

*12. Sea \mathbf{F} un campo vectorial tridimensional suave. Si $B_{a,b,c}$ es la superficie de la caja $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$, con normal hacia el exterior $\hat{\mathbf{N}}$, demuestre que

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0^+} \frac{1}{8abc} \oiint_{B_{a,b,c}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0)$$

*13. Sea \mathbf{F} un campo vectorial bidimensional suave. Si c_ϵ es una circunferencia de radio ϵ centrada en el origen, y $\hat{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria hacia el exterior de c_ϵ demuestre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{c_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds = \mathbf{div} \, \mathbf{F}(0, 0)$$

*14. Demuestre el Teorema 2 en el caso especial de que c_ϵ sea la circunferencia en el plano xy cuya parametrización es $x = \epsilon \cos \theta$, $y = \epsilon \sin \theta$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. En este caso $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. *Sugerencia:* desarrolle $\mathbf{F}(x, y, z)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor vectorial alrededor del origen, como en la demostración del Teorema 1, y calcule la circulación sobre c_ϵ de los términos individuales.

16.2 Algunas identidades con el gradiente, la divergencia y el rotacional

Existen numerosas identidades con las funciones

$$\mathbf{grad} \, f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{div} \, \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

y el **operador Laplaciana**, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, definido para un campo escalar ϕ como

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \mathbf{div} \, \mathbf{grad} \, \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y para un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ como

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_1) \mathbf{i} + (\nabla^2 F_2) \mathbf{j} + (\nabla^2 F_3) \mathbf{k}$$

El operador Laplaciana, $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$, se indica como Δ en algunos textos. Recuérdese que una función ϕ se denomina **armónica** en un dominio D si $\nabla^2 \phi = 0$ en dicho dominio D (véase la Sección 12.4).

Reuniremos las identidades más importantes en el teorema que sigue. La mayoría de ellas son diversas formas de la Regla del Producto. Demostraremos algunas para ilustrar las técnicas que se utilizan (la mayoría de las veces cálculo directo) y dejaremos el resto como ejercicios. Nótese que en dos de las identidades intervienen magnitudes como $(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F}$; esto representa el vector que se obtiene aplicando el operador diferencial escalar $\mathbf{G} \cdot \nabla$ al campo vectorial \mathbf{F} :

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} = G_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$$

TEOREMA 3 Identidades diferenciales vectoriales

Sean ϕ y ψ campos escalares, y \mathbf{F} y \mathbf{G} campos vectoriales, y supongamos que todos son suficientemente suaves, de forma que todas las derivadas parciales en las identidades son continuas. Entonces, se cumple lo siguiente:

- (a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
 (b) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$
 (c) $\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$
 (d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$
 (e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$
 (f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$
 (g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (**div rot** = 0)
 (h) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ (**rot grad** = 0)
 (i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$
 (**rot rot** = **grad div** - Laplaciana)

Las identidades (a)-(f) son versiones de la Regla del Producto y son identidades de primer orden en las que sólo interviene una aplicación de ∇ . Las identidades (g)-(i) son identidades de segundo orden. Las identidades (g) y (h) son equivalentes a la igualdad de las derivadas parciales mixtas y son especialmente importantes en la comprensión de **div** y **rot**.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos sólo las identidades (c), (e) y (g). Las demostraciones restantes son similares a éstas.

(c) La primera componente (componente **i**) de $\nabla \times (\phi\mathbf{F})$ es

$$\frac{\partial}{\partial y} (\phi F_3) - \frac{\partial}{\partial z} (\phi F_2) = \frac{\partial \phi}{\partial y} F_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z} F_2 + \phi \frac{\partial F_3}{\partial y} - \phi \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

Los dos primeros términos de la derecha forman la primera componente de $(\nabla\phi) \times \mathbf{F}$, y los dos últimos términos forman la primera componente de $\phi(\nabla \times \mathbf{F})$. Por tanto, las primeras componentes de los dos miembros de identidad (c) son iguales. La igualdad de los otros componentes se deduce de forma similar.

(e) De nuevo, es suficiente demostrar que las primeras componentes de los vectores de ambos miembros de la identidad son iguales. Para calcular la primera componente de $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, necesitamos las componentes segunda y tercera de $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, que son

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})_2 = F_3 G_1 - F_1 G_3 \quad \text{y} \quad (\mathbf{F} \times \mathbf{G})_3 = F_1 G_2 - F_2 G_1$$

La primera componente de $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ es, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (F_1 G_2 - F_2 G_1) - \frac{\partial}{\partial z} (F_3 G_1 - F_1 G_3) \\ = \frac{\partial F_1}{\partial y} G_2 + F_1 \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y} G_1 - F_2 \frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z} G_1 \\ - F_3 \frac{\partial G_1}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z} G_3 + F_1 \frac{\partial G_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Las primeras componentes de los cuatro términos del miembro derecho de la igualdad (e) son

$$\begin{aligned} ((\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F})_1 &= F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} + F_1 \frac{\partial G_2}{\partial y} + F_1 \frac{\partial G_3}{\partial z} \\ ((\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F})_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} G_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y} G_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z} G_3 \\ -((\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G})_1 &= -\frac{\partial F_1}{\partial x} G_1 - \frac{\partial F_2}{\partial y} G_1 - \frac{\partial F_3}{\partial z} G_1 \\ -((\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G})_1 &= -F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - F_2 \frac{\partial G_1}{\partial y} - F_3 \frac{\partial G_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Cuando sumamos todos los términos de esas cuatro expresiones, algunos se cancelan y quedan los mismos términos en la primera componente de $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

(g) Éste es un cálculo directo en el que interviene la igualdad de las derivadas parciales mixtas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observación Las identidades del *producto triple* de vectores se presentaron previamente en los Ejercicios 18 y 23 de la Sección 10.3:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Aunque se trata de identidades útiles, *no se pueden* utilizar para proporcionar demostraciones más simples de las identidades del Teorema 3 substituyendo alguno de los vectores por ∇ (¿por qué?).

Potencial escalar y potencial vector

Se utilizan dos términos especiales para describir campos vectoriales en los que o bien la divergencia o bien el rotacional son nulos.

DEFINICIÓN 2 Campos vectoriales solenoidales e irrotacionales

Un campo vectorial \mathbf{F} se denomina **solenoidal** en un dominio D si $\mathbf{div} \mathbf{F} = 0$ en dicho dominio.

Un campo vectorial \mathbf{F} se denomina **irrotacional** en un dominio D si $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en dicho dominio.

El apartado (h) del Teorema 3 dice que $\mathbf{F} = \text{grad } \phi \Rightarrow \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por tanto,

Todo campo vectorial conservativo es irrotacional

El apartado (g) del Teorema 3 dice que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G} \Rightarrow \text{div } \mathbf{F} = 0$. Por tanto,

El rotacional de todo campo vectorial es solenoidal

Las afirmaciones *contrarias* de las anteriores son verdaderas si el dominio de \mathbf{F} cumple ciertas condiciones.

TEOREMA 4 Si \mathbf{F} es un campo vectorial irrotacional y suave en un dominio simplemente conexo D , entonces $\mathbf{F} = \nabla \phi$ para alguna función potencial escalar definida en D , por lo que \mathbf{F} es conservativo.

TEOREMA 5 Si \mathbf{F} es un campo vectorial solenoidal y suave en un dominio D , con la propiedad de que toda superficie cerrada en dicho dominio contiene a un dominio contenido a su vez en D , entonces $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ para algún campo vectorial \mathbf{G} definido en D . Dicho campo vectorial \mathbf{G} se denomina **potencial vector** del campo vectorial \mathbf{F} .

En este momento no podemos demostrar estos resultados de forma completamente general. Sin embargo, ambos teoremas tienen demostraciones simples en el caso especial de que el dominio D sea de **tipo estrella**. Un dominio tipo estrella es aquel en el que existe un punto P_0 tal que el segmento que va desde P_0 hasta cualquier punto P de dicho dominio está contenido completamente en D (véase la Figura 16.4). Ambas demostraciones son *constructivas* en el sentido de que indican cómo calcular un potencial.

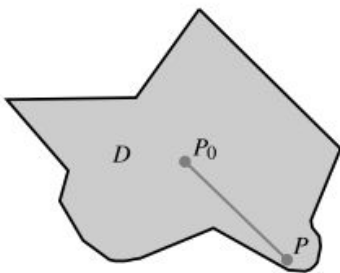


Figura 16.4 El segmento que va desde P_0 a todo punto de D está contenido en D .

Demostración del Teorema 4 para dominios tipo estrella Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que P_0 es el origen. Si $P = (x, y, z)$ es cualquier punto del dominio D , entonces el segmento recto

$$\mathbf{r}(t) = tx\mathbf{i} + ty\mathbf{j} + tz\mathbf{k}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

desde P_0 hasta P está en D . Definamos la función ϕ en el dominio D como

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (xF_1(\xi, \eta, \zeta) + yF_2(\xi, \eta, \zeta) + zF_3(\xi, \eta, \zeta)) dt \end{aligned}$$

con $\xi = tx$, $\eta = ty$ y $\zeta = tz$. Calculemos $\partial\phi/\partial x$ utilizando el hecho de que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, para sustituir $(\partial/\partial\xi)F_2(\xi, \eta, \zeta)$ por $(\partial/\partial\eta)F_1(\xi, \eta, \zeta)$ y $(\partial/\partial\xi)F_3(\xi, \eta, \zeta)$ por $(\partial/\partial\zeta)F_1(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \int_0^1 \left(F_1(\xi, \eta, \zeta) + tx \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + ty \frac{\partial F_2}{\partial \xi} + tz \frac{\partial F_3}{\partial \xi} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(F_1(\xi, \eta, \zeta) + tx \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + ty \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + tz \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_1(\xi, \eta, \zeta)) dt \\ &= (tF_1(tx, ty, tz)) \Big|_0^1 = F_1(x, y, z)\end{aligned}$$

De forma similar, $\partial\phi/\partial y = F_2$ y $\partial\phi/\partial z = F_3$. Por tanto, $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

Los detalles de la demostración del Teorema 5 para dominios tipo estrella son similares a los del Teorema 4, y dejaremos la demostración para el Ejercicio 18 posterior.

Nótese que los potenciales vector, cuando existen, *no son en absoluto* únicos. Como $\text{rot grad } \phi$ es idénticamente nulo (Teorema 3(h)), se puede sumar a \mathbf{G} cualquier campo conservativo arbitrario sin cambiar el valor de $\text{rot } \mathbf{G}$. El ejemplo siguiente ilustra la libertad que tenemos para hacer hipótesis simplificadoras al calcular un potencial vector.

Ejemplo 1 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F} = (x^2 + yz)\mathbf{i} - 2y(x + z)\mathbf{j} + (xy + z^2)\mathbf{k}$ es solenoidal en \mathbb{R}^3 y calcule un potencial vector para dicho campo.

Solución Como $\text{div } \mathbf{F} = 2x - 2(x + z) + 2z = 0$ en \mathbb{R}^3 , \mathbf{F} es solenoidal. Un potencial vector \mathbf{G} para \mathbf{F} debe cumplir $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= x^2 + yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= -2xy - 2yz \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= xy + z^2\end{aligned}$$

Las tres componentes de \mathbf{G} tienen nueve derivadas parciales primeras independientes, por lo que hay nueve «grados de libertad» en su determinación. Las tres ecuaciones anteriores usan tres de esos nueve grados de libertad. Esto deja seis. Intentaremos calcular una solución \mathbf{G} en la que $G_2 = 0$. Esto significa que las tres derivadas parciales primeras de G_2 son cero, por lo que hemos utilizado otros tres grados de libertad al realizar esta hipótesis. Nos quedan tres. La primera ecuación implica ahora que

$$G_3 = \int (x^2 + yz) dy = x^2y + \frac{1}{2}y^2z + M(x, z)$$

Como estamos integrando con respecto a y , la constante de integración puede depender todavía de x y z . Realizaremos una segunda hipótesis simplificadora: que $M(x, z) = 0$. Esto utiliza dos grados más de libertad, dejando uno. De la segunda ecuación tenemos

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} - 2xy - 2yz = 2xy - 2xy - 2yz = -2yz$$

por lo que

$$G_1 = -2 \int yz \, dz = -yz^2 + N(x, y)$$

No podemos suponer que $N(x, y) = 0$, porque eso requeriría dos grados de libertad y solamente tenemos uno. Sin embargo, la tercera ecuación implica que

$$xy + z^2 = -\frac{\partial G_1}{\partial y} = z^2 - \frac{\partial N}{\partial y}$$

Así, $(\partial/\partial y)N(x, y) = -xy$; obsérvese que los términos en los que interviene z se cancelan. Esto sucede porque $\text{div } \mathbf{F} = 0$. Si \mathbf{F} no hubiera sido solenoidal, no podríamos haber determinado N como función de x e y a partir sólo de la ecuación anterior. Sin embargo, como lo es, tenemos que

$$N(x, y) = -\int xy \, dy = -\frac{1}{2}xy^2 + P(x)$$

Podemos utilizar nuestro último grado de libertad para escoger $P(x)$ idénticamente nula y obtener, por tanto,

$$\mathbf{G} = -\left(yz^2 + \frac{xy^2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(x^2y + \frac{y^2z}{2}\right)\mathbf{k}$$

como el potencial vector de \mathbf{F} pedido. Podemos comprobar que $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Por supuesto, otras hipótesis simplificadoras pueden conducir a funciones \mathbf{G} muy diferentes, que serían igualmente correctas. ■

Cálculos con Maple

El paquete **VectorCalculus** de Maple define rutinas para crear un campo vectorial, y para calcular el gradiente de un campo escalar y las divergencias y el rotacional de un campo vectorial. También calcula la Laplaciana de un campo escalar o vectorial, y permite utilizar el operador «del» (grad) en productos escalares y vectoriales. Algunas de estas funcionalidades están restringidas a campos vectoriales tridimensionales. Empecemos por cargar el paquete y declarar el tipo de sistema de coordenadas que utilizaremos, y los nombres de las coordenadas:

```
> with(VectorCalculus) :
> SetCoordinates('cartesian' [x, y, z]) ;
```

*cartesian*_{x,y,z}

Al establecer las coordenadas al principio no tendremos que hacerlo cada vez que llamemos a uno de los procedimientos para manejar campos vectoriales, como el procedimiento `Gradient`, que se ilustra al final de la Sección 12.7. Para calcular el gradiente de una expresión escalar en las variables x , y y z , basta con introducir

```
> f := x^2 + x*y - z^3; G := Gradient(f) ;
```

$$f := x^2 + xy - z^3$$

$$G := (2x + y)\bar{e}_x + x\bar{e}_y - 3z^2\bar{e}_z$$

Maple muestra que el resultado G es un *campo vectorial* en vez de simplemente un *vector*, poniendo barras sobre los vectores de la base. Maple trata los campos vectoriales y los vectores como tipos de objetos diferentes; por ejemplo, se pueden sumar dos campos vectoriales o dos vectores, pero no se puede sumar un vector a un campo vectorial. Un campo vectorial es una función de una variable vectorial que toma valores vectoriales. Para calcular el valor de un campo vectorial en un vector particular, se utiliza el procedimiento `evalVF`:

```
> evalVF(G, <1, 1, 1>) ;
```

$$3e_x + e_y - 3e_z$$

Se puede definir un campo vectorial \mathbf{F} mediante el procedimiento `VectorField`:

> `F := VectorField(<x*y, 2*y*z, 3*x*z>) ;`

$$F := xy\bar{e}_x + 2yz\bar{e}_y + 3xz\bar{e}_z$$

Después podemos calcular la divergencia o el rotacional de \mathbf{F} utilizando los procedimientos `Divergence` o `Curl`, o bien mediante productos escalares o vectoriales con el operador `Del`:

> `Divergence(F) ; Del.F;`

$$y + 2z + 3x$$

$$y + 2z + 3x$$

> `Curl(F) ; Del &x F;`

$$-2y\bar{e}_x - 3z\bar{e}_y - x\bar{e}_z$$

$$-2y\bar{e}_x - 3z\bar{e}_y - x\bar{e}_z$$

Podemos verificar las identidades del Teorema 3 utilizando campos vectoriales y escalares arbitrarios:

> `H := VectorField(<u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)>) ;`

$$H := u(x, y, z)\bar{e}_x + v(x, y, z)\bar{e}_y + w(x, y, z)\bar{e}_z$$

> `Divergence(Curl(H)) ; Curl(Gradient(u(x, y, z))) ;`

$$0$$

$$0\bar{e}_x$$

$0\bar{e}_x$ es la forma de indicar en `VectorCalculus` el campo vectorial cero.

> `Curl(Curl(H)) - Gradient(Divergence(H)) + Laplacian(H) ;`

$$0\bar{e}_x$$

`VectorCalculus` tiene también procedimientos para calcular el potencial escalar de un campo vectorial irrotacional y el potencial vector de un campo vectorial solenoidal:

> `ScalarPotential(VectorField(<x, y, z>)) ;`

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

> `VectorPotential(VectorField(<x^2, -x*y, -x*z>)) ;`

$$-xyz\bar{e}_x - x^2z\bar{e}_y$$

Ningún procedimiento generará ninguna salida si no se le introduce un campo vectorial que cumpla la condición apropiada (irrotacional o solenoidal).

Finalmente, nótese que `VectorCalculus` trabaja muy bien con sistemas de coordenadas diferentes de 'cartesian' $[x, y, z]$. Por ejemplo,

> `SetCoordinates('cylindrical' [r, theta, z]) ;`

$$cylindrical_{r, \theta, z}$$

> `Laplacian(u(r, theta, z)) ;`

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta, z)\right) + r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta, z)\right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta, z)}{r} + r\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, \theta, z)\right)$$

cuya expresión no es tan simple como nos gustaría, pero es correcta. De forma similar, podemos utilizar los sistemas de coordenadas 'spherical' [rho, phi, theta] en el espacio tridimensional y también 'polar' [r, theta] en el plano.

Ejercicios 16.2

- Demuestre el apartado (a) del Teorema 3.
- Demuestre el apartado (b) del Teorema 3.
- Demuestre el apartado (d) del Teorema 3.
- Demuestre el apartado (f) del Teorema 3.
- Demuestre el apartado (h) del Teorema 3.
- Demuestre el apartado (i) del Teorema 3.
- * Sabiendo que las líneas de campo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ son rectas paralelas, ¿se puede concluir algo respecto a $\text{div } \mathbf{F}$ y $\text{rot } \mathbf{F}$?
- Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea \mathbf{c} un vector constante. Demuestre que $\nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0$, $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$ y $\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}$.
- Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea $r = |\mathbf{r}|$. Si f es una función diferenciable de una variable, demuestre que


$$\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r)$$
 Calcule $f(r)$ si $f(r)\mathbf{r}$ es solenoidal para $r \neq 0$.
- Si el campo vectorial suave \mathbf{F} es irrotacional y solenoidal en \mathbb{R}^3 , demuestre que sus tres componentes y su potencial escalar son funciones armónicas en \mathbb{R}^3 .
- Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y \mathbf{F} es suave, demuestre que

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{r} + \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})$$
 En particular, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} + \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})$$
- Si ϕ y ψ son funciones armónicas, demuestre que $\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi$ es solenoidal.
- Si ϕ y ψ son campos escalares suaves, demuestre que

$$\nabla \times (\phi\nabla\psi) = -\nabla \times (\psi\nabla\phi) = \nabla\phi \times \nabla\psi$$
- Verifique la identidad

$$\nabla \cdot (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h)$$
 para campos escalares suaves f, g y h .
- Si los campos vectoriales \mathbf{F} y \mathbf{G} son suaves y conservativos, demuestre que $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ es solenoidal. Calcule un potencial vector de $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$.
- Calcule un potencial vector de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.
- Demuestre que $\mathbf{F} = xe^{2z}\mathbf{i} + ye^{2z}\mathbf{j} - e^{2z}\mathbf{k}$ es un campo vectorial solenoidal, y calcule un potencial vector del mismo.
- * Suponga que $\text{div } \mathbf{F} = 0$ en un dominio D en el que todo punto P perteneciente al mismo se puede unir al origen con un segmento recto incluido completamente en D . Sea $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + ty\mathbf{j} + tz\mathbf{k}$, ($0 \leq t \leq 1$), una parametrización del segmento desde el origen a (x, y, z) en D . Si

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \int_0^1 t\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$
 demuestre que $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$ en D . *Sugerencia:* Es suficiente comprobar las primeras componentes de $\text{rot } \mathbf{G}$ y \mathbf{F} . Proceda de forma similar a la demostración del Teorema 4.
- Utilice el paquete VectorCalculus de Maple para verificar las identidades (a)-(f) del Teorema 3.  *Sugerencia:* En las expresiones de la forma $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$ habrá que utilizar


```
> F[1]*diff(G, x)+F[2]*diff(G, y)
> +F[3]*diff(G, z)
```

 porque Del no se puede aplicar a un campo vectorial excepto vía un producto escalar o vectorial.

16.3 El Teorema de Green en el plano

El Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a)$$

expresa la integral, tomada sobre el intervalo $[a, b]$, de la derivada de una función de una variable, f , como una *suma* de los valores de esa función en la frontera orientada del intervalo $[a, b]$,

es decir, en los dos extremos a y b , donde el primero proporciona una contribución *negativa* y el segundo una *positiva*. La integral sobre una curva c de un campo vectorial conservativo desde A hasta B ,

$$\int_c \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

tiene una interpretación similar; $\nabla\phi$ es una derivada, y la curva c , aunque está en un espacio bidimensional o tridimensional, es intrínsecamente un objeto unidimensional, y los puntos A y B constituyen su frontera.

El Teorema de Green es una versión bidimensional del Teorema Fundamental del Cálculo. Expresa la *integral doble* de una cierta clase derivada de un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$, concretamente, la componente \mathbf{k} de $\mathbf{rot F}$, sobre una región R del plano xy como una integral (es decir, una «suma») sobre una curva c que es la frontera orientada de R , de la componente tangencial de \mathbf{F} :

$$\iint_R \mathbf{rot F} \cdot \mathbf{k} dA = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

o, de forma más explícita,

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_c F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

Para que esta fórmula se cumpla, c debe ser la frontera orientada de R considerada como una superficie con una orientación proporcionada por $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Así, c está orientada con R a su izquierda cuando nos movemos por c en la dirección de su orientación. Diremos en este caso que la curva está orientada positivamente con respecto a R . En particular, si c es una curva simple cerrada que limita a R , entonces c está orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por supuesto, R puede tener huecos, y las fronteras de los huecos estarán orientadas en el sentido de las agujas del reloj. En cualquier caso, la tangente unitaria $\hat{\mathbf{T}}$ y la normal exterior unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ (que apunta hacia el exterior de R) sobre c cumplen $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}} \times \mathbf{k}$. Véase la Figura 16.5.

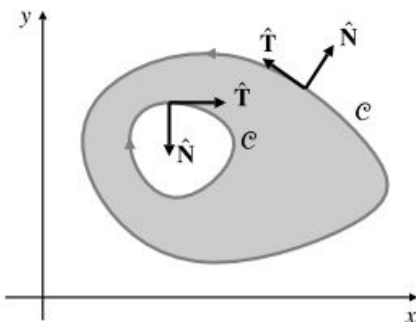


Figura 16.5 Un dominio en el plano con frontera orientada positivamente.

TEOREMA 6 Teorema de Green

Sea R una región cerrada y regular en el plano xy cuya frontera, c , está formada por una o más curvas cerradas, suaves por tramos, y que no se cortan a sí mismas, positivamente orientadas con respecto a R . Si $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial suave en R , entonces

$$\oint_c F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

DEMOSTRACIÓN Recuérdese que una región regular se puede dividir en subregiones no solapadas que son simples en x y simples en y (véase la Sección 14.2). Cuando dos de esas regiones comparten una curva frontera común, inducen orientaciones opuestas sobre dicha curva, por lo que la suma de las integrales sobre las fronteras de las subregiones es simplemente la integral sobre la frontera de la región completa (véase la Figura 16.6). Las integrales dobles sobre las subregiones también se suman para dar la integral doble sobre la región completa. Por tanto, es suficiente demostrar que la fórmula se cumple para una región R que sea simple en x y simple en y .

Como R es simple en y , está especificada por inecuaciones de la forma $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$, con la frontera inferior $y = f(x)$ orientada de izquierda a derecha y la frontera superior $y = g(x)$ orientada de derecha a izquierda (véase la Figura 16.7). Entonces,

$$\begin{aligned} - \iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b (-F_1(x, g(x)) + F_1(x, f(x))) dx \end{aligned}$$

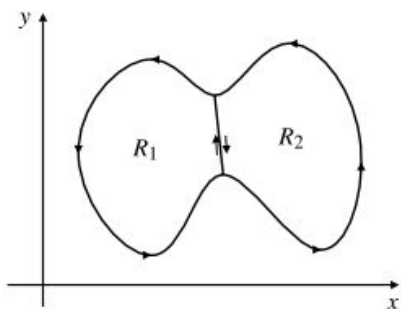


Figura 16.6 El Teorema de Green se cumple para la unión de R_1 y R_2 si se cumple para cada una de esas regiones.

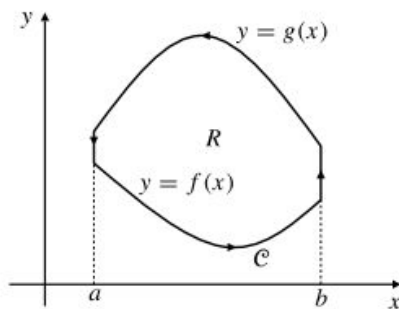


Figura 16.7 $\oint_C F_1 dx = - \iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y} dA$ para esta región R simple en y .

Por otra parte, como $dx = 0$ en los lados verticales de R , y la frontera superior se recorre desde b hasta a , tenemos

$$\oint_C F_1(x, y) dx = \int_a^b (F_1(x, f(x)) - F_1(x, g(x))) dx = \iint_R - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy$$

De forma similar, como R es simple en x , $\oint_C F_2 dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy$, por lo que

$$\oint_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

Ejemplo 1 (Área encerrada por una curva cerrada simple) Para los tres campos vectoriales

$$\mathbf{F} = x\mathbf{j}, \quad \mathbf{F} = -y\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

se cumple que $(\partial F_2/\partial x) - (\partial F_1/\partial y) = 1$. Si c es una curva cerrada simple, suave por tramos y orientada positivamente que delimita una región R del plano, entonces, por el Teorema de Green,

$$\oint_c x \, dy = -\oint_c y \, dx = \frac{1}{2} \oint_c x \, dy - y \, dx = \iint_R 1 \, dA = \text{área de } R$$

Ejemplo 2 Calcule $I = \oint_c (x - y^3) \, dx + (y^3 + x^3) \, dy$, siendo c la frontera orientada positivamente del cuarto de disco $Q: 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$.

Solución Utilizaremos el Teorema de Green para calcular I :

$$\begin{aligned} I &= \iint_Q \left(\frac{\partial}{\partial x} (y^3 + x^3) - \frac{\partial}{\partial y} (x - y^3) \right) dA \\ &= 3 \iint_Q (x^2 + y^2) \, dA = 3 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^3 \, dr = \frac{3}{8} \pi a^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Sea c una curva cerrada simple, orientada positivamente en el plano xy , que delimita una región R y que no pasa por el origen. Demuestre que

$$\oint_c \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0 & \text{si el origen está en } R \\ 2\pi & \text{si el origen está fuera de } R \end{cases}$$

Solución Primero, si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces, por cálculo directo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Si el origen no está en R , entonces el Teorema de Green implica que

$$\oint_c \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] dx \, dy = 0$$

Supongamos ahora que el origen está en R . Como se supone que la curva c no pasa por el origen, éste debe ser un punto interior de R . El interior de R es abierto, por lo que existe un $\epsilon > 0$ tal que la circunferencia c_ϵ de radio ϵ y centrada en el origen, está en el interior de R . Sea c_ϵ una circunferencia orientada negativamente (en el sentido de las agujas del reloj). Por cálculo directo (véase el Ejercicio 22(a) de la Sección 15.4), se demuestra fácilmente que

$$\oint_{c_\epsilon} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = -2\pi$$

c y c_ϵ forman en conjunto la frontera orientada positivamente de una región R_1 que excluye al origen (véase la Figura 16.8). Por tanto, por el Teorema de Green,

$$\oint_c \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} + \oint_{c_\epsilon} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = 0$$

de donde se deduce el resultado deseado:

$$\oint_c \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = -\oint_{c_\epsilon} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = -(-2\pi) = 2\pi$$

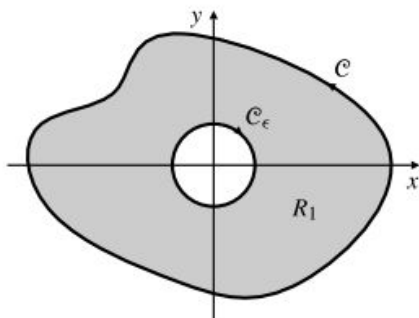


Figura 16.8

El Teorema de la Divergencia en dos dimensiones

El siguiente teorema es una formulación alternativa del Teorema Fundamental del Cálculo. En este caso expresaremos la integral doble de **div F** (una derivada de **F**) sobre *R* como una integral simple de la componente normal hacia el exterior de **F** sobre la frontera *c* de *R*.

TEOREMA 7 El Teorema de la Divergencia en el plano

Sea *R* una región regular y cerrada en el plano *xy*, cuya frontera *c* está formada por una o más curvas cerradas, que no se cortan a sí mismas y suaves por tramos. Sea $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia fuera (desde *R*) sobre *c*. Si $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial suave en *R*, entonces

$$\iint_R \text{div } \mathbf{F} \, dA = \oint_c \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds$$

DEMOSTRACIÓN Como se comentó en el segundo párrafo de esta sección, $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}} \times \mathbf{k}$, donde $\hat{\mathbf{T}}$ es el campo tangente unitario en la dirección positiva de *c*. Si $\hat{\mathbf{T}} = T_1\mathbf{i} + T_2\mathbf{j}$, entonces $\hat{\mathbf{N}} = T_2\mathbf{i} - T_1\mathbf{j}$ (véase la Figura 16.9). Sea ahora **G** el campo vectorial cuyas componentes son $G_1 = -F_2$ y $G_2 = F_1$. Entonces $\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ y, por el Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \iint_R \text{div } \mathbf{F} \, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA \\ &= \oint_c \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \oint_c \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds = \oint_c \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds \end{aligned}$$

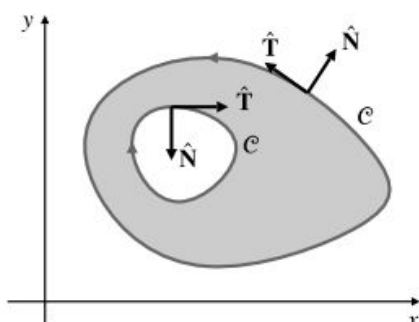


Figura 16.9 $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}} \times \mathbf{k}$.

Ejercicios 16.3

1. Calcule $\oint_C (\operatorname{sen} x + 3y^2) dx + (2x - e^{-y^2}) dy$, siendo C la frontera del semidisco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.
2. Calcule $\oint_C (x^2 - xy) dx + (xy - y^2) dy$, en el sentido de las agujas del reloj por el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.
3. Calcule $\oint_C (x \operatorname{sen}(y^2) - y^2) dx + (x^2 y \cos(y^2) + 3x) dy$, siendo C la frontera en sentido contrario al de las agujas del reloj del trapecioide cuyos vértices son $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ y $(0, 2)$.
4. Calcule $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$, siendo C la frontera en el sentido de las agujas del reloj de la región $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$.
5. Utilice una integral sobre una curva para calcular el área plana encerrada por la curva $\mathbf{r} = a \cos^3 t \mathbf{i} + b \operatorname{sen}^3 t \mathbf{j}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.
6. Hemos deducido el Teoremas de la Divergencia en dos dimensiones a partir del Teorema de Green. Invierta el argumento y utilice el Teorema de la Divergencia en dos dimensiones para demostrar el Teorema de Green.
7. Dibuje la curva plana C : $\mathbf{r} = \operatorname{sen} t \mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t \mathbf{j}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, con $\mathbf{F} = ye^{x^2} \mathbf{i} + x^3 e^{y^2} \mathbf{j}$.
8. Si C es la frontera orientada positivamente de una región plana R que tiene área A y centroide (\bar{x}, \bar{y}) , interprete geoméricamente la integral sobre una curva $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, con (a) $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{j}$, (b) $\mathbf{F} = xy \mathbf{i}$ y (c) $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + 3xy \mathbf{j}$.
- *9. (Valores medios de funciones armónicas) Si $u(x, y)$ es armónica en un dominio que contiene a un disco de radio r con frontera C_r , entonces el valor medio de u sobre la circunferencia es el valor de u en su centro. Pruebe esto demostrando que la derivada del valor medio con respecto a r es cero (utilice el Teorema de la Divergencia y el hecho de que u es armónica) y que el límite del valor medio cuando $r \rightarrow 0$ es el valor de u en el centro.

16.4 El Teorema de la Divergencia en el espacio tridimensional

El **Teorema de la Divergencia** (denominado también **Teorema de Gauss**) es una de las dos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo en \mathbb{R}^3 (la otra es el Teorema de Stokes, que se presenta en la sección siguiente).

En el Teorema de la Divergencia, la integral de la *derivada* $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre un dominio en el espacio tridimensional se expresa como el flujo de \mathbf{F} hacia el exterior de la superficie de ese dominio. Esto se parece mucho a la versión bidimensional, Teorema 7, presentada en la sección anterior. El teorema se cumple para una clase general de dominios en \mathbb{R}^3 limitados por superficies cerradas suaves por tramos. Sin embargo, restringiremos nuestro planteamiento y demostración a dominios de un tipo especial. Ampliando el concepto de dominio simple en x en el plano definido en la Sección 14.2, se dice que un dominio tridimensional D es **simple** en x si está limitado por una superficie suave por tramos \mathcal{S} y si toda recta paralela al eje x que pase por un punto interior de D corta a \mathcal{S} exactamente en dos puntos. Se pueden dar definiciones semejantes para los casos de simple en y , y de simple en z . Diremos que un dominio D es **regular** si es una unión finita de subdominios no solapados, todos los cuales son simples en x , en y y en z .

TEOREMA 8 El Teorema de la Divergencia (Teorema de Gauss)

Sea D un dominio regular, tridimensional, cuya frontera \mathcal{S} es una superficie cerrada y orientada con campo normal unitario $\hat{\mathbf{N}}$ que apunta hacia el exterior de D . Si \mathbf{F} es un campo vectorial suave definido sobre D , entonces

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

DEMOSTRACIÓN Como el dominio D es una unión finita de dominios no solapados que son simples en x , simples en y y simples en z , es suficiente con demostrar el teorema para un subdominio D con esta propiedad. Para ver que esto es así supongamos, por ejemplo, que D y \mathcal{S} están divididos en dos partes, D_1 y D_2 , y \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , por una superficie \mathcal{S}^* (véase la Figura 16.10). \mathcal{S}^* pertenece a la frontera de D_1 y D_2 , pero las normales hacia el exterior, $\hat{\mathbf{N}}_1$ y $\hat{\mathbf{N}}_2$, de los dos subdominios apuntan en direcciones opuestas a cada lado de \mathcal{S}^* . Si la fórmula del teorema se cumple en ambos subdominios,

$$\begin{aligned} \iiint_{D_1} \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \iint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}^*} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 dS \\ \iiint_{D_2} \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \iint_{\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}^*} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 dS \end{aligned}$$

entonces, sumando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Las contribuciones de \mathcal{S}^* se anulan entre sí porque sobre esa superficie $\hat{\mathbf{N}}_2 = -\hat{\mathbf{N}}_1$.

Para el resto de la demostración supondremos, por tanto, que D es simple en x , y y z . Como D es simple en z , estará entre las gráficas de dos funciones definidas en una región R del plano xy ; si (x, y, z) pertenece a D , entonces (x, y) está en R y $f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$ (véase la Figura 16.11). Tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} dV &= \iint_R dx dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \\ &= \iint_R (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y))) dx dy \end{aligned}$$

Así pues,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{\mathcal{S}} (F_1 \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{N}} + F_2 \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{N}} + F_3 \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}}) dS$$

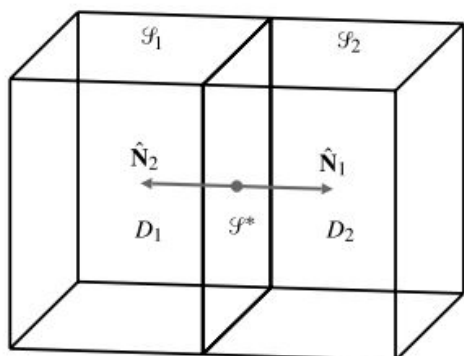


Figura 16.10 Unión de dominios colindantes.

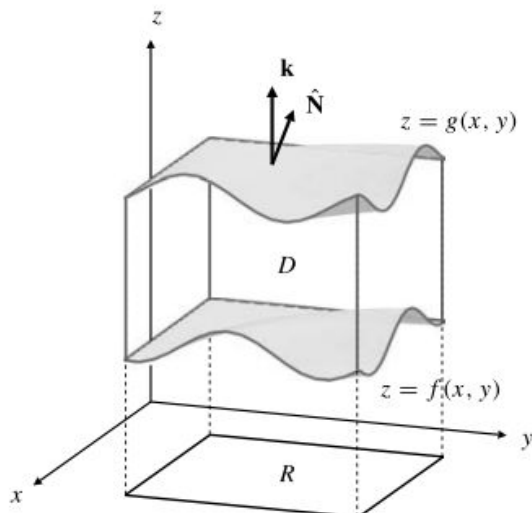


Figura 16.11 Dominio simple en z .

F_3 interviene sólo en el último término, y se puede descomponer en tres integrales, sobre la superficie superior, $z = g(x, y)$, sobre la superficie inferior, $z = f(x, y)$, y sobre la pared vertical que está por encima de la frontera de R :

$$\oiint_{\mathcal{S}} F_3(x, y, z) \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \left(\iint_{\text{tope}} + \iint_{\text{fondo}} + \iint_{\text{pared}} \right) F_3(x, y, z) \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Sobre la pared lateral, $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$, por lo que la integral es cero. En la superficie superior, $z = g(x, y)$, y el vector elemento de área es

$$\hat{\mathbf{N}} dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy$$

De acuerdo con esto,

$$\iint_{\text{tope}} F_3(x, y, z) \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_R F_3(x, y, g(x, y)) dx dy$$

De forma similar, tenemos

$$\iint_{\text{fondo}} F_3(x, y, z) \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = - \iint_R F_3(x, y, f(x, y)) dx dy$$

donde el signo negativo se produce porque en la parte inferior $\hat{\mathbf{N}}$ apunta hacia abajo en vez de hacia arriba. Hemos demostrado, por tanto, que

$$\iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \oiint_{\mathcal{S}} F_3 \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

De forma análoga, como D es también simple en x y simple en y ,

$$\iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dV = \oiint_{\mathcal{S}} F_1 \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

$$\iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dV = \oiint_{\mathcal{S}} F_2 \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Sumando los tres resultados obtenemos

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

El Teorema de la Divergencia se puede utilizar en ambos sentidos para simplificar cálculos explícitos de integrales de superficie o volúmenes. Presentaremos ejemplos de cada caso.

Ejemplo 1 Sea $\mathbf{F} = bxy^2\mathbf{i} + bx^2y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z^2\mathbf{k}$, y sea \mathcal{S} la superficie cerrada que limita al cilindro sólido R definido por $x^2 + y^2 \leq a^2$, y $0 \leq z \leq b$. Calcule $\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución Por el Teorema de la Divergencia,

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_R (x^2 + y^2)(b + 2z) dV \\ &= \int_0^b (b + 2z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 r dr \\ &= (b^2 + b^2)2\pi(a^4/4) = \pi a^4 b^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcule $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS$, siendo \mathcal{S} la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Utilice el Teorema de la Divergencia.

Solución En \mathcal{S} tenemos

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

Es conveniente escoger \mathbf{F} de forma que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = x^2 + y^2$. Obsérvese que $\mathbf{F} = a(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ sirve. Si B es la bola limitada por \mathcal{S} , entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \iiint_B 2a dV = (2a) \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{8}{3} \pi a^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Utilizando el Teorema de la Divergencia con $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcule el volumen de un cono con área de base A y altura h . La base puede ser cualquier región plana limitada suavemente.

Solución Supongamos que el vértice del cono está en el origen y que la base es el plano $z = h$, como se muestra en la Figura 16.12. La superficie del cono sólido C consta de dos partes: la pared cónica \mathcal{S} y la región de la base D , cuya área es A . Como $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta directamente en dirección contraria al origen en todo punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, tenemos que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ en \mathcal{S} . Sobre D , tenemos $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ y $z = h$, por lo que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = z = h$ en la base del cono. Como $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3$, tenemos, por el Teorema de la Divergencia,

$$\begin{aligned} 3V &= \iiint_C \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_D \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &= 0 + h \iint_D dS = Ah \end{aligned}$$

Por consiguiente, $V = \frac{1}{3} Ah$, la fórmula conocida del volumen de un cono.

Ejemplo 4 Sea \mathcal{S} la superficie de un dominio arbitrario regular D en el espacio tridimensional que contiene al origen en su interior. Calcule

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

siendo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, y $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia el exterior sobre \mathcal{S} (véase la Figura 16.13).

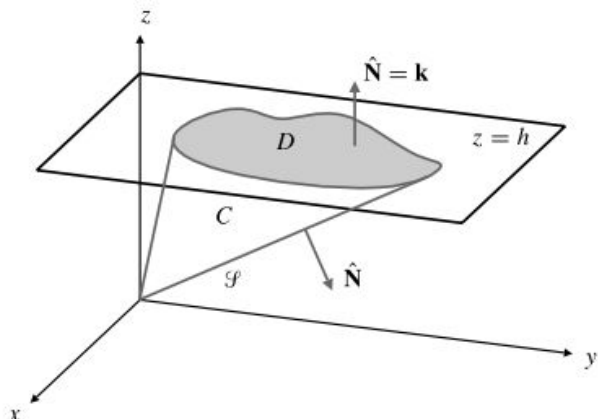


Figura 16.12 Un cono con forma de su base arbitraria.

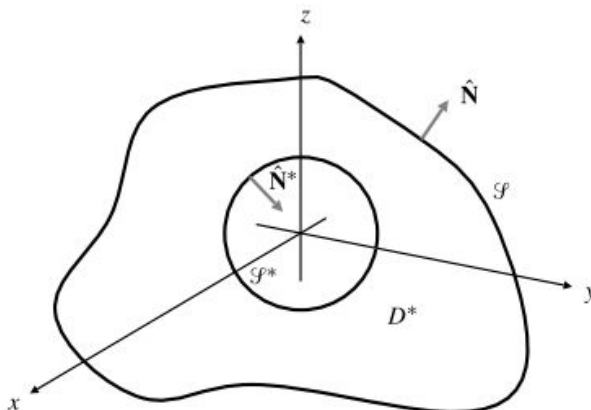


Figura 16.13 Un dominio sólido con una cavidad esférica.

Solución Como \mathbf{F} y, por tanto, $\operatorname{div} \mathbf{F}$ no están definidos en el origen, no podemos aplicar directamente el Teorema de la Divergencia. Para solucionar este problema utilizaremos un pequeño truco. Sea \mathcal{S}^* una pequeña esfera centrada en el origen que limita a una bola contenida completamente en D (véase la Figura 16.13). Sea $\hat{\mathbf{N}}^*$ la normal unitaria sobre \mathcal{S}^* que apunta *hacia el interior* de la esfera, y sea D^* la parte de D que está fuera de \mathcal{S}^* . Como se demuestra en el Ejemplo 3 de la Sección 16.1, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ sobre D^* . Además,

$$\oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS = -4\pi m$$

es el flujo de \mathbf{F} *hacia el interior* a través de la esfera \mathcal{S}^* (véase el Ejemplo 1 de la Sección 15.6). Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{D^*} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \oiint_{\mathcal{S}^*} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS \\ &= \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS - 4\pi m \end{aligned}$$

por lo que $\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 4\pi m$.

Ejemplo 5 Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte del primer octante \mathcal{S} de la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \leq y \leq b$.

Solución \mathcal{S} es una de las cinco superficies que forman la frontera de la región sólida D que se muestra en la Figura 16.14. Las otras cuatro superficies son planas: \mathcal{S}_1 está en el plano $z = 0$, \mathcal{S}_2 está en el plano $x = 0$, \mathcal{S}_3 está en el plano $y = 0$ y \mathcal{S}_4 está en el plano $y = b$. Orientemos todas estas superficies con su normal $\hat{\mathbf{N}}$ apuntando hacia el exterior de D . Sobre \mathcal{S}_1 tenemos $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$, por lo que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -z = 0$ sobre \mathcal{S}_1 . De forma similar, $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ sobre \mathcal{S}_2 y \mathcal{S}_3 . Sobre \mathcal{S}_4 , $y = b$ y $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{j}$, por lo que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = y^2 = b^2$ allí. Si \mathcal{S}_{tot} indica la frontera total de D , entonces

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}_{\text{tot}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + 0 + 0 + 0 + \iint_{\mathcal{S}_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \frac{\pi a^2 b^2}{4} \end{aligned}$$

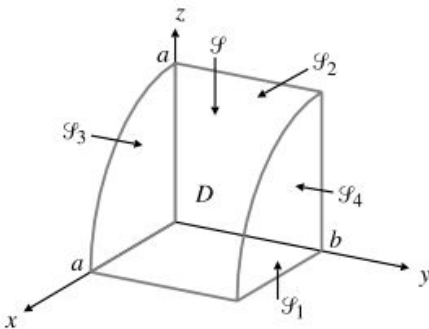


Figura 16.14 La frontera del dominio D tiene cinco caras, una de ellas curva y las otras cuatro planas.

Por otra parte, por el Teorema de la Divergencia,

$$\oiint_{\mathcal{S}_{\text{tot}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_D (2 + 2y) dV = 2V + 2V\bar{y}$$

siendo $V = \pi a^2 b/4$ el volumen de D , e $\bar{y} = b/2$ la coordenada y del centroide de D . Combinando estos resultados, el flujo de \mathbf{F} hacia arriba a través de \mathcal{S} es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{2\pi a^2 b}{4} \left(1 + \frac{b}{2}\right) - \frac{\pi a^2 b^2}{4} = \frac{\pi a^2 b}{2}$$

Entre los ejemplos anteriores, el Ejemplo 4 es el más significativo y el que mejor representa cómo se usa en la práctica el Teorema de la Divergencia. Se trata en general de una herramienta teórica, más que una herramienta de cálculo. En la Sección 16.6 presentaremos algunas aplicaciones.

Variantes del Teorema de la Divergencia

Se pueden obtener otras versiones del Teorema Fundamental del Cálculo partiendo del Teorema de la Divergencia. Dos de ellas se presentan en el siguiente teorema:

TEOREMA 9 Si D satisface las condiciones del Teorema de la Divergencia y su superficie es \mathcal{S} , \mathbf{F} es un campo vectorial suave y ϕ es un campo escalar suave, entonces

$$(a) \quad \iiint_D \mathbf{rot} \mathbf{F} \, dV = - \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

$$(b) \quad \iiint_D \mathbf{grad} \, \phi \, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \phi \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

DEMOSTRACIÓN Obsérvese que ambas fórmulas son ecuaciones de *vectores*. Se obtienen aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} \times \mathbf{c}$ y $\phi \mathbf{c}$, respectivamente, siendo \mathbf{c} un vector constante arbitrario. Daremos los detalles de la fórmula (a) y dejaremos la (b) como ejercicio.

Utilizando el Teorema 3(d), calculamos

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{c} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{c}$$

Además, utilizando la identidad del producto escalar triple (véase el Ejercicio 18 de la Sección 10.3),

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = (\hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}}) \cdot \mathbf{c}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \left(\iiint_D \mathbf{rot} \mathbf{F} \, dV + \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}} \, dS \right) \cdot \mathbf{c} \\ &= \iiint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{c} \, dV - \oiint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \\ &= \iiint_D \mathbf{div} (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \, dV - \oiint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0 \end{aligned}$$

Como \mathbf{c} es arbitraria, el vector del interior de los paréntesis grandes debe ser nulo (si $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ para todo vector \mathbf{c} , entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$). Esto nos lleva a la fórmula (a).

Ejercicios 16.4

En los Ejercicios 1-4, utilice el Teorema de la Divergencia para calcular el flujo de los campos vectoriales dados hacia el exterior de la esfera \mathcal{S} cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $a > 0$.

1. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ 2. $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + x^2e^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + 3yz^2\mathbf{j} + (3y^2z + x^2)\mathbf{k}$

En los Ejercicios 5-8, calcule el flujo de $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia el exterior a través de la frontera de las regiones sólidas dadas.

5. La bola $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 \leq 9$
6. El elipsoide sólido $x^2 + y^2 + 4(z - 1)^2 \leq 4$
7. El tetraedro $x + y + z \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$
8. El cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$, $0 \leq z \leq 4$
9. Sea A el área de la región D que forma parte de la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen, y sea V el volumen del cono sólido C formado por todos los puntos de los segmentos que unen el centro de la esfera con los puntos de D . Demuestre que

$$V = \frac{1}{3}AR$$

aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

10. Sea $\phi(x, y, z) = xy + z^2$. Calcule el flujo de $\nabla\phi$ hacia arriba a través de la superficie plana triangular \mathcal{S} cuyos vértices son $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.
11. Un dominio cónico cuyo vértice es $(0, 0, b)$ y cuyo eje coincide con el eje z tiene como base un disco de radio a en el plano xy . Calcule el flujo de

$$\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$$

hacia arriba a través de la parte cónica de la superficie del dominio.

12. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = (y + xz)\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} - (2x + z^2)\mathbf{k}$ hacia arriba a través de la parte del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
13. Sea D la región $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$, $x^2 + y^2 \geq a^2$. La superficie \mathcal{S} de D está formada por una parte cilíndrica, \mathcal{S}_1 , y una parte esférica, \mathcal{S}_2 . Calcule el flujo de

$$\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y - xz)\mathbf{j} + (z - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$$

hacia el exterior de D a través de (a) la superficie completa \mathcal{S} , (b) la superficie \mathcal{S}_1 y (c) la superficie \mathcal{S}_2 .

14. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} (e^x\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$, siendo \mathcal{S} la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está en el primer octante y entre los planos $x = 0$ y $x = 1$.
15. Una región sólida R tiene volumen V y su centroide está en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = (x^2 - x - 2y)\mathbf{i} + (2y^2 + 3y - z)\mathbf{j} - (z^2 - 4z + xy)\mathbf{k}$ hacia el exterior de R a través de esta superficie.
16. El plano $x + y + z = 0$ divide al cubo $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ en dos partes. Sea D la parte inferior (uno de cuyos vértices es el punto $(-1, -1, -1)$). Dibuje D . Nótese que tiene siete caras, y una de ellas es hexagonal. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia el exterior de D a través de cada una de sus caras.
17. Sea $\mathbf{F} = (x^2 + y + 2 + z^2)\mathbf{i} + (e^x + y^2)\mathbf{j} + (3 + x)\mathbf{k}$. Sea $a > 0$ y sea \mathcal{S} la parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2az + 3a^2$ que está por encima del plano xy . Calcule el flujo de \mathbf{F} hacia el exterior a través de \mathcal{S} .
18. Una pila de arena húmeda cuyo volumen total es de 5π cubre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. El momento del vapor de agua está dado por $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi + \mu \operatorname{rot} \mathbf{G}$, siendo $\phi = x^2 - y^2 + z^2$ la concentración de agua, $\mathbf{G} = \frac{1}{3}(-y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k})$ y μ una constante. Calcule el flujo de \mathbf{F} hacia arriba a través de la superficie superior de la pila de arena.

En los Ejercicios 19-29, D es un dominio tridimensional que satisface las condiciones del Teorema de la Divergencia, y \mathcal{S} es su superficie. $\hat{\mathbf{N}}$ es el campo normal unitario hacia fuera (desde D) sobre \mathcal{S} . Las funciones ϕ y ψ son campos escalares suaves sobre D . Además, $\partial\phi/\partial n$ indica la derivada direccional primera de ϕ en la dirección de $\hat{\mathbf{N}}$ en cualquier punto de \mathcal{S} :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{N}}$$

19. Demuestre que $\iiint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0$, siendo \mathbf{F} un campo vectorial arbitrario suave.
20. Demuestre que el volumen V de D está dado por

$$V = \frac{1}{3} \iiint_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

21. Si el volumen de D es V , demuestre que

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{2V} \iiint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

es el vector de posición del centro de gravedad de D .

22. Demuestre que $\oint_{\mathcal{S}} \nabla \phi \times \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0$.

23. Si \mathbf{F} es un campo vectorial suave sobre D , demuestre que

$$\iiint_D \phi \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV + \iiint_D \nabla \phi \cdot \mathbf{F} \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \phi \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Sugerencia: Utilice el Teorema 3(b) de la Sección 16.2.

Propiedades del operador Laplaciana

24. Si $\nabla^2 \phi = 0$ en D y $\phi(x, y, z) = 0$ en \mathcal{S} , demuestre que $\phi(x, y, z) = 0$ en D . *Sugerencia:* Haga $\mathbf{F} = \nabla \phi$ en el Ejercicio 23.

25. **(Unicidad del problema de Dirichlet)** El problema de Dirichlet para el operador Laplaciana es el problema de condiciones de contorno

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z) & \text{en } D \\ u(x, y, z) = g(x, y, z) & \text{en } \mathcal{S} \end{cases}$$

siendo f y g funciones dadas definidas sobre D y \mathcal{S} , respectivamente. Demuestre que este problema puede tener como mucho una solución $u(x, y, z)$. *Sugerencia:* Suponga que existen dos soluciones, u y v , y aplique el Ejercicio 24 a su diferencia $\phi = u - v$.

26. **(El problema de Neumann)** Si $\nabla^2 \phi = 0$ en D y $\partial \phi / \partial n = 0$ sobre \mathcal{S} , demuestre que $\nabla \phi(x, y, z) = 0$ sobre D . El problema de Neumann para el operador Laplaciana es el problema de condiciones de contorno

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z) & \text{en } D \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x, y, z) = g(x, y, z) & \text{en } \mathcal{S} \end{cases}$$

siendo f y g funciones dadas definidas sobre D y \mathcal{S} , respectivamente. Demuestre que, si D es conexo, entonces dos soluciones cualesquiera del problema de Neumann en D sólo se pueden diferenciar en una constante.

27. Verifique que $\iiint_D \nabla^2 \phi \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS$.

28. Verifique que

$$\begin{aligned} \iiint_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV \\ = \oint_{\mathcal{S}} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, dS \end{aligned}$$

29. Aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} = \phi \mathbf{c}$, siendo \mathbf{c} un vector constante arbitrario, demuestre que

$$\iiint_D \nabla \phi \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \phi \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

*30. Sea P_0 un punto fijo y para todo $\epsilon > 0$ sea D_ϵ un dominio cuya frontera \mathcal{S}_ϵ satisface las condiciones del Teorema de la Divergencia. Suponga que la máxima distancia desde P_0 a puntos P de D_ϵ tiende a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Si D_ϵ tiene volumen $\operatorname{vol}(D_\epsilon)$, demuestre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{vol}(D_\epsilon)} \oint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$$

Esto generaliza el Teorema 1 de la Sección 16.1.

16.5 El Teorema de Stokes

Si vemos una región R en el plano xy como una superficie en el espacio tridimensional con campo normal $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$, la fórmula del Teorema de Green se puede expresar de la forma

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

El **Teorema de Stokes**, que se presenta a continuación, generaliza esta idea a superficies no planas.

TEOREMA 10 Teorema de Stokes

Sea \mathcal{S} una superficie en el espacio tridimensional orientada y suave por tramos, con campo normal unitario $\hat{\mathbf{N}}$ y frontera \mathcal{C} , formada por una o más curvas cerradas, suaves por tramos, y con orientación heredada de \mathcal{S} . Si \mathbf{F} es un campo vectorial suave definido en un conjunto abierto que contiene a \mathcal{S} , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

DEMOSTRACIÓN Un argumento similar a los presentados en las demostraciones del Teorema de Green y del Teorema de la Divergencia permite demostrar que, si \mathcal{S} se descompone en un número finito de subsuperficies no solapadas, entonces es suficiente demostrar que la fórmula anterior se cumple en cada una de ellas (si las subsuperficies \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 tienen como frontera común la curva c^* , entonces c^* hereda orientaciones opuestas como parte de las fronteras de \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , por lo que las integrales sobre c^* se cancelan entre sí; véase la Figura 16.15(a)). Podemos subdividir \mathcal{S} en suficientes subsuperficies suaves de forma que cada una de ellas tenga una proyección normal uno a uno sobre un plano coordenado. Plantaremos la fórmula para una de estas subsuperficies, que denominaremos \mathcal{S} .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que \mathcal{S} tiene una proyección normal uno a uno sobre el plano xy , y que su campo normal $\hat{\mathbf{N}}$ apunta hacia arriba. Por tanto, sobre \mathcal{S} , z es una función suave de x e y , por ejemplo $z = g(x, y)$, definida para (x, y) perteneciente a una región R del plano xy . Las fronteras c de \mathcal{S} y c^* de R están ambas orientadas en sentido contrario al de las agujas del reloj vistas desde un punto situado sobre el eje z positivo (véase la Figura 16.15(b)). El campo normal sobre \mathcal{S} es

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

y el elemento de área de superficie sobre \mathcal{S} se expresa en función del elemento de área $dA = dx dy$ en el plano xy como

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dA$$

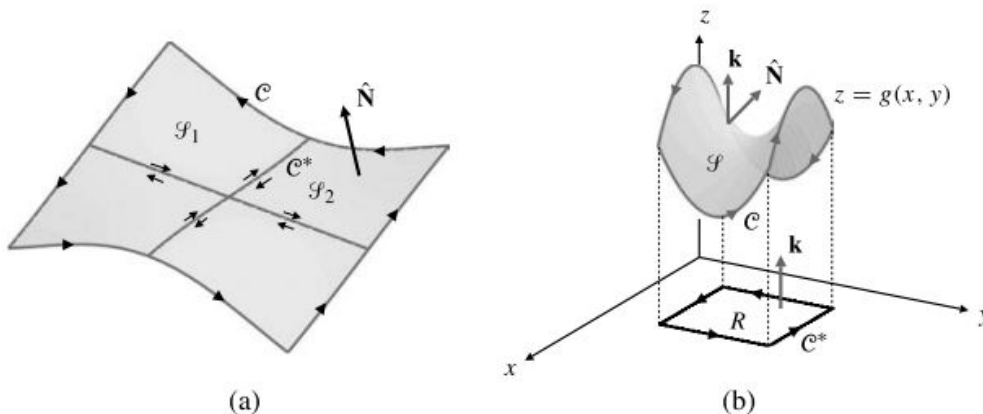


Figura 16.15

- (a) El Teorema de Stokes se cumple en una superficie compuesta de subsuperficies no solapadas si se cumple en cada una de éstas.
 (b) Una superficie con una proyección uno a uno sobre el plano xy .

Por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial g}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA \end{aligned}$$

Como $z = g(x, y)$ sobre \mathcal{C} , tenemos que $dz = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\mathcal{C}^*} \left[F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy \right. \\ &\quad \left. + F_3(x, y, z) \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \right] \\ &= \oint_{\mathcal{C}^*} \left(\left[F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z) \frac{\partial g}{\partial x} \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \left[F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) \frac{\partial g}{\partial y} \right] dy \right) \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el Teorema de Green en el plano xy para obtener

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) \frac{\partial g}{\partial y} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[F_1(x, y, z) + F_3(x, y, z) \frac{\partial g}{\partial x} \right] \right) dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - F_3 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) dA \end{aligned}$$

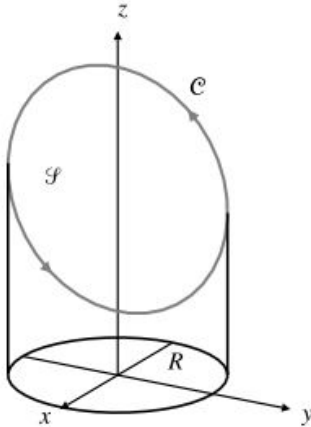
Obsérvese que cuatro términos del integrando final se cancelan, y los restantes términos son iguales a los términos de la expresión de $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ calculados anteriormente. Por tanto, la demostración está completa.

Observación Si $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre un dominio D con la propiedad de que toda curva cerrada, suave por tramos, y que no se cruza consigo misma en D es la frontera de una superficie suave por tramos en D , entonces el Teorema de Stokes nos asegura que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para *toda* curva de ese tipo \mathcal{C} ; por tanto, \mathbf{F} debe ser conservativo. Un dominio D simplemente conexo tiene la propiedad especificada anteriormente. No daremos aquí una prueba formal de este hecho topológico, pero debe parecernos verosímil si recordamos la definición de conectividad simple. Una curva cerrada \mathcal{C} en un dominio simplemente conexo D se debe poder reducir hasta un punto en D sin salirse fuera de D . Al reducirse, traza una superficie en D . Ésta es la razón por la que el Teorema 4 de la Sección 16.2 es válido para dominios simplemente conexos.

Ejemplo 1 Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F} = -y^3 \mathbf{i} + x^3 \mathbf{j} - z^3 \mathbf{k}$ y \mathcal{C} la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $2x + 2y + z = 3$, orientada de forma que tiene una proyección en sentido contrario al de las agujas del reloj sobre el plano xy .

Solución \mathcal{C} es la frontera orientada de un disco elíptico \mathcal{S} que está en el plano $2x + 2y + z = 3$, y su proyección sobre el plano xy es el disco circular $R: x^2 + y^2 \leq 1$ (véase la Figura 16.16). Sobre \mathcal{S} tenemos

$$\hat{\mathbf{N}} dS = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy$$


Figura 16.16

Además,

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = 3(x^2 + y^2) \mathbf{k}$$

Entonces, por el Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \\ &= \iint_R 3(x^2 + y^2) \, dx \, dy = 2\pi \int_0^1 3r^2 r \, dr = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Como en el caso del Teorema de la Divergencia, la importancia principal del Teorema de Stokes es como herramienta teórica. Sin embargo, se puede utilizar también para simplificar el cálculo de integrales de circulación como la del ejemplo anterior. No es difícil imaginar integrales que serían imposibles de calcular sin el uso del Teorema de Stokes o del Teorema de la Divergencia. En el ejemplo que sigue utilizaremos el Teorema de Stokes dos veces, pero el resultado se podría haber obtenido también fácilmente utilizando el Teorema de la Divergencia.

Ejemplo 2 Calcule $I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$, donde \mathcal{S} es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ que está por encima del plano xy , $\hat{\mathbf{N}}$ es el campo unitario normal hacia fuera sobre \mathcal{S} , y

$$\mathbf{F} = y^2 \cos xz \mathbf{i} + x^3 e^{yz} \mathbf{j} - e^{-xyz} \mathbf{k}$$

Solución La frontera C de \mathcal{S} es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy , orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj vista desde el eje z positivo (véase la Figura 16.17). Esta curva es también la frontera orientada del disco plano $D: x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, con campo normal $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Por tanto, aplicando dos veces el Teorema de Stokes se obtiene

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Sobre D tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cos xz) \right) \Big|_{z=0} \\ &= 3x^2 - 2y \end{aligned}$$

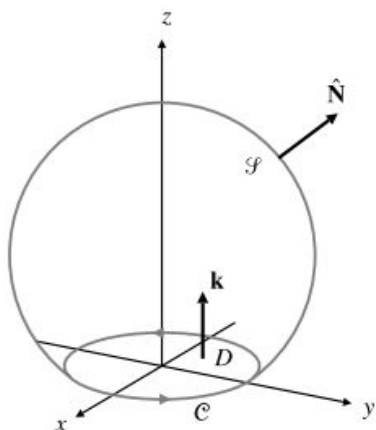


Figura 16.17 Parte de una esfera y un disco con la misma frontera.

Por simetría, $\iint_D y \, dA = 0$, por lo que

$$I = 3 \iint_D x^2 \, dA = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^2 r^3 \, dr = 12\pi$$

Observación Una superficie \mathcal{S} que cumpla las condiciones del Teorema de Stokes puede dejar de cumplirlas si se elimina un simple punto de ella. Un punto frontera aislado en una superficie no es una curva orientada, y por tanto el Teorema de Stokes puede fallar en este caso. Consideremos, por ejemplo, el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{\hat{\theta}}{r} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

que está definido en el *disco perforado* D que cumple $0 < x^2 + y^2 \leq a^2$ (véase el Ejemplo 3 de la Sección 16.3). Si D está orientada con normal \mathbf{k} hacia arriba, entonces su frontera está formada por la curva cerrada suave y orientada c dada por $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, y el punto aislado $(0, 0)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin \theta}{a} \mathbf{i} + \frac{\cos \theta}{a} \mathbf{j} \right) \cdot (-a \sin \theta \mathbf{i} + a \cos \theta \mathbf{j}) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

idénticamente sobre D . Por consiguiente,

$$\iint_D \mathbf{rot} \, \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0$$

y la conclusión del Teorema de Stokes no se cumple en este caso.

Ejercicios 16.5

1. Calcule $\oint_C xy dx + yz dy + zx dz$ por el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, con orientación en el sentido de las agujas del reloj vista desde el punto $(1, 1, 1)$.

2. Calcule $\oint_C y dx - x dy + z^2 dz$ por la curva C que es la intersección de los cilindros $z = y^2$ y $x^2 + y^2 = 4$, con orientación en sentido contrario al de las agujas del reloj desde un punto situado en el lado positivo del eje z .

3. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, siendo \mathcal{S} el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ con normal hacia fuera, y $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$.

4. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, siendo \mathcal{S} la superficie $x^2 + y^2 + 2(z - 1)^2 = 6$, $z \geq 0$, $\hat{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria hacia fuera (alejándose del origen) sobre \mathcal{S} , y $\mathbf{F} = (xz - y^3 \cos z)\mathbf{i} + x^3 e^z \mathbf{j} + xyz e^{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k}$

5. Utilice el Teorema de Stokes para demostrar que

$$\oint_C y dx + z dy + x dz = \sqrt{3} \pi a^2$$

siendo C la intersección orientada adecuadamente de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x + y + z = 0$.

6. Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por la curva

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sin 2t \mathbf{k}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

siendo

$$\mathbf{F} = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z \mathbf{k}$$

Sugerencia: Demuestre que C está sobre la superficie $z = 2xy$.

7. Calcule la circulación de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ por la frontera orientada de la parte del paraboloido $z = 9 - x^2 - y^2$ que está por encima del plano xy y tiene un campo normal apuntando hacia arriba.

8. Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo

$$\mathbf{F} = ye^x \mathbf{i} + (x^2 + e^x)\mathbf{j} + z^2 e^z \mathbf{k}$$

y C la curva

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (1 + \sin t)\mathbf{j} + (1 - \cos t - \sin t)\mathbf{k}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. *Sugerencia:* Utilice el Teorema de Stokes, observando que C está en un cierto plano y tiene una circunferencia como proyección sobre el plano xy . La integral también se puede calcular utilizando las técnicas de la Sección 15.4.

9. Sea C_1 la recta que une el punto $(-1, 0, 0)$ con el punto $(1, 0, 0)$, y sea C_2 la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $y \geq 0$. Sea \mathcal{S} una superficie suave que une C_1 con C_2 , con normal hacia arriba, y sea

$$\mathbf{F} = (\alpha x^2 - z)\mathbf{i} + (xy + y^3 + z)\mathbf{j} + \beta y^2(z + 1)\mathbf{k}$$

Calcule los valores de α y β para los que

$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es independiente de la elección de \mathcal{S} , y calcule el valor de I para estos valores de α y β .

10. Sea C la curva $(x - 1)^2 + 4y^2 = 16$, $2x + y + z = 3$, orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj cuando se observa desde un punto situado en la parte positiva del eje z . Sea

$$\mathbf{F} = (z^2 + y^2 + \sin x^2)\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}$$

Calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

11. Si C es la frontera orientada de la superficie \mathcal{S} , y ϕ y ψ son campos escalares suaves arbitrarios, demuestre que

$$\begin{aligned} \oint_C \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{r} &= - \oint_C \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \phi \times \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \end{aligned}$$

¿Es $\nabla \phi \times \nabla \psi$ solenoidal? Calcule un vector potencial de este campo.

12. Sea C una curva plana suave por tramos, cerrada y que no se corta a sí misma, que está en un plano con normal unitaria $\hat{\mathbf{N}} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y cuya orientación está heredada de la del plano. Demuestre que el área plana encerrada por C es

$$\frac{1}{2} \oint_C (bz - cy) dx + (cx - az) dy + (ay - bx) dz$$

13. Utilice el Teorema de Stokes para demostrar el Teorema 2 de la Sección 16.1.

16.6 Algunas aplicaciones en Física del cálculo vectorial

En esta sección mostraremos cómo se puede utilizar la teoría desarrollada en este capítulo para modelar problemas concretos de matemática aplicada. Consideraremos dos áreas de aplicación: dinámica de fluidos y electromagnetismo, y desarrollaremos algunas de las ecuaciones vectoriales fundamentales de estas disciplinas. Nuestro propósito es ilustrar las técnicas de cálculo vectorial en contextos aplicados, y no proporcionar introducciones completas, ni tan siquiera coherentes, a las propias disciplinas.

Dinámica de fluidos

Supongamos que una región del espacio tridimensional está llena con un fluido (líquido o gas) en movimiento. Se pueden utilizar dos enfoques para describir el movimiento. Podríamos intentar determinar la posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ en cualquier instante t , de una «partícula» de fluido localizada en el punto (a, b, c) en el instante $t = 0$. Éste es el enfoque de Lagrange. También, podríamos intentar determinar la velocidad, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, la densidad, $\delta(x, y, z, t)$ y otras variables físicas como la presión, $p(x, y, z, t)$, en cualquier instante t y en todo punto (x, y, z) de la región ocupada por el fluido. Éste es el enfoque de Euler.

Examinaremos el último método y describiremos cómo se puede utilizar el Teorema de la Divergencia para transformar algunas leyes físicas fundamentales en ecuaciones matemáticas equivalentes. Supondremos que la velocidad, la densidad y la presión varían de forma suave en todas sus variables y que el fluido es un *fluido ideal*, es decir, no viscoso (no se pega consigo mismo), homogéneo e isotrópico (tiene las mismas propiedades en todos los puntos y en todas las direcciones). Estas propiedades no son siempre las de los fluidos reales, por lo que estamos considerando un modelo matemático simplificado, que no siempre se corresponde exactamente con el comportamiento de los fluidos reales.

Consideremos una superficie cerrada imaginaria \mathcal{S} en el fluido, que limita a un dominio D . Podemos decir que \mathcal{S} es «imaginaria» porque no es una barrera que impida de modo alguno el flujo del fluido; es sólo una manera de centrar nuestra atención en una parte particular del fluido. Está fija en el espacio y no se mueve con el fluido. Supongamos que el fluido no se crea ni se destruye en ningún sitio (en particular, no hay fuentes ni sumideros), por lo que la **ley de conservación de masas** nos indica que la velocidad de cambio de la masa de fluido en D es igual a la velocidad a la que entra fluido a través de \mathcal{S} .

La masa de fluido en el elemento de volumen dV localizado en la posición (x, y, z) en el instante t es $\delta(x, y, z, t) dV$, por lo que la masa en D en el instante t es $\iiint_D \delta dV$. Esta masa cambia con una velocidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \delta dV = \iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t} dV$$

Como indicamos en la Sección 15.6, el volumen de fluido que *sale* de D a través del elemento de área dS situado en la posición (x, y, z) en el intervalo temporal que va desde t hasta $t + dt$ está dado por $\mathbf{v}(x, y, z, t) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS dt$, siendo $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria en (x, y, z) sobre \mathcal{S} que apunta hacia el exterior de D . Por tanto, la masa que cruza dS hacia el exterior en ese intervalo temporal es $\delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS dt$ y la *velocidad* a la que fluye la masa hacia el exterior desde D a través de \mathcal{S} en el instante t es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

La velocidad a la que fluye la masa hacia el *interior* de D es el negativo de la magnitud anterior. Como la masa se conserva, debe cumplirse

$$\iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t} dV = - \oiint_{\mathcal{S}} \delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = - \iiint_D \operatorname{div}(\delta \mathbf{v}) dV$$

donde hemos utilizado el Teorema de la Divergencia para sustituir la integral de superficie por una integral de volumen. Entonces,

$$\iiint_D \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{div}(\delta \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Esta ecuación debe cumplirse para *todo* dominio D en el fluido.

Si una función continua f cumple $\iiint_D f(P) dV = 0$ para todo dominio D , entonces $f(P) = 0$ en todos los puntos P , porque si hubiera un punto P_0 en el que $f(P_0) \neq 0$ (por ejemplo, $f(P_0) > 0$), entonces, por continuidad, f sería positiva en todos los puntos de alguna bola suficientemente pequeña B centrada en P_0 , y $\iiint_B f(P) dV$ sería mayor que 0. Aplicando este principio, debemos tener

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{div}(\delta \mathbf{v}) = 0$$

a través del fluido. Esta ecuación se denomina **ecuación de continuidad** del fluido. Es equivalente a la ley de conservación de masas. Obsérvese que, si el fluido es **incompresible**, entonces δ es constante, independientemente del tiempo y de la posición espacial. En este caso, $\partial \delta / \partial t = 0$ y $\mathbf{div}(\delta \mathbf{v}) = \delta \mathbf{div} \mathbf{v}$. Por tanto, la ecuación de continuidad en el caso de un fluido incompresible es simplemente

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0$$

El movimiento del fluido está gobernado por la Segunda Ley de Newton, que indica que la velocidad de cambio del momento de cualquier parte del fluido es igual a la suma de las fuerzas que se aplican a dicha parte. Consideremos de nuevo la parte del fluido contenida en un dominio D . En cualquier instante t su momento es $\iiint_D \delta \mathbf{v} dV$ y está cambiando con una velocidad

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{v}) dV$$

Este cambio es debido parcialmente al momento que cruza \mathcal{S} hacia el interior o el exterior de D (el momento del fluido que atraviesa \mathcal{S}), parcialmente a la presión ejercida sobre el fluido que hay en D por el fluido exterior, y parcialmente a fuerzas externas (como las fuerzas gravitatorias o electromagnéticas) que actúan sobre el fluido. Examinemos sucesivamente cada una de estas causas.

El momento se transfiere a D a través de \mathcal{S} con velocidad

$$- \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}) dS$$

La presión sobre el fluido en D es ejercida a través de \mathcal{S} en la dirección de la normal hacia el interior $-\hat{\mathbf{N}}$. Por tanto, esta parte de la fuerza sobre el fluido en D es

$$- \iint_{\mathcal{S}} p \hat{\mathbf{N}} dS$$

Las fuerzas externas que actúan se expresan mejor utilizando la *densidad de fuerza* (fuerza por unidad de masa), \mathbf{F} . El total de las fuerzas externas sobre el fluido es, por tanto,

$$\iiint_D \delta \mathbf{F} dV$$

Ahora, la Segunda Ley de Newton implica que

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{v}) dV = - \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} (\delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}) dS - \oiint_{\mathcal{S}} p \hat{\mathbf{N}} dS + \iiint_D \delta \mathbf{F} dV$$

De nuevo, es conveniente transformar las integrales de superficie en integrales triples sobre D . Si utilizamos los resultados del Ejercicio 29 de la Sección 16.4 y del Ejercicio 2 posterior, tenemos

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} p \hat{\mathbf{N}} dS &= \iiint_D \nabla p dV \\ \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} (\delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}) dS &= \iiint_D (\delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} (\delta \mathbf{v})) dV \end{aligned}$$

De acuerdo con esto,

$$\iiint_D \left(\delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} (\delta \mathbf{v}) + \delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \delta \mathbf{F} \right) dV = \mathbf{0}$$

Los términos segundo y tercero del integrando se cancelan en virtud de la ecuación de continuidad. Como D es arbitrario, debemos tener, por tanto,

$$\delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p + \delta \mathbf{F}$$

Ésta es la **ecuación del movimiento** del fluido. Obsérvese que no es una ecuación diferencial *lineal* en derivadas parciales, ya que el segundo término de la izquierda no es lineal en \mathbf{v} .

Electromagnetismo

En el espacio tridimensional se definen dos campos vectoriales que determinan las fuerzas eléctricas y magnéticas experimentadas por una carga unidad en un punto concreto si dicha carga se mueve con velocidad unidad. Estos campos vectoriales se encuentran determinados por las cargas y corrientes eléctricas presentes en el espacio. Una carga q_0 en la posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ que se mueve con velocidad \mathbf{v}_0 experimenta una fuerza eléctrica $q_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$, siendo \mathbf{E} el **campo eléctrico**, y una fuerza magnética $\mu_0 q_0 \mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$, siendo \mathbf{H} el **campo magnético** y $\mu_0 \approx 1.26 \times 10^{-6}$ N/amperio² una constante física denominada **permeabilidad del espacio libre**. Examinaremos brevemente estos campos, aunque inicialmente sólo consideraremos situaciones *estáticas*. Los campos eléctricos producidos por distribuciones estáticas de carga y los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas estáticas no dependen del tiempo. Posteriormente consideraremos la interacción entre los dos campos cuando varían con el tiempo.

Electrostática

La evidencia experimental muestra que el valor del campo eléctrico en un punto \mathbf{r} es el vector suma de los campos causados por los elementos de carga situados en el espacio tridimensional. Una «carga puntual» q situada en la posición $\mathbf{s} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$ genera el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad (\text{Ley de Coulomb})$$

siendo $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$ culombios²/N·m² una constante física denominada **permisividad del espacio libre**. Éste es exactamente el campo debido a una fuente puntual de fuerza $q/4\pi\epsilon_0$ situada en \mathbf{s} . Excepto en $\mathbf{r} = \mathbf{s}$, el campo es conservativo, y su potencial es

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$$

por lo que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ tenemos $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Además $\text{div } \mathbf{E} = 0$, excepto en $\mathbf{r} = \mathbf{s}$, donde es infinita; en términos de la distribución de Dirac, $\text{div } \mathbf{E} = (q/\epsilon_0)\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta)$ (véase la Sección 16.1). El flujo de \mathbf{E} hacia el exterior a través de la superficie \mathcal{S} de cualquier región R que contenga a q es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

por analogía con el Ejemplo 4 de la Sección 16.4.

Dada una *distribución de carga* de densidad $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ en el espacio tridimensional (de forma que la carga en el elemento de volumen $dV = d\xi d\eta d\zeta$ en \mathbf{s} es $dq = \rho dV$), el flujo de \mathbf{E} hacia el exterior de \mathcal{S} debido a la carga en R es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_R dq = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_R \rho dV$$

Si aplicamos el Teorema de la Divergencia a la integral de superficie, obtenemos

$$\iiint_R \left(\text{div } \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

y como R es una región arbitraria,

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ésta es la forma diferencial de la Ley de Gauss (véase el Ejercicio 3 posterior).

El potencial debido a la distribución de carga de densidad $\rho(\mathbf{s})$ en la región R es

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_R \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} dV \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_R \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \end{aligned}$$

Si ρ es continua y se anula en el exterior de una región acotada, la integral triple converge en todas partes (véase el Ejercicio 4 posterior), por lo que $\mathbf{E} = \nabla\phi$ es conservativo en el espacio tridimensional. Por tanto, en todos los puntos,

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Como $\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \nabla\phi = \nabla^2\phi$, el potencial ϕ satisface la **Ecuación de Poisson**.

$$\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En particular, ϕ es armónico en las regiones del espacio donde no haya distribuciones de carga.

Magnetostática

Los campos magnéticos están producidos por cargas en movimiento, es decir, por corrientes. Supongamos que una corriente eléctrica constante, I , fluye por un filamento siguiendo la curva \mathcal{F} . Se ha determinado experimentalmente que los campos magnéticos producidos en la posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ por los elementos de corriente $d\mathbf{l} = I d\mathbf{s}$ a lo largo del filamento se suman vectorialmente y que un elemento situado en la posición $\mathbf{s} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$ produce el campo

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad (\text{Ley de Biot-Savart})$$

siendo $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{T}} ds$, y $\hat{\mathbf{T}}$ la tangente unitaria a \mathcal{F} en la dirección de la corriente. Partiendo del supuesto razonable de que la carga no se crea ni se destruye en ninguna parte, el filamento \mathcal{F} debe formar un circuito cerrado, y el campo magnético total en \mathbf{r} debido a la corriente que circula por el circuito es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

Sea \mathbf{A} el campo vectorial definido por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}} \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$$

para todo \mathbf{r} no perteneciente al filamento \mathcal{F} . Si utilizamos el hecho de que

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \right) = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

y la identidad vectorial $\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi (\nabla \times \mathbf{F})$ (siendo \mathbf{F} el vector $d\mathbf{s}$, que no depende de \mathbf{r}), podemos calcular el rotacional de \mathbf{A} :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{I}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \right) \times d\mathbf{s} = \frac{I}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \times d\mathbf{s} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

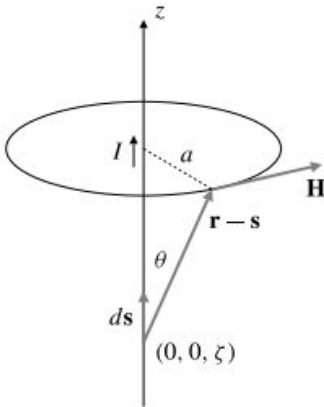
Por tanto, \mathbf{A} es un potencial vector de \mathbf{H} , y $\text{div } \mathbf{H} = 0$ en los puntos que no pertenecen al filamento. También podemos verificar esto calculando que $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ en el exterior del filamento (véanse los Ejercicios 9-11 posteriores).

Imaginemos un circuito formado por un filamento recto a lo largo del eje z que se extiende una distancia infinita. El campo \mathbf{H} en un punto finito será entonces el debido a la corriente que circula por el eje z , donde podemos suponer que dicha corriente I fluye en la dirección de \mathbf{k} . Las corrientes de todos los elementos $d\mathbf{s}$ producen, en \mathbf{r} , campos en la misma dirección, normales al plano que contiene a \mathbf{r} y al eje z (véase la Figura 16.18). Por tanto, la intensidad del campo $H = |\mathbf{H}|$ a una distancia a del eje z se obtiene integrando los elementos

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\text{sen } \theta d\zeta}{a^2 + (\zeta - z)^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{a d\zeta}{(a^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{Ia}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(a^2 + (\zeta - z)^2)^{3/2}} \quad (\text{sea } \zeta - z = a \tan \phi) \\ &= \frac{I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{I}{2\pi a} \end{aligned}$$


Figura 16.18

Las líneas de campo de \mathbf{H} son evidentemente circunferencias horizontales centradas en el eje z . Si c_a es una de estas circunferencias de radio a , entonces la circulación de \mathbf{H} por c_a es

$$\oint_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi a} 2\pi a = I$$

Obsérvese que la circulación calculada anteriormente es independiente de a . De hecho, si c es cualquier curva cerrada que encierre una sola vez al eje z , en sentido contrario al de las agujas del reloj (vista desde arriba), entonces c y $-c_a$ forman la frontera orientada de una superficie con forma de anillo \mathcal{S} con un hueco por el que pasa el filamento. Como $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ sobre \mathcal{S} , el Teorema de Stokes garantiza que

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I$$

Además, cuando c es muy pequeña (y, por tanto, muy cercana al filamento), la mayor parte de la contribución a la circulación de \mathbf{H} por la curva proviene de la parte del filamento que está muy cercana a c . No importa, por tanto, si el filamento es recto ni infinitamente largo. En cualquier filamento que forme un circuito cerrado por el que circule una corriente, la circulación del campo magnético por la frontera orientada de una superficie a través de la cual pase el filamento es igual a la corriente que fluye por el circuito. Ésta es la **Ley Circuital de Ampère**. La superficie está orientada de forma que su normal apunta en el sentido en el que circula la corriente.

Sustituyamos ahora el filamento por una corriente más general especificada por un vector densidad \mathbf{J} . Esto significa que en cualquier punto \mathbf{s} la corriente fluye en la dirección $\mathbf{J}(\mathbf{s})$, y que la corriente que atraviesa un elemento de área dS con normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ es $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$. La circulación de \mathbf{H} por la frontera c de la superficie \mathcal{S} es igual a la corriente total que circula a través de \mathcal{S} ; por tanto,

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Utilizando el Teorema de Stokes, podemos sustituir la integral sobre la curva por otra integral de superficie, y obtener así

$$\iint_{\mathcal{S}} (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{J}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0$$

Como \mathcal{S} es arbitraria, debemos tener, en todos los puntos,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

que es la versión de puntos de la Ley Circuital de Ampère. Se puede comprobar fácilmente que si

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} dV$$

entonces $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ (de forma que \mathbf{A} es un vector potencial del campo magnético \mathbf{H}). En este caso, R es la región del espacio tridimensional donde \mathbf{J} es distinto de cero. Si \mathbf{J} es continuo y se anula en el exterior de un conjunto acotado, entonces la integral triple converge para todo \mathbf{r} (véase el Ejercicio 4 posterior), y \mathbf{H} es solenoidal en todas partes:

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

Ecuaciones de Maxwell

Las cuatro ecuaciones obtenidas anteriormente para campos eléctricos y magnéticos estáticos,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= \mathbf{0} & \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

requieren alguna modificación si los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} varían con el tiempo. La Ley de Gauss $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ sigue siendo válida, y también $\text{div } \mathbf{H} = 0$, que expresa el hecho de que no hay fuentes ni sumideros magnéticos conocidos (es decir, monopolos magnéticos). Las líneas de campo de \mathbf{H} deben ser curvas cerradas.

Michael Faraday observó que la circulación de un campo eléctrico por una curva cerrada simple \mathcal{C} corresponde a un cambio en el flujo magnético

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

a través de cualquier superficie orientada a \mathcal{S} con frontera \mathcal{C} , de acuerdo con la fórmula

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Aplicando el Teorema de Stokes a la integral sobre la curva, se obtiene

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = -\mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Como \mathcal{S} es arbitraria, se obtiene la forma diferencial de la Ley de Faraday:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

El campo eléctrico es irrotacional sólo si el campo magnético es constante con el tiempo.

La forma diferencial de la Ley de Ampère, $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, también requiere modificación. Si el campo eléctrico depende del tiempo, entonces también lo hará la densidad de corriente \mathbf{J} . Suponiendo conservación de la carga (es decir que las cargas no se producen ni se destruyen), podemos demostrar, mediante un argumento idéntico al utilizado anteriormente en esta sección para obtener la ecuación de continuidad del movimiento de fluidos, que la velocidad de cambio de la densidad de carga cumple

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J}$$

Véase el Ejercicio 5 posterior. Esto es incongruente con la Ley de Ampère porque $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$, mientras que $\text{div } \mathbf{J} \neq 0$ cuando ρ depende del tiempo. Nótese, sin embargo, que $\rho = \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}$ implica que

$$-\text{div } \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \text{div } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

por lo que $\text{div } (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t) = 0$. Esto sugiere que, en el caso no estático, la ley de Ampère se convierte en

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

que indica (tal como descubrió Maxwell) que los campos magnéticos no sólo son producidos por corrientes, sino también por campos eléctricos variantes.

El conjunto de las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

se conoce con el nombre de **ecuaciones de Maxwell**. Gobiernan la forma en que la presencia de cargas y corrientes en el espacio tridimensional produce campos eléctricos y magnéticos.

Ejercicios 16.6

1. (**Principio de Arquímedes**) Un sólido que ocupa una región R con superficie \mathcal{S} se sumerge en un líquido de densidad constante δ . La presión del líquido a una profundidad h es δgh , por lo que la presión cumple $\nabla p = \delta \mathbf{g}$, siendo \mathbf{g} la aceleración (vector) constante ante la gravedad. La presión del fluido ejerce en cada elemento de superficie dS de \mathcal{S} una fuerza $-p \hat{\mathbf{N}} dS$ sobre el sólido.

- (a) Demuestre que la «fuerza de flotabilidad» sobre el sólido es

$$\mathbf{B} = - \iiint_R \delta \mathbf{g} dV$$

Por tanto, la fuerza de flotabilidad tiene el mismo módulo, y dirección opuesta, que el peso del líquido desplazado por el sólido. Éste es el principio de Arquímedes.

- (b) Amplíe el resultado anterior al caso en que el sólido está sólo parcialmente sumergido en el fluido.
2. Descomponiendo el vector $\mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}})$ en sus componentes y aplicando el Teorema de la Divergencia a cada una de ellas por separado, demuestre que

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}}) dS = \iiint_D (\mathbf{F} \text{div } \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F}) dV$$

siendo $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia el exterior de la superficie \mathcal{S} del dominio D .

3. (**Ley de Gauss**) Demuestre que el flujo del campo eléctrico \mathbf{E} hacia el exterior a través de una superficie cerrada \mathcal{S} en el espacio tridimensional es $1/\epsilon_0$ multiplicado por la carga total encerrada por \mathcal{S} .

4. Si $\mathbf{s} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$ y $f(\xi, \eta, \zeta)$ es continuo en \mathbb{R}^3 , y se anula en el exterior de una región acotada, demuestre que, para todo \mathbf{r} fijo,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\xi, \eta, \zeta)|}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} d\xi d\eta d\zeta \leq \text{constante}$$

Esto demuestra que los potenciales de los campos eléctricos y magnéticos correspondientes a densidades de carga y corriente continua que se anulan en el exterior de regiones acotadas existen en todos los puntos de \mathbb{R}^3 . *Sugerencia:* Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, y utilizar coordenadas esféricas.

5. La densidad de carga eléctrica, ρ , en el espacio tridimensional depende del tiempo y de la posición si la carga está en movimiento. Dicho movimiento se describe mediante la densidad de corriente \mathbf{J} . Obtenga la **ecuación de continuidad**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J}$$

a partir del hecho de que la carga se conserva.

6. Si \mathbf{b} es un vector constante, demuestre que

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right) = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3}$$

7. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes, demuestre que, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{b}$,

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3} \right) = 0$$

Sugerencia: Utilice las identidades (d) y (h) del Teorema 3 de la Sección 16.2.

8. Utilice el resultado del Ejercicio 7 para ofrecer una demostración alternativa de que

$$\operatorname{div} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = 0$$

Nótese que div se refiere a la variable \mathbf{r} .

9. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes, demuestre que, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{b}$,

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3} \right) = - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b}}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|^3}$$

Sugerencia: Utilice la identidad (e) del Teorema 3 de la Sección 16.2.

10. Si \mathbf{F} es cualquier campo vectorial suave, demuestre que

$$\oint_{\mathcal{C}} (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{s}) = 0$$

por cualquier curva cerrada a \mathcal{C} . *Sugerencia:* Los gradientes de las componentes de \mathbf{F} son conservativos.

11. Verifique que si \mathbf{r} no está en \mathcal{C} , entonces

$$\operatorname{rot} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = \mathbf{0}$$

En este caso, rot se toma con respecto a la variable \mathbf{r} .

12. Verifique la fórmula $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$, siendo \mathbf{A} el potencial vector magnético definido en función de la densidad de corriente en estado estacionario \mathbf{J} .

13. Si \mathbf{A} es el potencial vector del campo magnético producido por una densidad de corriente estacionaria en un filamento cerrado, demuestre que en el exterior del filamento $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

14. Si \mathbf{A} es el potencial vector del campo magnético producido por una densidad de corriente continua en estado estacionario, demuestre que $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ en todas partes. A partir de aquí, demuestre que \mathbf{A} cumple la ecuación vectorial de Poisson $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$.

15. Demuestre que en una región del espacio que no contenga cargas ($\rho = 0$) y sin corrientes ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$), tanto $\mathbf{U} = \mathbf{E}$ como $\mathbf{U} = \mathbf{H}$ satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{U}$$

siendo $c = \sqrt{1/(\epsilon_0 \mu_0)} \approx 3 \times 10^8$ m/s.

*16. **(Flujo de calor en el espacio tridimensional)** El calor contenido en un elemento de volumen dV dentro de un sólido homogéneo es $\delta c T dV$, siendo δ y c constantes (la densidad y el calor específico del material sólido), y $T = T(x, y, z, t)$ la temperatura en el instante t en la posición (x, y, z) en el sólido. El calor siempre fluye en la dirección del gradiente de temperatura negativo, con una velocidad proporcional al tamaño de dicho gradiente. Por tanto, la velocidad de flujo de la energía calorífica a través del elemento de superficie dS con normal $\hat{\mathbf{N}}$ es $-k \nabla T \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, siendo k también una constante que depende del material del sólido (el coeficiente de conductividad térmica). Utilice «la conservación de la energía calorífica» para demostrar que para cualquier región R con superficie \mathcal{S} dentro del sólido

$$\delta c \iiint_R \frac{\partial T}{\partial t} dV = k \iint_{\mathcal{S}} \nabla T \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

siendo $\hat{\mathbf{N}}$ la normal unitaria hacia el exterior sobre \mathcal{S} . A partir de aquí, demuestre que el flujo de calor dentro del sólido está gobernado por la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\delta c} \nabla^2 T = \frac{k}{\delta c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

16.7 Coordenadas curvilíneas ortogonales

En esta sección opcional, obtendremos fórmulas del gradiente de un campo escalar y de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial en términos de sistemas de coordenadas más generales que el sistema de coordenadas cartesianas utilizado en las secciones anteriores de este capítulo. En particular, expresaremos estas magnitudes en términos de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas presentados en la Sección 14.6.