi manifestate prin încălzire. În câmpul electric staționar pierderile au loc numai pe seama conductivității, pierderile specifice exprimându-se prin relația :

$$p_e = \frac{E^2}{\rho_v} = E^2 \gamma_v [\text{W/cm}^3], \quad (3.50)$$

unde E [V/cm] este intensitatea câmpului electric, ρ_v [Ωcm] este rezistivitatea de volum iar γ_v [$\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$] este conductivitatea de volum.

În câmpuri alternative materialele cu rezistivitate practic infinită și cu polarizare rapidă (cu *timp de relaxare mic*) au pierderi practic nule, în timp ce materialele cu polarizare lentă (cu *timp de relaxare mare*) sau neomogene, deși cu rezistivitate practic infinită, au pierderi datorită faptului că purtătorii de sarcină în deplasare nu își pot sincroniza mișcarea cu variațiile câmpului electric.

În general însă, curenții de absorbție au o componentă activă (v. subcap. 8.5) și una reactivă (fig. 3.10a) iar caracterizarea materialului din punctul de vedere al pierderilor se face prin *unghiul pierderilor dielectrice* δ , prin *factorul pierderilor dielectrice* $\text{tg}\delta$ sau prin pierderile specifice p [W/cm^3]. Pierderile de energie se calculează cu relația:

$$P = U^2 \omega C \text{tg}\delta [\text{W}], \quad (3.51)$$

în care U este tensiunea în V iar C – capacitatea în F.

Când dielectricii au și conductivitate, pe lângă polarizare lentă (substanțe organice cristaline sau amorse, cu molecule polare, cu radicali sau cu grupe de molecule polare) diagrama curenților se prezintă ca în figura 3.10b iar pierderile se calculează cu relația

$$P = U^2 \omega C \text{tg}\delta + GU^2, \quad (3.52)$$

unde G este conductanța activă totală.

Dielectricii reali au și alte pierderi suplimentare, datorită impurităților de fabricație, umidității sau impurităților produse în timpul exploatării etc., ceea ce face dificilă modelarea pierderilor printr-o relație matematică. În condiții de exploatare se determină coeficientul de pierderi dielectrice prin măsurători efectuate cu ajutorul punții Scherring (fig. 3.11) care, la echilibru, satisface relațiile:

$$R_x = \frac{R_3}{\omega^2 C_E C_4 R_4^2}, \quad C_x = C_E \frac{R_4}{R_3}, \quad \text{tg}\delta = \omega C_4 R_4, \quad (3.53)$$

unde C_E este o capacitate etalon, R_3 și R_4 sunt rezistențe de precizie, C_4 este o decadă cu capacități, F – descărcătoare iar G este un detector de nul cu amplificator electronic.

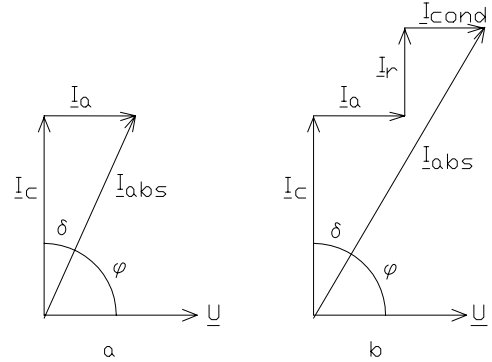


Fig. 3.10

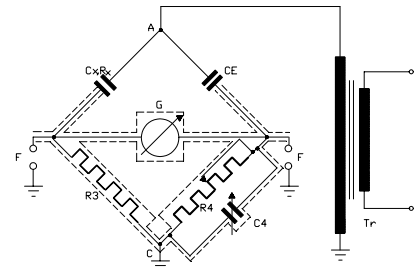


Fig. 3.11

3.5.4. Efectul piezoelectric

Cristalele anumitor materiale (cristale de sare seignette, cuarț piezoelectric, titanatul de bariu), supuse la eforturi mecanice în limita deformărilor elastice, produc sarcini libere pe suprafețele perpendiculare pe direcția acelor eforturi. Dacă solicitările sunt alternate sarcinile își schimbă semnul. Fenomenul se numește *efect piezoelectric direct*.

În câmp electric exterior se produce *efectul piezoelectric invers*, constând din modificarea stării de tensiuni interioare, cristalul alungindu-se sau scurtându-se.

Cuarțul cristalizează în sistemul hexagonal (v. Chimia fizică), un cristal de cuarț fiind o prismă hexagonală (fig. 3.12a), care – convențional – se raportează la trei axe: X (axa muchiilor) numită axa electrică, Y (axa fețelor) – așa-zisa axă mecanică și Z – axa prisme sau axa vârfurilor – (fig. 3.12a).

Pentru utilizarea practică a efectului piezoelectric, cristalul de cuarț se taie de obicei în lamele paralele cu planul YZ (fig. 3.12b), care se mai numește și secțiune ("tăietură") Curie.

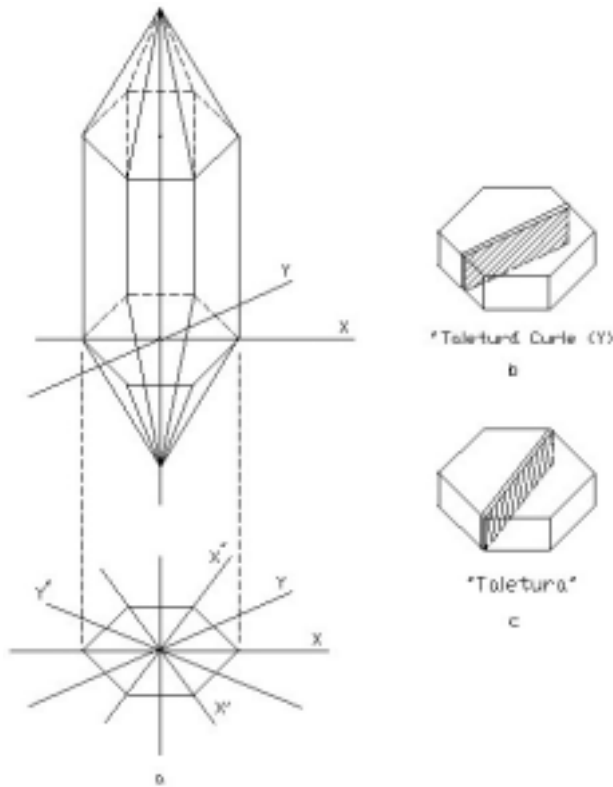


Fig. 3.12

după Y (vibrație transversală, în lungime). Cele două vibrații mecanice nu au însă aceeași frecvență proprie.

Efectul piezoelectric are numeroase aplicații practice (traductoare în automatică, convertoare în electroacustică, generatoare de ultrasunete în industrie, generatoare de semnale cu frecvențe de 1-10 MHz stabile în electronică etc).

3.5.6. Relația Clausius - Mossotti

Conform definiției sale (v. § 1.2.1.) polarizația electrică temporară \overline{P}_t este suma vectorială a momentelor electrice temporare mediate \overline{p}_t ale moleculelor dintr-o unitate de volum:

$$(RCM-1) \quad \overline{P}_t = N \overline{p}_t,$$

unde N este numărul de molecule din unitatea de volum.

Lamelele de cristal tăiate după o secțiune Curie prezintă următoarele proprietăți piezoelectrice (stabilite experimental):

- deformări mecanice datorită câmpurilor electrice exterioare pot apare și după axa X și după axa Y , însă tensiuni electrice (sau sarcini electrice sau câmp electric propriu – câmp electric imprimat piezoelectric) datorate unor deformări mecanice pot apare numai după axa X ;

- o deformare mecanică după axa Y produce o tensiune electrică după axa X , iar o deformare mecanică după axa X produce o tensiune electrică tot după axa X , ceea ce reprezintă *efectul piezoelectric direct* (deci în general, o deformare după o direcție oarecare poate produce o tensiune electrică numai după axa X);

- o tensiune electrică aplicată după axa X produce o deformare (mecanică, elastică) și după axa X și după axa Y , acesta fiind *efectul invers*;

- o tensiune electrică alternativă aplicată după axa X produce o *vibrație mecanică* a lamelei de cuarț, una după X (vibrație longitudinală, în grosime) și alta

Pentru un mediu liniar și izotrop se admite că momentul electric temporar mediat al unei molecule este proporțional cu câmpul efectiv \overline{E}_{ef} (adică intensitatea câmpului local, ce acționează asupra moleculei), ceea ce se arată prin modelul:

$$\overline{P}_t = \alpha \varepsilon_0 \overline{E}_{ef}, \quad (\text{RCM-2})$$

unde α este așa - numita *polarizabilitate a moleculei*, care poate fi de deformare (la dielectrici) sau de orientare (la materialele paraelectrice).

Mai departe, câmpul efectiv, \overline{E}_{ef} , se calculează considerându-se o structură simplificată a materialului în care fiecare moleculă se presupune că ocupă o cavitate sferică vidă decupată în corpul dielectric; astfel, într-un punct din corp în care polarizația temporară este \overline{P}_t și intensitatea câmpului electric este \overline{E} , câmpul efectiv se determină cu modelul:

$$\overline{E}_{ef} = \overline{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \overline{P}_t, \quad (\text{RCM-3})$$

unde ultimul termen este dat de relația (3.69) – v. Aplicația 3.2.

Atunci, din relațiile anterioare, (RCM-1), (RCM-2) și (RCM-3), rezultă:

$$\overline{P}_t = 3N\alpha\varepsilon_0\overline{E}/(3-\alpha N). \quad (\text{RCM-4})$$

Deoarece, conform legii polarizației electrice temporare (v. § 1.3.5.), $\overline{P}_t = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\overline{E}$, relația (RCM-4) devine:

$$\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\overline{E} = 3N\alpha\varepsilon_0\overline{E}/(3 - \alpha N),$$

din care se obține:

$$(\varepsilon_r - 1) = 3N\alpha/(3 - \alpha N) \rightarrow \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3}. \quad (\text{RCM-5})$$

De la cursul de Chimie fizică se știe că:

$$N = \tau N_A / M, \quad (\text{RCM-6})$$

în care: τ este densitatea de volum a masei materialului, M – masa lui moleculară și N_A – numărul lui Avogadro ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ molecule într-o moleculă gram). Înlocuindu-se expresia lui N dată de (RCM-6) în relația (RCM-5) rezultă:

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N_A}{3M} \alpha \tau, \quad (\text{RCM-7})$$

relație care a fost stabilită experimental de fizicienii Clausius și Mossotti, fiind valabilă numai pentru anumite (însă numeroase) materiale dielectrice, dar numai în stare lichidă sau gazoasă.

Folosindu-se relația $N_A \alpha \tau / 3M = C_M$, atunci din relația (RCM-7) rezultă că permitivitatea relativă a unor lichide și gaze (dielectrice) poate fi determinată cu relația:

$$\varepsilon_r = \frac{1 + 2C_M}{1 - C_M}. \quad (3-54)$$

3.6. Aplicații

3.6.1. Repartiția câmpului electric dipolar

Aplicația 3.1. Să se prezinte procedura pentru deducerea ecuației liniilor câmpului electric și programul MATLAB care realizează reprezentarea grafică a repartiției sale în spațiu.

Se va deduce mai întâi ecuațiile liniilor de câmp în sistemul cartezian din figura 3.13.

Ecuția generală a liniilor de câmp este:

$$(3.55) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}.$$

Cu notațiile din figura 3.12 se obține:

$$E_x = E_{1x} - E_{2x} = E_1 \cos \alpha_1 - E_2 \cos \alpha_2,$$

unde:

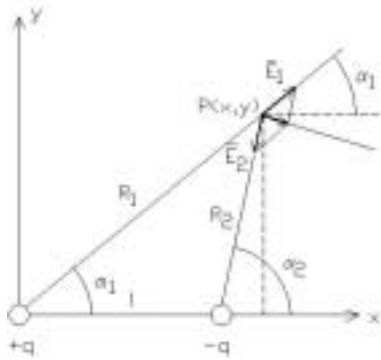


Fig. 3.13

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}, \text{ și } E_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$$

și

$$R_1^2 = x^2 + y^2; R_2^2 = (x-l)^2 + y^2; \cos \alpha_1 = \frac{x}{R_1}; \cos \alpha_2 = \frac{x-l}{R_2}.$$

Rezultă:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x-l}{[(x-l)^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Analog:

$$E_y = E_{1y} - E_{2y} = E_1 \sin \alpha_1 - E_2 \sin \alpha_2,$$

sau

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{[(x-l)^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Atunci:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{y[(x-l)^2 + y^2]^{3/2} + y(x^2 + y^2)^{3/2}}{x[(x-l)^2 + y^2]^{3/2} + (x-l)(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

și

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{y \left[1 + \frac{(x-l)^2}{y^2} \right]^{3/2} + y \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right)^{3/2}}{x \left[1 + \frac{(x-l)^2}{y^2} \right]^{3/2} + (x-l) \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right)^{3/2}},$$

adică:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{1 + \frac{(1 + \frac{x^2}{y^2})^{3/2}}{\left[1 + \frac{(x-l)^2}{y^2} \right]^{3/2}}}{\frac{x}{y} + \frac{(x-l)}{y} \frac{(1 + \frac{x^2}{y^2})^{3/2}}{\left[1 + \frac{(x-l)^2}{y^2} \right]^{3/2}}}.$$

Făcându - se substituțiile:

$$(3.56)$$

$$x = uy,$$

$$x - l = vy,$$

ecuația precedentă devine:

Fig. 3.1

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{1 + \left(\frac{1+u^2}{1+v^2}\right)^{3/2}}{u + v \left(\frac{1+u^2}{1+v^2}\right)^{3/2}}. \quad (3.57)$$

Pe de altă parte, din (3.56) se va obține succesiv:

$$\begin{aligned} dx &= udy + ydu, & dx &= vdy + ydv, \\ y &= \frac{dx - udy}{du}, & y &= \frac{dx - vdy}{dv}. \end{aligned}$$

Din ultimile două relații rezultă:

$$\frac{dx - udy}{du} = \frac{dx - vdy}{dv}$$

și

$$\frac{1 - u \frac{dy}{dx}}{du} = \frac{1 - v \frac{dy}{dx}}{dv},$$

de unde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv - du}{udv - vdu} = \frac{1 - \frac{du}{dv}}{u - v \frac{du}{dv}}. \quad (3.58)$$

Dar $dy/dx = E_y/E_x$ și, comparând ecuațiile (3.57) și (3.58), se obține:

$$\frac{du}{dv} = -\left(\frac{1+u^2}{1+v^2}\right)^{3/2}.$$

Separând variabilele, rezultă în continuare:

$$(1+u^2)^{-3/2} du = -(1+v^2)^{-3/2} dv. \quad (3.59)$$

Ecuațiile familiei de curbe care reprezintă liniile de câmp se obțin prin integrarea ecuației (3.59):

$$\int (1+u^2)^{-3/2} du = -\int (1+v^2)^{-3/2} dv + K. \quad (3.60)$$

Integralele din ecuația (3.60) sunt de tipul $\int x^m(ax^n + b)^p dx$, numite integrale ale unor diferențiale binomiale. Ele se rezolvă cu ajutorul următoarelor substituții:

- pentru p întreg: $x = z^N$, unde N este numitorul comun al lui m și n ;
- pentru $\frac{m+1}{n}$ întreg: $ax^n + b = z^S$, unde S este numitorul fracției $p = R/S$;
- pentru $\frac{m+1}{n} + p$ întreg: $ax^n + b = z^S x^n$.

În cazul $(1+u^2)^{-3/2}$ rezultă $m=0$; $n=2$; $p=-3/2$ și $\frac{m+1}{n} + p = -1$, ceea ce necesită substituția $1+u^2 = z^2 u^2$.

Rezultă:

$$u = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}}, \quad du = -\frac{zdz}{(z^2 - 1)^{3/2}}, \quad (1+u^2)^{-3/2} = -z^2 dz \text{ și}$$

$$\int (1+u^2)^{-3/2} = \int -z^2 dz = \frac{1}{z} = u(1+u^2)^{-1/2}.$$

Se obține:

$$u(1+u^2)^{-1/2} = -v(1+v^2)^{-1/2} + K.$$

Înlocuind u și v cu expresiile lor în funcție de x și y , rezultate din (3.56), se obține în final ecuația familiei liniilor de câmp sub forma:

$$(3.61) \quad x(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x-l)[(x-l)^2 + y^2] - K = 0.$$

Secvența MATLAB care face aproximarea numerică a gradientului funcției (3.61) și reprezintă grafic orientarea câmpului de vectori \vec{E} , ca în figura 3.14, are următorul conținut:

```

xp=-30:6:30;
yp=-30:6:30;
[x,y]=meshgrid(xp,yp);
z=x./sqrt(x.^2+y.^2)+(x-1)./sqrt((x-1).^2+y.^2);
[px,py]=gradient(z,1,1);
quiver(x,y,px,py,2.5,'w'), hold off,
end

```

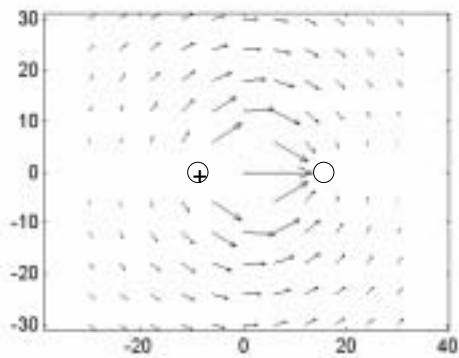


Fig. 3.14

3.6.2. Câmpul și potențialul sferei polarizată uniform

Aplicația 3.2. Folosindu-se modelul dipolar al stării de polarizare să se verifice prin acest exemplu teorema cu privire la refracția liniilor de câmp electric (v. § 2.4.2).

Se presupune sfera din figura 3.15 polarizată uniform în direcția axei Oz , polarizația fiind \vec{P} . Vectorul polarizație fiind definit ca densitate de volum a momentelor electrice (v. § 1.2.1) iar corpul fiind polarizat uniform, dipolul echivalent stării sale de polarizare va avea momentul:

$$(3.62) \quad \vec{p} = \int_v \vec{P} dv = \vec{P} \int_v dv = \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{P}.$$

Direcția de polarizare fiind în lungul axei Oz ,

$$(3.63) \quad \vec{p} = p\vec{k} = \frac{4}{3} \pi r^3 P\vec{k}.$$

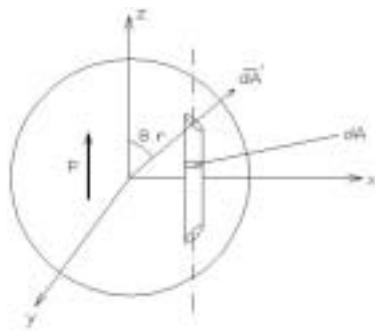


Fig. 3.15

Revenindu-se la figura 3.3 se va deduce de această dată expresia câmpului pornind de la aceea a potențialului.

Potențialul în punctul P având față de dipol raza vectorie \vec{R} este:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Dacă $l/R \ll 1$, atunci $R_2 - R_1 \rightarrow l \cos \theta$ și $R_1 R_2 \rightarrow R^2$ astfel că, la limită:

$$(3.64) \quad V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}.$$

Pe de altă parte, se poate scrie:

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = -d\left(\frac{1}{R}\right) = -\bar{l}\text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) = \bar{l}\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) \quad \text{și} \quad V_p = \frac{\bar{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3}.$$

Câmpul rezultă din:

$$\begin{aligned} \bar{E}_p &= -\text{grad}V_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^3} \nabla(\bar{p}\bar{R}) + (\bar{p}\bar{R}) \nabla\left(\frac{1}{R^3}\right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{\bar{p}\bar{R}}{R^5} \bar{R} - \frac{\bar{p}}{R^3} \right], \end{aligned}$$

deoarece :

$$\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right) = -3R^{-4} \frac{\bar{R}}{R} = -3 \frac{\bar{R}}{R^5}$$

și

$$\nabla(\bar{p}\bar{R}) = \bar{i}p_x + \bar{j}p_y + \bar{k}p_z = \bar{p}.$$

La același rezultat se ajungea lucrându-se în coordonate carteziene. Componentele câmpului sunt:

$$E_x = -\frac{\partial V_p}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V_p}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V_p}{\partial z}, \quad (3.65)$$

unde:

$$-\frac{\partial V_p}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(\bar{p} \cdot \bar{R}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) + \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} \cdot \bar{R}) \right]. \quad (3.66)$$

Deoarece:

$$\begin{aligned} \bar{p}\bar{R} &= p_x(x-x') + p_y(y-y') + p_z(z-z'), \\ \bar{p} &= \bar{i}p_x + \bar{j}p_y + \bar{k}p_z, \end{aligned}$$

$$\bar{R} = \bar{i}(x-x') + \bar{j}(y-y') + \bar{k}(z-z') = \bar{R} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z,$$

iar din relația evidentă:

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial x} (R^2) = 2R \frac{\partial R}{\partial x} = 2(x-x') = 2X$$

și

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x-x'}{R} = \frac{X}{R}.$$

Înlocuindu-se în (3.66) se obține

$$-\frac{\partial V_p}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(\bar{p} \cdot \bar{R}) \frac{3X}{R^5} - \frac{p_x}{R^3} \right].$$

În mod analog, se obțin și celelalte două componente, ajungându-se în final la expresia vectorială cunoscută deja:

$$\bar{E}_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{\bar{p} \cdot \bar{R}}{R^5} \bar{R} - \frac{\bar{p}}{R^3} \right].$$

Câmpul interior poate fi determinat deoarece, cunoscându-se potențialul câmpului exterior exprimat prin ecuația (3.64), se cunoaște potențialul în fiecare punct al frontierei sferice de rază r . Acesta este:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

și dacă înlocuim p cu expresia sa rezultată din (3.63), relația precedentă devine:

$$(3.67) \quad V = \frac{Pr \cos\theta}{3\epsilon_0},$$

unde $r \cos\theta = z$ (fig. 3.15). Așa dar, potențialul unui punct de pe sferă depinde numai de coordonata sa după axa z :

$$(3.68) \quad V = \frac{Pz}{3\epsilon_0}.$$

Având potențialul în fiecare punct al frontierei, în interiorul căreia el trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace și cum o soluție de forma $V = \text{const.}$ satisface ecuația lui Laplace, rezultă că ecuația (3.68) este o soluție pentru potențialul din interiorul sferei.

Acesta este potențialul unui câmp electric uniform, orientat în direcția $-z$:

$$(3.69) \quad \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Pz}{3\epsilon_0} \right) \vec{k} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{k}.$$

În continuare, se va analiza comportarea câmpului la trecerea din substanța sferei în spațiul vid. Pentru aceasta, în expresia (3.64) a potențialului se ține seama că $r^2 = x^2 + z^2$ și $\cos\theta = z/(x^2 + z^2)^{1/2}$:

$$(3.70) \quad V = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Componentele intensității câmpului vor fi:

$$(3.71) \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pxz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3p \sin\theta \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

În vecinătatea sferei, în punctul imediat superior de pe axa z unde $\theta = 0$, rezultă:

$$(3.72) \quad E_x = 0, \text{ și } E_z = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\pi r^3 P\right)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2P}{3\epsilon_0}.$$

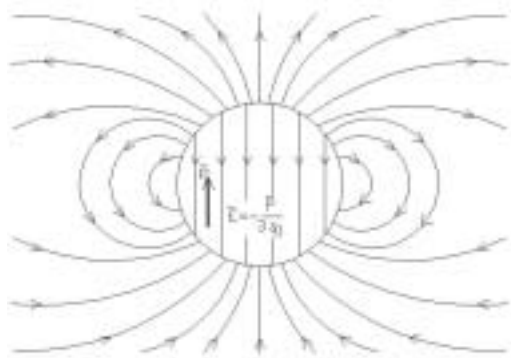


Fig. 3.16

Cu alte cuvinte, în timp ce componenta tangențială a câmpului s-a menținut, cea normală a realizat un salt de la $-\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{k}$ la $\frac{2P}{3\epsilon_0} \vec{k}$. Cu ajutorul

ecuațiilor (3.71) se poate verifica conservarea componentei tangențiale a câmpului precum și discontinuitatea componentei normale în oricare punct al frontierei, la trecerea din interior către exterior. O imagine asupra distribuției în spațiu a câmpului se prezintă ca în figura 3.16.

În cele ce preced s-a presupus, fără îndoială, că sfera era polarizată și situată în vid. Se va presupune acum că sfera, omogenă și izotropă,

lipsită de polarizație permanentă, având permitivitatea relativă ϵ_r , se polarizează în câmp electric uniform de vector \vec{E}_0 și se va exprima polarizația sa în funcție de acesta.

Câmpul \vec{E} în vecinătatea sferei rezultă din compunerea lui \vec{E}_0 cu câmpul \vec{E}' generat de materia polarizată:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad (3.73)$$

Polarizația \vec{P} , care generează câmpul \vec{E}' , depinde de valoarea lui \vec{E} din interiorul sferei în conformitate cu legea polarizației temporare:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.74)$$

Câmpul \vec{E}' se exprimă în funcție de polarizația \vec{P} potrivit relației (3.69) :

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0},$$

rezultând:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{3} \vec{E}$$

și

$$\vec{E} = \frac{2}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0, \quad (3.75)$$

de unde se vede că, factorul $2/(2 + \epsilon_r)$ fiind subunitar, intensitatea câmpului în dielectric este mai mică decât \vec{E}_0 .

Introducându-se în (3.74) \vec{E} cu expresia sa (3.75) se obține:

$$\vec{P} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0 \quad (3.76)$$

(A se vedea § 3.5.6 și relația RCM-7)

În punctele îndepărtate de sferă, câmpul va rezulta din compunerea lui \vec{E}_0 cu acela produs de dipolul al cărui moment electric are expresia (3.62). Configurația liniilor sale de câmp este sugerată de figura 3.17.

3.6.3. Energia de interacțiune a unui mic corp polarizat electric

Aplicația 3.3. Să se arate că în procesele de interacțiune ale substanței polarizate electric forțele electrice sunt conservative și derivă din energia potențială a sistemului.

Pentru a roti micul corp polarizat electric în câmpul electric uniform astfel încât direcția de polarizare să facă unghiul $d\theta$ cu direcția câmpului, trebuie să se producă un cuplu $\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}_v$ și să se efectueze lucrul mecanic:

$$dL = C d\theta = p E_v \sin \theta d\theta \quad (3.77)$$

La o rotație de 90° energia de interacție a sistemului, corespunzătoare lucrului mecanic efectuat, va fi:

$$W = -L = \int_{\pi/2}^0 p E_v \sin \theta d\theta = -p E_v \cos \theta \quad (3.78)$$

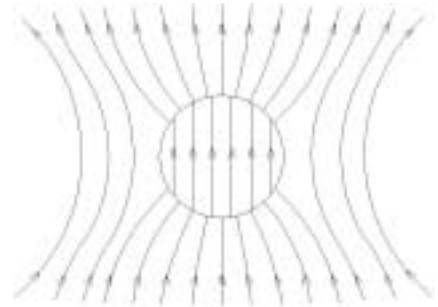


Fig. 3.17

Ea este minimă pentru $\theta = 0$ și egală cu $W = -pE_v$.

Ecuția (3.78), exprimând energia de interacțiune a micului corp polarizat în câmpul electric se poate scrie vectorial sub forma:

$$(3.79) \quad W = -\bar{p} \cdot \bar{E}_v.$$

Evident, ecuațiile (3.78), (3.79) presupun că micul corp este polarizat exclusiv permanent. Dacă polarizarea micului corp introdus în câmpul electric de vector \bar{E}_v este exclusiv temporară, atunci polarizarea electrică este liniară, momentul electric fiind proporțional cu \bar{E}_v :

$$(3.80) \quad \bar{p}_t = \alpha_e \bar{E}_v,$$

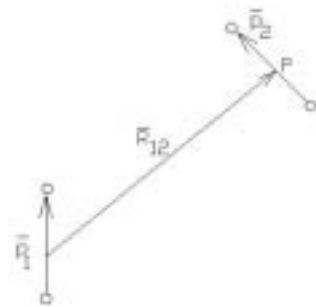
iar ecuația (3.79) se transformă astfel:

$$(3.81) \quad dW = -\bar{p}_t d\bar{E}_v = -\alpha_e \bar{E}_v d\bar{E}_v = -d\left(\frac{1}{2} \alpha_e \bar{E}_v \cdot \bar{E}_v\right) = -d\left(\frac{1}{2} \bar{p}_t \cdot \bar{E}_v\right),$$

de unde:

$$(3.82) \quad W = -\frac{1}{2} \bar{p}_t \cdot \bar{E}_v.$$

Constanta α_e se numește *polarizabilitate electrică* (v. § 3.5.6.)



Cu ajutorul relației (3.79) se poate calcula energia de interacțiune dintre două mici corpuri polarizate, echivalate cu dipoli de momente \bar{p}_1 și respectiv \bar{p}_2 (fig. 3.18). Într-adevăr, considerându-se în (3.79) că \bar{E}_v , având expresia (3.18), este produs de dipolul \bar{p}_1 în punctul în care se află \bar{p}_2 , se obține:

$$(3.83) \quad W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2}{R_{12}^3} - \frac{3(\bar{p}_1 \cdot \bar{R}_{12})(\bar{p}_2 \cdot \bar{R}_{21})}{R_{12}^5} \right].$$

Fig. 3.18

Energia scrisă sub forma (3.83) este numită *energie dipolară electrică*.

3.6.4. Energia necesară polarizării unui dielectric liniar.

Aplicația 3.4. *Energia acumulată în unitatea de volum a câmpului electrostatic stabilit într-un dielectric omogen, izotrop și lipsit de polarizație permanentă, este dată de relația $W = \epsilon E^2 / 2$ (v. 2.6.1.). Se cere să se stabilească câtă din această energie servește la polarizarea dielectricului și câtă la formarea câmpului din spațiul vid.*

Se poate imagina un condensator plan având ca dielectric aerul. Suprafața armăturilor este A iar distanța dintre ele d . Energia acumulată în condensator, atunci când între armături se aplică tensiunea U , va fi:

$$\left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2\right) \times \text{volumul} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ad = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} Ad = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2 = \frac{1}{2} CU^2.$$

Înlocuindu-se aerul dintre armături cu un dielectric de permitivitate ϵ , energia acumulată în unitatea de volum crește de ϵ_r ori:

$$W_0 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2,$$

diferența absolută fiind:

$$\Delta W_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2. \quad (3.84)$$

Deoarece intensitatea câmpului între armături este tot U/d , tensiunea sursei fiind constantă, rezultă că variația energiei interne a sistemului – v. relația (3.79) – s-a produs ca urmare a lucrului efectuat de sursă pentru modificarea momentului electric:

$$dW = \bar{E} \cdot d\bar{p}. \quad (3.85)$$

Dacă sunt N dipoli în unitatea de volum, însemnează că lucrul efectuat pentru modificarea polarizației corespunde unei creșteri a energiei interne:

$$dW_0 = \bar{E} \cdot d(N\bar{p}) = \bar{E} \cdot d\bar{P} \quad (3.86)$$

și întrucât din legea polarizației temporare rezultă $\bar{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E}$, atunci:

$$dW_0 = \bar{E} \cdot d\bar{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E} \cdot d\bar{E} = d\left[\frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2\right]. \quad (3.87)$$

3.6.5. Tensiunea de străpungere a unui condensator cu dielectric mixt

Aplicația 3.5. Să se calculeze tensiunea maximă ce poate fi aplicată unui condensator cu distanța dintre armături $d = 1,5\text{mm}$, având dielectric mixt și:

- un strat de mică cu grosimea $d_1 = 1\text{mm}$ ($E_{s1} = 250 \cdot 10^5 \text{V/m}$, $\epsilon_{r1} = 6$);

- un strat de aer cu grosimea $d_2 = 0,5\text{mm}$ ($E_{s2} = 21 \cdot 10^5 \text{V/m}$, $\epsilon_{r2} = 1$).

Se va compara rezultatul cu acelea care se obțin în situația în care dielectricul este omogen: aer sau mică.

Inducția electrică în cele două straturi este aceeași:

$$D = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2,$$

iar diferența de potențial dintre armături este:

$$U = d_1 E_1 + d_2 E_2.$$

Din cele două ecuații rezultă:

$$E_1 = \frac{\epsilon_{r2} U}{\epsilon_{r1} d_1 + \epsilon_{r2} d_2} = 250U,$$

și

$$E_2 = \frac{\varepsilon_{r1}U}{\varepsilon_{r1}d_1 + \varepsilon_{r2}d_2} = 1500U .$$

Intensitatea câmpului în stratul de aer fiind mai mare, acesta va străpunge mai repede decât mica. De aceea se va calcula tensiunea maximă de străpungere din ecuația a doua în care se înlocuiește E_2 cu E_{s2} . Rezultă: $U_{\max} = 21 \cdot 10^5 / 1500 = 1400V$.

În lipsa stratului de mică tensiunea de străpungere va fi:

$$U_{\max} = E_{s2}d = 3150V ,$$

iar în lipsa stratului de aer:

$$U_{\max} = E_{s1}d = 37500V .$$

Observație. Din acest exemplu, care continuă pe acela de la aplicația 2.10, rezultă încă odată importanța omogenității izolației aparatelor și instalațiilor electrice. Aceasta nu trebuie să prezinte fisuri sau incluziuni de aer sau corpuri străine.