I Compendi OpenSource

di Giacomo Marciani

Analisi Matematica

Teoria, Formulario e Suggerimenti Pratici

dalle dispense del professor Roberto Tauraso

Foglio di esercizi N. 1

7 ottobre 2005

1. Rappresentare l'insieme
$$A = \left\{ \frac{3}{2 - 3^{1/x}} : x < 0 \right\}$$
come un intervallo o come unione di intervalli. Determinare inf/sup e min/max (se esistono).

2. Rappresentare l'insieme
$$A = \left\{ (\cos x)^2 : \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$
come un intervallo o come unione di intervalli. Determinare inf/sup e min/max (se esistono).

3. Rappresentare l'insieme
$$A = \{ 4^x - 2^{x+1} + 1 : x > \log_2 3 \}$$
come un intervallo o come unione di intervalli. Determinare inf/sup e min/max (se esistono).

4. Rappresentare il dominio della funzione
$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{x^2}$$
come un intervallo o come unione di intervalli.

5. Rappresentare il dominio della funzione
$$f(x) = \frac{\arcsin\left(x + \frac{1}{5}\right)}{\arccos\left(\frac{1}{3} - x\right)}$$
come un intervallo o come unione di intervalli. (ricordare che arcsin è la *funzione inversa* di $\sin x$ su $[-\pi/2, \pi/2]$ ed il suo dominio è $[-1, 1]$, arccos è la *funzione inversa* di $\cos x$ su $[0, \pi]$ ed il suo dominio è sempre $[-1, 1]$).

6. Disegnare i grafici delle funzioni
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x^2 - 2| & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ |x| + 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Foglio di esercizi N. 1 - Soluzioni

7 ottobre 2005

1. Dato che $x < 0 \Longleftrightarrow 1/x < 0$

$$A = \left\{\frac{3}{2 - 3^{1/x}} : x < 0\right\} = \left\{\frac{3}{2 - 3^{1/x}} : \frac{1}{x} < 0\right\} = \left\{\frac{3}{2 - 3^{y}} : y < 0\right\}$$

Dato che $\{3^y : y < 0\} = (0, 1)$ (per convincersi dare un'occhiata al grafico di 3^x) si ha

$$A = \left\{\frac{3}{2 - z} : 0 < z < 1\right\}$$

Dato che $\{2 - z : 0 < z < 1\} = (1, 2)$, si ha

$$A = \left\{\frac{3}{w} : 1 < w < 2\right\} = \left(\frac{3}{2}, 3\right);$$

quindi $\inf A = \frac{3}{2}$, $\sup A = 3$ ma non esistono min/max.

2. Dato che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π basta studiare l'insieme A per $-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; ovvero

$$A = \left\{(\cos x)^2 : -\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Si ha

$$\left\{x : -\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right],$$

quindi

$$A = \left\{(\cos x)^2 : x \in \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right]\right\}.$$

Dato che

$$\left\{\cos x : x \in \left[-\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right]\right\} = [-1, 1],$$

si ha

$$A = \{y^2 : y \in [-1, 1]\} = [0, 1],$$

per cui $\min A = \inf A = 0$ e $\sup A = \max A = 1$.

3. Dato che $x > \log_2 3 \Longleftrightarrow 2^x > 3$ si ha

$$A = \{4^x - 2^{x+1} + 1 : 2^x > 3\} = \{(2^x)^2 - 2\,2^x + 1 : 2^x > 3\} = \{z^2 - 2z + 1 : z > 3\}.$$

Quindi $A = (4, +\infty)$ (per convincersene, disegnare la parabola $y = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$, oppure scrivere $A = \{(z-1)^2 : z > 3\} = \{w^2 : w > 2\}$. Quindi $\inf A = 4$, $\sup A = +\infty$ ma non esistono min/max.

4. Deve essere

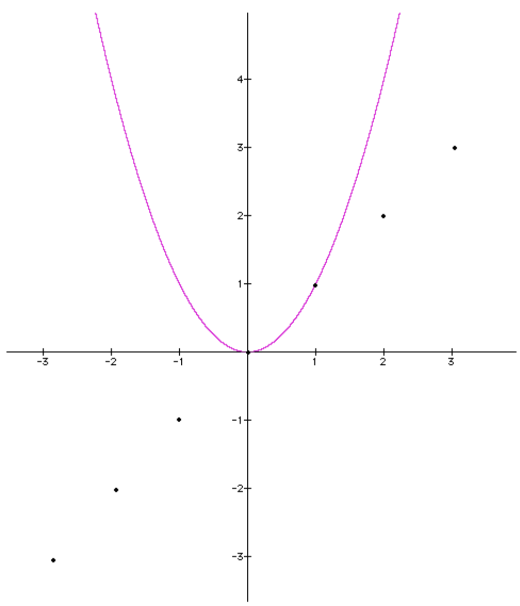
$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^2 \neq 0, \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

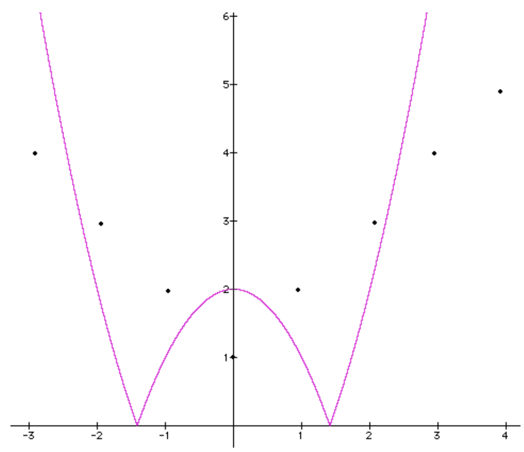
Il dominio è quindi $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

5. Deve essere (bisogna ricordarsi che $\arccos y = 0 \iff y = \cos 0 = 1$)

$$\begin{cases} -1 \leq x + \frac{1}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{3} - x < 1 \end{cases}, \text{ ovvero} \quad \begin{cases} -\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{3} < -x \leq \frac{4}{3}, \end{cases}, \text{ ovvero} \quad x \in \Big[-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\Big] \cap \Big(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\Big] = \Big(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\Big].$$

6. I grafici sono quelli di x^2 e $|x^2 - 2|$ rispettivamente, modificati per $x \in \mathbb{Z}$:





Foglio di esercizi N. 2

1. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{n! - 4^n}{3^n - n^n}.$$

2. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{2^n + n!}{3^n + n^7}.$$

3. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{ne^{n^2} + n^2}{n^2 e^n + n^3}.$$

4. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{5^n + n}{2^n - n} - \frac{5^n - n}{2^n + n}\Big).$$

5. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{4^n + n}{2^n - n} - \frac{4^n - n}{2^n + n}\Big).$$

6. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{(n+1)! - 2^n}{(2n - \sin n)\, n!}.$$

7. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{n!\,(1+n)^n + (n-1)!(1+n)\,n^n}{n!\,n^n}.$$

8. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{n! - (4n)^n}{4n - n^{3n}}.$$

9. Calcolare il limite
$$\lim_n \frac{(4-n)^7 + n^7}{(4-n)^6 + n^6}.$$

Foglio di esercizi N. 2

Nei seguenti limiti bisogna ricordare che (se $a > 1$ e $\alpha > 0$)

$$1 << \log_a n << n^\alpha << a^n << n! << n^n,$$

e che la relazione $<<$ è transitiva, ovvero: se $a_n << b_n$ e $b_n << c_n$ allora $a_n << c_n$ (e quindi $n^\alpha << n!$, $1 << a^n$, ecc.).

La "strategia" è quindi di vedere quali sono i termini "dominanti" al numeratore e al denominatore (ovvero quelli che sono $>>$ degli altri). Una volta individuati questi termini, gli altri si possono trascurare.

1. $\displaystyle \lim_n \frac{n! - 4^n}{3^n - n^n} = \lim_n \frac{n!(1 - \frac{4^n}{n!})}{n^n(\frac{3^n}{n^n} - 1)} = -\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0.$

2. $\displaystyle \lim_n \frac{2^n + n!}{3^n + n^7} = \lim_n \frac{n!(1 + \frac{2^n}{n!})}{3^n(1 + \frac{n^7}{3^n})} = \lim_n \frac{n!}{3^n} = +\infty.$

3. $\displaystyle \lim_n \frac{ne^{n^2} + n^2}{n^2 e^n + n^3} = \lim_n \frac{ne^{n^2}(1 + \frac{n}{e^{n^2}})}{n^2 e^n (1 + \frac{n}{e^n})} = \lim_n \frac{e^{n^2-n}}{n} = +\infty.$

L'ultimo limite può essere spiegato con il teorema del confronto: se $n \geq 2$ allora $n^2 - n \geq n$ per cui $e^{n^2-n} \geq e^n$, dunque $\displaystyle \frac{e^{n^2-n}}{n} \geq \frac{e^n}{n}$, e quest'ultima successione tende a $+\infty$.

4. $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{5^n + n}{2^n - n} - \frac{5^n - n}{2^n + n}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{(5^n + n)(2^n + n) - (5^n - n)(2^n - n)}{(2^n - n)(2^n + n)}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{2n5^n + 2n2^n}{4^n - n^2}\Big)$
$\displaystyle = \lim_n 2\,\frac{5^n + 2^n}{4^n - n^2} = \lim_n 2\,\frac{5^n}{4^n} = \lim_n 2\left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty.$

L'ultimo termine tende a $+\infty$ perche' la base $\frac{5}{4}$ è maggiore di 1.

5. $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{4^n + n}{2^n - n} - \frac{4^n - n}{2^n + n}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{(4^n + n)(2^n + n) - (4^n - n)(2^n - n)}{(2^n - n)(2^n + n)}\Big) = \lim_n \frac{1}{n}\Big(\frac{2n4^n + 2n2^n}{4^n - n^2}\Big)$
$\displaystyle = \lim_n 2\,\frac{4^n + 2^n}{4^n - n^2} = \lim_n 2\,\frac{4^n}{4^n} = 2.$

6. In questo esercizio bisogna usare la definizione di $n!$ e calcolare il limite $\lim_n \dfrac{\sin n}{n} = 0$ (gia' fatto a lezione). Si ha allora

$$\lim_n \frac{(n+1)! - 2^n}{(2n - \sin n)\, n!} = \lim_n \frac{(n+1)!(1 - \frac{2^n}{(n+1)!})}{n(2 - \frac{\sin n}{n})\, n!} = \lim_n \frac{(n+1)!}{2n\, n!} = \lim_n \frac{n!(n+1)}{2n\, n!} = \lim_n \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

7. $$\lim_n \frac{n!\,(1+n)^n + (n-1)!(1+n)\, n^n}{n!\, n^n} = \lim_n \Big(\frac{n!\,(1+n)^n}{n!\, n^n} + \frac{(n-1)!(1+n)\, n^n}{n!\, n^n} \Big)$$

$$= \lim_n \Big(\frac{(1+n)^n}{n^n} + \frac{(n-1)!(1+n)}{(n-1)!n} \Big) = \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n + \lim_n \frac{1+n}{n} = e + 1.$$

Qui abbiamo usato il limite fondamentale $\lim_n (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

8. $$\lim_n \frac{n! - (4n)^n}{4n - n^{3n}} = \lim_n \frac{n! - 4^n\, n^n}{4n - n^{3n}} = \lim_n \frac{4^n\, n^n (\frac{n!}{4^n\, n^n} - 1)}{n^{3n}(\frac{4n}{n^{3n}} - 1)} = \lim_n \frac{4^n\, n^n}{n^{3n}} = \lim_n \frac{4^n}{n^{2n}} = 0.$$

9. Questo è un quoziente di polinomi. Dobbiamo veder quali sono i termini di grado massimo di numeratore e denominatore.

Usando la formula di Newton si ha

$$(4-n)^7 = 4^7 + 7(-n)4^6 + \cdots + 7 \cdot 4(-n)^6 + (-n)^7 = 4^7 - 7n4^6 + \cdots + 28n^6 - n^7,$$

per cui il termine di grado massimo di $(4-n)^7 + n^7$ è $28n^6$.

Allo stesso modo, usando la formula di Newton si ha

$$(4-n)^6 = 4^6 + 6(-n)4^5 + \cdots + 6 \cdot 4(-n)^5 + (-n)^6 = 4^6 - 6n4^5 + \cdots - 24n^5 + n^6,$$

per cui il termine di grado massimo di $(4-n)^6 + n^6$ è $2n^6$. Dunque

$$\lim_n \frac{(4-n)^7 + n^7}{(4-n)^6 + n^6} = \frac{28}{2} = 14.$$

Foglio di esercizi N. 3

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left|x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x| - 3x)\right|}{x}.$$

3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^4 + 2x + 1}{x^4 + x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

4. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x - e^{x\log x} + 5x^2}{x^2 + x\sin x^3}.$$

5. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{|x|} + |x|)|x+1|}{x}$$

6. Dare un esempio di una successione $\{a_n\}$ che ammette una sottosuccessione strettamente crescente con limite 3 e una sottosuccessione positivamente divergente.

7. Dare un esempio di una successione $\{a_n\}$ che ammette una sottosuccessione strettamente decrescente con limite 3 e una sottosuccessione convergente a -3 ma non monotona.

8. Dare un esempio di una successione $\{a_n\}$ che ammette tre sottosuccessioni convergenti a 0, 2 e -2 rispettivamente.

Foglio di esercizi N. 3

1. Con il linguaggio degli "o-piccolo": per $x \to 0$

$$2^x = 1 + x\log 2 + o(x), \qquad 3^x = 1 + x\log 3 + o(x),$$

quindi

$$2^x - 3^x = (\log 2 - \log 3)x + o(x).$$

Dato che

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1,$$

si ha

$$-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x,$$

e quindi (per il teorema dei due carabinieri)

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

ovvero

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(1), \qquad x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x).$$

Dunque

$$2^x + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x\log 2 + o(x) + o(x) = 1 + x\log 2 + o(x),$$

e, ricordandosi che $\log(1+y) = y + o(y)$,

$$\log\left(2^x + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \log(1 + x\log 2 + o(x)) = x\log 2 + o(x) + o(x\log 2 + o(x)) = x\log 2 + o(x).$$

Dunque

$$\frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{(\log 2 - \log 3)x + o(x)}{x\log 2 + o(x)},$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 2}.$$

Con i limiti fondamentali: bisogna usare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log a, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Per usare il secondo con $1+y = 2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (notare che $y \to 0$ se $x \to 0$), moltiplichiamo e dividiamo per $y = 2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1$, ovvero scriviamo

$$\frac{2^x - 3^x}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \cdot \frac{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\log\left(2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

Il secondo fattore è della forma $y/\log(1+y)$ e quindi tende ad 1. Dobbiamo quindi calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1}.$$

Per usare i limiti fondamentali, scriviamo

$$\frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1} = \frac{(2^x - 1) - (3^x - 1)}{(2^x - 1) + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x}}{\frac{2^x-1}{x} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{2^x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x}}{\frac{2^x-1}{x}} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 2}$$

per il primo dei limiti fondamentali ricordati sopra.

2. Cominciamo con notare che per $x < 0$ si ha $x = -|x|$, per cui il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left|x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x| - 3x)\right|}{-|x|} = -\lim_{x\to 0^-} \left|\frac{x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x| - 3x)}{x}\right|$$

$$= -\left|\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x| - 3x)}{x}\right|.$$

Dunque bisogna calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{|x-3|} - \sin(|x| - 3x)}{x}.$$

Il risultato sara' $-|L|$. Eliminiamo i moduli: per $x < 0$ si ha $|x-3| = 3-x$ e $|x| = -x$. Il limite diventa

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{3-x} - \sin(-4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{3-x} - \frac{\sin(-4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{3-x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin(-4x)}{x} = \sqrt{3} + 4.$$

Dunque il risultato è $-\sqrt{3} - 4$.

3. Semplifichiamo prima la funzione razionale:

$$\frac{2x^4 + 2x + 1}{x^4 + x} = 2 + \frac{1}{x^4 + x}.$$

Il limite diventa allora

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(2+\frac{1}{x^4+x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\Big)=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}$$

$$=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=2+\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=2-1=1.$$

4. Dato che $x^x=e^{x\log x}$ il limite è

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2+x\sin x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2+x^4\cdot\frac{\sin x^3}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2+o(x^2)}=5.$$

5. Per $x>0$ si ha $|x|=x$ e $|x+1|=x+1$, per cui il limite è

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x}+x)(x+1)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}+1=+\infty.$$

6. Per esempio

$$a_n=\begin{cases}3-\dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari}\\ n & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

7. Per esempio

$$a_n=\begin{cases}-3+\dfrac{(-1)^k}{k} & \text{se } n=2k \text{ con } k\in\mathbb{N}\\ 3+\dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

8. Per esempio

$$a_n=\begin{cases}2 & \text{se } n=0,3,6,\dots \text{ (oppure: se } n=3k \text{ con } k\in\mathbb{N})\\ -2 & \text{se } n=1,4,7,\dots \text{ (oppure: se } n=3k+1 \text{ con } k\in\mathbb{N})\\ 0 & \text{se } n=2,5,8,\dots \text{ (oppure: se } n=3k+2 \text{ con } k\in\mathbb{N})\end{cases}$$

Foglio di esercizi N. 4

Calcolare le seguenti rette tangenti

1. La retta tangente a $f(x) = \log(2x-1) + (x-1)\log x$ in $x = 1$.

2. La retta tangente a $f(x) = e^{2e^{-x}}$ in $x = 0$.

3. La retta tangente a $f(x) = 4 + (2-x)\log(2e^{x-2} - 1)$ in $x = 2$.

Determinare i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni, indicandone il loro tipo di non derivabilità.

4. $f(x) = \sqrt{|e^{x^2} - e|}\,\sqrt{|x^2 - 1|}$.

5. $f(x) = |x|\sqrt{|x^2 - x|}$.

6. $f(x) = |x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)$.

Foglio di esercizi N. 4

Bisogna ricordare che la retta tangente a f in x_0 è data dall'equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. Se $f(x) = \log(2x-1) + (x-1)\log x$ e $x_0 = 1$, abbiamo $f(1) = 0$, e

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} + \log x + (x-1)\frac{1}{x}.$$

Quindi $f'(1) = 2$ e la retta tangente è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 2(x-1) = 2x - 2.$$

2. Se $f(x) = e^{2e^{-x}}$ e $x_0 = 0$, abbiamo $f(0) = e^2$, e

$$f'(x) = e^{2e^{-x}} D(2e^{-x}) = -e^{2e^{-x}} 2e^{-x}.$$

Quindi $f'(0) = -2e^2$ e la retta tangente è

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = e^2 - 2e^2 x.$$

3. Se $f(x) = 4 + (2-x)\log(2e^{x-2} - 1)$ e $x_0 = 2$, abbiamo $f(2) = 4$, e

$$f'(x) = -\log(2e^{x-2} - 1) + (2-x)\frac{2e^{x-2}}{2e^{x-2} - 1}.$$

Quindi $f'(2) = 0$ e la retta tangente è

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 4.$$

Nelle seguenti funzioni f troviamo le funzioni modulo e radice quadrata del modulo, che non sono derivabili in 0, quindi bisogna andare a cercare i punti di discontinuità tra i valori che annullano l'argomento di queste due funzioni.

4. Se $f(x) = \sqrt{|e^{x^2} - e|}\,\sqrt{|x^2 - 1|}$, dobbiamo esaminare i punti x per cui

$$e^{x^2} - e = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x^2 - 1 = 0,$$

ovvero $x = 1$ e $x = -1$. Dato che la funzione è pari basta vedere quello che succede per $x = 1$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 1:

$$f'_\pm(1) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sqrt{|e^{x^2} - e|\,|x^2 - 1|}}{x - 1}.$$

Per $x \to 1^+$, dato che $|e^{x^2} - e| = e^{x^2} - e$ e $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{(e^{x^2} - e)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2}},$$

quindi bisogna calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= 2 \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x^2} - e)}{x - 1} = 2e \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x^2-1} - 1)}{x - 1} = 2e \lim_{x\to 1^+} \frac{(e^{x^2-1} - 1)}{x^2 - 1}(x + 1) = 4e,$$

che da' $f'_+(1) = 2\sqrt{e}$. Un calcolo analogo da' $f'_-(1) = -2\sqrt{e}$, e quindi 1 (e -1) sono punti angolosi.

5. Se $f(x) = |x|\sqrt{|x^2 - x|}$ dobbiamo esaminare i punti x per cui

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x^2 - x = 0,$$

ovvero $x = 0$ e $x = 1$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 0:

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|\sqrt{|x^2 - x|}}{x} = \pm \lim_{x\to 0^\pm} \sqrt{|x^2 - x|} = 0.$$

Dunque f è derivabile in 0.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 1:

$$f'_\pm(1) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x|\sqrt{|x||x - 1|}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sqrt{|x - 1|}}{x - 1} = \pm\infty.$$

Dunque f ha un punto di cuspide in 1.

6. Se $f(x) = |x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)$ dobbiamo esaminare i punti x per cui

$$x - 1 = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x = 0,$$

ovvero $x = 0$ e $x = 1$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 0:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|} + |x|}{x} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} + \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x|}{x} = \pm\infty \pm 1 = \pm\infty$$

Dunque f ha un punto di cuspide in 0.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in 1:

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{|x-1|(\sqrt{|x|} + |x|)}{x - 1} = 2 \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{|x-1|}{x-1} = \pm 2$$

Dunque f ha un punto angoloso in 1.

Foglio di esercizi N. 5

Calcolare i seguenti polinomi di Taylor.

1. Il polinomio di Taylor di ordine 5 e centro 0 di $f(x) = \cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)$.

2. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \log(1 - x + x^2)$

3. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \cos|2x| + |x|\sin|3x|$

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \cos(\sqrt{2}x)\log(1+\sqrt{3}x)$.

Calcolare i seguenti limiti

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x\Big(\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)\Big) + 3x^4}{\sin x^6 + x^5 - 2x^4}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1-x+x^2) + \sin x\tan x}{x - \sin x}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(\sqrt[4]{x} + 2x - 2)}{\log(x + 4x^2 - 4)}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^2\cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{1/x}\right)$.

Foglio di esercizi N. 5

1. Per calcolare il polinomio di Taylor di ordine 5 e centro 0 di $f(x) = \cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)$. calcoliamo per prima cosa $T^5(\cos y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4$.

Notiamo che basta usare i polinomi di Taylor di ordine 3 di $\sin x$ e $\tan x$ (perche' i termini di grado 5 verrebbero sempre elevati a qualche potenza o moltiplicati per un altro monomio e quindi darebbero termini di grado maggiore di 5). Quindi consideriamo

$$T^3(3\sin x) = 3\Big(x - \frac{1}{6}x^3\Big) = 3x - \frac{1}{2}x^3, \qquad T^3(3\tan x) = 3\Big(x + \frac{1}{3}x^3\Big) = 3x + x^3.$$

Sostituendo nello sviluppo del coseno si ha

$$T^5(\cos(3\tan x)) = T^5\Big(1 - \frac{1}{2}(3x + x^3)^2 + \frac{1}{24}(3x + x^3)^4\Big) = 1 - \frac{1}{2}(9x^2 + 6x^4) + \frac{1}{24}(3x)^4$$

(ho eliminato tutti i termini di grado maggiore o uguale a 6), e anche

$$T^5(\cos(3\sin x)) = T^5\Big(1 - \frac{1}{2}(3x - \frac{1}{2}x^3)^2 + \frac{1}{24}(3x - \frac{1}{2}x^3)^4\Big) = 1 - \frac{1}{2}(9x^2 - 3x^4) + \frac{1}{24}(3x)^4$$

Facendo la differenza di questi due polinomi si ha

$$T^5(\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)) = -\frac{1}{2}6x^4 - \frac{1}{2}3x^4 = -\frac{9}{2}x^4.$$

2. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $\log(1+y)$ è $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$. Dunque

$$T^3\log(1 - x + x^2) = T^3\Big((-x + x^2) - \frac{(-x + x^2)^2}{2} + \frac{(-x + x^2)^3}{3}\Big)$$
$$= (-x + x^2) - \frac{x^2 - 2x^3}{2} - \frac{x^3}{3} = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3.$$

3. Dato che il coseno è una funzione pari si ha $\cos|2x| = \cos 2x$, e

$T^3(\cos 2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 = 1 - 2x^2.$

Dato che $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$, si ha

$$|x|\sin|3x| = |x|\Big(|3x| - \frac{1}{6}|3x|^3 + o(x^3)\Big) = 3x^2 - \frac{1}{6}(3x)^4 + o(x^4) = 3x^2 + o(x^3),$$

e quindi $T^3(|x|\sin|3x|) = 3x^2$.

Dunque $T^3(\cos|2x| + |x|\sin|3x|) = 1 + x^2$.

4. Si ha $T^3\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2 = 1 - x^2$, e $T^3\log(1+\sqrt{3}x) = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}(\sqrt{3}x)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{3}x)^3 = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}x^3$; dunque

$$\begin{aligned} T^3(\cos(\sqrt{2}x)\log(1+\sqrt{3}x)) &= T^3\Big((1-x^2)\Big(\sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}x^3\Big)\Big) \\ &= x\,T^2\Big((1-x^2)\Big(\sqrt{3} - \frac{3}{2}x + \sqrt{3}x^2\Big)\Big) = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2. \end{aligned}$$

5. Notiamo che $\sin x^6 + x^5 - 2x^4 = -2x^4 + o(x^4)$ e quindi dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\Big(\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)\Big) + 3x^4}{-2x^4}.$$

Dobbiamo calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 del numeratore. Nell'esercizio 1 abbiamo visto che $T^4(\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)) = -\frac{9}{2}x^4$, quindi (usando il polinomio di Taylor di $\cos x$)

$$\begin{aligned} T^4(\cos x(\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)) + 3x^4) &= T^4\Big(\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\Big)\Big(-\frac{9}{2}x^4\Big) + 3x^4\Big) \\ &= -\frac{9}{2}x^4 + 3x^4 = -\frac{3}{2}x^4. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\Big(\cos(3\tan x) - \cos(3\sin x)\Big) + 3x^4}{-2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x^4}{-2x^4} = \frac{3}{4}.$$

6. Notiamo che $x - \sin x = x - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, e quindi il limite è

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1-x+x^2) + \sin x\tan x}{\frac{1}{6}x^3} = 6\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1-x+x^2) + \sin x\tan x}{x^3}.$$

Calcoliamo il polinomio di Taylor di grado 3 del numeratore. Dall'esercizio 2 sappiamo che $T^3\log(1-x+x^2) = -x + \frac{1}{2}x^2$ e quindi $T^3(x\log(1-x+x^2)) = -x^2 + \frac{1}{2}x^3$; inoltre

$$T^3(\sin x\tan x) = T^3(T^3\sin x\cdot T^3\tan x) = T^3\Big(\Big(x - \frac{1}{6}x^3\Big)\Big(x + \frac{1}{3}x^3\Big)\Big) = x^2.$$

Dunque

$$T^3\Big(x\log(1-x+x^2)+\sin x\tan x\Big)=\frac{1}{2}x^3,$$

e il limite diventa

$$6\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=3.$$

7. Il limite è nella forma 0/0. Usiamo la regola dell'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(\sqrt[4]{x}+2x-2)}{\log(x+4x^2-4)}=(H)=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\frac{1}{4}x^{-3/4}+2}{\sqrt[4]{x}+2x-2}}{\dfrac{1+8x}{x+4x^2-4}}=\frac{\frac{1}{4}+2}{1+8}=\frac{1}{4}.$$

8. Cambiamo variabile ponendo $y=1/x$ per cui il limite diventa

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 0^+}\Big(\frac{1}{y^2}\cos(3y)-\frac{1}{y}(\frac{1}{y}-1)e^y\Big)=\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos(3y)-(1-y)e^y}{y^2}\\ =\;&\frac{0}{0}=(H)=\lim_{y\to 0^+}\frac{-3\sin(3y)+e^y-(1-y)e^y}{2y}\\ =\;&\lim_{y\to 0^+}\frac{-3\sin(3y)}{2y}+\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y}{2}=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=-4\end{aligned}$$

In alternativa possiamo usare i polinomi di Taylor di ordine 2 di $\cos 3y$ e e e^y per cui il limite diventa

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos(3y)-(1-y)e^y}{y^2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{2}(3y)^2-(1-y)(1+y+\frac{1}{2}y^2)}{y^2}\\ =\;&\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\frac{9}{2}y^2-1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)}{y^2}=-4.\end{aligned}$$

Foglio di esercizi N. 6

1. Determinare il più grande intervallo illimitato superiormente su cui è monotona la funzione $f(x) = -|x-2|e^{-\frac{1}{2}x}$.

2. Determinare il più grande intervallo illimitato superiormente su cui è decrescente la funzione $f(x) = e^x(x-4)$.

3. Determinare gli intervalli su cui è crescente la funzione $f(x) = |x^2-4|e^{x/3}$.

4. Determinare il più piccolo valore a per cui la funzione $f(x) = e^x(\log(x-3))^2$ è crescente in $(a, +\infty)$.

5. Determinare gli intervalli su cui è crescente la funzione $f(x) = \left|\dfrac{x}{\log 3x}\right|$.

6. Determinare gli intervalli su cui è decrescente la funzione $f(x) = \dfrac{\pi - \arctan(1+x^2)}{\pi + \arctan(1+x^2)}$.

Foglio di esercizi N. 6

1. La funzione è uguale a
$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x \le 2 \\ (2-x)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x \ge 2. \end{cases}$$
Si ha
$$D\Big((x-2)e^{-\frac{1}{2}x}\Big) = e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(x-2)e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\Big(4-x),$$
per cui
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(4-x) & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(x-4) & \text{se } x > 2. \end{cases}$$
Dunque si ha
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{se } 2 < x < 4 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 4 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} f \text{ crescente} & \text{in } (-\infty, 2] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [2, 4] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [4, +\infty). \end{cases}$$
In conclusione il più grande intervallo illimitato superiormente su cui la funzione f è monotona (crescente) è $[4, +\infty)$.

2. Si ha $f'(x) = e^x(x-3)$,
$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x < 3 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 3 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} f \text{ decrescente} & \text{in } (-\infty, 3] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [3, +\infty). \end{cases}$$
Dunque f non è decrescente in alcun intervallo illimitato superiormente. La risposta, in termini di insiemi, è *l'insieme vuoto*.

3. Si ha $D\Big((x^2-4)e^{x/3}\Big) = 2xe^{x/3} + \dfrac{1}{3}(x^2-4)e^{x/3} = \dfrac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4)$. Dato che
$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } |x| \ge 2 \\ 4-x^2 & \text{se } |x| \le 2, \end{cases}$$
si ha
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4) & \text{se } |x| \ge 2 \\ -\frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4) & \text{se } |x| \le 2. \end{cases}$$

Le due radici di x^2+6x-4 sono $3 \pm \sqrt{5}$. Dato che
$$-2 < 3 - \sqrt{5} < 2 < 3 + \sqrt{5},$$

si ha

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < -2 \\ f'(x) < 0 & \text{se } -2 < x < 3-\sqrt{5} \\ f'(x) > 0 & \text{se } 3-\sqrt{5} < x < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{se } 2 < x < 3+\sqrt{5} \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 2 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} f \text{ crescente} & \text{in } (-\infty,-2] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [-2, 3-\sqrt{5}] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [3-\sqrt{5}, 2] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [2, 3+\sqrt{5}] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [3+\sqrt{5}, +\infty). \end{cases}$$

Dunque gli intervalli su cui f è crescente sono quelli contenuti in $(-\infty,2]\cup[3-\sqrt{5},2]\cup[3+\sqrt{5},+\infty)$.

4. Si ha $f'(x) = e^x\Big((\log(x-3))^2 + 2\log(x-3)\dfrac{1}{x-3}\Big) = e^x\dfrac{\log(x-3)}{x-3}((x-3)\log(x-3)+2)$.

Dobbiamo esaminare il segno di $\log(x-3)((x-3)\log(x-3)+2)$ per $x > 3$ (dato che $e^x > 0$ e $x-3 > 0$).

Si ha $\log(x-3) > 0$ se e solo se $x > 4$, mentre, dato che per $x = 4$ si ha $(x-3)\log(x-3)+2 = (4-3)\log(4-3)+2 = 2$ si ha che $(x-3)\log(x-3)+2 > 0$ su un intervallo $[\alpha,+\infty)$ per un certo $\alpha < 4$ Dunque

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{su } [\alpha, 4) \\ f'(x) > 0 & \text{su } (4,+\infty), \end{cases}$$

e quindi $a = 4$.

5. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\log 3x} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{3} \\ \dfrac{x}{\log 3x} & \text{se } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Dato che $D\Big(\dfrac{x}{\log 3x}\Big) = \dfrac{\log 3x - 1}{(\log 3x)^2}$ si ha

$$D\Big(\frac{x}{\log 3x}\Big) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{e}{3}.$$

e quindi

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{3} \\ f'(x) < 0 & \text{se } \frac{1}{3} < x < \frac{e}{3} \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > \frac{e}{3}. \end{cases}$$

e f è crescente negli intervalli contenuti in $\Big(0,\frac{1}{3}\Big) \cup \Big[\frac{e}{3},+\infty\Big)$.

6. Derivando la funzione $f(x) = \dfrac{\pi - \arctan(1+x^2)}{\pi + \arctan(1+x^2)} = \dfrac{2\pi}{\pi + \arctan(1+x^2)} - 1$ si ottiene

$$f'(x) = 2\pi\frac{-1}{(\pi + \arctan(1+x^2))^2} \cdot \frac{1}{1+(1+x^2)^2} \cdot 2x.$$

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x > 0$ e quindi f è decrescente negli intervalli contenuti in $[0,+\infty)$.

Foglio di esercizi N. 7

1. Determinare gli estremi relativi di

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ |x(x-3)| & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. Determinare gli estremi relativi di

$$f(x) = \begin{cases} |16x| & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ |x^3| & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Determinare gli estremi relativi di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x| & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - x & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4. Dire per quali valori a l'equazione $x^3 - x = a$ ha esattamente tre soluzioni.

5. Determinare i punti di estremo relativo di $f(x) = x^5 - 5x^3$.

6. Determinare il numero dei punti stazionari di $f(x) = \frac{1}{3x+1} \log x$.

Foglio di esercizi N. 7

Negli esercizi 1–3 la funzione f è ottenuta "modificando" una funzione $g(x)$ nei punti interi, "sostituendola" con un'altra funzione $h(x)$. Per prima cosa si esaminano i punti in cui g ha punti di estremo relativo. Questi (sia interi che non) rimangono punti di estremo relativo. Per i punti $x \in \mathbb{Z}$ vicino ai quali g è strettamente monotona, si avrà

$$\begin{aligned}
&x \text{ è un punto di massimo relativo se } h(x) > g(x),\\
&x \text{ è un punto di minimo relativo se } h(x) < g(x),\\
&x \text{ non è un punto di estremo relativo se } h(x) = g(x),
\end{aligned}$$

(perchè in quest'ultimo caso la funzione f coincide con g, che è strettamente monotona vicino a x).

1. La funzione è ottenuta modificando la funzione $g(x) = |x| + 2$ nei punti interi, sostituendola con la funzione $h(x) = |x(x-3)|$. Dato che g ha un solo punto di estremo relativo $x = 0$ esaminiamo prima questo. Dato che $h(0) = 0 < g(0) = 2$ il punto 0 rimane un punto di minimo relativo.

Dobbiamo quindi esaminare la disuguaglianza $h(x) < g(x)$, ovvero

$$|x(x-3)| < |x| + 2,$$

che diviene

$$\begin{cases} x(x-3) < x+2 & \text{se } x > 3 \\ x(3-x) < x+2 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ x(x-3) < -x+2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x - 2 < 0 & \text{se } x > 3 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 2x - 2 < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \qquad \begin{cases} 3 < x < 2 + \sqrt{6} \\ \text{ oppure } 0 \le x \le 3 \\ \text{ oppure } 1 - \sqrt{3} < x < 0. \end{cases}$$

In conclusione si ha $h(x) > g(x)$ se $1 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{6}$. I numeri interi che cadono in questo intervallo sono $0, 1, 2, 3, 4$ che sono quindi punti di minimo relativo. Per i rimanenti punti interi si ha $g(x) < h(x)$ e quindi sono punti di massimo relativo.

2. La funzione è ottenuta modificando la funzione $g(x) = |16x|$ nei punti interi, sostituendola con la funzione $h(x) = |x^3|$. Dato che g ha un solo punto di estremo relativo $x = 0$ esaminiamo prima questo. Dato che $h(0) = 0 = g(0)$ il punto 0 rimane un punto di minimo relativo.

Dobbiamo quindi esaminare la disuguaglianza $h(x) < g(x)$, ovvero

$$16|x| < |x|^3, \qquad \text{ovvero} \qquad 16 < x^2, x \neq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad -4 < x < 4, x \neq 0.$$

I punti interi che soddisfano questa disuguaglianza sono $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ e quindi questi sono punti di minimo relativo (come 0). I punti di massimo relativo sono i punti interi che soddisfano $x^2 > 16$, ovvero $\pm 5, \pm 6, \ldots$.

3. La funzione è ottenuta modificando la funzione $g(x) = \frac{3}{2}|x|$ nei punti interi, sostituendola con la funzione $h(x) = x^2 - x$. Dato che g ha un solo punto di estremo relativo $x = 0$ esaminiamo prima questo. Dato che $h(0) = 0 = g(0)$ il punto 0 rimane un punto di minimo relativo.

Dobbiamo quindi esaminare la disuguaglianza $h(x) < g(x)$, ovvero

$$x^2 - x < \frac{3}{2}|x|, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x^2 - x < \frac{3}{2}x & \text{se } x > 0 \\ x^2 - x < -\frac{3}{2}x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 5x < 0 & \text{se } x > 0 \\ 2x^2 + x < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 0 < x < \frac{5}{2} \\ \text{oppure } -\frac{1}{2} < x < 0. \end{cases}$$

I numeri interi che soddisfano a questa disequazione sono 1 e 2 e quindi questi sono punti di minimo relativo (come 0). Gli altri soddifano la diseguaglianza $h(x) > g(x)$ e quindi sono punti di massimo relativo .

4. Risolvere l'equazione $x^3 - x = a$ significa trovare l'intersezione della curva di $y = x^3 - x$ e la retta orizzontale $y = a$.

Esaminiamo la funzione $f(x) = x^3 - x$. La sua derivata è $f'(x) = 3x^2 - 1$ che è negativa tra $-1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3}$, positiva altrimenti. quindi f è strettamente crescente tra $-\infty$ e $-1/\sqrt{3}$, strettamente decrescente tra $-1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3}$, strettamente crescente tra $1/\sqrt{3}$ e $+\infty$. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad f(-1/\sqrt{3}) = \frac{2}{3/\sqrt{3}}, \qquad f(1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3/\sqrt{3}}.$$

Quindi, l'equazione $x^3 - x = a$ ha una soluzione per $|a| > \frac{2}{3/\sqrt{3}}$, due soluzioni per $|a| = \frac{2}{3/\sqrt{3}}$, tre soluzioni per $|a| < \frac{2}{3/\sqrt{3}}$.

5. Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^5 - 5x^3$. Si ha $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$, quindi la funzione è crescente per $x \leq -\sqrt{3}$, decrescente per $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ (anche se $f'(0) = 0$), e crescente per $x \geq \sqrt{3}$. Dunque $-\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.

6. La derivata di $f(x) = \frac{1}{3x+1} \log x$ è

$$f'(x) = -\frac{3}{(3x+1)^2} \log x + \frac{1}{x(3x+1)} = \frac{-3x \log x + (3x+1)}{x(3x+1)^2}.$$

che si annulla solo se $\log x = 1 + \frac{1}{3x}$. Questa equazione si risolve graficamente ed ha una sola soluzione (che non si determina esplicitamente). Questo punto stazionario è il punto di massimo di f.

Foglio di esercizi N. 8

1. Dare un esempio di una funzione f tale che $f''(-3) = 0$ ma f NON ha un punto di flesso nel punto -3.

2. Determinare i punti di flesso di
$$f(x) = x^2 + 2\sin x$$
nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

3. Determinare i punti di flesso di
$$f(x) = x^6 + x^4 \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^6 - x^4.$$

4. Sia
$$f(x) = \Big||x| - 4\Big|$$
Determinare il più grande intervallo illimitato inferiormente in cui f è concava e il più grande intervallo illimitato inferiormente in cui f è convessa.

5. Determinare gli intervalli in cui è convessa o concava la funzione
$$f(x) = |x - 6| + \sqrt{|x| - x}.$$

6. Determinare gli intervalli in cui è convessa o concava la funzione
$$f(x) = \frac{e^x}{x - 5}.$$

Foglio di esercizi N. 8

1. Un esempio di una funzione f tale che $f''(-3) = 0$ ma f non ha un punto di flesso nel punto -3 è $f(x) = (x+3)^4$.

2. La derivata seconda di $f(x) = x^2 + 2\sin x$ è $f''(x) = 2 - 2\sin x$, che è sempre non negativa. Quindi f è una funzione convessa e non ci sono punti di flesso, anche se $f''(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. La derivata seconda di f è $f''(x) = 30x^4 + 12x^2$, che è sempre non negativa. Quindi f non ha punti di flesso.

La derivata seconda di g è $g''(x) = 30x^4 - 12x^2 = 6x^2(5x^2 - 2)$, che è non negativa per $|x| \geq \sqrt{2/5}$ e non positiva per $|x| \leq \sqrt{2/5}$. Quindi g è convessa per $|x| \geq \sqrt{2/5}$ e concava per $|x| \leq \sqrt{2/5}$, e i due punti di flesso di g sono $-\sqrt{2/5}$ e $\sqrt{2/5}$.

4. La funzione $f(x) = ||x| - 4|$ non è derivabile in $x = 0, 4, -4$. Sugli ciascuno degli intervalli $(-\infty, -4]$, $[-4, 0]$, $[0, 4]$ e $[4, +\infty)$ la funzione è una retta (e quindi sia concava che convessa). È facile disegnare il grafico di f e controllare che è convessa su $(-\infty, 0]$ mentre è concava su $(-\infty, -4]$.

5. La funzione $f(x) = |x - 6| + \sqrt{|x| - x}$ non è derivabile in $x = 0$ e 6. Possiamo anche scrivere

$$f(x) = \begin{cases} |x-6| + \sqrt{-2x} & \text{se } x \leq 0 \\ |x-6| & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi } f''(x) = \begin{cases} -(-2x)^{-3/2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 6 \text{ o } x > 6. \end{cases}$$

La funzione è concava su $(-\infty, 0]$ e convessa su $[0, +\infty)$.

6. Per semplificare i calcoli trasliamo la funzione cambiando variabile: $y = x - 5$ per cui dobbiamo studiare la funzione $g(y) = \frac{e^{y+5}}{y}$, la cui derivata seconda è

$$g''(y) = e^{y+5}\, \frac{y^2 - 2y + 2}{y^3},$$

che è positiva per $y > 0$ e negativa per $y < 0$. Quindi la funzione g è convessa sugli intervalli di $(0, +\infty)$ e concava sugli intervalli di $(-\infty, 0)$ e la funzione f è convessa sugli intervalli di $(5, +\infty)$ e concava sugli intervalli di $(-\infty, 5)$.

Foglio di esercizi N. 1

(Il logaritmo si intende in base naturale e dove non specificato. Il risultato comunque non dipende dalla scelta della base)

1. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log_3(1 + \log_3(3x))$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{\log_2(2x - x^2) + 1}$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\log(x^2 - 4)}{\log(9 - x^2)}$$

4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(1 - \sin x)}$$

5. Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = 4^x$$

sulla semiretta $(-\infty, \log_2 3]$

6. Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \log^2 x + 2\log x + 1$$

sull'insieme $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$

7. Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2 + x^2}\right)$$

8. Determinare il dominio e (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - (\cos x)^2}$$

Foglio di esercizi N. 2

1. Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \text{se } x \in \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & \text{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

2. Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{se } x \in \mathbf{Z} \\ ||x| - 1| & \text{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

3. Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \in \mathbf{Z} \\ \sqrt{|x|} & \text{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

4. Determinare (se esiste) $\min\Big\{e^{-n}\Big(\log(n-5)\Big)^2 : n \in \mathbf{N},\ n \geq 6\Big\}$.

5. Calcolare

$$\lim_n \frac{\log(n^2 + \sin n)}{\log(n + \cos n)}.$$

6. Calcolare

$$\lim_n \frac{(n+1)^5 - n^5 + \arctan n}{n^4 + 3n \sin n + \sqrt{n}}.$$

7. Calcolare

$$\lim_n \frac{\Big(1 + \frac{4}{n}\Big)^{3n}}{\Big(1 + \frac{5}{n}\Big)^{2n}}.$$

8. Calcolare

$$\lim_n \Big(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - n\Big).$$

Foglio di esercizi N. 3

1. Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^n.$$

2. Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione

$$a_n = \cos\Big(\frac{n\pi}{4}\Big) - \sin\Big(n\frac{\pi}{2}\Big)$$

3. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+4x))}{\tan(4\log(1+x))}.$$

4. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^x - 1}{(9+x)^x - 1}.$$

5. Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+3)^x}{x^{x+\sin x}}.$$

6. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} (1+x+x^2)^{1/x}.$$

7. Dire per quali valori di α il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x+x^2)^x - 1}{x^\alpha}$$

è finito.

8. Dire per quale valori di a la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{ax} & \text{se } x > 0 \\ a + x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua.

Cognome: $\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup$ Nome: $\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup\!\sqcup$

Analisi Matematica I - Simulazione prima prova Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$ $\boxed{\text{On Line}}$

Domande 1-5: risposta esatta: 2 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti. Fila: 1
Domande 6-11: risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti

---

1. Il dominio della funzione $\sqrt{2-x})/|x-1|$ è
$\boxed{A}$: $(-\infty,1)\cup(1,2]$ $\boxed{B}$: $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ $\boxed{C}$: $\emptyset$ $\boxed{D}$: $(-\infty,1)\cup(1,2)$ $\boxed{E}$: $(0,1)$

---

2. Se una successione $\{a_n\}$ è convergente allora $\{a_n\}$ $\boxed{A}$: ha minimo $\boxed{B}$: è monotona $\boxed{C}$: è strettamente monotona $\boxed{D}$: è inferiormente. limitata $\boxed{E}$: ha massimo

---

3. Il limite $\lim_n \dfrac{3^n-4^n}{3^n-n^5}$ vale $\boxed{A}$: $-\frac{4}{3}$ $\boxed{B}$: $-\infty$ $\boxed{C}$: $+\infty$ $\boxed{D}$: 1 $\boxed{E}$: 0

---

4. Il limite $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\log(3x+1)+x^3}{e^x-1+x^2}$ vale $\boxed{A}$: -3 $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: 1 $\boxed{D}$: $+\infty$ $\boxed{E}$: 3

---

5. Il limite $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^6+2x^5+x^2\sin x}+x^3\right)$
$\boxed{A}$: vale 1 $\boxed{B}$: vale -1 $\boxed{C}$: vale $-\infty$ $\boxed{D}$: vale $+\infty$ $\boxed{E}$: non esiste

---

6. Il limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+x^3\sin x)}{\log(x^5+x^3+x^4\cos x)}$
$\boxed{A}$: vale 0 $\boxed{B}$: non esiste $\boxed{C}$: vale $\frac{4}{5}$ $\boxed{D}$: vale 4 $\boxed{E}$: vale $\frac{1}{5}$

---

7. Il minimo della funzione $f(x)=\begin{cases}|x-1| & \text{se } x\notin\mathbf{Z}\\ 2|x|-1 & \text{se } x\in\mathbf{Z}\end{cases}$
$\boxed{A}$: vale 1 $\boxed{B}$: vale 0 $\boxed{C}$: non esiste $\boxed{D}$: vale -1 $\boxed{E}$: vale -2

---

8. L'estremo inferiore di $\{(\log x)^2-\log(x^2) : x>e^3\}$ vale
$\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: 6 $\boxed{C}$: 3 $\boxed{D}$: $-\infty$ $\boxed{E}$: 4

---

9. Il limite $\lim_n \dfrac{(n-1)!(1+n)^{n+1}+n!(1+2n)n^{n-1}}{(n-1)!\,n^{n+1}}$ vale
$\boxed{A}$: e $\boxed{B}$: $+\infty$ $\boxed{C}$: 0 $\boxed{D}$: $e+1$ $\boxed{E}$: $e+2$

---

10. I possibili limiti di sottosuccessioni di $a_n=\sin(\frac{\pi}{2n})-\tan((2n+1)\frac{\pi}{4})$ sono
$\boxed{A}$: $-\infty$ e 1 $\boxed{B}$: 0 e -1 $\boxed{C}$: 1 e 1 $\boxed{D}$: -1 e $+\infty$ $\boxed{E}$: -1 e 1

---

11. L'asintoto obliquo di $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\sqrt{x^2+2x\sin x}$ per $x\to-\infty$
$\boxed{A}$: è $y=2x$ $\boxed{B}$: è $y=x+1$ $\boxed{C}$: è $y=2x-2$ $\boxed{D}$: è $y=2x+1$ $\boxed{E}$: non esiste

---

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Domande a risposta aperta (punteggio: 0–3 punti l'una)

A. Sia $f(x) = (3x - 2)^2$. Dire se esistono massimo e minimo della successione $a_n = f(1/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (e in caso affermativo calcolarli), giustificando la risposta usando il grafico di f.

B. Svolgere il calcolo di $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\log(1 + \sin x)}$ usando i limiti fondamentali.

Foglio di esercizi N. 5

1. Calcolare derivata destra e sinistra della funzione

$$f(x) = |\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1)|$$

in $x = 0$;

2. Calcolare derivata destra e sinistra della funzione

$$f(x) = |3 \sin |\pi - x| - 4 \cos x|$$

in $x = \pi/2$;

3. Calcolare la retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \log x \arctan(x - 6)$$

in $x = 6$;

4. Descrivere i punti di non-derivabilità di

$$f(x) = \sqrt{||x| - 5| - |x| + 5}$$

5. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right)$$

(cambiare variabile $y = 1/x$);

6. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\sqrt{x} + 2x - 2)}{\log(x + 3x^2 - 3)}$$

7. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \log(1 + x + x^2) - \tan x \sin x}{x^3}$$

8. Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\log x + \sin x)}{\log(\log^3 x + \cos x)}$$

Foglio di esercizi N. 6

1. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro 0 di $f(x) = \cos(5\tan x) - \cos(5\sin x)$ e calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x(\cos(5\tan x) - \cos(5\sin x)) + 5x^4}{2x^4 + \sin(x^5) - x^6};$$

2. Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 3 di

$$f(x) = \sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[4]{1-3x} - 2;$$

(usare la definizione)

3. Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 5 della funzione

$$f(x) = 3x\cos(2x) + 6\log(1+x^3);$$

4. Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 2 di $f(x) = e^x \log(1+x)\cos x$ e calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log(1+x)\cos x - \sin x}{\sin x \tan x};$$

5. Determinare gli intervalli dove la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x}{\log|2x|}\right|$$

è non decrescente;

6. Determinare il più piccolo valore a tale che la funzione

$$f(x) = e^x \log^2|x-5|$$

sia crescente in $(a, +\infty)$;

7. Determinare gli intervalli in cui è crescente la funzione

$$f(x) = |x^2 - 4|e^{x^2/3};$$

8. Calcolare la derivata seconda di

$$f(x) = e^x(x^2 - 5x + 8)$$

e determinare gli intervalli in cui è strettamente positiva.

Foglio di esercizi N. 7

1. Determinare tutti gli estremi locali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ x^2 + 2x & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

2. Determinare tutti gli estremi locali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

3. Determinare tutti gli estremi locali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = \arctan\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{x}{1+x^2},$$

e in seguito le funzioni

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$$

e

$$h(x) = (x-1) \arctan \frac{1}{|x-1|}$$

(suggerimento: notare che $f' = g$);

5. Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione

$$f(x) = \log(x+1) + |\log|x-3||$$

e gli eventuali punti di flesso.

6. Determinare tutti gli intervalli in cui è concava

$$f(x) = \arctan|x - \pi|.$$

7. Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione

$$f(x) = (x-2)|x^2 - 2|$$

e gli eventuali punti di flesso.

8. Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Cognome: | | | | | | | | | | | | | | Nome: | | | | | | | | | | | | | |

Foglio N. 8 - Simulazione seconda prova Corso: Frontale On Line

Domande 1-5: risposta esatta: 2 punti, errata: −0.5 punti, vuota: 0 punti. Fila: 1
Domande 6-11: risposta esatta: 3 punti, errata: −0.5 punti, vuota: 0 punti

---

1. La retta tangente alla funzione $f(x) = \frac{\log x}{1+\log x}$ in $x = 1$ è
A : $y = x - 1$ B : $y = 1$ C : $y = x$ D : $y = 0$ E : $y = 1 - x$

---

2. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \sin(e^x - 1)$ è
A : $x - \frac{1}{6}x^3$ B : $-\frac{1}{6}x^3$ C : $x - \frac{1}{3}x^3$ D : $x - \frac{1}{2}x^2$ E : $x + \frac{1}{2}x^2$

---

3. La funzione $f(x) = (3x - |x|)e^{-x}$ è strettamente crescente in
A : $[1, 3]$ B : $[-1, 1]$ C : $[3, 4]$ D : $[0, 2]$ E : $[1, 2]$

---

4. La derivata di $f^{\log g}$ è A : $f^{\log g-1} \log f f'$ B : $f^{\log g-1} \log g f'$ C : $g^{\log f-1} \log g f'$ D : $f^{\log f-1} \log f f'$ E : $f^{\log g-1} \log g f' + g^{\log f-1} \log f g'$

---

5. La funzione $f(x) = e^x \sin x$ ha un flesso in A : π B : -1 C : $\pi/2$ D : $\pi/4$ E : 0

---

6. I punti di non-derivabilità della funzione $f(x) = \log x\sqrt{|(x-1)(x-2)|}$ sono
A : un punto angoloso B : un punto di cuspide e un punto angoloso C : un punto di cuspide
D : due punti angolosi E : due punti di cuspide

---

7. La funzione $f(x) = x|\log^2 x - 1|$ è convessa in
A : $[3, 4]$ B : $[1, 3]$ C : $(0, 1]$ D : $(0, 2)$ E : $(2, 3)$

---

8. Il numero dei minimi locali di $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{x} - 2\right| & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ |x| & \text{se } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
A : 5 B : 6 C : 3 D : ∞ E : 4

---

9. Il limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x \tan 2x - \tan x \sin 2x}{1 - \cos x^2}$ vale
A : nessuna delle altre risposte B : $+\infty$ C : 0 D : 6 E : 3

---

10. Il limite $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\log(x^4 - x^3 + x)}{\log(x^3 - x^4 + x)}$ vale
A : 6 B : 0 C : 1 D : $+\infty$ E : $-\infty$

---

11. La derivata sinistra di $f(x) = \left|\tan x - \sqrt{x^2 + 2x\sin x}\right|$ in 0 vale
A : $1 - \sqrt{3}$ B : $\sqrt{3}$ C : $-\sqrt{3} - 1$ D : $-\sqrt{3}$ E : -1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Foglio di esercizi N. 1 - Soluzioni

1. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = \log_3(1 + \log_3(3x))$.

Deve essere $1 + \log_3(3x) > 0$, ovvero $\log_3(3x) > -1$, ovvero (prendendo l'esponenziale in base 3 di entrambi i membri) $3x > 1/3$, ovvero $x > 1/9$. Questa condizione comprende anche la condizione $x > 0$ che definisce il dominio di $\log(3x)$. Dunque il dominio è $(1/9, +\infty)$.

2. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = e^x \sqrt{\log_2(2x - x^2) + 1}$.

La funzione e^x è definita per ogni valore di x, quindi basta esaminare il dominio di $\sqrt{\log_2(2x - x^2) + 1}$, che è definta quando $\log_2(2x - x^2) + 1 \geq 0$, ovvero $2x - x^2 \geq 1/2$, ovvero

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} \leq 0, \qquad \text{ovvero} \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque il dominio è $\Big[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big]$.

3. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = \dfrac{\log(x^2 - 4)}{\log(9 - x^2)}$.

Devono essere soddisfatte contemporaneamente le condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 9 - x^2 > 0 \\ \log(9 - x^2) \neq 0 \text{ ovvero } 9 - x^2 \neq 1, \end{cases}$$

che si scrivono equivalentemente

$$\begin{cases} x^2 > 4 & \text{ovvero} \quad x < -2 \text{ oppure } x > 2 \\ x^2 < 9 & \text{ovvero} \quad -3 < x < 3 \\ x^2 \neq 8 & \text{ovvero} \quad x \neq -2\sqrt{2} \text{ oppure } x \neq 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Dunque, deve essere $-3 < x < -2$ oppure $2 < x < 3$ e contemporaneamente $x \neq \pm 2\sqrt{2}$. Come unione di intervalli, il dominio di f si scrive

$$\text{dom} f = (-3, -2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2}, -2) \cup (2, 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

4. *Determinare il dominio della funzione* $f(x) = \sqrt{\log(1 - \sin x)}$.

Deve essere $\log(1 - \sin x) \geq 0$, ovvero $1 - \sin x \geq 1$, ovvero $\sin x \leq 0$. Questo accade per tutti gli intervalli della forma $[(2k - 1)\pi, 2k\pi]$ con k intero (per esempio per $[-\pi.0]$ $(k = 0)$, $[\pi, 2\pi]$ $(k = 1)$, etc.). Dunque il dominio è l'unione (infinita) di tutti questi insiemi

$$\text{dom} f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [(2k - 1)\pi, 2k\pi] = \{x : \exists k \in \mathbf{Z} : (2k - 1)\pi \leq x \leq 2k\}.$$

5. *Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = 4^x$ *sulla semiretta* $(-\infty, \log_2 3]$.

La funzione 4^x è strettamente crescente e definita su un intervallo. Dato che l'intervallo è chiuso superiormente, esiste il massimo (che quindi è anche il sup) ed è uguale al valore della funzione in $\log_2 3$, ovvero

$$4^{\log_2 3} = 2^{2 \log_2 3} = 2^{\log_2 9} = 9.$$

Dato che l'intervallo è aperto inferiormente, non esiste il minimo di f. È facile convincersi che l'inf è 0, ricordandosi il grafico di 4^x (notare che $4^x > 0$ per ogni x e quindi $\inf f \leq 0$). *Questo ragionamento diventerà parte di una regola generale quando si tratteranno i limiti.*

6. *Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = \log^2 x + 2\log x + 1$ *sull'insieme* $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$.

Dobbiamo calcolare gli estremi dell'insieme

$$\{\log^2 x + 2\log x + 1 : x \geq 1\} = \{y^2 + 2y + 1 : y = \log x,\ x \geq 1\} = \{z^2 + 2z + 1 : z \geq 0\}.$$

Questo insieme è uguale a $[1, +\infty)$. Questo si può vedere esaminando il grafico noto della parabola $y = x^2 + 2x + 1$, o notando che su $[0, +\infty)$ la funzione $g(x) = x^2 + 2x + 1$ è strettamente crescente (è somma di funzioni strettamente crescenti) e non è superiormente limitata. Dunque

$$\min f = 1, \qquad \sup f = +\infty.$$

7. *Determinare (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2 + x^2}\Big)$.

Il dominio della funzione è tutto $\mathbf{R}$. Dobbiamo calcolare gli estremi dell'insieme

$$\Big\{\cos\Big(\frac{\pi}{2 + x^2}\Big) : x \in \mathbf{R}\Big\} = \Big\{\cos\Big(\frac{\pi}{y}\Big) : y \in \mathbf{R} : y \geq 2\Big\} = \Big\{\cos z : z \in \mathbf{R} : 0 < z \leq \frac{\pi}{2}\Big\}$$

(abbiamo cambiato variabili: $y = 2 + x^2$ (e quindi $y \in [2, +\infty)$) e $z = \pi/y$ (e quindi $z \in (0, \pi/2]$). Dunque bisogna trovare gli estremi della funzione coseno su $(0, \pi/2]$. Ricordando il grafico del coseno si ha quindi

$$\sup f = 1 \qquad \min f = 0,$$

e non esiste $\max f$. Notare che $\cos x$ è strettamente crescente in $(0, \pi/2]$, e usando questa informazione si ha un altro modo per calcolarsi gli estremi.

8. *Determinare il dominio e (se esistono) max/min, sup/inf della funzione* $f(x) = \dfrac{1}{1 - (\cos x)^2}$.

Il dominio della funzione è

$$\{x \in \mathbf{R}; \cos x \not\in \{-1, 1\}\} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq k\pi\ \forall k \in \mathbf{Z}\}.$$

Nel dominio si ha $\cos^2 x \in [0, 1)$, e quindi $1 - \cos^2 x \in (0, 1]$. Dunque

$$\Big\{\frac{1}{1 - (\cos x)^2} : \cos x \not\in \{-1, 1\}\Big\} = \Big\{\frac{1}{y} : y \in (0, 1]\Big\} = [1, +\infty),$$

e quindi

$$\min f = 1, \qquad \sup f = +\infty.$$

Notare che si può anche scrivere $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^2}$. L'esercizio non viene semplificato sensibilmente in questa forma.

Foglio di esercizi N. 2 - Soluzioni

1. *Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & \textit{se } x \in \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & \textit{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{3x^2 - 6 : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} \cup \{2x - x^3 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Si ha

$$\{3x^2 - 6 : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} = (-6, 6) \setminus \{-3\} = (-6, -3) \cup (-3, 6),$$
$$\{2x - x^3 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{0, \pm 1, \pm 4\},$$

e quindi

$$\mathrm{Im}(f) = (-6, -3) \cup (-3, 6).$$

Dunque f non ha ne minimo ne massimo.

2. *Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \textit{se } x \in \mathbf{Z} \\ ||x| - 1| & \textit{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{||x| - 1| : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} \cup \{x^2 - 2x + 2 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Si ha

$$\{||x| - 1| : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} = (0, 1)$$
$$\{x^2 - 2x + 2 : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{1, 2, 5, 10\},$$

e quindi

$$\mathrm{Im}(f) = (0, 1) \cup \{2, 5, 10\}.$$

Dunque f non ha ne minimo e $\max f = 10$.

3. *Determinare (se esistono) massimo e minimo della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \textit{se } x \in \mathbf{Z} \\ \sqrt{|x|} & \textit{se } x \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

L'immagine di f è

$$\mathrm{Im}(f) = \{\sqrt{|x|} : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} \cup \{x^2 - 2x : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Si ha

$$\{\sqrt{|x|} : x \in (-2, 2) \setminus \{-1, 0, 1\}\} = (0, \sqrt{2}) \setminus \{1\}$$
$$\{x^2 - 2x : x \in \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{-1, 0, 3, 8\},$$

e quindi

$$\mathrm{Im}(f) = [0,1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup \{-1, 3, 8\}.$$

Dunque $\min f = -1$ e $\max f = 10$.

4. *Determinare (se esiste)* $\min\Big\{ e^{-n}\Big(\log(n-5)\Big)^2 : n \in \mathbf{N},\ n \geq 6 \Big\}$.

Notiamo che la successione è non negativa, e per $n = 6$ il termine della successione è 0, quindi il minimo è 0.

5. *Calcolare*

$$\lim_n \frac{\log(n^2 + \sin n)}{\log(n + \cos n)}.$$

Si ha

$$\log(n^2 + \sin n) = \log\Big(n^2\Big(1 + \frac{\sin n}{n^2}\Big)\Big) = \log n^2 + \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n^2}\Big)$$

e

$$\log(n + \cos n) = \log\Big(n\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big)\Big) = \log n + \log\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big).$$

Dato che

$$\lim_n \log\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big) = \lim_n \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n^2}\Big) = \log 1 = 0,$$

il limite è uguale al

$$\lim_n \frac{\log n^2}{\log n)} = \lim_n \frac{2\log n}{\log n)} = 2.$$

6. *Calcolare*

$$\lim_n \frac{(n+1)^5 - n^5 + \arctan n}{n^4 + 3n \sin n + \sqrt{n}}.$$

Si ha $(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + \ldots + 5n + 1$, quindi, raccogliendo n^4 e semplificando si ottiene

$$\lim_n \frac{n^4\Big(5 + \ldots + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{\arctan n}{n^4}\Big)}{n^4\Big(1 + 3\frac{\sin n}{n^3} + \frac{1}{n^3\sqrt{n}}\Big)} = 5.$$

7. *Calcolare*

$$\lim_n \frac{\Big(1 + \frac{4}{n}\Big)^{3n}}{\Big(1 + \frac{5}{n}\Big)^{2n}}.$$

Notare che $(m = n/4)$

$$\lim_n \Big(1 + \frac{4}{n}\Big)^{3n} = \lim_m \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{12m} = e^{12}$$

e $(m = n/5)$

$$\lim_n \Big(1 + \frac{5}{n}\Big)^{2n} = \lim_m \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{10m} = e^{10},$$

quindi il limite vale $e^{12}/e^{10} = e^2$.

8. *Calcolare*

$$\lim_n \Big(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - n\Big).$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\Big(\sqrt{n^2 + 2n + 2} + n\Big)$ il limite diventa

$$\lim_n \frac{2n + 2}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + n} = \lim_n \frac{2 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1} = 1.$$

Foglio di esercizi N. 3 - soluzioni

1. *Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione*

$$a_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^n.$$

Per n pari $a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$ che tende a e. Per n pari $a_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n$ che tende a $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Dunque i limiti sono e e $\frac{1}{e}$.

2. *Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni della successione*

$$a_n = \cos\Big(\frac{n\pi}{4}\Big) - \sin\Big(n\frac{\pi}{2}\Big)$$

Esaminando i termini della successione, per la periodicità di sin e cos, si ha che $a_{n+8} = a_n$, ovvero i termini si ripetono uguali dopo 8 indici. Quindi le possibili sottosuccessioni convergenti devono tendere ad uno dei valori $a_0, a_1, \dots, a_7$, che sono 0, 1, -1, $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm 1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm 1$.

3. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+4x))}{\tan(4\log(1+x))}.$$

Usando il fatto che $\sin y = y + o(y)$, $\log(1+4x) = 4x + o(x)$ $\tan y = y + o(y)$ e $\log(1+x) = x + o(x)$, si ottiene

$$\frac{\sin(\log(1+4x))}{\tan(4\log(1+x))} = \frac{4x + o(x)}{4(x + o(x))} = 1 + o(1),$$

ovvero il limite è 1.

4. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^x - 1}{(9+x)^x - 1}.$$

Ricordando che $e^y - 1 = y + o(y)$ si ha ($c = 3$ o 9)

$$(1+cx)^x - 1 = e^{x\log(c+x)} - 1 = x\log c + o(x)$$

e dunque

$$\frac{(3+x)^x - 1}{(9+x)^x - 1} = \frac{x\log 3 + o(x)}{x\log 9 + o(x)} = \frac{1}{2} + o(1),$$

ovvero il limite è 1/2

5. *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+3)^x}{x^{x+\sin x}}.$$

Si ha

$$\frac{(x+3)^x}{x^{x+\sin x}} = \Big(1 + \frac{3}{x}\Big)^x \frac{1}{x^{\sin x}} = \Big(1 + \frac{3}{x}\Big)^x x^{-\sin x}.$$

Dato che $\Big(1 + \frac{3}{x}\Big)^x \to e^3$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\sin x}.$$

Ma questo limite non esiste perchè quando $\sin x = 1$ si ha $x^{-\sin x} = 1/x$ che tende a 0, mentre quando $\sin x = -1$ si ha $x^{-\sin x} = x$ che tende a $+\infty$.

6. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x}.$$

Scriviamo

$$(1+x+x^2)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x+x^2)}.$$

Si ha

$$\frac{1}{x}\log(1+x+x^2) = \frac{x+x^2+o(x+x^2)}{x} = \frac{x+x^2+o(x)}{x} = 1+o(1),$$

quindi il limite è $e^1 = e$.

7. *Dire per quali valori di α il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2)^x - 1}{x^\alpha}$$

è finito.

Scriviamo

$$(1+x+x^2)^x - 1 = e^{x\log(1+x+x^2)} - 1 = x\log(1+x+x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).$$

Quindi il limite è uguale al limite

$$\lim_{x\to 0} x^{2-\alpha},$$

che è finito se e solo se $2-\alpha \geq 0$, ovvero $\alpha \leq 2$.

8. *Dire per quale valori di a la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{ax} & \textit{se } x > 0 \\ a + x & \textit{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua.

Deve essere

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x),$$

ovvero

$$\frac{3}{a} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{ax} = \lim_{x\to 0^-}(x+a) = a.$$

Dunque $a^2 = 3$, ovvero $a = \sqrt{3}$ o $a = -\sqrt{3}$.

Foglio N.4 - Soluzioni.

1. Il dominio di $\sqrt{2-x}$ è $(-\infty, 2]$; il denominatore si annulla solo in 1. Quindi la risposta esatta è **A**.

2. Una successione convergente è limitata, quindi anche inferiormente limitata. Quindi la risposta esatta è **D**. Le altre possono essere false.

3. Dato che $n^4 << 3^n << 4^n$ il limite è uguale a

$$\lim_n \frac{-4^n}{3^n} = -\lim_n\left(\frac{4}{3}\right)^n = -\infty.$$

Quindi la risposta esatta è **B**.

4. Dato che $\log(1+3x) = 3x + o(x)$ $e^x = 1 + x + o(x)$, $x^2 = o(x)$ e $x^3 = o(x)$ il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{x} = 3.$$

Quindi la risposta esatta è **E**.

5. Razionalizzando, si ha che il limite è uguale a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5 + x^2}{\sqrt{x^6 + 2x^5 + x^2} - x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{-2x^3} = -\lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty.$$

Quindi la risposta esatta è **C**.

6. Eliminando le funzioni che sono trascurabili, si ha che il limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^4}{\log x^5} = \frac{4}{5}.$$

Quindi la risposta esatta è **C**.

7. Il minimo di $2|x| - 1$ è -1 (per $x = 0 \in \mathbf{Z}$) mentre il minimo di $|x-1|$ vale 0. Quindi il minimo è -1 e la risposta esatta è **D**.

8. Cambiando variabile $y = \log x$ l'insieme diviene $\{y^2 - 2y : y > 3\}$. Dato chela funzione $y^2 - 2y$ è crescente e continua per $y > 3$, l'estremo inferiore è assunto in 3 e vale 3. Quindi la risposta esatta è **C**.

9. Semplificando, il limite diventa la somma di limiti

$$\lim_n \frac{(1+n)^{n+1}}{n^{n+1}} + \frac{(1+2n)}{n} = \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \frac{n+1}{n} + \frac{(1+2n)}{n} = e + 2.$$

Quindi la risposta esatta è **E**.

10. Dato che $\sin(\pi/2n) \to 0$, bisogna solo esaminare la successione $-\tan((2n+1)\pi/4)$, che prende alternativamente i valori 1 e -1. Quindi la risposta esatta è **E**.

11. Facendo una divisione di polinomi, si ha

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1},$$

quindi possimao esaminare la sola funzione $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x\sin x}$

Se l'asintoto di g è $y = mx + q$, il calcolo del coefficiente angolare m da'

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x\sin x}}{x} = -1.$$

Il termine q è determinato da

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + 2x\sin x} + x.$$

Razionalizzando si ha il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sin x}{\sqrt{x^2 + 2x\sin x} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x\sin x}{-2x + o(x)} = -\lim_{x\to-\infty} \sin x,$$

che non esiste. Quindi la risposta esatta è **E**.

A. La funzione f è decrescente per $x < 2/3$ e crescente per $x > 2/3$, quindi la successione a_n è crescente per i termini n con $1/n < 2/3$, ovvero $n > 3/2$, ovvero da $n = 2$ in poi. Per la monotonia, si ha

$$\min\{a_n : n \geq 2\} = a_2 = \frac{1}{4}, \qquad \sup\{a_n : n \geq 2\} = \lim_n a_n = f(0) = 4.$$

Inoltre $a_1 = 1$. Quindi $\min\{a_n\} = \frac{1}{4}$ e non esiste massimo.

B. Per esempio (ma ci sono altre vie possibili)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\log(1 + \sin x)} = \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\log(1 + \sin x)} = 1.$$

Foglio di esercizi N. 5 - Soluzioni

1. *Calcolare derivata destra e sinistra della funzione*

$$f(x) = |\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1)|$$

in $x = 0$.

Sostituendo $x = 0$ si ha $\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1) = \arctan(-1) = -\pi/4$, quindi, in un intorno di $x = 0$ si ha

$$f(x) = -\arctan(|x^2 + 3x| - x^2 - 3x - 1).$$

Si ha

$$|x^2 + 3x| = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x < -3 \text{ o } x > 0 \\ -x^2 - 3x & \text{se } -3 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Quindi, per $x \to 0^-$ si ha

$$f(x) = -\arctan(-x^2 - 3x - x^2 - 3x - 1) = -\arctan(-2x^2 - 6x - 1) = \arctan(2x^2 + 6x + 1).$$

Dato che

$$D\arctan(2x^2 + 6x + 1) = \frac{1}{1 + (2x^2 + 6x + 1)^2} \cdot (4x + 6),$$

si ha (sostituendo $x = 0$) $f'_{(}0) = 3$.

Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = -\arctan(-1) = \pi/4$ e $f'_+(0) = 0$.

2. *Calcolare derivata destra e sinistra della funzione*

$$f(x) = |3\sin|\pi - x| - 4\cos x|$$

in $x = \pi/2$.

Per $x = \pi/2$ si ha $3\sin|\pi - x| - 4\cos x = 3\sin(\pi/2) - 4\cos(\pi/2) = 3$, quindi in un intorno di $\pi/2$ si ha $f(x) = 3\sin|\pi - x| - 4\cos x$ e inoltre $|pi - x| = \pi - x$; dunque la funzione è uguale a

$$f(x) = 3\sin(\pi - x) - 4\cos x,$$

che è derivabile e

$$f'(x) = -3\cos(\pi - x) + 4\sin x.$$

Sostituendo $x = \pi/2$ si ha $f'(\pi/2) = 4$.

3. *Calcolare la retta tangente al grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x}\log x \arctan(x-6)$$

in $x = 6$.

Si ha $f(6) = 0$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\log x \arctan(x-6) + \frac{1}{x^2}\arctan(x-6) + \frac{1}{x}\log x \frac{1}{1+(x-6)^2}.$$

Dunque $f'(6) = \frac{1}{6}\log 6$.

L'equazione della retta tangente è

$$y = f(6) + f'(6)(x-6) = \frac{1}{6}\log 6(x-6) = \frac{\log 6}{6}x - \log 6.$$

4. *Descrivere i punti di non-derivabilità di*

$$f(x) = \sqrt{||x|-5| - |x| + 5}$$

La funzione si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -5 \\ \sqrt{2x+10} & \text{se } -5 \le x \le 0 \\ \sqrt{-2x+10} & \text{se } 0 < x \le 5 \\ 0 & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Dunque, si ha $f'_-(-5) = f'_+(5) = 0$, $f'_+(-5) = +\infty$, $f_-(0) = 1/\sqrt{10}$, $f_+(0) = -1/\sqrt{10}$, $f'_-(-5) = -\infty$.

Dunque -5, 0 e 5 sono punti angolosi.

5. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x^2\cos\Big(\frac{2}{x}\Big) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}\Big).$$

Cambiando variabile $y = 1/x$, si ottiene il limite

$$\lim_{y\to0^+}\frac{\cos 2y + (1-y)e^y}{y^2} = (H) = \lim_{y\to0^+}\frac{-2\sin 2y + ye^y}{2y}$$

$$= (H) = \lim_{y\to0^+}\frac{-4\cos 2y + (y+1)e^y}{2} = -\frac{3}{2}.$$

6. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\sqrt{x} + 2x - 2)}{\log(x + 3x^2 - 3)}$$

Si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\sqrt{x}+2x-2)}{\log(x+3x^2-3)}=(H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(1/2\sqrt{x})+2}{\sqrt{x}+2x-2}}{\frac{1+6x}{x+3x^2-3}}.$$
Raccogliendo gli infiniti di ordine maggiore il limite diviene
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2x}}{\frac{6x}{3x^2}}=\frac{1}{2}.$$

7. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\log(1+x+x^2)-\tan x\sin x}{x^3}$$

In questo caso il calcolo è possibile ma risulta molto complicato. *Si sconsiglia quindi l'uso della regola dell'Hôpital.*

8. *Calcolare (se possibile) tramite la regola dell'Hôpital*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x+\sin x)}{\log(\log^3 x+\cos x)}$$

Il rapporto delle derivate risulta
$$\frac{\frac{1}{\log x+\sin x}\cdot(\frac{1}{x}+\cos x)}{\frac{1}{\log^3 x+\cos x}\cdot(\frac{3\log^2 x}{x}-\sin x)}=\frac{\log^3 x+\cos x}{\log x+\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}+\cos x}{\frac{3\log^2 x}{x}-\sin x},$$
il cui limite non esiste, e quindi non si ouò applicare la regola dell'Hôpital.

Foglio di esercizi N. 6 - Soluzioni

1. *Determinare il polinomio di Taylor di ordine* 4 *e centro* 0 *di* $f(x)=\cos(5\tan x)-\cos(5\sin x)$ *e calcolare il limite*
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x(\cos(5\tan x)-\cos(5\sin x))+5x^4}{2x^4+\sin(x^5)-x^6};$$

Si ha
$$T^4\cos y=1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4,$$
e
$$T^4\tan x=x+\frac{1}{3}x^3,$$
quindi
$$\begin{aligned}T^4(\cos(5\tan x))&=T^4\Big(1-\frac{5^2}{2}(x+\frac{1}{3}x^3)^2+\frac{5^4}{24}(x+\frac{1}{3}x^3)^4\Big)\\&=1-\frac{5^2}{2}(x^2+\frac{2}{3}x^4)+\frac{5^4}{24}x^4\end{aligned}$$

Analogamente, dato che
$$T^4\sin x=x-\frac{1}{6}x^3,$$

si ha
$$T^4(\cos(5\sin x)) = T^4\Big(1 - \frac{5^2}{2}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{5^4}{24}(x - \frac{1}{6}x^3)^4\Big)$$
$$= 1 - \frac{5^2}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + \frac{5^4}{24}x^4$$

Dunque
$$T^4(\cos(5\tan x) - \cos(5\sin x)) = -\frac{5^2}{2}(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})x^4 = -\frac{25}{2}x^4,$$
e, ricordandosi che $\sin(x^5) = o(x^4)$, il limite diviene
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{25}{2}x^4\cos x + 5x^4}{2x^4} = -\frac{25}{4}\lim_{x\to 0^+}\cos x + \frac{5}{2} = -\frac{15}{4}.$$

2. *Calcolare il polinomio di Taylor di centro* 0 *e ordine* 3 *di*
$$f(x) = \sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[4]{1-3x} - 2;$$

Calcoliamo il polinomio di Taylor $T^3((1+\alpha x)^{\frac{1}{m}})$ usando la definizione. Abbiamo
$$D(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1}\alpha, \qquad D^{(2)}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-2}\alpha^2,$$
$$D^{(3)}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-3}\alpha^3,$$
quindi (usando la formula per $T^3 f$)
$$T^3((1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}) = 1 + \frac{\alpha}{m}x + \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)x^2 + \frac{\alpha^3}{6}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)x^3.$$

In particolare ($\alpha = 4$ e $m = 3$)
$$T^3(\sqrt[3]{1+4x}) = T^3((1+4x)^{\frac{1}{3}}) = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{2^4}{3^2}x^2 + \frac{2^6 5}{3^4}x^3$$
e ($\alpha = -3$ e $m = 4$)
$$T^3(\sqrt[4]{1-3x}) = T^3((1-3x)^{\frac{1}{4}}) = 1 - \frac{3}{4}x - \frac{3^3}{2^5}x^2 - \frac{3^3}{2^7}7x^3.$$

Infine
$$T^3(\sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[4]{1-3x} - 2) = \frac{7}{12}x - \Big(\frac{2^4}{3^2} + \frac{3^3}{2^5}\Big)x^2 + \Big(\frac{5\cdot 2^6}{3^4} - \frac{7\cdot 3^3}{2^7}\Big)x^3.$$

3. *Calcolare il polinomio di Taylor di centro* 0 *e ordine* 5 *della funzione*
$$f(x) = 3x\cos(2x) + 6\log(1+x^3).$$

Dato che $\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \cdots$, si ha $T^5(6\log(1+x^3)) = 6x^3$, mentre
$$T^5(3x\cos(2x)) = 3xT^4(\cos(2x)) = 3x\Big(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4\Big) = 3x - 6x^3 + 2x^5.$$

Dunque, si ha
$$T^5 f = 3x + 2x^5.$$

4. *Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 2 di* $f(x) = e^x \log(1+x) \cos x$ *e calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log(1+x)\cos x - \sin x}{\sin x \tan x}.$$

Si ha

$$T^2 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad T^2 \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}, \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Dunque

$$\begin{aligned} T^2(e^x \log(1+x)\cos x) &= T^2((1+x+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^2}{2})(1-\frac{1}{2}x^2)) \\ &= x\,T^1((1+x+\frac{x^2}{2})(1-\frac{x}{2})(1-\frac{1}{2}x^2)) \\ &= x\,T^1((1+x)(1-\frac{x}{2})) = x(1+\frac{1}{2}x) = x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Ricordando che $\sin x = x + o(x)$ e $\tan x = x + o(x)$, il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log(1+x)\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. *Determinare gli intervalli dove la funzione*

$$f(x) = \left|\frac{x}{\log|2x|}\right|$$

è non decrescente.

Chiamiamo

$$g(x) = \frac{x}{\log|2x|}.$$

La funzione f si può anche scrivere

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \\ -g(x) & \text{se } x < -\frac{1}{2} \text{ o } 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata di g:

$$g'(x) = \frac{\log|2x| - 1}{\log^2|2x|}.$$

Il segno di g' è quello di $\log|2x| - 1$, che è non negativo se $2|x| \geq e$, ovvero $|x| \geq e/2$. Dato che

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \\ -g'(x) & \text{se } x < -\frac{1}{2} \text{ o } 0 < x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

si ha che $f' \geq 0$ negli intervalli $(-\frac{e}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(e/2, +\infty)$.

Gli intervalli in cui è non decrescente sono (quelli contenuti in uno sei seguenti) $[-\frac{e}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$ e $[\frac{e}{2}, +\infty)$.

6. *Determinare il più piccolo valore* a *tale che la funzione*

$$f(x) = e^x \log^2|x-5|$$

sia crescente in $(a, +\infty)$.

Dato che la funzione non è definita per $x = 5$ deve essere $a \geq 5$, per cui possiamo limitarci a studiare la funzione

$$g(x) = e^x \log^2(x-5).$$

La derivata di g è

$$g'(x) = e^x \log^2(x-5) + e^x\, 2\log(x-5)\frac{1}{x-5} = e^x \log(x-5)(\log(x-5)(x-5)+2)\frac{1}{x-5}$$

I termini e^x e $x-5$ sono positivi, mentre si ha $\log(x-5) > 0$ se e solo se $x-5 > 1$, ovvero $x > 6$. Studiamo il segno di $h(x) = (x-5)\log(x-5)+2$ per $x > 5$. La derivata di h è

$$h'(x) = \log(x-5)+1,$$

Dunque h è decrescente in $(5, 5+e^{-1})$ e crescente in $(5+e^{-1}, +\infty)$, e il suo minimo vale $h(5+e^{-1}) = 2-e^{-1}$, che è strettamente positivo. Dunque h 'e sempre positiva, per cui $g' > 0$ per $x > 6$ e la risposta è $a = 6$.

7. *Determinare gli intervalli in cui è crescente la funzione*

$$f(x) = |x^2-4|e^{x^2/3}.$$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)e^{x^2/3} & \text{se } |x| > 2, \\ (4-x^2)e^{x^2/3} & \text{se } -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Studiamo quindi la funzione

$$g(x) = (x^2-4)e^{x^2/3},$$

la cui derivata è

$$g'(x) = (2x + (x^2-4)\frac{2}{3}x)e^{x^2/3} = \frac{2x}{3}(x^2-1)e^{x^2/3}.$$

Si ha $g' > 0$ negli intervalli $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$.

Dato che

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{se } |x| > 2, \\ -g'(x) & \text{se } -2 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

si ha $f' > 0$ negli intervalli $(-2, -1)$, $(0, 1)$ e $(2, +\infty)$, in cui f è quindi crescente.

8. *Calcolare la derivata seconda di*

$$f(x) = e^x(x^2-5x+8)$$

e determinare gli intervalli in cui è strettamente positiva.

Si ha

$$f'(x) = e^x(x^2-3x+3), \qquad f''(x) = e^x(x^2-x);$$

dunque $f'' > 0$ per $x < 0$ e $x > 1$.

Foglio di esercizi N. 7 - soluzioni

1. *Determinare tutti gli estremi locali della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & se\ x \notin \mathbf{Z} \\ x^2 + 2x & se\ x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

La funzione f è definita 'modificando' la funzione $g(x) = \sqrt{|x|}$ nei punti interi.

Esaminiamo prima la funzione g. Essa ha un unico punto di minimo (relativo e assoluto). Dato che f non modifica g in 0 esso continua ad essere un punto di minimo relativo.

Esaminiamo i restanti punti interi. Dove $x^2 + 2x < \sqrt{|x|}$ si avra' un punto di minimo relativo. Dove $x^2 + 2x > \sqrt{|x|}$ si avra' un punto di massimo relativo. Esaminando i grafici delle due funzioni si conclude che $0, -1, -2$ sono punti di minimo relativo, i restanti punti interi sono di massimo relativo.

2. *Determinare tutti gli estremi locali della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & se\ x \notin \mathbf{Z} \\ 3x^2 - 6 & se\ x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

La funzione f è definita 'modificando' la funzione $g(x) = 2x - x^3$ nei punti interi.

Esaminiamo prima la funzione g. Calcolandone la derivata $g'(x) = 2-3x^2$ ed esaminando la monotonia, si ha che $-\sqrt{2/3}$ è un punto di minimo relativo, $\sqrt{2/3}$ è un punto di massimo relativo, Dato che f non modifica g in questi punti essi continuano ad essere punti di estremo relativo.

Esaminiamo i punti interi. Dove $3x^2 - 6 < 2x - x^3$ si avra' un punto di minimo relativo. Dove $3x^2 - 6 < 2x - x^3$ si avra' un punto di massimo relativo.

La prima disequazione è equivalente a

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 < 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (x^2 - 2)(x + 3) < 0,$$

ovvero è verificata per $x < -3$ e per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. I punti interi che verificano queste condizioni sono -1, 0, 1 e tutti i punti interi minori o uguali a -4.

La seconda disequazione è verificata per $-3 < x < -\sqrt{2}$ e per $x > \sqrt{2}$. I punti interi che verificano queste condizioni sono -2 e tutti i punti interi maggiori o uguali a 2.

Dunque, l'insieme dei punti di minimo relativo di f è

$$\{1, 0, -\sqrt{2/3}, -1, -4, -5, -6 \ldots\};$$

l'insieme dei punti di massimo relativo di f è

$$\{-2, \sqrt{2/3}, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

3. *Determinare tutti gli estremi locali della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & se\ x \notin \mathbf{Z} \\ |x| - 1 & se\ x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dal grafico delle funzioni si ha che 0 ò punto di minimo relativo, tutti gli altri punti sono di massimo relativo.

4. *Studiare la funzione*
$$g(x) = \arctan\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{x}{1+x^2},$$
e in seguito le funzioni
$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$$
e
$$h(x) = (x-1) \arctan \frac{1}{|x-1|}.$$

La funzione ha dominio $x \neq 0$. Dato che g è dispari, basta studiarla per $x > 0$. La sua derivata è
$$g'(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2},$$
e quindi è negativa. Dunque g è decrescente. Dato che
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$
si ha che g è positiva per $x > 0$ (e negativa per $x < 0$).

La funzione f è pari e verifica
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$
Dato che $f' = g$ la funzione è strettamente crescente per $x > 0$ (e strettamente decrescente per $x < 0$). La sua estensione per continuità in 0 ha un punto angoloso con derivate $f'_\pm(0) = \pm\pi/2$.

La funzione
$$\overline{h}(x) = x \arctan \frac{1}{|x|} = \begin{cases} f(x) & \text{per } x > 0 \\ -f(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$
è dispari ed è estendibile ad una funzione derivabile in 0, con asintoti $y = \pm 1$ a $\pm\infty$.

La funzione $h(x)$ si ottiene da $\overline{h}(x)$ con un cambiamento di variabili che porta 0 in 1.

5. *Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione*
$$f(x) = \log(x+1) + |\log|x-3||$$
e gli eventuali punti di flesso.

La funzione vale
$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) + \log|x-3| & \text{se } -1 < x \leq 2 \text{ o } x \geq 4 \\ \log(x+1) - \log|x-3| & \text{se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4. \end{cases}$$
La derivata prima vale
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} & \text{se } -1 < x < 2 \text{ o } x > 4 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} & \text{se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4. \end{cases}$$
La derivata seconda vale
$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2x^2-4x+10}{(x+1)^2(x-3)^2} & \text{se } -1 < x < 2 \text{ o } x > 4 \\ 8\frac{(x-1)}{(x+1)^2(x-3)^2} & \text{se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4, \end{cases}$$
quindi
$$\begin{cases} f''(x) \text{ è negativa se } -1 < x < 2 \text{ o } x > 4 \\ f''(x) \text{ è positiva se } 2 < x < 3 \text{ o } 3 < x < 4, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f \text{ è concava in } (-1,1] \text{ e } [4,+\infty) \\ f \text{ è convessa in } [2,3) \text{ e } (3,4]. \end{cases}$$

La funzione non ha punti di flesso perchè non è derivabile nei punti in cui cambia di convessità.

6. *Determinare tutti gli intervalli in cui è concava*

$$f(x) = \arctan|x-\pi|.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-\pi)^2} & \text{se } x > \pi \\ -\frac{1}{1+(x-\pi)^2} & \text{se } x < \pi, \end{cases}$$

e la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\pi)}{(1+(x-\pi)^2)^2} & \text{se } x > \pi \\ -\frac{2(x-\pi)}{(1+(x-\pi)^2)^2} & \text{se } x < \pi. \end{cases}$$

Dunque f è concava sia in $(-\infty,\pi]$ che $[\pi,+\infty)$, ma non è concava negli intervalli che contengono π all'interno (perchè $f'_\pm(\pi) = \pm 1$).

7. *Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione*

$$f(x) = (x-2)|x^2-2|$$

e gli eventuali punti di flesso.

Consideriamo $g(x) = (x-2)(x^2-2)$. La sua derivata seconda è $g''(x) = 6x-4$; quindi

$$f''(x) = \begin{cases} 6x-4 & \text{se } |x| > \sqrt{2} \\ 4-6x & \text{se } |x| < \sqrt{2}, \end{cases}$$

f è concava su $(-\infty,-\sqrt{2}]$ e su $[2/3,\sqrt{2}]$, f è convessa su $[-\sqrt{2},2/3]$ e su $[\sqrt{2},+\infty]$. L'unico punto di flesso è $2/3$.

8. *Determinare gli intervalli in cui è convessa/concava la funzione*

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Per semplificare i calcoli effettuiamo la traslazione $z = x-2$, e studiamo

$$g(z) = z^3 - z.$$

Si ha $g''(z) = 6z$, e quindi g è concava/convessa per $z > 0/z < 0$. Dunque f è concava/convessa per $x > 2/x < 2$.

Limiti di successioni

Calcolare i seguenti limiti:

1.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n-2}+(n-2)^n}{4(n^n)-3(n!)}$$

2.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n-3}+(n-3)^n}{6(n^n)+7(n!)}$$

3.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n+5)!)-\log(n!+5)}{\log(2n^6+\cos(n\pi))}$$

4.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n+6)!)-\log(n!+7)}{\log\Big(6n^8+\sin\big(n\frac{\pi}{2}\big)\Big)}$$

5.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-3^{n\log n}}{n^n}$$

6.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!+(2n)!}{n^n}$$

7.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n+2^n}{2^{(n^2)}}$$

8.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n+3^n}{4^{n\log n}}$$

9.
$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{n^2(n+1)+2}{n}\pi\right)$$

10.
$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{n^2(n-1)-3}{n}\pi\right)$$

11.
$$\lim_{n\to+\infty} (2^n+n!)\sin(4\arctan(n!))$$

12.
$$\lim_{n\to+\infty} (3^n-n!)\cos(\pi+\arctan(n!))$$

13.
$$\lim_{n\to+\infty} (2^n-n!)\sin\big(\frac{\pi}{2}+\arctan(n!)\big)$$

14.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}+3(n+1)^{n+1}}{n^n+n!}\sin\frac{\pi}{n}$$

15.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}+2(n!)}{(n-1)^n+2(n^n)}\tan\frac{2\pi}{n}$$

16.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+\sin n)+(n+1)!}{n!+2^n}\sin\frac{2\pi}{n}$$

17.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\log n}+n\sin(n!)}{e^{n+1}+n^2}\tan\frac{2\pi}{n}$$

18.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\log n}+e^n\cos(n!)}{e^{n-1}+\log n}\tan\frac{\pi}{2n}$$

19.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-2)!n^{n+2}-(n+1)!n^{n-1}}{n^n((n-2)!+3^n)}$$

20.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!n^{n-2}-(n-2)!n^{n+2}}{n^n((n-1)!+(n-2)!\log n)}$$

21.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)!n^n-(n+1)!n^{n-4}}{2(n-4)!\,(n^n-n!\log n)}$$

22.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{(1/(n^2))}-((n+2)!)^{(1/(n^2))}}{\log(n^3+1)\ \sin(\frac{1}{n^2})}$$

23.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{(1/n^3)}-((n-1)!)^{(1/n^3)}}{\log(n^4+n)\ \tan(\frac{1}{2n^3})}$$

24.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}\big((7(n!))^{3/n!}-1\big)}{\log((n!)^6)\big((n!)^{2n-1}+n^2\big)}$$

25.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n!)^2)\big((n!)^{3n-1}+n^3\big)}{(n!)^{3n}\big((8(n!))^{2/n!}-1\big)}$$

26.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{2n}\big((7(n!))^{3/n!}-1\big)}{n^{2n}\log((n!)^6)\big((n!)^{2n-1}+n^2\big)}$$

27.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3n}\log((n!)^2)\big((n!)^{3n-1}+n^3\big)}{((n+1)!)^{3n}\big((8(n!))^{2/n!}-1\big)}$$

28.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big(n!\big)^{n-1}-\big((n-1)!\big)^n}{\Big((n-1)!\ (n-10)\Big)^{n-1}}$$

29.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big(n!\big)^{n-1}-\big((n-1)!\big)^n}{\Big((n-1)!\ (n-2)\Big)^{n-1}}$$

30.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^n-n^{(2n)}}{(n-1)^{(2n)}+(n+2)!}$$

31.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n)^n-n^{(3n)}}{(n-1)^{(3n)}+(n+3)!}$$

Limiti di successioni - svolgimenti

Scriveremo $a_n \approx b_n$ quando $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$.

1) Calcoliamo questo limite, raccogliendo il fattore n^n al numeratore e al denominatore. Si ha

$$\frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4(n^n) - 3(n!)} = \frac{n^n \left(\frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)}{n^n \left(4 - 3\frac{n!}{n^n}\right)}.$$

Innanzitutto, ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Inoltre, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2},$$

utilizzando il limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Quindi, il limite richiesto vale $\dfrac{1}{4e^2}$.

2) Questo limite è del tutto analogo al precedente. Procedendo allo stesso modo, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n-3} + (n-3)^n}{6(n^n) + 7(n!)} = \frac{1}{6e^3}.$$

3) Applicando le proprietà dei logaritmi, si ha

$$\log((n+5)!) - \log(n! + 5) = \log \frac{(n+5)!}{n! + 5}.$$

Inoltre

$$\frac{(n+5)!}{n!+5} = (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\left(\frac{n!}{n!+5}\right) \approx$$
$$\approx (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) \approx n^5,$$

per $n \to +\infty$. Perciò, l'espressione al numeratore si comporta come $\log(n^5) = 5\log n$. D'altra parte, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ è una quantità limitata, quindi

$$\log(2n^6 + \cos(n\pi)) \approx \log(2n^6) = \log 2 + 6\log n,$$

per $n \to +\infty$. Si ottiene quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n+5)!) - \log(n!+5)}{\log(2n^6 + \cos(n\pi))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5\log n}{\log 2 + 6\log n} = \frac{5}{6}.$$

4) Risolviamo questo limite, con un procedimento più rapido del precedente, supportato, però, dalle stesse considerazioni. Scriviamolo in una forma più semplice, eliminando le costanti e le quantità che non hanno alcuna influenza sul comportamento della successione all'infinito. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n+6)!) - \log(n!+7)}{\log(6n^8 + \sin(n\frac{\pi}{2}))} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n+6)!) - \log(n!)}{\log(n^8)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{6\log n}{8\log n} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

5) Separando i due termini al numeratore, si ha

$$\frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n} = \frac{3^n}{n^n} - \left(\frac{3^{\log n}}{n}\right)^n.$$

Si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{\log n}}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{\log n}}{e^{\log n}}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^{n\log n} = +\infty,\end{aligned}$$

dato che $\dfrac{3}{e} > 1$. Quindi, il limite richiesto vale $-\infty$.

6) Calcoliamo questo limite, separando i due termini al numeratore. Si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + (2n)!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}.$$

Si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n} = +\infty.$$

Giustifichiamo l'ultimo limite osservando che

$$\frac{(2n)!}{n^n} = \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \cdots \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot n! > \; n! \qquad \forall n \geq 1,$$

dato che ciascuno dei primi n termini è maggiore di 1.
Quindi il limite richiesto vale $+\infty$.

7) Il limite proposto vale 0. Per calcolarlo, osserviamo che

$$\frac{n^n + 2^n}{2^{n^2}} = \left(\frac{n}{2^n}\right)^n + 2^{(n-n^2)}.$$

Si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{(n-n^2)} = 0,$$

dato che $\lim_{n\to+\infty} (n - n^2) = -\infty$. Inoltre, dalla disuguaglianza

$$n \leq 2^{n-1} \qquad \forall n \geq 1,$$

si deduce

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{n}{2^n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \forall n \geq 1,$$

da cui segue

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)^n = 0.$$

8) Ragionando come nell'esercizio 5, si ha

$$\frac{n^n + 3^n}{4^{n\log n}} = \frac{n^n}{4^{n\log n}} + \left(\frac{3}{4^{\log n}}\right)^n.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{4^{n\log n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^{n\log n} = 0,$$

dato che $\frac{e}{4} < 1$. Dalla disuguaglianza

$$\left(\frac{3}{4^{\log n}}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \forall n \geq 3,$$

si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4^{\log n}}\right)^n = 0.$$

Quindi, il limite richiesto vale 0.

9) Osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze

$$\sin\left(\frac{n^2(n+1)+2}{n}\pi\right) = \sin\left(n(n+1)\pi + \frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

dato che $n(n+1)\pi$ è multiplo pari di π, qualunque sia n. Si ha, quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{n^2(n+1)+2}{n}\pi\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\\ &= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = 2\pi.\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proprietà $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \approx \frac{2\pi}{n}$, per $n \to +\infty$.

10) Procediamo come nell'esercizio precedente, osservando che

$$\sin\left(\frac{n^2(n-1)-3}{n}\pi\right) = \sin\left(n(n-1)\pi - \frac{3\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{-3\pi}{n}\right),$$

poichè $n(n-1)$ è pari, qualunque sia n. Si ottiene, quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{n^2(n-1)-3}{n}\pi\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{-3\pi}{n}\right)\\ &= -3\pi \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{-3\pi}{n}\right)}{\frac{-3\pi}{n}} = -3\pi.\end{aligned}$$

11) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Raccogliamo nel primo fattore il termine che tende all'infinito più velocemente. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(2^n+n!)\sin(4\arctan(n!)) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{n!}+1\right)n!\,\sin(4\arctan(n!))\\ &= \lim_{n\to+\infty} n!\,\sin(4\arctan(n!)),\end{aligned}$$

ricordando che $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$.
Per il calcolo dell'ultimo limite, possiamo procedere in diversi modi. Utilizzeremo, dapprima, una relazione nota dalla trigonometria e, nell'esercizio successivo, per il calcolo di un limite analogo, utilizzeremo un metodo alternativo e di carattere più generale. Ricordiamo, quindi, la seguente relazione

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0,$$

dalla quale si ottiene

$$\begin{aligned}\sin(4\arctan(n!)) &= \sin\left(4\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{n!}\right)\right)\right)\\ &= \sin\left(2\pi - 4\arctan\left(\frac{1}{n!}\right)\right)\\ &= -\sin\left(4\arctan\left(\frac{1}{n!}\right)\right).\end{aligned}$$

Ora, ricordando che $\arctan x \approx x$ e $\sin x \approx x$, per $x \to 0$, si ha

$$-\sin\left(4\arctan\left(\frac{1}{n!}\right)\right) \approx -\sin\left(\frac{4}{n!}\right) \approx -\frac{4}{n!},$$

per $n \to +\infty$. Quindi il limite richiesto vale -4.

12) Procedendo come nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(3^n - n!)\cos(\pi+\arctan(n!)) &= -\lim_{n\to+\infty} n!\cos(\pi+\arctan(n!))\\ &= \lim_{n\to+\infty} n!\cos(\arctan(n!))\\ &= \lim_{n\to+\infty} n!\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{n!}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n!\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n!}\right)\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Come anticipato nell'esercizio 11, calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty} n!\cos(\arctan(n!))$ con un metodo alternativo al precedente, e di carattere più generale. Determiniamo il limite della successione $n \to n!\cos(\arctan(n!))$, determinando il limite della funzione "corrispondente" $f(x) = x\cos(\arctan x)$ per $x \to +\infty$.
Calcoliamo, quindi, il $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(\arctan x)$, utilizzando la regola di De L'Hopital. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\cos(\arctan x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(\arctan x)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sin(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\sin(\arctan x)\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\\ &= \sin\frac{\pi}{2} = 1.\end{aligned}$$

Quindi, anche

$$\lim_{m\to+\infty} m\cos(\arctan m) = \lim_{n\to+\infty} n!\cos(\arctan(n!)) = 1,$$

avendo usato la semplice sostituzione $n! = m$.

13) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(2^n - n!)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(n!)\right) &= -\lim_{n\to+\infty} n!\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(n!)\right)\\ &= -\lim_{n\to+\infty} n!\cos(\arctan(n!))\\ &= -1,\end{aligned}$$

ricordando il risultato ottenuto nell'esercizio precedente.

14) Calcoliamo questo limite effettuando un raccoglimento al numeratore e al denominatore. Si ha

$$\frac{n^{n+1} + 3(n+1)^{n+1}}{n^n + n!} = \frac{n^{n+1}\left(1 + 3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)}{n^n\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = 0,$$

e che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1} + 3(n+1)^{n+1}}{n^n + n!}\sin\frac{\pi}{n} &= (1+3e)\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n}\\ &= \pi(1+3e)\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\\ &= \pi(1+3e).\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proprietà $\sin\dfrac{\pi}{n} \approx \dfrac{\pi}{n}$, per $n \to +\infty$.

15) Questo esercizio è simile al precedente. Lo risolveremo utilizzando lo stesso metodo.

$$\frac{n^{n+1} + 2(n!)}{(n-1)^n + 2(n^n)} = \frac{n^{n+1}\left(1 + \frac{2(n!)}{n^{n+1}}\right)}{n^n\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + 2\right)}.$$

Osservando che

$$0 < \frac{n!}{n^{n+1}} \leq \frac{n!}{n^n} \qquad \forall n \geq 1,$$

di nuovo, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}=0.$$

Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Quindi, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}+2(n!)}{(n-1)^n+2(n^n)}\tan\frac{2\pi}{n}&=\frac{1}{\frac{1}{e}+2}\lim_{n\to+\infty}n\tan\frac{2\pi}{n}\\&=\frac{2e\pi}{1+2e}\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\\&=\frac{2e\pi}{1+2e}.\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proprietà $\tan\frac{2\pi}{n}\approx\frac{2\pi}{n}$, per $n\to+\infty$.

16) Ricordiamo innanzitutto che $(n+1)!=(n+1)n!$ e lavoriamo sul fattore

$$\frac{n!(n+\sin n)+(n+1)!}{n!+2^n}=\frac{(n+1)!\left(\frac{n+\sin n}{n+1}+1\right)}{n!\left(1+\frac{2^n}{n!}\right)}.$$

Osserviamo che

$$\frac{n-1}{n+1}\le\frac{n+\sin n}{n+1}\le\frac{n+1}{n+1}\qquad\forall n\ge 1.$$

Perciò,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sin n}{n+1}=1.$$

Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n!(n+\sin n)+(n+1)!}{n!+2^n}\sin\frac{2\pi}{n}&=2\lim_{n\to+\infty}(n+1)\sin\frac{2\pi}{n}\\&=2\lim_{n\to+\infty}(n+1)\frac{2\pi}{n}=4\pi.\end{aligned}$$

Di nuovo, abbiamo usato la proprietà $\sin\frac{2\pi}{n}\approx\frac{2\pi}{n}$, per $n\to+\infty$.

17) Anche in questo esercizio, incominciamo a semplificare, osservando che

$e^{n+\log n} = e^n \cdot e^{\log n} = ne^n$. Si ha

$$\frac{e^{n+\log n} + n\sin(n!)}{e^{n+1} + n^2} = \frac{ne^n \left(1 + \frac{\sin(n!)}{e^n}\right)}{e^{n+1}\left(1 + \frac{n^2}{e^{n+1}}\right)}.$$

Inoltre

$$-\frac{1}{e^n} \leq \frac{\sin(n!)}{e^n} \leq \frac{1}{e^n} \qquad \forall n \geq 1,$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n!)}{e^n} = 0.$$

Inoltre, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{e^{n+1}} = 0$, dato che $n^2 << e^{n+1}$, per n abbastanza grande. Quindi, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\log n} + n\sin(n!)}{e^{n+1} + n^2} \tan\frac{2\pi}{n} &= \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} n \tan\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{e}.\end{aligned}$$

Anche qui, come nell'esercizio 15, abbiamo usato la proprietà $\tan\dfrac{2\pi}{n} \approx \dfrac{2\pi}{n}$, per $n \to +\infty$.

18) Questo esercizio si risolve in modo analogo al precedente.

$$\frac{e^{n+\log n} + e^n\cos(n!)}{e^{n-1} + \log n} = \frac{ne^n \left(1 + \frac{\cos(n!)}{n}\right)}{e^{n-1}\left(1 + \frac{\log n}{e^{n-1}}\right)}.$$

Come prima,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n!)}{n} = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{e^{n-1}} = 0,$$

dato che $\log n << e^{n-1}$, per n abbastanza grande. Quindi, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\log n} + e^n\cos(n!)}{e^{n-1} + \log n} \tan\frac{\pi}{2n} &= e \lim_{n\to+\infty} n \tan\frac{\pi}{2n} \\ &= e \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi e}{2}.\end{aligned}$$

19) Calcoliamo questo limite effettuando un raccoglimento al numeratore e al denominatore. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(n-2)!\ n^{n+2}-(n+1)!\ n^{n-1}}{n^n((n-2)!+3^n)} &= \frac{(n-2)!\ n^{n-1}\big(n^3-(n+1)n(n-1)\big)}{n^n(n-2)!\left(1+\frac{3^n}{(n-2)!}\right)} \\ &= \frac{n^3-(n^3-n)}{n\left(1+\frac{3^n}{(n-2)!}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{3^n}{(n-2)!}\right)}.\end{aligned}$$

Valutiamo ora la quantità $\dfrac{3^n}{(n-2)!}$. Con la semplice sostituzione $n-2=m$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{(n-2)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9\cdot 3^{n-2}}{(n-2)!}=9\lim_{m\to+\infty}\frac{3^m}{m!}=0,$$

quindi il limite richiesto vale 1.

20) Risolviamo questo esercizio, raccogliendo come nel precedente

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)!\ n^{n-2}-(n-2)!\ n^{n+2}}{n^n((n-1)!+(n-2)!\log n)} &= \frac{(n-2)!\ n^{n-2}\big((n+2)(n+1)n(n-1)-n^4\big)}{n^n(n-1)!\left(1+\frac{\log n}{n-1}\right)} \\ &= \frac{n(2n^2-n-2)}{n^2(n-1)\left(1+\frac{\log n}{n-1}\right)}.\end{aligned}$$

Osservando che $\log n << (n-1)$, per n abbastanza grande, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n-1}=0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)!\ n^{n-2}-(n-2)!\ n^{n+2}}{n^n((n-1)!+(n-2)!\log n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n^2-n-2)}{n^2(n-1)}=2.$$

21) Di nuovo, raccogliamo al numeratore e al denominatore. Si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{(n-3)!\ n^n-(n+1)!\ n^{n-4}}{2(n-4)!(n^n-n!\log n)} &= \frac{(n-3)!\ n^{n-4}\big(n^4-(n+1)n(n-1)(n-2)\big)}{2n^n(n-4)!\left(1-\frac{n!\log n}{n^n}\right)} \\ &= \frac{n(n-3)(n^3-(n^3-2n^2-n+2))}{2n^4\left(1-\frac{n!\log n}{n^n}\right)} \\ &= \frac{(n-3)(2n^2+n-2)}{2n^3\left(1-\frac{n!\log n}{n^n}\right)}.\end{aligned}$$

Per calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\log n}{n^n}$, osserviamo che

$$\frac{n!\log n}{n^n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1\cdot\log n}{n} \le \frac{\log n}{n} \qquad \forall n \ge 1,$$

dato che ciascuno dei primi $n-1$ fattori è minore o uguale a 1.
Poichè $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\log n}{n^n} = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)!\; n^n - (n+1)!\; n^{n-4}}{2(n-4)!(n^n - n!\log n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)(2n^2+n-2)}{2n^3} = 1.$$

22) Il denominatore si presenta nella forma indeterminata del tipo $\infty\cdot 0$. Lo approssimiamo con l'espressione $3\log n\cdot\dfrac{1}{n^2}$, dato che, per $n\to+\infty$

$$\log(n^3+1) \approx \log(n^3) = 3\log n \quad \text{e} \quad \sin\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}.$$

Al numeratore, effettuiamo un raccoglimento.

$$(n!)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - ((n+2)!)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = (n!)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)}\left(1 - ((n+2)(n+1))^{\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right).$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{n\to+\infty} (n!)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Si presenta nella forma indeterminata del tipo ∞^0. In forma esponenziale, si ha

$$(n!)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^{\frac{1}{n^2}\log(n!)}.$$

Inoltre

$$\frac{\log(n!)}{n^2} \le \frac{\log(n^n)}{n^2} = \frac{n\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n} \quad \forall n \ge 1.$$

Quindi, ricordando che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$, si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log(n!)}{n^2} = 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} (n!)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n^2}\log(n!)} = e^0 = 1.$$

Rimane da valutare l'espressione

$$\left(1 - ((n+2)(n+1))^{\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) = 1 - e^{\frac{\log((n+2)(n+1))}{n^2}}.$$

Osserviamo che l'argomento dell'esponenziale tende a zero, per $n\to+\infty$.

Ponendo $\dfrac{\log((n+2)(n+1))}{n^2} = t$, si ha $t \to 0^+$ e $1 - e^t \approx -t$. Quindi

$$1 - e^{\frac{\log((n+2)(n+1))}{n^2}} \approx -\frac{\log((n+2)(n+1))}{n^2} \approx -\frac{\log(n^2)}{n^2} = -\frac{2\log n}{n^2}.$$

Infine, recuperando i risultati dei passaggi precedenti, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{(\frac{1}{n^2})} - ((n+2)!)^{(\frac{1}{n^2})}}{\log(n^3+1)\sin(\frac{1}{n^2})} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{(\frac{1}{n^2})}\left(1 - ((n+2)(n+1))^{(\frac{1}{n^2})}\right)}{\frac{3\log n}{n^2}} \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{2\log n}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n^2}{3\log n}\right) \\
&= -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

23) Come nell'esercizio precedente, approssimiamo il denominatore con l'espressione $\dfrac{2\log n}{n^3}$, dato che $\log(n^4+n) \approx \log(n^4) = 4\log n$ e $\tan\left(\dfrac{1}{2n^3}\right) \approx \dfrac{1}{2n^3}$, per $n \to +\infty$.
Al numeratore, effettuiamo il raccoglimento

$$((n+1)!)^{(\frac{1}{n^3})} - ((n-1)!)^{(\frac{1}{n^3})} = ((n-1)!)^{(\frac{1}{n^3})}\left((n(n+1))^{(\frac{1}{n^3})} - 1\right).$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{n\to+\infty} ((n-1)!)^{(\frac{1}{n^3})}.$$

In forma esponenziale, si ha

$$((n-1)!)^{(\frac{1}{n^3})} = e^{\frac{1}{n^3}\log((n-1)!)}.$$

Inoltre

$$\frac{\log((n-1)!)}{n^3} < \frac{\log(n!)}{n^2} \qquad \forall n \geq 2.$$

Ricordando il risultato dell'esercizio precedente, si ha quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n-1)!)}{n^3} = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} ((n-1)!)^{(\frac{1}{n^3})} = 1.$$

Risolviamo la restante parte del limite con un procedimento sostanzialmente equivalente a quello usato nell'esercizio precedente.
Dopo aver introdotto la forma esponenziale di $(n(n+1))^{(\frac{1}{n^3})}$, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\dfrac{\log(n(n+1))}{n^3}$.

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n(n+1))^{(\frac{1}{n^3})}-1}{\frac{2\log n}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\log(n(n+1))}{n^3}}-1}{\frac{\log(n(n+1))}{n^3}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log(n(n+1))}{n^3}}{\frac{2\log n}{n^3}}.$$

Il primo limite è uguale a 1, essendo nella forma (notevole) del tipo $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{e^t-1}{t}$, con $t = \dfrac{\log(n(n+1))}{n^3}$. Il secondo è uguale a 1, dato che $\log(n(n+1)) \approx \log(n^2) = 2\log n$, per $n \to +\infty$.
Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{(\frac{1}{n^3})} - ((n-1)!)^{(\frac{1}{n^3})}}{\log(n^4+n)\tan(\frac{1}{2n^3})} = 1.$$

24) Utilizziamo al numeratore la funzione esponenziale e raccogliamo al denominatore, ottenendo

$$\frac{(n!)^{2n}\left(\exp(\frac{3\log(7(n!))}{n!})-1\right)}{6\log(n!)\ (n!)^{2n-1}\left(1+\frac{n^2}{(n!)^{2n-1}}\right)}.$$

Analogamente a quanto fatto negli esercizi 22 e 23, valutiamo l'espressione $\exp\left(\dfrac{3\log(7(n!))}{n!}\right)-1$. Si ha

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{3\log(7(n!))}{n!}\right)-1 &\approx \frac{3\log(7(n!))}{n!}\\ &= \frac{3(\log 7+\log(n!))}{n!}\\ &\approx \frac{3\log(n!)}{n!},\end{aligned}$$

per $n \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n!)^{2n-1}} = 0,$$

dato che $n^2 << (n!)^{2n-1}$, per n abbastanza grande.
Quindi, dai risultati precedenti, si deduce

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}\left(\exp(\frac{3\log(7(n!))}{n!})-1\right)}{6\log(n!)\ (n!)^{2n-1}\left(1+\frac{n^2}{(n!)^{2n-1}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}\ \frac{3\log(n!)}{n!}}{6\log(n!)\ (n!)^{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\,(n!)^{2n-1}\cdot\log(n!)}{6\,(n!)^{2n-1}\cdot\log(n!)} = \frac{1}{2}.$$

25) Questo esercizio è del tutto simile all'esercizio 24. Sfruttiamo quindi i risultati ottenuti in precedenza. Per le considerazioni fatte nell'esercizio 24, n^3 è trascurabile rispetto a $(n!)^{3n-1}$ e

$$(8(n!))^{(\frac{2}{n!})} - 1 \approx \frac{2\log(n!)}{n!}, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n!)^2)((n!)^{3n-1}+n^3)}{(n!)^{3n}\left((8(n!))^{(\frac{2}{n!})}-1\right)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}}{2(n!)^{3n}\cdot\frac{\log(n!)}{n!}} = 1.$$

26) Questo limite è simile a quelli proposti negli esercizi 24 e 25. In particolare, la quantità $\dfrac{(7(n!))^{(\frac{3}{n!})}-1}{(n!)^{2n-1}+n^2}$ è già stata valutata nell'esercizio 24. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{2n}\left((7(n!))^{(\frac{3}{n!})}-1\right)}{n^{2n}\log((n!)^6)\,((n!)^{2n-1}+n^2)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3((n+1)!)^{2n}\cdot\frac{\log(n!)}{n!}}{6\,n^{2n}\log(n!)\cdot(n!)^{2n-1}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{2n}}{n^{2n}\,(n!)^{2n}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n(n!)}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{e^2}{2}.
\end{aligned}$$

27) Per il calcolo di questo limite, utilizziamo i risultati ottenuti nei due esercizi precedenti. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3n}\log((n!)^2)((n!)^{3n-1}+n^3)}{((n+1)!)^{3n}\left((8(n!))^{(\frac{2}{n!})}-1\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\,n^{3n}\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}}{2((n+1)!)^{3n}\cdot\frac{\log(n!)}{n!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n(n)!}{(n+1)!}\right)^{3n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}} = \frac{1}{e^3}.
\end{aligned}$$

28) Calcoliamo questo limite effettuando un raccoglimento al numeratore. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(n!)^{n-1}-((n-1)!)^n}{((n-1)!(n-10))^{n-1}} &= \frac{((n-1)!)^{n-1}(n^{n-1}-(n-1)!)}{((n-1)!)^{n-1}(n-10)^{n-1}}\\ &= \frac{n^{n-1}-(n-1)!}{(n-10)^{n-1}}\\ &= \frac{n^{n-1}\left(1-\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\right)}{(n-10)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Valutiamo ora l'espressione $\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}$.
Con la semplice sostituzione $n-1=m$, si ha

$$\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{m!}{(m+1)^m} < \frac{m!}{m^m} \qquad \forall m \geq 1.$$

Dato che $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{m!}{m^m}=0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}=0.$$

Perciò

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{n-1}-((n-1)!)^n}{((n-1)!(n-10))^{n-1}} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-10}\right)^{n-1}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-10}{10}}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione $m=\frac{n-10}{10}$, si ha $n=10m+10$ e

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-10}{10}}\right)^{n-1} &= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{10m+9}\\ &= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{10m}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{9} = e^{10}.\end{aligned}$$

29) Ripercorrendo i passaggi svolti nell'esercizio precedente, si trova che il limite richiesto vale e^2.

30) Per il calcolo di questo limite, effettuiamo un raccoglimento al numeratore e al denominatore. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(2n)^n - n^{(2n)}}{(n-1)^{(2n)} + (n+2)!} &= \frac{n^{(2n)}\left(\left(\frac{2n}{n^2}\right)^n - 1\right)}{(n-1)^{(2n)}\left(1 + \frac{(n+2)!}{(n-1)^{(2n)}}\right)} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(2n)} \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^n - 1}{1 + \frac{(n+2)!}{(n-1)^{(2n)}}}.\end{aligned}$$

Si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 0.$$

Valutiamo ora il termine $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)^{(2n)}}$, decomponendolo nel prodotto di $n+2$ fattori.

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)!}{(n-1)^{(2n)}} &= \frac{(n+2)!}{((n-1)^2)^n} \\ &= \frac{n+2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n}{(n-1)^2} \cdots \frac{5}{(n-1)^2} \cdot \frac{4}{(n-1)^2} \cdot \frac{3}{(n-1)^2} \cdot 2 \cdot 1 \\ &< \frac{3}{(n-1)^2} \cdot 2 \qquad \forall n \geq 4,\end{aligned}$$

dato che per i primi $n-1$ fattori valgono le disuguaglianze

$$\frac{4}{(n-1)^2} < \frac{5}{(n-1)^2} < \cdots < \frac{n+1}{(n-1)^2} < \frac{n+2}{(n-1)^2} < 1 \qquad \forall n \geq 4.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{(n-1)^{(2n)}} = 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^n - n^{(2n)}}{(n-1)^{(2n)} + (n+2)!} &= -\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(2n)} \\ &= -\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(2n)}} \\ &= -\frac{1}{e^{-2}} = -e^2.\end{aligned}$$

31) Ripercorrendo i passaggi svolti nell'esercizio precedente, si trova che il limite richiesto vale $-e^3$.

Limiti di funzioni

1) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1+2x)^{\log x} - 1}{\sin x \log(x^3)}$$

2) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-(1-7x)^{\log x}}{(e^{2x}-1)\log(x^3)}$$

3) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \Big(\cos 3x\Big)^{\dfrac{1}{x\sin 5x}}$$

4) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{4x}{\tan 4x}\right)^{\dfrac{1}{x\sin 3x}}$$

5) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^{\dfrac{1}{x\sin 2x}}$$

6) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+2x^2) - 2x^2\cos(x\sqrt{2})}{7x^4\sin(x^2)}$$

7) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{8x^2\cos(2x) - 2\log(1+4x^2)}{7x^2\tan(x^4)}$$

8) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2\sqrt{6}\log(1+2x^2) - 4x\sin(x\sqrt{6})}{31x^5\sin(x\sqrt{6})}$$

9) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x\sqrt{2}\sin(x\sqrt{3}) - 4\sqrt{6}\log(1+x^2)}{x^5\tan(x\sqrt{6})}$$

10) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5\arcsin(\cos x)}$$

11) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^5\arctan(\cos x)}$$

12) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x} + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{x^3\sinh(\cos x)}$$

13) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\arctan x} + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{x(\sin^2 x)\cosh(\sin x)}$$

14) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{(-\arctan x)} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{(\cosh(x)-1)\sin x}$$

15) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^{-2}) - \sin(x^2)}{9x^3\sin^3 x}$$

16) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{\sin x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x\sqrt{3})}{6x^2\sin(x^3)}$$

17) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{1}{\sin^3 x}) + \sin(\sin^3 x)}{7x^2\sin(x^7)}$$

18) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x\cos(3x) - \frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} + \frac{1}{3}x^3e^{-3x}}{17x^2\sin^3 x}$$

19) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-x}\sin(3x) - \frac{3x}{1+x} + 6x^3e^{-\frac{7}{6}x}}{x^3\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2}$$

20) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\arctan(\sin x) - \arctan x}$$

21) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\arctan(\sin x)) - \arctan(\sin x)}{\sin(\arctan x) - \sin x}$$

22) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))}$$

23) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))}$$

24) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) - \sin x^3}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))}$$

25) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\sin x^3 - \tan(\sin(\tan x)) + \sin(\sin(\tan x))}$$

26) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos 2x) + 2x^2 \cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x)}{\sin^2 x - 2\sin x \tan x + \tan^2 x}$$

27) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{3/2})}}{(x - \sin x)\sqrt[2]{x}}$$

28) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{\arctan(x^{3/4})}}{(e^x - 1)\sqrt[4]{x^3}}$$

29) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^4} \int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt$$

30) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^5} \int_2^x (10t^4 + \sin(t^7)t^2)dt$$

31) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \log_{(10\sqrt[3]{x})} (17\sqrt[10]{x} + \sin(10x))$$

32) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \log_{(2\sqrt[3]{x})} (17\sqrt[2]{x} + \sin(2x))$$

33) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^4} \int_0^{x^3} (8t^{1/3} + \sin(t^7)t^{1/4})dt$$

34) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^5} \int_2^{x^4} (10t^{1/4} + \sin(t^7)t^{1/5})dt$$

35) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{3x}^{2x^2} \sqrt{t}\cos(2t)\,dt + \int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt}{x\sin(x^2)}$$

36) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{3x}^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t)\,dt + \int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt}{x\tan(x^2)}$$

37) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^4}\right)^{-\frac{2}{\log x}}$$

38) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^5}\right)^{\frac{4}{\log x}}$$

39) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{(1-e^{-\frac{1}{x}})} - x^3\sin(\frac{1}{x})\right)^2 \log\Big(\cos(\frac{2}{x}) + \frac{5}{x}\sin(\frac{2}{x})\Big)$$

40) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{(1-e^{-\frac{1}{x}})} - x^3\sin(\frac{1}{x})\right)^2 \log\Big(\cos(\frac{4}{x}) - \frac{2}{x}\sin(\frac{4}{x})\Big)$$

41) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \Big(\frac{\cos(2x)+\cosh(2x)}{2}\Big)^{\dfrac{3}{4x^4}}$$

42) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \Big(\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2}\Big)^{\dfrac{4}{3x^4}}$$

43) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\int_{2/x}^{\log(3x)} \Big(e^t \arctan(t) + \frac{\sin t}{t^3}\Big)dt$$

44) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\int_{2/x}^{\log(2x)} \Big(e^t \arctan(t) + \frac{\sin t}{t^3}\Big)dt$$

45) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \big(16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x))\big)\int_1^{1/x} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt$$

46) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \big(12\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(\sqrt{3}x))\big)\int_1^{2/x} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt$$

47) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{(2(\sin x)^2)} - e^{2\sin(x^2)}}{x\big(\sin(x\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin(x)\big)}$$

48) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{(3(\sin x)^2)} - e^{3\sin(x^2)}}{x\big(\sin(2x) - 2\sin(x)\big)}$$

49) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cosh(2x)) + \log(\cos(2x))}{\log(\cosh(2x^2)) - \log(\cos(2x^2))}$$

50) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cosh(x\sqrt{2})) + \log(\cos(x\sqrt{2}))}{\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) - \log(\cos(x^2\sqrt{3}))}$$

51) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{1/3})} \Big(\frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}} + \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)}\Big)\,dt}{\Big(\log\Big(1+\exp\big(\frac{\sqrt{x}}{2}\big)\Big)\Big)^{1/3}}$$

52) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4\Big(\sqrt{\cos(x^2)} - \sqrt{\cos(x)}\Big)}{3(\cos(x^3) - \cos(x))}$$

53) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4\Big(\sqrt{\cos(x^2)} - \sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)}\Big)}{3(\cos(x^3) - \cos(\sqrt{2}\,x))}$$

54) Si calcoli il seguente limite di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} \Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)^{\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}$$

Limiti di funzione - svolgimenti

Useremo la notazione

$$f(x) \approx g(x) \text{ per } x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Inoltre ricordiamo la definizione di *o piccolo*:

$$f = o(g) \ (f \text{ è } \textit{o piccolo} \text{ di } g) \text{ per } x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dalla definizione abbiamo subito:

$o(g) + o(g) = o(g), \quad o(cg) = o(g), \quad o(g + o(g)) = o(g), \quad o(f)o(g) = o(fg),$

come nel seguente esempio:

$$\begin{aligned}(x^3 + o(x^3))(x + o(x^2)) + o(x^8) &= x^4 + o(x^5) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^8)\\ &= x^4 + o(x^4) + o(x^5) + o(x^8) = x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Per il calcolo di limiti che si presentano nelle forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞ faremo uso anche dei seguenti risultati.

Teorema di De L'Hôpital. (o regola di De L'Hôpital) *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ funzioni definite e derivabili in un intorno destro I di $x_0 \in [-\infty, +\infty[$. Supponiamo che sia verificata una delle due condizioni:*

i) (*forma* $0/0$) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = 0$*;*

ii) (*forma* ∞/∞) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = \infty$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Le stesse conclusioni sono valide per il limite $x \to x_0-$ (se f, g sono definite in un intorno sinistro di $x_0 \in]-\infty, +\infty]$).

Indicheremo nel corso degli esercizi con (H) l'applicazione del teorema di De L'Hôpital, come nel seguente esempio:

$$\lim_{x\to 0} x \log|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1/x} = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

È spesso utile tenere a mente alcuni "limiti notevoli", tra i quali ricordiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty;$$

$$(\alpha>0)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0; \qquad \lim_{x\to 0}x\log|x|=0.$$

Sarà di estrema utilità nel calcolo dei limiti la *formula di Taylor* (con il resto di Peano):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(x-a)^n \quad \text{per } x\to a,$$

valida per esempio per funzioni derivabili $n+1$ volte in un intorno di a. Il *polinomio di Taylor* di f di ordine n e di centro a verrà indicato con

$$T_a^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k;$$

se $a=0$ si ometterà l'indice a. Dalla formula di Taylor e dalla definizione di "o piccolo" si ottiene subito che in certi limiti si può sostituire alla funzione il suo polinomio di Taylor, dall'uguaglianza

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{T_a^n f(x)}{(x-a)^n}.$$

Svolgimenti

1) Cercheremo di svolgere questo esercizio usando per quanto possibile la regola di De l'Hôpital. Verifichiamo prima di tutto che si tratti di una forma indeterminata. Ricordiamo che si ha $x\approx\sin x$ per $x\to 0$, e quindi

$$\lim_{x\to 0+}\sin x\log(x^3)=\lim_{x\to 0+}3x\log x=0.$$

La funzione $(1+2x)^{\log x}$ presenta una forma indeterminata del tipo $1^{-\infty}$ per $x\to 0+$. In forma esponenziale si ha

$$(1+2x)^{\log x}=e^{\log x\log(1+2x)}.$$

Dobbiamo quindi calcolare il $\lim\limits_{x\to 0+}\log x\log(1+2x)$. Possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+2x)}{\frac{1}{\log x}}=(H)=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{-1}{x(\log x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{1+2x}(\log x)^2 = \lim_{x\to 0+} -2x(\log x)^2 = 0. \tag{1.1}$$

Anche qui abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{x\to 0+} x\log^\alpha x = 0$$

per ogni $\alpha > 0$. Quindi si ha che

$$\lim_{x\to 0+} (1+2x)^{\log x} = \lim_{x\to 0+} e^{\log x \log(1+2x)} = e^0 = 1. \tag{1.2}$$

Dunque si ha una forma indeterminata del tipo $0/0$. Possiamo usare il teorema di De L'Hôpital, tenendo conto di quanto visto sopra, e calcolando la derivata

$$D(e^{\log x\log(1+2x)}) = e^{\log x \log(1+2x)}\left(\frac{2}{1+2x}\log x + \frac{1}{x}\log(1+2x)\right).$$

Si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1+2x)^{\log x}-1}{\sin x \log(x^3)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\log x\log(1+2x)}-1}{x\log x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} e^{\log x\log(1+2x)}\left(\frac{\frac{2}{(1+2x)}\log x + \frac{1}{x}\log(1+2x)}{1+\log x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2\log x}{(1+2x)(1+\log x)} + \frac{\log(1+2x)}{x(1+\log x)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+}\frac{2\log x}{1+\log x} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+2x)}{x(1+\log x)}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+2x)}{x(1+\log x)}.$$

Possiamo ancora applicare il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+2x)}{x+x\log x} = (H) = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{1+2x}}{2+\log x} = 0.$$

Quindi il valore del nostro limite è $2/3$.

2) Questo esercizio è simile all' esercizio 1; lo si può quindi svolgere come già visto. Seguiamo qui una strada diversa, cercando di sfruttare alcuni limiti notevoli. Ricordiamo che $\log(1+y) \approx y$ e che $(e^y - 1) \approx y$ per $y \to 0+$, quindi (dato che, come in (1.1), $\log x \log(1-7x) \to 0$)

$$1 - (1-7x)^{\log x} = -(e^{\log x \log(1-7x)} - 1) \approx -\log x \log(1-7x) \text{ per } x \to 0+$$

e anche

$$e^{2x} - 1 \approx 2x \text{ per } x \to 0+ .$$

Dunque possiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-(1-7x)^{\log x}}{(e^{2x}-1)\log(x^3)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\log x \log(1-7x)}{2x\log(x^3)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\log x \log(1-7x)}{6x\log x}$$

$$= -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1-7x)}{x} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0+}\frac{-7x}{x} = \frac{7}{6}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato di nuovo che $\log(1-7x) \approx -7x$. Si consiglia di cercare di risolvere l'esercizio 1 seguendo anche questo metodo.

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^{+\infty}$, dato che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sin(5x)} = +\infty.$$

Possiamo riscrivere, usando la funzione esponenziale

$$(\cos 3x)^{\frac{1}{x\sin(5x)}} = e^{\frac{\log(\cos(3x))}{x\sin(5x)}} .$$

Dobbiamo quindi calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(3x))}{x\sin(5x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(3x))}{5x^2}$$

(abbiamo usato $\sin y \approx y$ per $y \to 0$) che si presenta nella forma $0/0$.

Possiamo usare il teorema di De L'Hôpital per ottenere:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(3x))}{5x^2} = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-3\tan(3x)}{10x} = -\frac{9}{10}$$

(infatti $\tan y \approx y$ per $y \to 0$). Il limite è quindi $e^{-\frac{9}{10}}$.

4) Come in 3 si ha una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$, poichè

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x}{\tan 4x} = 1.$$

Si ha quindi

$$\left(\frac{4x}{\tan 4x}\right)^{\frac{1}{x \sin 3x}} = e^{\log\left(\frac{4x}{\tan 4x}\right)\frac{1}{x \sin 3x}}.$$

Si deve calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{4x}{\tan 4x}\right)\frac{1}{x \sin 3x} = \lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{4x}{\tan 4x}\right)\frac{1}{3x^2} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\tan 4x}{4x}\right)\frac{4\tan 4x - 16x(1+\tan^2 4x)}{\tan^2 4x} \cdot \frac{1}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{4\tan 4x - 16x}{6x\tan^2 4x} - \frac{8}{3} = \lim_{x\to 0+} \frac{4\tan 4x - 16x}{96x^3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{24} \lim_{x\to 0+} \frac{\tan 4x - 4x}{x^3} - \frac{8}{3} = (H)$$

$$= \frac{1}{24} \lim_{x\to 0+} \frac{4\tan^2 4x}{3x^2} - \frac{8}{3} = \frac{8}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{16}{9}.$$

Notare che si è usato più volte il fatto che $\tan 4x \approx 4x$ per $x \to 0$.

Il limite cercato è $e^{-\frac{16}{9}}$.

5) Questo limite si può calcolare come i due precedenti. Un altro metodo possibile è usare gli sviluppi di Taylor (che può essere anch'esso utilizzato per i limiti 3 e 4). Per semplificare i calcoli considereremo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}}.$$

Il risultato del limite 5 sarà $1/L$.

Come in 3 e 4 ci si riconduce al calcolo di

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\frac{1}{2x^2}.$$

Se ricordiamo che

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\log(1+y) = y + o(y)$, si ha

$$\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \log(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Quindi si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\frac{1}{2x^2} = \lim_{x\to 0+} -\frac{3}{2}x^2\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Si ha $L = e^{-\frac{3}{4}}$. Il risultato del limite è quindi $1/L = e^{\frac{3}{4}}$.

6) Dato che $\sin(x^2) \approx x^2$ per $x \to 0$ il limite cercato è uguale a

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+2x^2) - 2x^2\cos(x\sqrt{2})}{7x^6}$$

Per semplificare i conti possiamo cambiare variabile, ponendo $y = x\sqrt{2}$. Si ha quindi

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+y^2) - y^2\cos y}{7\frac{y^6}{8}} \tag{6.1}$$

Cerchiamo di applicare il teorema di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
L = (H) = \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} &\frac{\frac{2y}{1+y^2} - 2y\cos y + y^2\sin y}{6y^5} \\
= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} &\frac{2y - (1+y^2)(2y\cos y - y^2\sin y)}{6y^5} \\
= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} &\frac{2 - (1+y^2)(2\cos y - y\sin y)}{6y^4} = (H) = \\
= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} &\frac{2y(y\sin y - 2\cos y) + (1+y^2)(3\sin y + y\cos y)}{24y^3} \\
= \frac{1}{21}\lim_{y\to 0+} &\frac{y^3\cos y + 5y^2\sin y - 3y\cos y + 3\sin y}{y^3} \\
= \frac{1}{21}\lim_{y\to 0+} &\left(\cos y + 5\frac{\sin y}{y} + 3\frac{\sin y - y\cos y}{y^3}\right) \\
= \frac{1}{21}(1+5) + \frac{1}{7}\lim_{y\to 0+} &\frac{\sin y - y\cos y}{y^3} = (H) = \\
= \frac{6}{21} + \frac{1}{7}\lim_{y\to 0+} &\frac{\cos y - \cos y + y\sin y}{3y^2} = \frac{6}{21} + \frac{1}{21} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Notare che abbiamo usato quando possibile il limite notevole di $\sin y/y$.

7) Come nell'esercizio 6 possiamo usare la relazione $\tan x^4 \approx x^4$ per $x \to 0$, e la sostituzione $y = 2x$ per semplificare i calcoli :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{8x^2\cos(2x) - 2\log(1+4x^2)}{7x^2\tan(x^4)} \tag{7.1}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{8x^2\cos(2x) - 2\log(1+4x^2)}{7x^6}$$

$$= -16\Big(\lim_{y\to 0+} 8\cdot\frac{(\log(1+y^2) - y^2\cos y)}{7y^6}\Big). \tag{7.2}$$

Il limite tra parentesi tonde è quello considerato nell'esercizio 6 (vedere la formula (6.1)), quindi il risultato cercato è $-16/3$.

Vogliamo però descrivere un altro metodo per ottenerlo, usando gli sviluppi di Taylor. Consideriamo il limite

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+y^2) - y^2\cos y}{y^6}.$$

Per calcolare L dobbiamo calcolare il polinomio di Taylor di grado 6 della funzione

$$f(y) = \log(1+y^2) - y^2\cos y.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

per cui

$$\log(1+y^2) = y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^6 + o(y^6)$$

e anche

$$y^2\cos y = y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{24}y^6 + o(y^6).$$

Quindi si ha

$$f(y) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)y^6 + o(y^6) = \frac{7}{24}y^6 + o(y^6).$$

Si ha quindi $L = \frac{7}{24}$.

Da (7.2) si ha che il risultato cercato è

$$-\frac{128}{7}L = -\frac{128}{7}\cdot\frac{7}{24} = -\frac{16}{3},$$

come già visto in precedenza.

8) Prima di tutto possiamo semplificare il limite ricordando che $\sin(x\sqrt{6}) \approx x\sqrt{6}$ per $x \to 0$, e usando la sostituzione $y = x\sqrt{2}$. Si ottiene così

$$\frac{2}{31} \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{6}\log(1+2x^2) - 2x\sin(x\sqrt{6})}{\sqrt{6}x^6}$$

$$= \frac{16}{31\sqrt{3}} \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt{3}\log(1+y^2) - y\sin(y\sqrt{3})}{y^6}. \tag{8.1}$$

Dobbiamo calcolare quindi il limite

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt{3}\log(1+y^2) - y\sin(y\sqrt{3})}{y^6}. \tag{8.2}$$

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor per il logaritmo ed il seno, ottenendo (come nell'esercizio precedente)

$$\log(1+y^2) = y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^6 + o(y^6)$$

e anche

$$\begin{aligned} y\sin(y\sqrt{3}) =& y\Big(y\sqrt{3} - \frac{1}{6}(y\sqrt{3})^3 + \frac{1}{120}(y\sqrt{3})^5 + o(y^5)\Big) \\ =& y^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}y^4\sqrt{3} + \frac{3}{40}y^6\sqrt{3} + o(y^6). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\log(1+y^2) - y\sin(y\sqrt{3}) \\ &\qquad = \sqrt{3}(y^2 - \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3}) - (y^2\sqrt{3} - \frac{y^4}{2}\sqrt{3} + \frac{3y^6}{40}\sqrt{3}) + o(y^6) \\ &\qquad = \Big(\frac{1}{3} - \frac{3}{40}\Big)y^6\sqrt{3} + o(y^6) = \frac{31}{120}y^6\sqrt{3} + o(y^6), \end{aligned}$$

e dunque

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{31}{120}y^6\sqrt{3} + o(y^6)}{y^6} = \frac{31}{120}\sqrt{3}, \tag{8.3}$$

e il risultato cercato è (si veda (8.1))

$$\frac{16}{31\sqrt{3}}L = \frac{2}{15}. \tag{8.4}$$

9) Questo esercizio è completamente analogo al precedente. Infatti, se usiamo il fatto che $\tan(x\sqrt{6}) \approx x\sqrt{6}$ per $x \to 0$, otteniamo il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x\sqrt{2}\sin(x\sqrt{3}) - 4\sqrt{6}\log(1+x^2)}{x^6\sqrt{6}}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{3}\log(1+x^2) - x\sin(x\sqrt{3})}{x^6}\Big).$$

La quantità tra parentesi in quest'ultima espressione è esattamente il limite L nella formula (8.2), il cui valore è $\frac{31}{120}\sqrt{3}$ come calcolato in (8.3). Quindi il risultato cercato è

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}L = -\frac{31}{30}.$$

Si consiglia di cercare di calcolare questo limite e i due precedenti anche mediante l'uso della regola dell'Hopital, come descritto nello svolgimento dell'esercizio 6, e confrontare i due metodi.

10) La funzione $\arcsin(\cos x)$ è continua in $x = 0$, e quindi possiamo sostituire nel limite $\arcsin(\cos 0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, ottenendo

$$\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5}.$$

In questo caso sembra che la regola dell'Hopital sia difficile da applicare (provare per credere!), dal momento che si deve derivare 5 volte la funzione composta $\sin(\sin x)$, e non sembrano facili le semplificazioni come per esempio nell'esercizio 6. Cerchiamo quindi di usare gli sviluppi di Taylor fino al quint'ordine per le funzioni $\sin(\sin x)$ e $\arctan x$. Si ha (ricordando lo sviluppo di Taylor del seno, e che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$):

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + o(\sin^5 x)$$

$$= \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + o(x^5).$$

Dal momento che

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$(\sin x)^3 = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \tag{10.1}$$

$$(\sin x)^5 = (x + o(x))^5 = x^5 + o(x^5),$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5) - \frac{1}{6}(x^3 - \frac{1}{2}x^5) + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5),$$

e quindi

$$\sin(\sin x) - \arctan x = \Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\Big)x^5 + o(x^5) = -\frac{1}{10}x^5 + o(x^5).$$

Il limite cercato è quindi

$$\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{10}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{5\pi}.$$

11) Questo limite è simite al precedente. Notiamo che si può sostituire nel limite $\arctan(\cos 0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, ottenendo

$$\frac{4}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^5}.$$

Anche qui utilizziamo gli sviluppi di Taylor fino al quint'ordine. Ricordando lo sviluppo dell'arcotangente, che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$ e tenendo conto degli sviluppi già visti in (10.1), si ottiene:

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + o(\sin^5 x) \\ &= (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5) - \frac{1}{3}(x^3 - \frac{1}{2}x^5) + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$x\cos x = x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5),$$

e quindi

$$\arctan(\sin x) - x\cos x = (\frac{3}{8} - \frac{1}{24})x^5 + o(x^5) = \frac{1}{3}x^5 + o(x^5).$$

Sostituendo questo sviluppo nel limite si ottiene il risultato:

$$\frac{4}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^5} = \frac{4}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{3}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{4}{3\pi}.$$

12) Dal momento che $\sinh(1) = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$ basta esaminare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x} + \log(1-x) - 1}{x^3}.$$

Cerchiamo di applicare il teorema di De L'Hôpital.

$$\begin{aligned} L =&(H) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x}\cos x - \frac{1}{1-x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{(1-x)e^{\sin x}\cos x - 1}{3x^2} \\ =&(H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-e^{\sin x}\cos x + (1-x)e^{\sin x}\cos^2 x - (1-x)e^{\sin x}\sin x}{6x} \\ =& \lim_{x\to 0+} e^{\sin x}\ \cos x \left(\frac{(1-x)\cos x - 1}{6x}\right) - \lim_{x\to 0+} e^{\sin x}(1-x)\ \frac{\sin x}{6x}. \end{aligned}$$

Se notiamo che $\sin x \approx x$, $e^{\sin x} \to 1$, $\cos x \to 1$, e $(1-x) \to 1$ per $x \to 0$, possiamo semplificare il limite ottenendo

$$\begin{aligned} L =& \lim_{x\to 0+} \frac{(1-x)\cos x - 1}{6x} - \frac{1}{6} \\ =& (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos x - (1-x)\sin x}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Il risultato cercato è quindi

$$\frac{1}{\sinh 1} L = \frac{2e}{3(1-e^2)}.$$

13) Questo esercizio è analogo all'esercizio 12. Si può quindi svolgere usando la regola di De L'Hôpital. Un altro modo è usare gli sviluppi di Taylor fino all'ordine 3. Si ha

$$e^{\arctan x} = 1 + \arctan x + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{6}(\arctan x)^3 + o((\arctan x)^3).$$

D'altronde

$$\begin{aligned} \arctan x \ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ \arctan^2 x &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + o(x^3) \\ \arctan^3 x &= (x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

e quindi, dato che $\arctan x \approx x$,

$$e^{\arctan x} = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Si ha anche

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

e quindi

$$e^{\arctan x} + \log(\frac{1-x}{e}) = e^{\arctan x} + \log(1-x) - 1 = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Il nostro limite vale dunque (dato che $\cosh(\sin x) \to 1$ e $\sin^2 x \approx x^2$)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\arctan x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x \sin^2 x \cosh(\sin x)}$$

$$(13.1) \qquad = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\arctan x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

Si consiglia di risolvere anche l'esercizio precedente usando gli sviluppi di Taylor.

14) Questo limite è analogo ai due precedenti. Si può quindi risolvere sia usando gli sviluppi di Taylor che utilizzando la regola di De L'Hôpital. Ricordando che $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ si ha $\cosh x - 1 \approx \frac{1}{2}x^2$ e quindi

$$(\cosh x - 1)\sin x \approx \frac{1}{2}x^3.$$

Il nostro limite vale quindi

$$2 \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\arctan x} + \log(\frac{1+x}{e})}{x^3}.$$

Cambiando variabile $y = -x$ otteniamo

$$-2 \lim_{y\to 0-} \frac{e^{\arctan y} + \log(\frac{1-y}{e})}{y^3}.$$

Questo limite è analogo a quello già considerato in (13.1). Quindi il risultato cercato è 1.

15) Dal momento che $x^{-2} \to +\infty$ per $x \to 0$, si ha $\arctan(x^{-2}) \to \frac{\pi}{2}$ per $x \to 0$. Quindi il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore si comporta come $9x^6$ (poichè $\sin^3 x \approx x^3$). Il nostro limite è quindi eguale al limite

$$L = \frac{1}{9} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^{-2}) - \sin(x^2)}{x^6}.$$

Notiamo che la variabile x compare sempre con potenze pari. Questo ci suggerisce il cambiamento di variabile $y = x^2$. Si ottiene quindi

$$L = \frac{1}{9} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(y^{-1}) - \sin y}{y^3}.$$

Notiamo che non possiamo usare gli sviluppi di Taylor a questo punto poichè l'argomento dell'arcotangente tende a $+\infty$. Applichiamo la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\big(\arctan(y^{-1})\big) = \frac{1}{1 + \big(\frac{1}{y}\big)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{y^2}\Big) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} L = (H) &= \frac{1}{9} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{1+y^2} - \cos y}{3y^2} \\ &= \frac{1}{27} \lim_{y\to 0+} \frac{1 - (1+y^2)\cos y}{y^2} \end{aligned} \tag{15.1}$$

A questo punto possiamo scegliere se utilizzare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 2 per il coseno, o procedere continuando ad usare la regola dell'Hopital. Scegliamo per esempio questa seconda strada (ma si consiglia di verificare anche mediante la prima – cfr. la risoluzione dell'esercizio 17):

$$\begin{aligned} L = (H) &= \frac{1}{27} \lim_{y\to 0+} \frac{-2y\cos y + (1+y^2)\sin y}{2y} \\ &= \frac{1}{27}\Big(-\lim_{y\to 0+} \cos y + \lim_{y\to 0+} (1+y^2)\frac{\sin y}{2y} + \lim_{y\to 0+} \frac{y}{2}\sin y\Big) \\ &= \frac{1}{27}(-1 + \frac{1}{2} + 0) = -\frac{1}{54}. \end{aligned}$$

16) Come nell'esercizio precedente il limite è nella forma indeterminata 0/0, e non è possibile utilizzare direttamente gli sviluppi di Taylor. Si può applicare la regola di De L'Hôpital, usando anche che $\sin(x^3) \approx x^3$, e che

$$D\big(\arctan(\frac{1}{\sin x})\big) = \frac{-\cos x}{1+\sin^2 x},$$

ottenendo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{\sin x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x\sqrt{3})}{6x^2\sin(x^3)}$$

$$(16.1) \qquad = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{\sin x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x\sqrt{3})}{x^5}$$

$$= (H) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{\cos x}{(1+\sin^2 x)} - \cos(x\sqrt{3})}{5x^4}$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - (1+\sin^2 x)\cos(x\sqrt{3})}{x^4}.$$

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor per seno e coseno fino all'ordine 4:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
\sin^2 x &= \Big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\
\cos(x\sqrt{3}) &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
&\cos x - (1+\sin^2 x)\cos(x\sqrt{3}) \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\Big) - \Big(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4\Big)\Big(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4\Big) + o(x^4) \\
&= \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione in (16.1) si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{30}\cdot\frac{\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{20}.$$

17) Questo limite è simile ai due precedenti, in special modo all'esercizio 15. In questo caso il limite è eseguito per $x \to 0-$, e quindi $(\sin x)^{-3} \to -\infty$ e

$$\lim_{x\to 0-} \arctan(\frac{1}{\sin^3 x}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Abbiamo quindi una forma indeterminata $0/0$. Notiamo che si ha

$$x^2 \sin(x^7) \approx x^9 \approx \sin^9 x;$$

Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = \frac{1}{7} \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{1}{\sin^3 x}) + \sin(\sin^3 x)}{\sin^9 x},$$

dove la variabile x compare sempre tramite $\sin^3$. Questo fatto ci suggerisce il cambiamento di variabile $y = -\sin^3 x$, che porta al limite

$$L = \frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(-\frac{1}{y}) + \sin(-y)}{-y^3}$$

$$= -\frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{y}) - \sin(y)}{y^3}.$$

Questo limite è stato considerato nell'esercizio 15. Applicando la regola di De L'Hôpital, si ottiene (come in (15.1)):

$$L = -\frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{1 - (1+y^2)\cos y}{3y^2}.$$

Dato che $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$, si ha

$$1 - (1+y^2)\cos y = 1 - (1+y^2)(1 - \frac{1}{2}y^2) + o(y^2) = -\frac{1}{2}y^2 + o(y^2),$$

e quindi

$$L = -\frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{-\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\cos y}{3y^2} = \frac{1}{42}.$$

18) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Al denominatore troviamo $x^2 \sin^3 x \approx x^5$. Un'applicazione della regola di De L'Hôpital sembra piuttosto complicata. Cerchiamo di usare quindi gli sviluppi di Taylor al grado 5. Abbiamo

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\cos(x\sqrt{10}) = 1 - 5x^2 + \frac{25}{6}x^4 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

$$e^{-3x} = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2),$$

e dunque

$$e^x \cos(3x) = 1 + x - 4x^2 - \frac{13}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{79}{30}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} = 1 + x - 4x^2 - 4x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{3}x^3 e^{-3x} = \frac{1}{3}x^3 - x^4 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5).$$

Si ha quindi

$$e^x \cos(3x) - \frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} + \frac{1}{3}x^3 e^{-3x} = \Big(\frac{79}{30} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}\Big)x^5 + o(x^5) = \frac{119}{30}x^5 + o(x^5),$$

ed infine

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x \cos(3x) - \frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} + \frac{1}{3}x^3 e^{-3x}}{17x^2 \sin^3 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{119}{30}x^5 + o(x^5)}{17x^5} = \frac{7}{30}.$$

19) Anche in questo esercizio usiamo gli sviluppi di Taylor. Esaminiamo però prima il denominatore: dato che $\arctan y \approx y$ per $y \to 0$, si ha

$$x^3\Big(\arctan\frac{x}{2}\Big)^2 \approx x^3\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}x^5.$$

Dobbiamo sviluppare il numeratore quindi fino all'ordine 5. Dagli sviluppi di esponenziale, sin e della funzione $1/(1+x)$ otteniamo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{243}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$\begin{aligned}
e^{-x}\sin(3x) &= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{243}{120}x^5 - x(3x - \frac{9}{2}x^3)\\
&\quad + \frac{1}{2}x^2(3x - \frac{9}{2}x^3) - \frac{1}{6}x^3 \cdot 3x + \frac{1}{24}x^4 \cdot 3x + o(x^5)\\
&= 3x - 3x^2 - 3x^3 + 5x^4 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5)\\
-\frac{3x}{1+x} &= -3x\Big(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4))\\
&= -3x + 3x^2 - 3x^3 + 3x^4 - 3x^5 + o(x^5)\\
e^{-\frac{7}{6}x} &= 1 - \frac{7}{6}x + \frac{49}{72}x^2 + o(x^2),\\
6x^3 e^{-\frac{7}{6}x} &= 6x^3 - 7x^4 + \frac{49}{12}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque si ottiene

$$e^{-x}\sin(3x) - \frac{3x}{1+x} + 6x^3 e^{-\frac{7}{6}x} = \frac{71}{60}x^5 + o(x^5),$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-x}\sin(3x) - \frac{3x}{1+x} + 6x^3 e^{-\frac{7}{6}x}}{x^3\Big(\arctan\frac{x}{2}\Big)^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{71}{60}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{4}x^5} = \frac{71}{15}.$$

20) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Calcoliamolo usando gli sviluppi di Taylor. A differenza degli esercizi precedenti, non è presente nè al numeratore nè al denominatore alcuna espressione riconducibile immediatamente a una funzione del tipo x^α; non è chiaro quindi a quale ordine ci dobbiamo arrestare negli sviluppi.

Consideriamo il numeratore; si nota che è una funzione di $\sin(\sin x)$. Dal momento che $\sin(\sin x) \approx x$, e $\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$, si ha

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)$$

$$= \sin(\sin x) - \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o((\sin(\sin x))^3) - \sin(\sin x) = -\frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o(x^3).$$

Dal momento che $\sin(\sin x) \approx x$ (verificarlo!), si ottiene

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) \approx -\frac{1}{3}x^3.$$

Dobbiamo quindi sviluppare anche il denominatore fino all'ordine 3. Si ha

$$\begin{aligned} \arctan(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3) \\ &= (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{3}(x + o(x^3))^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

e quindi

$$\arctan(\sin x) - \arctan x = (x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

In conclusione, otteniamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\arctan(\sin x) - \arctan x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 2.$$

21) L'esercizio è analogo a 20. Risolviamolo usando gli sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(\sin x)) &= \arctan(\sin x) - \frac{1}{6}(\arctan(\sin x))^3 + o(\arctan(\sin x))^3 \\ &= \arctan(\sin x) - \frac{1}{6}(\arctan(\sin x))^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Notare che abbiamo usato il fatto che $\arctan(\sin x) \approx \sin x \approx x$ per $x \to 0$.

Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned} \sin(\arctan x) &= \arctan x - \frac{1}{6}(\arctan x)^3 + o(\arctan^3 x) \\ &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{6}(x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Qui abbiamo usato $\arctan x \approx x$ per $x \to 0$.

Dunque si ha

$$\sin(\arctan(\sin x)) - \arctan(\sin x) = -\frac{1}{6}(\arctan(\sin x))^3 + o(x^3) \approx -\frac{1}{6}x^3,$$

e anche

$$\sin(\arctan x) - \sin x = (x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\arctan(\sin x)) - \arctan(\sin x)}{\sin(\arctan x) - \sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{2}.$$

22) Questo esercizio è in parte simile ai due precedenti. Notiamo che il numeratore è una funzione di $\sin(\sin x)$. Usando lo sviluppo di Taylor per la funzione "tangente" al grado 3 si ottiene

$$\begin{aligned}\tan(\sin(\sin x)) - \ \sin(\sin x) \\ &= (\sin(\sin x) + \frac{1}{3}(\sin(\sin x)^3 + o((\sin(\sin x))^3) - \sin(\sin x) \\ &= \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o((\sin(\sin x))^3) = \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

(Si è usato $\sin(\sin x) \approx \sin x \approx x$ per $x \to 0$).

Analogamente il denominatore è una funzione di $\sin(\tan x)$. Usando gli sviluppi di Taylor per tan e sin si ottiene:

$$\begin{aligned}\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) &= \Big(\sin(\tan x) + \frac{1}{3}(\sin(\tan x))^3 + o((\sin(\tan x))^3)\Big) \\ &\quad - \Big(\sin(\tan x) - \frac{1}{6}(\sin(\tan x))^3 + o((\sin(\tan x))^3)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o((\sin(\tan x))^3) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3}{\frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3} = \frac{2}{3}$$

(come già visto infatti $\sin(\sin x) \approx x \approx \sin(\tan x)$).

23) Quest'esercizio è analogo al precedente. Come nell'esercizio 20 abbiamo

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) \approx -\frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 \approx -\frac{1}{3}x^3,$$

mentre nell'esercizio 22 abbiamo già visto che

$$\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) \approx \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 \approx \frac{1}{2}x^3$$

per cui

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = -\frac{2}{3}.$$

24) Come già visto nell'esercizio 22, possiamo calcolare lo sviluppo di Taylor del denominatore ottenendo:

$$\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) = \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Quindi dobbiamo sviluppare anche il numeratore fino al grado 3. Sempre riguardando l'esercizio 22 otteniamo lo sviluppo di Taylor

$$\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) = \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

mentre si ha

$$\sin x^3 = x^3 + o(x^3);$$

dunque il numeratore ha lo sviluppo

$$\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) - \sin x^3 = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Il limite cercato vale quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) - \sin x^3}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{4}{3}.$$

25) Questo esercizio differisce dal precedente solamente perchè i ruoli di numeratore e denominatore sono invertiti. Dall'esercizio 23 infatti si ottiene per il numeratore:

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) \approx -\frac{1}{3}x^3;$$

quindi anche per il denominatore dobbiamo calcolare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3. Possiamo ancora ricordare i calcoli dell'esercizio 22, e ottenere

$$\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) = \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Quindi per il denominatore otteniamo

$$\begin{aligned}\sin x^3 - \tan(\sin(\tan x)) + \sin(\sin(\tan x)) &= \sin x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \\ &= x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Dunque il limite cercato è:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\sin x^3 - \tan(\sin(\tan x)) + \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}.$$

26) Il limite si presenta nella forma forma indeterminata 0/0. Esaminiamo il denominatore usando gli sviluppo di Taylor di sin e tan:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - 2\sin x\tan x + \tan^2 x &= (\sin x - \tan x)^2\\ &= \Big((\sin x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - (\sin x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))\Big)^2\\ &= (-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3))^2 = \frac{1}{4}x^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = 4\lim_{x\to 0+}\frac{\log(\cos 2x) + 2x^2\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x)}{x^6}.$$

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor fino all'ordine 6:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + o(x^6) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6).$$

Ricordiamo che

$$\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3),$$

per cui

$$\begin{aligned}\log(\cos 2x) =&\ \log(1 - (2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)))\\ =&\ -(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6) - \frac{1}{2}(2x^2 - \frac{2}{3}x^4)^2 - \frac{1}{3}(2x^2)^3 + o(x^6)\\ =&\ -(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6) - \frac{1}{2}(4x^4 - \frac{8}{3}x^6) - \frac{1}{3}(8x^6) + o(x^6)\\ =&\ -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{64}{45}x^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

Basta sviluppare $\cosh x$ fino all'ordine 4:

$$\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x) = 1 + \frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2 + \frac{1}{24}(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^4 + o(x^4) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{27}x^4 + o(x^4),$$

per ottenere

$$2x^2\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x) = 2x^2(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{27}x^4 + o(x^4)) = 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{27}x^6 + o(x^6).$$

Si ha infine

$$\log(\cos 2x) + 2x^2\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x) = (-\frac{64}{45} + \frac{4}{27})x^6 + o(x^6) = -\frac{172}{135}x^6 + o(x^6),$$

per cui

$$L = 4\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{172}{135}x^6 + o(x^6)}{x^6} = -\frac{688}{135}.$$

27) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo subito semplificare il denominatore usando $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui $x - \sin x \approx \frac{1}{6}x^3$. Si ha quindi

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x - \sin x)\sqrt[2]{x}} = 6 \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3 \sqrt[2]{x}}.$$

Possiamo semplificare quest'espressione ponendo $y = x^{\frac{3}{2}}$, per cui

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt[3]{y} \qquad x^3 \sqrt[2]{x} = y^2 \sqrt[3]{y},$$

e

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{\sin y}}{y^2 \sqrt[3]{y}}.$$

Razionalizziamo, moltiplicando per $\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y\ \sin y} + \sqrt[3]{\sin^2 y}(\approx 3\sqrt[3]{y^2})$ numeratore e denominatore:

$$L = 6 \lim_{y\to 0+} \frac{y - \sin y}{(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y \sin y} + \sqrt[3]{\sin^2 y})y^2 \sqrt[3]{y}} = 6 \lim_{y\to 0+} \frac{y - \sin y}{(3\sqrt[3]{y^2})y^2\sqrt[3]{y}}$$

$$= 2 \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{6}y^3}{y^3} = \frac{1}{3}$$

(si è usato di nuovo $y - \sin y \approx \frac{1}{6}y^3$).

28) Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Vogliamo risolverlo usando gli sviluppi di Taylor di arctan e di $(1+x)^\alpha$. Prima di tutto ricordiamo che $e^x - 1 \approx x$ per $x \to 0$ e quindi il limite si può scrivere anche

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{\arctan(x^{\frac{3}{4}})}}{x\sqrt[4]{x^3}}.$$

Per semplificare i calcoli possiamo cambiare variabile ponendo $y = x^{\frac{3}{4}}$, per cui il limite diventa

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{\arctan y}}{y^2 \sqrt[3]{y}} = \lim_{y\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\arctan y}{y}}}{y^2}.$$

Usando gli sviluppi

$$\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3),$$

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z + o(z),$$

si ottiene

$$1 - \sqrt[3]{\frac{\arctan y}{y}} = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}y^2 + o(y^2)} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)\Big) = \frac{1}{9}y^2 + o(y^2).$$

Dunque il nostro limite vale

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{9}y^2 + o(y^2)}{y^2} = \frac{1}{9}.$$

29)
Esaminiamo l'integrale

$$\int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt.$$

Si ha $8t^3 + \sin(t^7)t^2 \geq 8t^3 - t^2$, per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt \geq \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (8t^3 - t^2)dt = (2x^4 - \frac{1}{3}x^3) = +\infty.$$

Quindi il nostro limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt\Big) = 8x^3 - \sin(x^7)x^2.$$

Abbiamo dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt}{3x^4} = (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3 - \sin(x^7)x^2}{12x^3}$$

$$= \frac{2}{3} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^7)}{12x} = \frac{2}{3}.$$

30) Il limite è analogo a quello dell'esercizio precedente. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^5} \int_2^x 10t^4 dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^5} \Big[2t^5\Big]_2^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x^5}(x^5 - 2^5) = \frac{2}{3}.$$

Per quanto riguarda il secondo pezzo del limite, abbiamo $|\sin(t^7)t^2| \leq t^2$, e quindi

$$\Big|\int_2^x \sin(t^7)t^2 dt\Big| \leq \int_2^x |\sin(t^7)t^2| dt$$

$$\leq \int_2^x t^2 dt = \frac{1}{3}(x^3 - 8) \leq \frac{1}{3}x^3,$$

e anche

$$\Big|\frac{1}{3x^5} \int_2^x \sin(t^7)t^2 dt\Big| \leq \frac{1}{9x^2} \to 0$$

per $x \to +\infty$. Dunque, per il teorema del confronto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^5} \int_2^x \sin(t^7)t^2 dt = 0$$

e il limite cercato vale $\frac{2}{3}$.

31) Il limite, a prima vista, non si presenta in nessuna delle forme indeterminate già viste. Basta però ricordare la formula di cambiamento di base nei logaritmi:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a},$$

per ottenere il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[10]{x} + \sin(10x))}{\log(10\sqrt[3]{x})} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(17\sqrt[10]{x}\big(1 + \frac{1}{17}x^{-\frac{1}{10}}\sin(10x)\big)\Big)}{\log(10\sqrt[3]{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[10]{x}) + \log\Big(1 + \frac{1}{17\sqrt[10]{x}}\sin(10x)\Big)}{\log(10\sqrt[3]{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17x^{1/10})}{\log(10x^{1/3})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17) + \frac{1}{10}\log x}{\log(10) + \frac{1}{3}\log x} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che $x^{-1/10}\sin(10x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

32) L'esecizio è analogo al precedente: cambiando base al logaritmo si ottiene il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[2]{x} + \sin(2x))}{\log(2\sqrt[3]{x})}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞; possiamo cercare quindi di usare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$\begin{aligned}
D\big(\log(17\sqrt[2]{x} + \sin(2x))\big) &= \frac{1}{17\sqrt[2]{x} + \sin(2x)}(17\frac{1}{2}x^{-1/2} + 2\cos(2x)) \\
D\big(\log(2\sqrt[3]{x})\big) &= \frac{1}{3x}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$L = (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{17 + 4\sqrt{x}\ \cos(2x)}{17\sqrt{x} + \sin(2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{34}(17 + 4\sqrt{x}\ \cos(2x))$$

(si è usato $17\sqrt{x} + \sin(2x) \approx 17\sqrt{x}$ per $x \to +\infty$). Quest'ultimo limite NON ESISTE (si nota subito che la funzione $17 + 4\sqrt{x}\ \cos(2x)$ ha delle "oscillazioni" sempre maggiori). Questo NON VUOL DIRE che il limite L non esiste: solamente che NON SI

PUÒ applicare la regola di De L'Hôpital. Si deve quindi procedere come nell'esercizio precedente, ottenendo:
$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[2]{x})}{\log(2\sqrt[3]{x})}.$$
A questo punto si può anche usare la regola di De L'Hôpital, e ottenere
$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2x}}{\frac{1}{3x}} = \frac{3}{2}.$$

33) Come negli esercizi 29 e 30 si ha di fronte un limite nella forma indeterminata ∞/∞. Si può risolvere questo esercizio come già visto in precedenza, ricordando che
$$D\Big(\int_0^y (8t^{\frac{1}{3}} + \sin(t^7)t^{\frac{1}{4}})dt\Big) = 8y^{\frac{1}{3}} + \sin(y^7)y^{\frac{1}{4}},$$
e quindi (per la regola di derivazione di funzioni composte)
$$\begin{aligned} D\Big(\int_0^{x^3} (8t^{\frac{1}{3}} + \sin(t^7)t^{\frac{1}{4}})dt\Big) &= \Big(8(x^3)^{\frac{1}{3}} + \sin((x^3)^7)\ (x^3)^{\frac{1}{4}}\Big)\cdot 3x^2 \\ &= 24x^3 + 3\sin(x^{21})x^{\frac{11}{4}}. \end{aligned}$$
Si ha dunque, usando la regola di De L'Hôpital:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x^3}(8t^{\frac{1}{3}} + \sin(t^7)t^{\frac{1}{4}})dt}{3x^4} &= (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{24x^3 + 3\sin(x^{21})\ x^{\frac{11}{4}}}{12x^3} \\ &= 2 + \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x^{21})}{x^{\frac{1}{4}}} = 2. \end{aligned}$$
Ancora una volta si ha usato che $\sin(x^{21})/x^{\frac{1}{4}} \to 0$ per $x \to +\infty$.

34) Questo limite è simile al precedente. Proponiamo qui un calcolo differente. Notiamo subito che
$$\int_2^{x^4} t^{\frac{1}{4}}\,dt = \Big[\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\Big]_2^{x^4} = \frac{4}{5}(x^5 - 2^{\frac{5}{4}}),$$
e quindi il primo pezzo del limite è uguale a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10}{3x^5}\cdot\frac{4}{5}(x^5 - 2^{\frac{5}{4}}) = \frac{8}{3}.$$
Per quanto riguarda il secondo pezzo, mostriamo che converge a zero. Si ha $|\sin(y)| \leq 1$, e quindi
$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{x^5}\int_2^{x^4} \sin(t^7)\ t^{\frac{1}{5}}dt\Big| &\leq \frac{1}{x^5}\int_2^{x^4} t^{\frac{1}{5}}\,dt = \frac{1}{x^5}\Big[\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}}\Big]_2^{x^4} \\ &= \frac{5}{6x^5}(x^{\frac{24}{5}} - 2^{\frac{6}{5}}) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{5}{3}\ 2^{\frac{1}{5}}x^{-5} \to 0 \end{aligned}$$
per $x \to +\infty$. Questo mostra che il limite cercato è $\dfrac{8}{3}$.

35) Notiamo prima di tutto che si ha

$$\lim_{x\to 0+} \int_{3x}^{2x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt = \lim_{x\to 0+} \int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = 0.$$

Infatti si ha (ricordando che $\sin t \leq t$ per $t \geq 0$)

$$\Big|\int_{3x}^{2x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big| \leq \int_{3x}^{2x^2} \sqrt{t}dt = \Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_{3x}^{2x^2} = \frac{2}{3}\Big((2x^2)^{\frac{3}{2}} - (3x)^{\frac{3}{2}}\Big) \to 0$$

$$\Big|\int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt\Big| \leq \int_0^{3x} \sqrt{t}dt = \Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{3x} = \frac{2}{3}(3x)^{\frac{3}{2}} \to 0$$

Dunque abbiamo una forma indeterminata 0/0. Per applicare la regola di De L'Hôpital dobbiamo calcolarci le derivate

$$D\Big(\int_{3x}^{2x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big) = D\Big(\int_0^{2x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt - \int_0^{3x} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big)$$

$$= 4x\sqrt{2}|x|\cos(4x^2) - 3\sqrt{3x}\cos(6x)$$

$$D\Big(\int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt\Big) = 3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}.$$

Ricordando che $\sin(x^2) \approx x^2$, otteniamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{3x}^{2x^2} \sqrt{t}\cos(2t) + \int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt}{x^3}$$

$$= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{4x^2\sqrt{2}\cos(4x^2) - 3\sqrt{3x}\cos(6x) + 3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}}{3x^2}$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0+} \sqrt{2}\cos(4x^2) + \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{\sqrt{3}\ x^2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{x}}.$$

Usando gli sviluppi di Taylor di seno e coseno si ottiene

$$3x\cos(6x) = 3x(1 - 18x^2 + o(x^2)) = 3x - 54x^3 + o(x^3) = 3x + o(x^2\sqrt{x})$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) = 3x + o(x^2\sqrt{x})$$

$$\sin 3x - 3x\cos(6x) = o(x^2\sqrt{x}),$$

per cui si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{o(x^2\sqrt{x})}{x^2\sqrt{x}} = 0.$$

Dunque il limite cercato vale $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

36) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, ed è analogo a quello dell'esercizio precedente. Per applicare la regola di De L'Hôpital dobbiamo calcolare le derivate

$$D\Big(\int_{3x}^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big) = D\Big(\int_0^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt - \int_0^{3x} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big)$$

$$= 6x\sqrt{3}\ |x|\cos(6x^2) - 3\sqrt{3x}\cos(6x)$$

$$D\Big(\int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\Big) = 3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}.$$

Ricordando che $\tan(x^2) \approx x^2$, otteniamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{3x}^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t) + \int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt}{x^3}$$

$$= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{6x^2\sqrt{3}\cos(6x^2) - 3\sqrt{3x}\cos(6x) + 3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}}{3x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0+} \sqrt{3}\cos(6x^2) + \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{3x}}$$

$$= 2\sqrt{3} + \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{3x}}.$$

Quest'ultimo limite può venire calcolato come nell'esercizio 35. Un modo per semplificarlo (eliminando le radici quadrate) è semplicemente operare la sostituzione $y = \sqrt{3x}$. Il cambiamento di variabili porta a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{3x}} = 9\lim_{y\to 0+} \frac{\sin(y^2) - y^2\cos(2y^2)}{y^5}.$$

Questo limite si può calcolare utilizzando gli sviluppi di Taylor di seno e coseno come nell'esercizio precedente, oppure direttamente usando la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{y\to0+}\frac{\sin y^2-y^2\cos 2y^2}{y^5}=(H)=\lim_{y\to0+}\frac{2y\cos y^2-2y\cos 2y^2+4y^3\sin 2y^2}{5y^4}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{y\to0+}\frac{y\cos y^2-y\cos 2y^2}{y^4}+\frac{4}{5}\lim_{y\to0+}\frac{\sin 2y^2}{y}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{y\to0+}\frac{\cos y^2-\cos 2y^2}{y^3}+0$$

$$=(H)=\frac{2}{5}\lim_{y\to0+}\frac{-2y\sin y^2+4y\sin 2y^2}{3y^2}$$

$$=(H)=\frac{4}{15}\Big(\lim_{y\to0+}\frac{-\sin y^2}{y}+2\lim_{y\to0+}\frac{\sin 2y^2}{y}\Big)=0$$

(è stato utilizzato due volte $\sin(y^2)\approx y^2$). Quindi il limite cercato è $2\sqrt{3}$.

37) Il limite si presenta in una forma indeterminata 0^0. Possiamo riscrivere usando la funzione esponenziale:

$$\left(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}\right)^{-\frac{2}{\log x}}=\exp\left(\log\Big(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}\Big)\frac{-2}{\log x}\right). \tag{37.1}$$

Dobbiamo dunque calcolare il limite

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}\Big)}{\log x}.$$

Usando le proprietà del logaritmo otteniamo

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(\frac{1}{x^2}\big(3-\frac{5}{x^2}\big)\Big)}{\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(\frac{1}{x^2}\Big)+\log\Big(3-\frac{5}{x^2}\Big)}{\log x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\log x+\log\Big(3-\frac{5}{x^2}\Big)}{\log x}=-2+\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(3-\frac{5}{x^2}\Big)}{\log x}.$$

Dal momento che $\log\Big(3-\frac{5}{x^2}\Big)\to\log 3$ per $x\to+\infty$, quest'ultimo limite è uguale a 0, e quindi $L=-2$. Sostituendo L in (37.1), si ottiene che il limite cercato è e^4.

38) Come nel limite precedente il risultato cercato è $\exp(4L)$, dove L è dato dal limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Bigl(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^5}\Bigr)}{\log x}.$$

Seguiamo qui una risoluzione diversa da quella dell'esercizio 37. Notiamo che il limite L si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo quindi applicare la regola di De L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Bigl(\frac{3x^3-5}{x^5}\Bigr)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3x^3-5) - \log(x^5)}{\log x}$$

$$= (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{9x^2}{3x^3-5} - 5\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^3+25}{3x^3-5} = -2.$$

Il limite cercato è dunque e^{-8}.

39) Per semplificare i calcoli, possiamo cambiare variabile ponendo $y = \frac{1}{x}$. Il limite da calcolare diventa quindi

$$L = \lim_{y\to0+} \Bigl(\frac{1}{y(1-e^{-y})} - \frac{1}{y^3}\sin y\Bigr)^2 \log\Bigl(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Bigr)$$

$$= \lim_{y\to0+} \frac{1}{y^6}\Bigl(\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y\Bigr)^2 \log\Bigl(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Bigr).$$

Esaminiamo la funzione

$$\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y = \frac{y^2 - (1-e^{-y})\sin y}{(1-e^{-y})}.$$

Si ha $1 - e^{-y} = y + o(y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ e

$$y^2 - (1-e^{-y})\sin y = y^2 - (y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2))(y + o(y^2)) = \frac{1}{2}y^3 + o(y^3),$$

per cui

$$\frac{y^2 - (1-e^{-y})\sin y}{(1-e^{-y})} \approx \frac{\frac{1}{2}y^3}{y} = \frac{1}{2}y^2.$$

Per quanto riguarda la funzione $\log\Bigl(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Bigr)$, possiamo sviluppare facilmente l'argomento del log, ottenendo

$$\begin{aligned}\cos(2y) + 5y\sin(2y) &= 1 - \frac{1}{2}(2y)^2 + o(y^2) + 5y(2y + o(y))\\ &= 1 - 2y^2 + 10y^2 + o(y^2) = 1 + 8y^2 + o(y^2).\end{aligned}$$

Ricordando che $\log(1+z) = z + o(z)$ per $z \to 0$, si ha

$$\log\Big(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Big) = 8y^2 + o(y^2).$$

Dunque il limite vale

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y^6}\Big(\frac{1}{2}y^2\Big)^2 (8y^2 + o(y^2)) = 2.$$

40) Il limite è analogo a quello dell'esercizio precedente. Cambiando variabile $y = \frac{1}{x}$ si ottiene il limite

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y^6}\Big(\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y\Big)^2 \log\Big(\cos(4y) - 2y\sin(4y)\Big).$$

Come nella risoluzione dell'esercizio 39 si vede che

$$\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y \approx \frac{1}{2}y^2,$$

mentre

$$\begin{aligned}\cos(4y) - 2y\sin(4y) &= 1 - \frac{1}{2}(4y)^2 + o(y^2) - 2y(4y + o(y))\\ &= 1 - 8y^2 - 8y^2 + o(y^2) = 1 - 16y^2 + o(y^2),\end{aligned}$$

e quindi

$$\log\Big(\cos(4y) - 2y\sin(4y)\Big) = -16y^2 + o(y^2).$$

Il limite cercato è dunque

$$\lim_{y\to 0+} \frac{1}{4y^2}(-16y^2 + o(y^2)) = -4.$$

41) Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^{+\infty}$. Conviene riscrivere l'argomento del limite usando la funzione esponenziale:

$$\Big(\frac{\cos(2x) + \cosh(2x)}{2}\Big)^{\frac{3}{4x^4}} = \exp\bigg(\frac{3}{4x^4}\ \log\Big(\frac{\cos(2x) + \cosh(2x)}{2}\Big)\bigg).$$

Si deve quindi calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\log\Big(\frac{1}{2}\big(\cos(2x) + \cosh(2x)\big)\Big)}{x^4},$$

che si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo utilizzare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\log\Big(\frac{\cos(2x)+\cosh(2x)}{2}\Big)\Big) = \frac{2(-\sin(2x)+\sinh(2x))}{\cos(2x)+\cosh(2x)}.$$

Si ha

$$L = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(-\sin(2x)+\sinh(2x))}{4x^3(\cos(2x)+\cosh(2x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin(2x)+\sinh(2x)}{4x^3}$$

(abbiamo tenuto conto del fatto che $\cos(2x)+\cosh(2x)\to 2$ per $x\to 0$). Abbiamo ancora una forma indeterminata 0/0. Possiamo quindi ri-applicare la regola di De L'Hôpital, e ottenere

$$L = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(-\cos(2x)+\cosh(2x))}{12x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos(2x)+\cosh(2x)}{6x^2}$$

$$= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(\sin(2x)+\sinh(2x))}{12x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(2x)+\sinh(2x)}{6x}$$

$$= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(\cos(2x)+\cosh(2x))}{6} = \frac{2}{3}.$$

Il risultato è infine $\exp(\frac{3}{4}L) = \exp(\frac{1}{2})$.

42) Analogamente al limite precedente si può riscrivere

$$\Big(\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2}\Big)^{\frac{4}{3x^4}} = \exp\Big(\frac{4}{3x^4}\ \log\Big(\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2}\Big)\Big),$$

per cui si deve calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{4\log\Big(\frac{1}{2}\big(\cos(3x)+\cosh(3x)\big)\Big)}{3x^4}.$$

Possiamo utilizzare gli sviluppi di Taylor per le funzioni cos e cosh fino al grado 4, ottenendo

$$\cos(3x) = 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{24}(3x)^4 + o(x^4)$$
$$\cosh(3x) = 1 + \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{24}(3x)^4 + o(x^4).$$

Si ha quindi

$$\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2} = \frac{2+\frac{27}{4}x^4+o(x^4)}{2} = 1 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4),$$

e (ricordando che $\log(1+z) = z + o(z)$ per $z \to 0$)

$$\log\Big(\frac{\cos(3x) + \cosh(3x)}{2}\Big) = \log\Big(1 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)\Big) = \frac{27}{8}x^4 + o(x^4).$$

Dunque si può calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{4(\frac{27}{8}x^4 + o(x^4))}{3x^4} = \frac{9}{2}.$$

Il risultato è quindi $\exp(\frac{9}{2})$.

43) Consideriamo per prima cosa gli integrali

$$\int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} e^t \arctan(t)dt, \text{ e } \qquad \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} \frac{\sin t}{t^3}dt.$$

Per quanto riguarda il primo, la funzione integranda è sempre positiva, vale 0 in 0 e per $t \to +\infty$ si ha $e^t \arctan t \approx \frac{\pi}{2}e^t$. Quindi applicando il criterio del confronto asintotico si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} e^t \arctan(t)dt = +\infty.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, si ha

$$|\frac{\sin t}{t^3}| \leq \frac{1}{t^3},$$

quindi la funzione $\frac{\sin t}{t^3}$ è assolutamente integrabile per $t \to +\infty$. In 0 invece si ha

$$\frac{\sin t}{t^3} \approx \frac{1}{t^2},$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} \frac{\sin t}{t^3}dt = +\infty.$$

Dunque il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} \Big(e^t \arctan(t) + \frac{\sin t}{t^3}\Big)dt.$$

Essa è ben definita e derivabile per x sufficientemente grande e, per il teorema fondamentale del calcolo, si ha:

$$f'(x) = \Big(e^{\log(3x)} \arctan\log(3x) + \frac{\sin\log(3x)}{\log^3(3x)}\Big)D\log(3x)$$

$$- \Big(e^{\frac{2}{x}} \arctan\frac{2}{x} + (\frac{x}{2})^3 \sin\frac{2}{x}\Big)D(\frac{2}{x}) \qquad .$$

$$= \Big(3x\arctan(\log(3x)) + \frac{\sin\log(3x)}{\log^3(3x)}\Big)\frac{1}{x} + \Big(e^{\frac{2}{x}} \arctan(\frac{2}{x}) + (\frac{x}{2})^3 \sin(\frac{2}{x})\Big)\frac{2}{x^2}$$

Per il teorema di Hopital si ha quindi

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Big(3\arctan(\log(3x)) + \frac{\sin\log(3x)}{x\log^3(3x)} + \frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}\arctan(\frac{2}{x}) + \frac{x}{4}\sin(\frac{2}{x})\Big)$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty} \arctan(\log(3x)) + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\sin(\frac{2}{x}) = 3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}.$$

44) Il limite è simile al precedente. Cerchiamo qui di seguire un procedimento leggermente diverso dallo svolgimento dell'esercizio 43.

Come in precedenza si nota che le funzioni $e^t\arctan t$ e $\sin t/t^3$ sono l'una continua in 0, l'altra integrabile in senso improprio a $+\infty$. Quindi

$$\int_{\frac{2}{x}}^{\log 2x} e^t\arctan t dt \approx \int_0^{\log 2x} e^t\arctan t dt,$$

$$\int_{\frac{2}{x}}^{\log 2x} \frac{\sin t}{t^3}dt \approx \int_{\frac{2}{x}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt$$

per $x\to+\infty$. Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\bigg(\int_0^{\log 2x} e^t\arctan t dt + \int_{\frac{2}{x}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt\bigg).$$

Questo limite, come nell'esercizio precedente, si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\bigg(\int_0^{\log 2x} e^t\arctan t dt\bigg) = e^{\log 2x}\arctan(\log 2x)\cdot D(\log 2x)$$

$$= 2x\arctan(\log 2x)\frac{1}{x} = 2\arctan(\log 2x),$$

$$D\bigg(\int_{\frac{2}{x}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt\bigg) = -\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}^3}\cdot D(\frac{2}{x})$$

$$= -\frac{x^3\sin(\frac{2}{x})}{8}\Big(-\frac{2}{x^2}\Big) = \frac{1}{4}x\sin(\frac{2}{x}).$$

Si ha

$$L = (H) = \lim_{x\to+\infty} \Big(2\arctan(\log 2x) + \frac{1}{4}x\sin(\frac{2}{x})\Big)$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \arctan(\log 2x) + \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x})$$

$$= 2(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x}) = \pi + \frac{1}{2}\lim_{y\to 0+}\frac{\sin y}{y} = \pi + \frac{1}{2}$$

(abbiamo usato il campio di variabile $y = \frac{2}{x}$).

45) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot +\infty$; infatti si ha

$$\lim_{x\to 0+} \int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\, dt = \int_1^{+\infty} t^3 e^{\frac{1}{t}}\, dt = +\infty,$$

per il criterio del confronto per gli integrali impropri, poichè $t^3 e^{\frac{1}{t}} \approx t^3$ per $t \to +\infty$.

Esaminiamo l'andamento della funzione $16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x))$ per $x \to 0$, usando lo sviluppo di Taylor di cos e log:

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$
$$\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^4),$$

per cui si ottiene

$$\log(\cos x) = \Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\Big) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)^2 + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

$$\log(\cos 2x) = \Big(-\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4\Big) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}(2x)^2\Big)^2 + o(x^4) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4),$$

e quindi

$$16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x)) = 4x^4 + o(x^4).$$

Si ha dunque

$$L = \lim_{x\to 0+} \big(16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x))\big)\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\, dt = 4\lim_{x\to 0+} x^4 \int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\, dt.$$

Riscriviamo questo limite nella forma indeterminata ∞/∞:

$$L = 4\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\, dt}{x^{-4}}.$$

Possiamo allora applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\, dt\Big) == (\frac{1}{x})^3 e^x\ D(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^3}e^x(-\frac{1}{x^2}) = -x^{-5}e^x.$$

Si ottiene infine

$$L = (H) = 4\lim_{x\to 0+} \frac{-x^{-5}e^x}{-4x^{-5}} = 1.$$

46) Il limite è analogo al precedente. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $12\log(\cos x) - 4\log(\cos(\sqrt{3}x))$. Si ha

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\\ \cos(\sqrt{3}x) &= 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{3}x)^2 + \frac{1}{24}(\sqrt{3}x)^4 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

e quindi (ricordando che $\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^4)$)

$$\begin{aligned}12\log(\cos x) &= 12\log\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big)\\ &= 12\Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}x^2\big)^2 + o(x^4)\Big) = -6x^2 - x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\log(\cos(\sqrt{3}x)) &= 4\log\Big(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\Big)\\ &= 4\Big(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}\big(\frac{3}{2}x^2\big)^2 + o(x^4)\Big) = -6x^2 - 3x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Dunque si ottiene lo sviluppo di Taylor

$$12\log(\cos x) - 4\log(\cos(\sqrt{3}x)) = \big(-6x^2 - x^4\big) - \big(-6x^2 - 3x^4\big) + o(x^4) = 2x^4 + o(x^4).$$

Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = \lim_{x\to 0+} 2x^4 \int_1^{\frac{2}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt = 2\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_1^{\frac{2}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt}{x^{-4}}.$$

Quest'ultimo limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\int_1^{\frac{2}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt\Big) = \Big(\frac{2}{x}\Big)^3 e^{\frac{x}{2}} \cdot D\Big(\frac{2}{x}\Big) = 8x^{-3}e^{\frac{x}{2}}\big(-\frac{2}{x^2}\big) = -16x^{-5}e^{\frac{x}{2}}.$$

Abbiamo dunque

$$L = (H) = 2\lim_{x\to 0+} \frac{-16x^{-5}}{-4x^{-5}} = 8.$$

47) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Per applicare il metodo degli sviluppi di Taylor dobbiamo determinare l'ordine di infinitesimo di numeratore o denominatore. Studiamo per prima cosa il comportamento del denominatore, per $x \to 0$, che si presenta in una forma più semplice. Ricordando lo sviluppo del seno $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, si ottiene

$$\sin(x\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin(x) = -\sqrt{2}\frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

quindi

$$x\big(\sin(x\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin(x)\big) = -\sqrt{2}\frac{x^4}{6} + o(x^5).$$

Il nostro limite è uguale allora a

$$-3\sqrt{2}\lim_{x\to 0+} \frac{e^{(2(\sin x)^2)} - e^{2\sin(x^2)}}{x^4}.$$

Possiamo calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 per il numeratore. Ricordando gli sviluppi del seno (sopra) e dell'esponenziale $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$, e che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} e^{(2(\sin x)^2)} &= 1 + 2(\sin x)^2 + 2(\sin x)^4 + o\big((\sin x)^4\big) \\ &= 1 + 2\big(x - \frac{x^3}{6}\big)^2 + 2x^4 + o(x^4) = 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + 2x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

$$e^{2\sin(x^2)} = 1 + 2\sin(x^2) + 2(\sin(x^2))^2 + o(x^4) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Dunque

$$e^{(2(\sin x)^2)} - e^{2\sin(x^2)} = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4),$$

e il limite vale

$$-3\sqrt{2}\lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^4} = 2\sqrt{2}.$$

48) Il limite è analogo a quello dell'esercizio 47. Seguiamo qui uno svolgimento leggermente differente. Possiamo riscrivere

$$e^{(3\sin^2 x)} - e^{3\sin(x^2)} = e^{3\sin(x^2)}\big(e^{(3(\sin^2 x - \sin(x^2))} - 1\big).$$

Quindi, notando che $\exp(3\sin(x^2)) \to 1$ e che

$$(e^{(3(\sin^2 x - \sin(x^2))} - 1) \approx (3(\sin^2 x - \sin(x^2))$$

per $x \to 0$ (infatti ricordiamo che $e^y - 1 \approx y$ per $y \to 0$), si ottiene il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{3(\sin^2 x - \sin(x^2))}{x(\sin(2x) - 2\sin(x))}.$$

Esaminiamo prima il denominatore. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $\sin(2x) - 2\sin(x)$ fino all'ordine 3:

$$\begin{aligned}\sin(2x) - 2\sin(x) &= \big(2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3)\big) - 2\big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)\\ &= -x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Quindi il denominatore vale

$$x(\sin(2x) - 2\sin x) = -x^4 + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il numeratore, si ha

$$\sin^2 x = \big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^3),$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4),$$

per cui

$$3(\sin^2 x - \sin(x^2)) = -x^4 + o(x^4).$$

Possiamo calcolare ora il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^4 + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} = 1.$$

49) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ottenendo

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cosh(2x)) + \log(\cos(2x))}{\log(\cosh(2x^2)) - \log(\cos(2x^2))}$$

$$= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\dfrac{\sinh 2x}{\cosh 2x} - 2\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{4x\dfrac{\sinh(2x^2)}{\cosh(2x^2)} + 4x\dfrac{\sin(2x^2)}{\cos(2x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{\sinh(2x)\cos(2x) - \cosh(2x)\sin(2x)}{\cos(2x)\cosh(2x)}}{2x \cdot \dfrac{\sinh(2x^2)\cos(2x^2) + \cosh(2x^2)\sin(2x^2)}{\cos(2x^2)\cosh(2x^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} \frac{\sinh(2x)\cos(2x) - \cosh(2x)\sin(2x)}{x(\sinh(2x^2)\cos(2x^2) + \cosh(2x^2)\sin(2x^2))}$$

(si è usato $\cosh y \to 1$, $\cos y \to 1$ per $x \to 0$). Quest'ultimo limite è ancora nella forma indeterminata $0/0$. Possiamo quindi ri-applicare la regola di De L'Hôpital:

$$L = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-2\sinh(2x)\sin(2x)}{\sinh(2x^2)\cos(2x^2) + \cosh(2x^2)\sin(2x^2) + 8x^2\cosh(2x^2)\cos(2x^2)}.$$

Possiamo semplificare questo limite ricordando che $\sinh(2x) \approx 2x$ e $\sin(2x) \approx 2x$ per $x \to 0$. Si ottiene

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{-8x^2}{\sinh(2x^2)\cos(2x^2) + \cosh(2x^2)\sin(2x^2) + 8x^2\cosh(2x^2)\cos(2x^2)}.$$

Possiamo ancora una volta applicare la regola di De L'Hôpital.

$$\begin{aligned} L &= (H) \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{-16x}{24x\cosh(2x^2)\cos(2x^2) + 32x^3(\sinh(2x^2)\cos(2x^2) - \cosh(2x^2)\sin(2x^2)} \\ &= (H) = \lim_{x\to 0+} -16\Big/\Big(24\cosh(2x^2)\cos(2x^2) + 160x^2(\sinh(2x^2)\cos(2x^2) \\ &\quad - \cosh(2x^2)\sin(2x^2)) - 256x^4\sinh(2x^2)\sin(2x^2)\Big) = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si consiglia di calcolare il limite usando anche gli sviluppi di Taylor (si veda l'esercizio seguente).

50) Il limite è analogo a quello dell'esercizio 49. Calcoliamolo qui usando gli sviluppi di Taylor di log, cos e cosh. Si ha

$$\begin{aligned} \cosh y &= 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4) = 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \\ \cos y &= 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \cosh(x\sqrt{2}) &= 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4), \\ \cos(x\sqrt{2}) &= 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh(x^2\sqrt{3}) &= 1 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4), \\ \cos(x^2\sqrt{3}) &= 1 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi, ricordando che $\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + o(z^2) = z + o(z)$ per $z \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\log(\cosh(x\sqrt{2})) &= \log(\ 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)) \\
&= x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\
\log(\cos(x\sqrt{2})) &= \log(1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)) \\
&= -x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}(-x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) \\
&= -x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) &= \log(1 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) = \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \\
\log(\cos(x^2\sqrt{3})) &= \log(1 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dunque, sommando, si ha infine

$$\begin{aligned}
\log(\cosh(x\sqrt{2})) + \log(\cos(x\sqrt{2})) &= (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) + (-x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) \\
&= -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \\
\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) - \log(\cos(x^2\sqrt{3})) &= (\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) - (-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) \\
&= 3x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x\to0+} \frac{\log(\cosh(x\sqrt{2})) + \log(\cos(x\sqrt{2}))}{\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) - \log(\cos(x^2\sqrt{3}))} = \lim_{x\to0+} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = -\frac{2}{9}.$$

Si confronti questo metodo di risoluzione con quello dell'esercizio 49.

51) Esaminiamo per prima cosa il denominatore: notiamo che si ha

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1+\exp y)}{y} = (H) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{e^y}{1+e^y}}{1} = 1,$$

e quindi anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Bigl(\log\Bigl(1 + \exp\bigl(\frac{\sqrt{x}}{2}\bigr)\Bigr)\Bigr)^{\frac{1}{3}}}{\Bigl(\frac{\sqrt{x}}{2}\Bigr)^{\frac{1}{3}}} = 1.$$

Dunque il limite cercato è uguale a

$$2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \Bigl(\frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}} + \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)}\Bigr)dt}{x^{\frac{1}{6}}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}}dt}{x^{\frac{1}{6}}} + 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)}dt}{x^{\frac{1}{6}}}.$$

L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)})dt$$

è convergente (applicare il criterio del confronto con $\log 3/(1+t^2)$), per cui il secondo limite si presenta nella forma $c/+\infty$, ovvero è uguale a 0. Ci siamo quindi ridotti al calcolo di

$$2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}}dt}{x^{\frac{1}{6}}} = (H) = 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\arctan(2(x^{\frac{1}{3}}))}{x^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} 2\arctan(2(x^{\frac{1}{3}})) = \pi\ 2^{\frac{1}{3}}.$$

52) Possiamo razionalizzare il quoziente moltiplicando e dividendo per

$$\sqrt{\cos(x^2)} + \sqrt{\cos x}.$$

Si ottiene così il limite

$$\frac{4}{3} \lim_{x\to0+} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\left(\sqrt{\cos(x^2)} + \sqrt{\cos x}\right)\left(\cos(x^3) - \cos x\right)} = \frac{2}{3} \lim_{x\to0+} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\cos(x^3) - \cos x}.$$

Possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital, ottenendo

$$\frac{2}{3} \lim_{x\to0+} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\cos(x^3) - \cos x} = (H) = \frac{2}{3} \lim_{x\to0+} \frac{-\sin(x^2)2x + \sin x}{-\sin(x^3)3x^2 + \sin x}$$

$$= (H) = \frac{2}{3} \lim_{x\to0+} \frac{-\cos(x^2)4x^2 - 2\sin(x^2) + \cos x}{-\cos(x^3)9x^4 - 6x\sin(x^3) + \cos x} = \frac{2}{3}.$$

53) Il limite è analogo al precedente. Proponiamo un calcolo alternativo usando gli sviluppi di Taylor. Si ha

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + o(x^2),$$

$$\cos(\sqrt{3}\,x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\cos(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) = 1 + o(x^2),$$

$$\cos(\sqrt{2}\,x) = 1 - x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + o(z);$$

quindi

$$\sqrt{\cos(x^2)} = \sqrt{1 + o(x^2)} = 1 + o(x^2),$$

$$\sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)} = \sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = 1 - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2),$$

$$4\Big(\sqrt{\cos(x^2)} - \sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)}\Big) = 3x^2 + o(x^2),$$

$$3(\cos(x^3) - \cos(\sqrt{2}\,x)) = 3x^2 + o(x^2),$$

per cui

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4\Big(\sqrt{\cos(x^2)} - \sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)}\Big)}{3(\cos(x^3) - \cos(\sqrt{2}\,x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = 1.$$

54) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)^0$. Trasformiamo il limite in forma esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\Big(\frac{1}{x}\arctan x\Big)\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)\right).$$

Dobbiamo quindi calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left(\Big(\frac{1}{x}\arctan x\Big)\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)}{x}\right);$$

il risultato cercato sarà dato da e^L. Il limite si presenta ora nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\left(\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)\right) = \frac{e^{2x}\log x}{\int_1^x e^{2t}\log t\,dt}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} L = (H) = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} \log x}{\int_1^x e^{2t} \log t \, dt} \\ = (H) = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} \log x + \frac{1}{x} e^{2x}}{e^{2x} \log x} \\ = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x \log x} \right) = \pi. \end{aligned}$$

Dunque il limite cercato è e^{π}.

Esercizi

1. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

2. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2 \cdot 5^n}{20^{n-1}}.$$

3. Determinare la frazione corrispondente al numero decimale

$$0.7\overline{4} = 0.74444 \cdots .$$

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}.$$

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n} \right)^n .$$

7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(\sin n))^n .$$

8. Trovare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^n$$

e determinarne la somma per $x = \frac{1}{4}$.

9. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n}.$$

10. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-5)^n}{n5^n}.$$

11. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^a \log(n+1)}}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

12. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n^4+n^3) - 4\log n}{n^a \left(\log(n!+n^n)\right)^2}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

13. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)}$$

al variare del parametro $a > 0$.

14. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} \cdot x^n.$$

15. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

16. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot x^n.$$

17. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \cdot x^{4n}.$$

18. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+5)!+6(n+1)!}{(n+5)!+4(n+2)!}\right)^{n^4} \cdot x^n\,.$$

19. Determinare il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\cdot x^n.$$

20. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right).$$

21. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 4^{n+1}}.$$

22. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n-2}{2^n}.$$

23. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+4n+5)\left(\log\left(\frac{e}{1+|x|}\right)\right)^n.$$

24. Determinare il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}\cdot x^n.$$

Quanto vale la somma se x appartiene a tale dominio?
25. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot(1-|x|)^n.$$

26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2/3)^n-(1+i)^n}{2^{n-1}}.$$

27. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\min\left(ne,\frac{4e}{n+1}\right)\frac{(-1)^n}{n!}.$$

28. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} .$$

29. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n^2-1)3^n - (n-1)!}{(n+1)!} \right) .$$

30. Determinare il dominio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n .$$

31. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n} .$$

32. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n} .$$

Soluzioni

1. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Il numero 2 può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{4}{9}$ con l'indice n che parte da 1. Dato che $|\frac{4}{9}| < 1$ la serie è convergente e la somma vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right) = \frac{8}{5}.$$

— ◇ —

2. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2 \cdot 5^n}{20^{n-1}}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^n}{20^{n-1}} - 2 \cdot \frac{5^n}{20^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 4}{5^{n-1}} - \frac{2 \cdot 5}{4^{n-1}}\right).$$

Per la linearità possiamo scomporre la serie in due serie geometriche convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^n}{20^{n-1}} - 2 \cdot \frac{5^n}{20^{n-1}}\right) = 12 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 10 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{12}{1-\frac{1}{5}} - \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

— ◇ —

3. Determinare la frazione corrispondente al numero decimale

$$0.7\overline{4} = 0.74444\cdots.$$

R. Basta scrivere il numero come somma di una serie geometrica:

$$0.7\overline{4} = \frac{7}{10} + 4 \cdot 0.0\overline{1} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{67}{90}.$$

— ◇ —

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Per il criterio di Leibniz, non solo possiamo dire che la serie converge, ma possiamo anche applicare la linearità ottenendo la scomposizione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

La prima serie ha somma uguale a $\log 2$. La seconda serie può essere ricondotta alla prima "aggiustando" l'indice della sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+1=-\log 2+1.$$

Quindi la somma della serie data è uguale a

$$\log 2+(-\log 2+1)=1.$$

— ◇ —

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}.$$

R. Osserviamo che

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

e quindi la somma parziale s_N per $N\geq 3$ diventa

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=2}^{N}\frac{2}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $N\to\infty$ troviamo che la somma della serie data vale $3/2$.

— ◇ —

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n}\right)^n .$$

R. Ricordando che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ per x che tende a 0 allora

$$\frac{x - \sin x}{x^3} \to \frac{1}{6}.$$

Quindi, notando che la serie è a termini non negativi e ponendo $x = 1/n$ si ha che

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n} = n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{6}$$

Dato che $|\frac{1}{6}| < 1$, la serie converge per il criterio della radice.

— ◇ —

7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan(\sin n)\right)^n .$$

R. Intanto osserviamo che i termini non sono di segno costante (il primo termine negativo si ha per $n = 5$). Notiamo anche che qualunque sia il valore di n

$$\arctan(\sin n) \in \arctan([-1, 1]) = [-\pi/4, \pi/4],$$

e dunque

$$|\arctan(\sin n)|^n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n .$$

Questo vuol dire che la serie dei valori assoluti è maggiorata dalla serie geometrica convergente di ragione $0 < \pi/4 < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n .$$

Dunque, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente (e quindi è convergente).

— ◇ —

8. Trovare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^n$$

e determinarne la somma per $x = \frac{1}{4}$.
R. Se poniamo $y = x/(x-1)$ allora, nella variabile y, la serie diventa una serie geometrica di ragione y. Questa converge se e solo se $|y| < 1$ e la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - 1 = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}.$$

Quindi il dominio di convergenza della serie data è determinato dalla disuguaglianza

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$$

ossia $x \in D = (-\infty, \frac{1}{2})$. Per $x = \frac{1}{4}$ si ha che $y = -\frac{1}{3}$ e la somma della serie è uguale a $-\frac{1}{4}$.

— ⋄ —

9. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{6^n} - \frac{(-2)^n}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

Quindi, per la linearità, la serie può essere decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{5}{4}.$$

— ⋄ —

10. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-5)^n}{n5^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Per la linearità, la serie può essere così decomposta nella differenza di due serie convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-5)^n}{n5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-1\right)-\log 2=\frac{1}{4}-\log 2.$$

— ⋄ —

11. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^a\log(n+1)}}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

R. I termini della serie sono non negativi e facendo un'analisi asintotica abbiamo che

$$\sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^a\log(n+1)}}\sim\left(\frac{n^2}{n^a\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\sim\frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

che converge se e solo se $\alpha=\frac{a-2}{2}>1$ ($\beta=\frac{1}{2}\leq 1$). Possiamo così concludere che la serie data converge per $a>4$.

— ⋄ —

12. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(n^4+n^3)-4\log n}{n^a\left(\log(n!+n^n)\right)^2}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

R. Intanto osserviamo che

$$\log(n^4+n^3)-4\log n=\log(n^4+n^3)-\log(n^4)=\log\left(\frac{n^4+n^3}{n^4}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

La serie data può essere quindi riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a\left(\log(n!+n^n)\right)^2}.$$

I termini della serie sono non negativi e possiamo fare un'analisi asintotica ricordando che $\log(1+x) \sim x$ per x che tende a 0:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a\left(\log(n!+n^n)\right)^2} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^a(n\log n)^2} \sim \frac{1}{n^{a+3}(\log n)^2}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{a+3}(\log n)^2}$$

che converge se e solo se $\alpha = a+3 \geq 1$ $(\beta = 2 > 1)$. Possiamo così concludere che la serie data converge per $a \geq -2$.

— ◇ —

13. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)}$$

al variare del parametro $a > 0$.

R. Prima osserviamo che

$$(n\log n)^n + n^{n\log n} = e^{n(\log n + \log\log n)} + e^{n(\log n)^2} \sim e^{n(\log n)^2}$$

e

$$2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right) \sim 2n\left((1+1/n^{5a}) - (1-1/2n^{4a})\right) \sim 1/n^{4a-1}.$$

I termini della serie sono positivi e facendo l'analisi asintotica otteniamo

$$\frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)} \sim \frac{1/n^{4a-1}}{\log\left(e^{n(\log n)^2}\right)} \sim \frac{1}{n^{4a}(\log n)^2}.$$

Dunque la serie converge se e solo se $\alpha = 4a \geq 1$ $(\beta = 2 > 1)$ ossia per $a \geq 1/4$.

— ◇ —

14. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} \cdot x^n.$$

R. Facciamo l'analisi asintotica del coefficiente

$$a_n = \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} = \frac{(1+2\cdot 3^n+9^n)+5^n}{(1+2\cdot 5^n+25^n)+9^n} \sim \frac{9^n}{25^n}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 25/9 perché:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{9}{25}.$$

— ◇ —

15. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

R. Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 4.

— ◇ —

16. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot x^n.$$

R. Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1))^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!} = \frac{3(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

La prima frazione tende a 3/4 mentre la seconda si riduce a $(1+1/n)^n$ e quindi tende ad e. Così il raggio di convergenza della serie è uguale a $4/3e$.

— ◇ —

17. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \cdot x^{4n}.$$

R. Poniamo $y = x^4$. Allora il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \cdot y^n.$$

è dato dal reciproco del limite di

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n \sim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2}$$

ossia e^2. Siccome $y = x^4$, il raggio di convergenza della serie data è

$$\sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e}.$$

— ◇ —

18. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+5)! + 6(n+1)!}{(n+5)! + 4(n+2)!}\right)^{n^4} \cdot x^n .$$

R. Calcoliamo il limite

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{1 + \dfrac{6(n+1)!}{(n+5)!}}{1 + \dfrac{4(n+2)!}{(n+5)!}}\right)^{n^4/n} \sim \frac{\left((1 + 6/n^4)^{n^4}\right)^{1/n}}{(1 + 4/n^3)^{n^3}} \sim \frac{e^{6/n}}{e^4} \to \frac{1}{e^4} .$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è e^4.

— ◇ —

19. Determinare il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \cdot x^n.$$

R. Intanto osserviamo che $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ perché l'intero n è pari se e solo è pari il suo quadrato (provate a dimostrarlo). Se calcoliamo anche la differenza delle radici, allora la serie data può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot x^n.$$

Dato che
$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+1}}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$
il raggio di convergenza è uguale a 1 e così $(-1,1) \subset D \subset [-1,1]$. Vediamo cosa succede agli estremi: per $x = 1$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$
e quindi converge per il criterio di Leibniz. Per $x = -1$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$
Siccome il termine generico di questa serie a termini positivi è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$ la serie non converge. Dunque $D = (-1,1]$.

— ◇ —

20. Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right).$$

R. Si noti che il termine, a meno del fattore $(-1)^n$, è non negativo e infinitesimo, ma non è decrescente dunque non si può applicare il criterio di Leibniz. Se provassimo ad applicare il confronto asintotico anche a questa serie che ha segno variabile avremmo che
$$\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Ora siccome per il criterio di Leibniz la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$
converge allora saremmo tentati di dire che anche la serie data converge. Questa conclusione è però sbagliata perchè in realtà la serie data diverge:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$
infatti la prima serie converge per il criterio di Leibniz mentre la seconda diverge.

— ◇ —

21. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}}.$$

R. Riscriviamo opportunamente il termine della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Ora dalla tabella delle serie di potenze si ricava facilmente che

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \quad \text{con } x \in D = (-1, 1].$$

Quindi la serie in esame si ottiene ponendo $x = -\frac{3}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\log(1 - \frac{3}{4})\right) = \frac{\log 4}{4} = \frac{\log 2}{2}.$$

— ◇ —

22. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{i}{2}\right)^n - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Per la linearità, la serie può essere così decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti ($|i/2| < 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{2}} - 1\right) - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-11 + 2i}{5}.$$

— ◇ —

23. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 4n + 5) \left(\log \left(\frac{e}{1 + |x|} \right) \right)^n.$$

R. Poniamo $y = \log(e/(1 + |x|))$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2 + 4n + 5) \cdot y^n.$$

Il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3n^2 + 4n + 5} \sim \sqrt[n]{3n^2} \to 1.$$

Sia all'estremo $y = 1$ che $y = -1$ la serie non converge perché il termine generico non converge a zero. Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 < y = \log(e/(1 + |x|)) = 1 - \log(1 + |x|) < 1,$$

ossia

$$0 < \log(1 + |x|) < 2$$

e quindi

$$0 < |x| < e^2 - 1.$$

Dunque il dominio di convergenza della serie data è $D = (1 - e^2, e^2 - 1) \setminus \{0\}$.

— ◇ —

24. Determinare il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \cdot x^n.$$

Quanto vale la somma se x appartiene a tale dominio?

R. Si noti che

$$\frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Calcoliamo il limite della successione $\sqrt[n]{|a_n|}$: anche se a_n oscilla tra i valori 3 e 1/3 la sua radice n-sima tende a 1. Inoltre nei punti $x = 1$ e $x = -1$ la serie non converge perché il termine generico non è infinitesimo. Quindi $D = (-1, 1)$. Se $|x| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \cdot x^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$$

dove la prima e la seconda serie individuano la somma di tutti i termini rispettivamente di indice pari ($n = 2k$) e di indice dispari ($n = 2k + 1$). Inoltre queste due serie sono riconducibili alla serie geometrica di ragione x^2: per la prima

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \frac{1}{1 - x^2},$$

mentre per la seconda

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{x}{1-x^2}.$$

Quindi la somma della serie data per $|x| < 1$ è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x^2} + 3 \cdot \frac{x}{1-x^2} = \frac{1+9x}{3(1-x^2)}.$$

— ◇ —

25. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot (1-|x|)^n.$$

R. Poniamo $y = 1 - |x|$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot y^n.$$

Se analizziamo il coefficiente

$$a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

e quindi il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \to 1.$$

All'estremo $y = 1$, la serie è asintoticamente equivalente alla serie armonica e dunque diverge. All'altro estremo $y = -1$ invece la serie converge per il criterio di Leibniz perché

$$\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \text{ decresce e tende a 0.}$$

Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 \le y = 1 - |x| < 1, \text{ ossia } 0 < |x| \le 2$$

e il dominio di convergenza della serie data è $D = [-2, 2] \setminus \{0\}$.

— ◇ —

26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n - (1+i)^n}{2^{n-1}}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right).$$

Per la linearità, la serie si decompone nella differenza di due serie geometriche convergenti ($|(1+i)/2| < 1$):

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} - 1\right) = 1 - 2i.$$

— ◇ —

27. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(ne, \frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!}.$$

R. Dato che

$$ne \le \frac{4e}{n+1}$$

se e solo se

$$n(n+1) \le 4$$

ossia per $n = 0$ e $n = 1$ allora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(ne, \frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{1}(ne)\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4e}{n+1}\right)\frac{(-1)^n}{n!} \\
&= 0 - e + 4e\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \\
&= -e - 4e\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} \\
&= -e - 4e\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{n!}\right) \\
&= -e - 4e\left(e^{-1} - \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right)\right) = e - 4.
\end{aligned}$$

— ◇ —

28. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \right).$$

Dato che le serie relative ai due termini convergono possiamo separarli ottenendo

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

— ◇ —

29. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n^2-1)3^n - (n-1)!}{(n+1)!} \right).$$

R. La serie si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \cdot 3^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ovvero

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 3e^3 - (e^3-1) - 1 = 2e^3.$$

— ◇ —

30. Determinare il dominio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n.$$

R. Ponendo $y = x/(1+x)$ si osserva che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-y)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-y)^n}{n} = -\log(1-y)$$

con dominio di convergenza $[-1,1)$ rispetto a y. Quindi il dominio rispetto a x è

$$-1 \leq \frac{x}{1+x} < 1$$

ossia $D = [-1/2, +\infty)$ e per $x \in D$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = -\log\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) = -\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = \log(1+x).$$

— ◇ —

31. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n}.$$

R. Notiamo che

$$(\cos(n\pi/4))^2 = \begin{cases} 1 & n = 4k \text{ per } k \geq 0 \\ 1/2 & n = 2k+1 \text{ per } k \geq 0 \\ 0 & n = 4k+2 \text{ per } k \geq 0 \end{cases} .$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/2}{2^{2k+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{16}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{5}.$$

— ◇ —

32. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}.$$

R. Per linearità la serie si può spezzare in due parti

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{3^n} + 5\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Per quanto riguarda la prima serie ricordiamo che per $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

e dunque
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$
La somma della seconda serie vale
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$$
Infine
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n} = 2 \cdot \frac{5}{12} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Esercizi

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx.$$

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\log x)^2\,dx.$$

3. Sia F la primitiva di

$$f(x) = e^{|x|}$$

tale che $F(1) = e$. Determinare $F(-1)$.

4. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx.$$

5. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x\cos x\,e^x\,dx.$$

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^8\,\log x\,dx.$$

7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx.$$

8. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan x\,dx.$$

9. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx.$$

10. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx.$$

14. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx.$$

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan(x/2)+x^2}{2x^2-8}\,dx.$$

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x+\cos^2 x}\,dx.$$

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx.$$

19. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx.$$

20. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x + 3\sqrt{x} + 2}\, dx.$$

21. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\, dx.$$

22. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\ \cos(4x)\, dx.$$

23. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e} \min(x, 1/x) \log x\, dx.$$

24. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx.$$

25. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^{6} \min(3 - |x-3|, 2)\, dx.$$

26. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4} \int_0^{t^2} \arcsin(3x)\, dx.$$

27. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^3} \int_t^{t^2} \sin^2(2x)\, dx.$$

28. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^t} \int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\, dx.$$

29. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)}\, dx.$$

30. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{1} \log x\, dx.$$

31. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\,dx.$$

32. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx.$$

33. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,2)$.

34. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

35. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

36. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}}$$

è integrabile sull'intervallo $(1,3)$.

37. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

38. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

39. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\log(1+x^2)-(\log(1+x))^2}{x^a\cdot\sqrt{\sin x}\cdot(\pi-x)^{1/a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.
40. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3+(\log x)^2)}\,dx.$$

41. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx.$$

42. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\,(\log(1+x^x))^5}$$

è integrabile sull'intervallo $(1, +\infty)$.
43. Se

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

quanto vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx\,?$$

Soluzioni

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx.$$

R. Procediamo effettuando il cambio di variabile $t=\sqrt{x}$ ossia

$$x=t^2 \quad \text{e} \quad dx = 2t\,dt.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = \int \frac{1}{t+t^2}\,2t\,dt = 2\int \frac{1}{1+t}\,dt = 2\log|1+t|+c$$

Se torniamo alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = 2\log(1+\sqrt{x})+c.$$

— ◇ —

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\log x)^2\,dx.$$

R. Integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= = x(\log x)^2 - \int x\,d((\log x)^2)\\ &= x(\log x)^2 - \int x\,\frac{2\log x}{x}\,dx\\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx.\end{aligned}$$

Ricordando che una primitiva di $\log x$ è $x\log x - x$ si ha che

$$\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2(x\log x - x)+c = x((\log x)^2 - 2\log x + 2)+c.$$

— ◇ —

3. Sia F la primitiva di

$$f(x)=e^{|x|}$$

tale che $F(1)=e$. Determinare $F(-1)$.

R. Per $x \geq 0$ abbiamo che

$$\int e^{|x|}\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c_1,$$

mentre per $x \leq 0$

$$\int e^{|x|}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c_2,$$

Le primitive di $e^{|x|}$ per $x \in \mathbb{R}$ sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $1 + c_1 = -1 + c_2$ ossia se $c_2 = 2 + c_1$. Quindi

$$\int e^{|x|}\,dx = \begin{cases} e^x + c & \text{per } x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

La primitiva F tale che $F(1) = e^1 + c = e$ si ottiene per $c = 0$, dunque $F(-1) = -e^{-(-1)} + 2 + c = -e + 2$.

— ⋄ —

4. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^{2x} nel differenziale e integriamo per parti per due volte

$$\begin{aligned}
\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx &= \int \sin(3x)\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(\sin(3x)) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\int \cos(3x)\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} + \frac{3}{4}\int e^{2x}\,d(\cos(3x)) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} - \frac{9}{4}\int \sin(3x)e^{2x}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Ora che l'integrale rimasto coincide con quello iniziale conviene agire algebricamente spostando gli integrali tutti a sinistra e aggiungendo la costante arbitraria a destra:

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right)\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} + c,$$

e quindi

$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{13}\,e^{2x}\,\left(2\sin(3x) - 3\,\cos(3x)\right) + c.$$

Si noti che la divisione di c per $13/4$ è comunque una costante arbitraria che indichiamo ancora con la lettera c.

— ◇ —

5. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \cos x \, e^x \, dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^x nel differenziale e integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, e^x \, dx &= \int x \cos x \; d(e^x) = x \cos x \, e^x - \int e^x \left(\cos x - x \sin x\right) \, dx \\ &= x \cos x \, e^x - \int \cos x \, e^x \, dx + \int x \sin x \, e^x \, dx.\end{aligned}$$

Ora calcoliamo separatamente l'ultimo integrale

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, e^x \, dx &= \int x \sin x \; d(e^x) = x \sin x \, e^x - \int e^x \left(\sin x + x \cos x\right) \, dx \\ &= x \sin x \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int x \cos x \, e^x \, dx.\end{aligned}$$

Quindi riassumendo:

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} \left[x(\cos x + \sin x) \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int \cos x \, e^x \, dx \right].$$

I due integrali rimasti si possono determinare con la stessa tecnica:

$$\begin{aligned}\int \cos x \, e^x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \, e^x + c_1 \\ \int \sin x \, e^x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \, e^x + c_2.\end{aligned}$$

Ora possiamo finalmente scrivere l'integrale cercato

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} \left[x(\cos x + \sin x) \, e^x - \sin x \, e^x \right] + c.$$

— ◇ —

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^8 \, \log x \, dx.$$

R. Procediamo per parti integrando prima il fattore x

$$\begin{aligned}\int x^8 \, \log x \, dx &= \int \log x \, d\left(\frac{x^9}{9}\right) = \frac{x^9}{9} \, \log x - \int \frac{x^9}{9} \, d(\log x) \\ &= \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{1}{9} \int x^9 \, \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{1}{9} \int x^8 \, dx \\ &= \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{x^9}{81} + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx.$$

R. Integrando prima il fattore $1/x$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx &= \int \sqrt{1+\log x}\,d(\log x)\\ &= \int (1+\log x)^{\frac{1}{2}}\,d(1+\log x) = \frac{2}{3}(1+\log x)^{3/2}+c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

8. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan x\,dx.$$

R. Procediamo per parti

$$\int \arctan x\,dx = x\,\arctan x - \int x\,d(\arctan x) = x\,\arctan x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Ora risolviamo a parte l'integrale rimasto

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

Quindi

$$\int \arctan x\,dx = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

— ⋄ —

9. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx.$$

R. Possiamo intanto fare la divisione (i polinomi hanno lo stesso grado)

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2-1} = 1+\frac{4x+6}{x^2-1}$$

così

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx = x+\int \frac{4x+6}{x^2-1}\,dx.$$

Ora calcoliamo l'integrale rimasto. La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

e dunque la decomposizione è

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + (B-A)}{x^2-1}$$

e si ricava facilmente che $A = -1$ e $B = 5$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx &= x + \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right) dx \\ &= x - \log|x+1| + 5\log|x-1| + c \\ &= x + \log\frac{|x-1|^5}{|x+1|} + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

10. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B)x + B}{x^2(x+1)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ e $D = 1$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= -2\log|x| - \frac{1}{x} + 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + c \\ &= 2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + c.\end{aligned}$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \left[2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]_1^2 = 2\log\frac{3}{4} + \frac{2}{3}.$$

— ⋄ —

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Dato che la molteplicità degli zeri del denominatore è 1 possiamo determinare le costanti A, B e C nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{t\to-1}(x+1)\cdot f(x) = \lim_{t\to-1}\frac{x^2+2x-1}{(x+2)(x+3)} = -1,\\
B &= \lim_{t\to-2}(x+2)\cdot f(x) = \lim_{t\to-2}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+3)} = 1,\\
C &= \lim_{t\to-3}(x+3)\cdot f(x) = \lim_{t\to-3}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)} = 1.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx\\
&= \left[-\log|x+1| + \log|x+2| + \log|x+3|\right]_0^1\\
&= \left[\log\left|\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}\right|\right]_0^1 = \log 6 - \log 6 = 0.
\end{aligned}$$

— ⋄ —

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(1+x^2)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ A+C=-2 \\ B+D=5 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=0$, $B=1$, $C=-2$ e $D=4$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{4}{(1+x^2)^2}\right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{1+x^2} + 4\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale che rimane per parti

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c.\end{aligned}$$

Così

$$\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = 3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2} + c$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{3\pi+2}{4}.$$

— ⋄ —

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx.$$

R. Per $x > 0$, integriamo prima $1/x$ e poi aggiungiamo 3 nel differenziale

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(\log x)\\ &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(3+\log x) = -\frac{1}{3+\log x} + c.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3+\log x}\right]_1^e = \frac{1}{12}.$$

— ⋄ —

14. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

R. Effettuiamo il cambio di variabile

$$x = \sin t \quad \text{e} \quad dx = \cos t\,dt.$$

Invece di calcolare prima la primitiva e poi l'integrale definito proviamo a trasformare direttamente l'intervallo di integrazione:

$$x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \stackrel{t=\arcsin x}{\longrightarrow} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Quindi

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\cos t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/3} \sin^3 t\,dt.$$

Ora proseguiamo il calcolo osservando che $\sin^3 t = \sin t\,(1-\cos^2 t)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \sin^3 t\,dt &= \int_0^{\pi/3} \sin t\,(1-\cos^2 t)\,dt = \int_0^{\pi/3} (1-\cos^2 t)\,d(-\cos t)\\ &= \int_0^{\pi/3} (\cos^2 t - 1)\,d(\cos t) = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right]_0^{\pi/3} = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

— ⋄ —

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx.$$

R. Calcoliamo prima l'integrale indefinito con il metodo dell'integrazione per parti

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x\, d(-\cos x) = -\sin x\, \cos x - \int (-\cos x)\, d(\sin x)$$
$$= -\sin x\, \cos x + \int \cos^2 x\, dx.$$

Per continuare osserviamo che $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Quindi

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x\, \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\, dx = -\sin x\, \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx.$$

Ora possiamo esplicitare l'integrale che stiamo cercando

$$2 \int \sin^2 x\, dx = -\sin x\, \cos x + x + c.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\sin x\, \cos x + x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

— ◇ —

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8}\, dx.$$

R. Possiamo dividere l'integrale in due parti

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8}\, dx.$$

Nel primo integrale la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8}\, dx = 0.$$

Nel secondo integrale la funzione è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8}\, dx = 2 \int_0^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8}\, dx = \int_0^{1} \frac{x^2}{x^2 - 4}\, dx.$$

Continuiamo lo svolgimento del secondo integrale

$$\int_0^{1} \frac{x^2}{x^2 - 4}\, dx = \int_0^{1} \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4}\right)\, dx = \left[x\right]_0^1 + \int_0^{1} \frac{4}{(x-2)(x+2)}\, dx$$
$$= 1 + \int_0^{1} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\, dx = 1 + \left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 = 1 - \log 3.$$

Dunque

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8}\, dx = 1 - \log 3.$$

— ◇ —

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$$

R. Raccogliendo $\cos^2 x$ al denominatore, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Quindi integriamo il fattore $1/\cos^2 x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + \frac{1}{3}}\, d(\tan x)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(\sqrt{3}\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

— ◇ —

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\, 2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx.$$

R. La funzione da integrare è continua in $[-1, 2] \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

e quindi conviene dividere l'intervallo di integrazione rispetto al punto di discontinuità

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{2} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} 2^x\, dx + \int_{0}^{2} 2^x\, dx.$$

Si verifica facilmente che

$$\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\log 2} + c$$

e così l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^{2} f(x) = -\frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{0}^{2} = \frac{5}{2\log 2}.$$

— ◇ —

19. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx.$$

R. Cominciamo integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx = [x \ \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 x\, d(\arcsin x) == \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ora calcoliamo a parte l'integrale che manca

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\left(x^2\right).$$

Quindi "aggiustiamo" il differenziale in modo che diventi uguale a $1-x^2$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\left[2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1.$$

Dunque

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

— ◇ —

20. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\, dx.$$

R. Qui conviene fare la sostituzione $t = \sqrt{x}$ così $t^2 = x$, $2t\, dt = dx$. Trasformando anche l'intervallo di integrazione otteniamo

$$\int_0^{16} \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\, dx = \int_0^4 \frac{2t}{t^2+3t+2}\, dt.$$

Ora integriamo la funzione razionale: la decomposizione in questo caso è

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{2t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{(A+B)t+(2A+B)}{t^2+3t+2}$$

e si ricava facilmente che $A=-2$ e $B=4$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{2t}{t^2+3t+2}\, dt &= \int_0^4 \left(-\frac{2}{t+1} + \frac{4}{t+2}\right) dt \\ &= 2\left[\log\frac{(t+2)^2}{|t+1|}\right]_0^4 = 2\log\frac{36}{5} - 2\log 4 = 2\log\frac{9}{5}.\end{aligned}$$

— ⋄ —

21. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx.$$

R. Dopo aver osservato che la funzione da integrare è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0, integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx &= 4\pi \int_0^{1/4} \frac{x}{(\cos(\pi x))^2}\,dx = 4\int_0^{1/4} x\,d\left(\tan(\pi x)\right)\\ &= 4\left[x\tan(\pi x)\right]_0^{1/4} - 4\int_0^{1/4} \tan(\pi x)\,dx\\ &= 1 - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx.\end{aligned}$$

Per quanto visto

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx = 1 - \frac{2\log 2}{\pi}.$$

— ⋄ —

22. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx.$$

R. Operiamo utilizzando il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,d\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[\cos(3x)\,\sin(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x)\,d\left(\cos(3x)\right)\\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\,\sin(4x)\,dx.\end{aligned}$$

In modo simile

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\ \sin(4x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\ d\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left[\sin(3x)\ \cos(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x)\, d\left(\sin(3x)\right)\\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\ \cos(4x)\, dx.\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\ \cos(4x)\, dx = \frac{9}{16}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\ \cos(4x)\, dx$$

ossia l'integrale da determinare vale 0.

— ◇ —

23. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^e \min(x, 1/x) \log x\, dx.$$

R. Siccome per $x \in (0, e]$

$$\min(x, 1/x) = \begin{cases} x & \text{se} x \in (0,1] \\ 1/x & \text{se } x \in (1,e] \end{cases}$$

l'integrale diventa

$$\int_0^e \min(x, 1/x) \log x\, dx = \int_0^1 x \log x\, dx + \int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx.$$

Per il primo integrale si ha che

$$\int_0^1 x \log x\, dx = \int_0^1 \log x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\, dx = \left[-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^e \log x\, d(\log x) = \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $-1/4 + 1/2 = 1/4$.

— ◇ —

24. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx.$$

R. Prima osserviamo che $\log(1/x) = -\log x$. Quindi, dato che per $x \in (0, e^4]$

$$\max(\log x, -\log x) = \begin{cases} -\log x & \text{se } x \in (0,1] \\ \log x & \text{se } x \in (1, e^4] \end{cases}.$$

L'integrale diventa

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx = -\int_0^1 \log x\, dx + \int_1^{e^4} \log x\, dx$$

Per il primo integrale si ha che

$$-\int_0^1 \log x\, dx = [x \log x - x]_1^0 = 1.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^{e^4} \log x\, dx = [x \log x - x]_1^{e^4} = 3e^4 + 1.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $2 + 3e^4$.

— ⋄ —

25. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^6 \min(3 - |x-3|, 2)\, dx.$$

R. Notiamo che $3 - |x-3| \geq 2$ se e solo se $|x-3| \leq 1$ ossia per $x \in [2,4]$.
Quindi

$$\min(3 - |x-3|, 2) = \begin{cases} 3 - |x-3| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [2,4] \\ 2 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}.$$

L'integrale allora si svolge nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\int_1^6 \min(3 - |x-3|, 2)\, dx &= \int_1^2 (3 - |x-3|)\, dx + \int_2^4 2\, dx + \int_4^6 (3 - |x-3|)\, dx \\
&= \int_1^2 (3 - (3-x))\, dx + 4 + \int_4^6 (3 - (x-3))\, dx \\
&= \int_1^2 x\, dx + 4 + \int_4^6 (6-x)\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4 + 12 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

— ◇ —

26. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^{t^2}\arcsin(3x)\,dx.$$

R. Si tratta del limite di un rapporto di infinitesimi. Procediamo applicando il teorema di de l'Hôpital. Per calcolare la derivata del numeratore utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\arcsin(3x)$ allora $F'(x) = \arcsin(3x)$.
Dunque la derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{t^2}\arcsin(3x)\,dx\right) = \frac{d}{dt}\big(F(t^2)-F(0)\big) = F'(t^2)(t^2)' = 2t\,\arcsin(3t^2)$$

mentre la derivata del denominatore è $(t^4)' = 4t^3$.
Dato che $\arcsin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^{t^2}\arcsin x\,dx \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t\,\arcsin(3t^2)}{4t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{6t^3}{4t^3} = \frac{3}{2}.$$

— ◇ —

27. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2}\sin^2(2x)\,dx.$$

R. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\sin^2(2x)$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{t^2}\sin^2(2x)\,dx\right) &= \frac{d}{dt}\big(F(t^2)-F(t)\big) = \sin^2(2t^2)\,(t^2)' - \sin^2(2t)\,(t)' \\ &= 2t\,\sin^2(2t^2) - \sin^2(2t).\end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è $(t^3)' = 3t^2$.
Dato che $\sin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2}\sin^2(2x)\,dx \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t\,\sin^2(2t^2)-\sin^2(2t)}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{8t^5-4t^2}{3t^2} = -\frac{4}{3}.$$

— ◇ —

28. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to +\infty}\frac{t}{e^t}\int_{2e^t}^{5e^t}\frac{1}{\log x}\,dx.$$

R. Per applicare efficacemente il teorema di de l'Hôpital conviene risistemare i termini in modo da avere al numeratore solo l'integrale:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_{2e^t}^{5e^t}\frac{1}{\log x}\,dx\right)\Big/\left(\frac{e^t}{t}\right).$$

La forma indeterminata è ∞/∞. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $1/\log x$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_{2e^t}^{5e^t}\frac{1}{\log x}\,dx\right) &= \frac{d}{dt}\left(F(5e^t)-F(2e^t)\right)=\frac{5e^t}{\log(5e^t)}-\frac{2e^t}{\log(2e^t)}\\ &= e^t\left(\frac{5}{t+\log 5}-\frac{2}{t+\log 2}\right)=e^t\cdot\frac{3t+5\log 2-2\log 5}{(t+\log 5)(t+\log 2)}\sim\frac{3e^t}{t}\end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{t}\right)=-\frac{e^t}{t^2}+\frac{e^t}{t}\sim\frac{e^t}{t}$$

. Quindi il limite richiesto è uguale a 3.

— ⋄ —

29. Calcolare al variare di $\alpha>0$ il limite

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^\alpha}\int_{t^2}^{3t^2}\frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)}\,dx.$$

R. Per x che tende a 0 la funzione

$$f(x)=\frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)}\sim\frac{(1+x^2+x^4/2)+(1-x^2+x^4/2)-2}{x^3}\sim x.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile vicino a 0 e sia $F(x)$ una sua primitiva. Dato che il limite richiesto è un rapporto di infinitesimi possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital. La derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t^2}^{3t^2}f(x)\,dx\right)=\frac{d}{dt}\left(F(3t^2)-F(t^2)\right)=f(3t^2)\,(3t^2)'-f(t^2)\,(t^2)'=f(3t^2)\,6t-f(t^2)\,2t.$$

mentre quella del denominatore è $(t^\alpha)'=\alpha t^{\alpha-1}$.
Dato che per t che tende a 0 $f(t)\sim t$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^\alpha}\int_{t^2}^{3t^2}\frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{\sin(x^3)}\,dx &\overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{f(3t^2)\,6t-f(t^2)\,2t}{\alpha t^{\alpha-1}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{18t^3-2t^3}{\alpha t^{\alpha-1}}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{16}{\alpha}t^{4-\alpha}=\begin{cases}0 & \text{per } 0<\alpha<4\\ 4 & \text{per } \alpha=4\\ +\infty & \text{per } \alpha>4\end{cases}.\end{aligned}$$

— ◇ —

30. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \log x \, dx.$$

R. Come abbiamo già visto

$$\int \log x \, dx = x \, \log x - x + c.$$

Quindi

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \, \log x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x \to 0^+} (x \, \log x - x) = -1$$

— ◇ —

31. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} \, dx.$$

R. La funzione data è continua e negativa sull'intervallo $(1, 2]$. Prima di provare a calcolare una primitiva verifichiamo se la funzione è integrabile sull'intervallo. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico perché la funzione ha segno costante nell'intervallo di integrazione. Per $x \to 1^+$

$$\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} \sim -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Quindi l'integrale diverge a $-\infty$ (il segno meno è dovuto al fatto che la funzione $1/\cos(\pi x/2)$ è negativa in un intorno di 1^+).

— ◇ —

32. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx.$$

R. Integriamo prima il fattore $1/x$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^3} \, d(\log x) = \left[-\frac{1}{2(\log x)^2} \right]_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

— ◇ —

33. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,2)$.

R. La funzione data è continua sull'intervallo $(0,2]$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica solo per $x \to 0^+$

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4} \sim \frac{x^a}{x^3\,5^4} \sim \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{x^{3-a}}$$

Dunque la funzione è integrabile sull'intervallo $(0,2)$ se e solo se $\alpha = 3 - a < 1$ ossia se $a > 2$.

— ⋄ —

34. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. Dato che il dominio della funzione da integrare è $(0,+\infty) \setminus \{1\}$, i punti da indagare sono tre: 0, 1 e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{x}{x^a} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = a - 1 < 1$ ossia $a < 2$.

Per $x \to 1$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{|x-1|^{4a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 4a < 1$ ossia $a < \frac{1}{4}$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a\,x^{4a}} \sim \frac{1}{x^{5a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 5a > 1$ ossia $a > \frac{1}{5}$.

Unendo le tre condizioni abbiamo che $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$.

— ⋄ —

35. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Siccome il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{\log 2\}$, dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, $\log 2$ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x - 1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2}\,|\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/2 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a.

Per $x \to \log 2$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x - \log 2)$ e

$$\log(e^x - 1) = \log(2e^{x-\log 2} - 1) \sim \log(2(1 + (x - \log 2)) - 1) = \log(1 + 2(x - \log 2)) \sim 2(x - \log 2).$$

Così

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x - 1)|^a} \sim \frac{1}{\sqrt{\log 2}\,|2(x - \log 2)|^a} = \frac{1}{2^a\sqrt{\log 2}} \cdot \frac{1}{|x - \log 2|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a $\log 2$ è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.

Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x - 1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2}\,x^a} = \frac{1}{x^{a+1/2}}$$

dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a + 1/2 > 1$ ossia se $a > 1/2$.

Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $1/2 < a < 1$.

— ◇ —

36. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(x^2 - 1)^a}{\log x\,\sqrt{3 - x}}$$

è integrabile sull'intervallo $(1, 3)$.

R. I punti da indagare sono due: 1 e 3.

Per $x \to 1^+$ abbiamo

$$\frac{(x^2 - 1)^a}{\log x\,\sqrt{3 - x}} = \frac{((x - 1)(x + 1))^a}{\log(1 + (x - 1))\,\sqrt{3 - x}} \sim \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x - 1)^a}{x - 1} = \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x - 1)^{1-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 1 - a < 1$ ossia $a > 0$.

Per $x \to 3^-$ abbiamo

$$\frac{(x^2 - 1)^a}{\log x\,\sqrt{3 - x}} \sim \frac{8^a}{\log 3} \cdot \frac{1}{(3 - x)^{\frac{1}{2}}}$$

quindi è integrabile "vicino" a 3 perché $\frac{1}{2} < 1$.

Così l'unica condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(1, 3)$ è: $a > 0$.

— ◇ —

37. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. I punti da indagare sono due: 0 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5} = \frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(1+3(e^{x^2}-1)/5)} \sim \frac{x^a/4}{3(e^{x^2}-1)/5} \sim \frac{x^a/4}{3x^2/5} \sim \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{x^{2-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 2-a < 1$ ossia $a > 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5} \sim \frac{x^{a/4}}{\log(3e^{x^2})} = \frac{x^{a/4}}{x^2+\log 3} \sim \frac{1}{x^{2-(a/4)}}$$

quindi è integrabile verso $+\infty$ se $\alpha = 2-(a/4) > 1$ ossia $a < 4$.
Così la condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(0,+\infty)$ è: $1 < a < 4$.

— ◇ —

38. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. Il dominio della funzione da integrare è $(0,+\infty)\setminus\{1\}$ e dunque dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, 1 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} \sim \frac{1-e^{-1}}{x^{1/3}\,|\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/3 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a.
Per $x \to 1$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x-1)$ e

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} = \frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(1+(x-1))|^a} \sim \frac{1-e^{-1/2}}{|x-1|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a 1 è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.
Per $x \to +\infty$ l'esponente $-1/(1+x^2)$ è infinitesimo e dunque

$$e^{-1/(1+x^2)} \sim 1 + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) \sim 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Allora

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} \sim \frac{1/x^2}{x^{1/3}\,|\log x|^a} = \frac{1}{x^{7/3}|\log x|^a}$$

e la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = 7/3 > 1$ ossia per qualunque a. Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $a < 1$.

— ◇ —

39. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.

R. Dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0^+, π^-. Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}} &\sim \frac{x^2 - x^4/2 + o(x^4) - (x - x^2/2 + o(x^2))^2}{x^a \cdot x^{1/2} \cdot \pi^{1/a}} \\ &\sim \frac{x^3}{\pi^{1/a} x^{a+1/2}} = \frac{1}{\pi^{1/a}} \cdot \frac{1}{x^{a-5/2}}\end{aligned}$$

quindi, la condizione di integrabilità $\alpha = a - 5/2 < 1$ è soddisfatta per $a < 7/2$. Per $x \to \pi^-$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(\pi - x)$ e

$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}} \sim \frac{\log(1+\pi^2) - (\log(1+\pi))^2}{\pi^a \cdot (\pi - x)^{1/2+1/a}}$$

quindi la condizione di integrabilità $\alpha = 1/2 + 1/a < 1$ è soddisfatta per $a > 2$. Dunque la funzione data è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$ se e solo se $2 < a < 7/2$.

— ◇ —

40. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\,dx.$$

R. La funzione data è continua in $[1, +\infty)$ e se facciamo un'analisi asintotica per $x \to +\infty$ vediamo subito che la funzione data è integrabile:

$$\frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)} \sim \frac{1}{x\,(\log x)^2}.$$

Per calcolare l'integrale dobbiamo prima determinare una primitiva.
Per $x > 0$

$$\int \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\,dx = \int \frac{1}{3 + (\log x)^2}\,d(\log x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

— ◇ —

41. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx.$$

R. La funzione data è continua e positiva in $(0,+\infty)$. Inoltre su questo intervallo è integrabile per il criterio del confronto asintotico:
per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Per il calcolo del valore dell'integrale improprio determiniamo una primitiva: poniamo $t=\sqrt{x}$, così $t^2=x$, $2t\,dt=dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx &= \int \frac{2t}{t+t^3}\,dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= 2\arctan(t)+c = 2\arctan(\sqrt{x})+c.\end{aligned}$$

Ora valutiamo la primitiva agli estremi di integrazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx = 2\left[\arctan(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

— ◇ —

42. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\left(\log(1+x^x)\right)^5}$$

è integrabile sull'intervallo $(1,+\infty)$.
R. La funzione data è continua e positiva in $(1,+\infty)$. e dunque i punti da esaminare sono 1^+ e $+\infty$. Per $x \to 1^+$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\left(\log(1+x^x)\right)^5} \sim \frac{(x-1)^3}{(x-1)^a(\log 2)^5} = \frac{1}{(\log 2)^5}\cdot\frac{1}{(x-1)^{a-3}}$$

e quindi l'integrale converge "vicino" a 1^+ se $a-3<1$ ossia se $a<4$.
Per $x \to +\infty$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a\left(\log(1+x^x)\right)^5} \sim \frac{(\log x)^3}{x^a\left(\log(x^x)\right)^5} = \frac{1}{x^{a+5}(\log x)^2}$$

e quindi l'integrale converge "verso" $+\infty$ se $a+5 \geq 1$ ossia se $a \geq -4$.
Così la condizione di integrabilità cercata è $a \in [-4,4)$.

— ◇ —

43. Se

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

quanto vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx\,?$$

R. Dato che la funzione e^{-x^2} è pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Inoltre $-x^2+2x = -(x-1)^2+1$ e quindi ponendo $t = x-1$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+1}\,dt = e\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = e\sqrt{\pi}.$$