CAPÍTULO 10

Vectores y geometría de coordenadas en el espacio tridimensional

Lord Ronald no dijo nada; salió de la habitación, se abalanzó sobre su caballo y galopó alocadamente en todas las direcciones...

¿Y quién es este alto joven que se acerca a Gertrude con cada movimiento del caballo?...

Los dos estaban destinados a conocerse. Se acercaban más y más. Y todavía más. Entonces se encontraron por un breve instante. Gertrude levantó la cabeza y se dirigió hacia los ojos del joven noble con una gran intensidad en su expresión, mientras Lord Ronald se dirigía hacia el ocupante del carruaje con la mirada tan fija que nada excepto una gacela, o un conducto de gas, podría haber igualado su intensidad.

Stephen Leacock (1869-1944)
de *Gertrude the Governess; or, Simple Seventeen*

Introducción Un programa completo de cálculo de variable real comprende el estudio de

(i) Funciones reales de una sola variable real.
(ii) Funciones vectoriales de una sola variable real.
(iii) Funciones reales de una variable real vectorial.
(iv) Funciones vectoriales de una variable real vectorial.

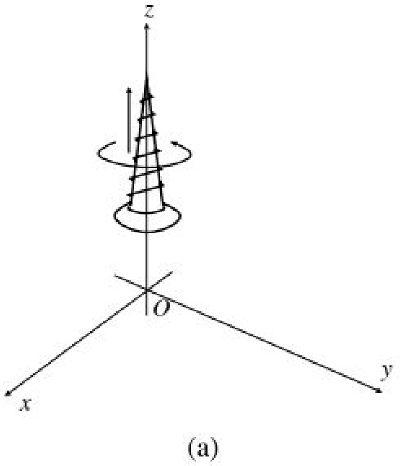
Los Capítulos 1-9 se han ocupado del punto (i). Los restantes capítulos considerarán los puntos (ii), (iii) y (iv). Concretamente, el Capítulo 11 estudiarán las funciones vectoriales de una sola variable real. Los Capítulos 12-14 se ocuparán de la diferenciación e integración de funciones reales de varias variables reales, es decir, de una variable real vectorial. Los Capítulos 15 y 16 presentarán aspectos del cálculo con funciones cuyos dominios y rangos tienen una dimensión mayor que uno, es decir, funciones vectoriales de una variable real vectorial. La mayor parte del tiempo limitaremos nuestra atención a funciones vectoriales con dominios y rangos en el plano o en el espacio tridimensional.

En este capítulo presentaremos las bases del cálculo multivariable y vectorial ampliando los conceptos de geometría analítica a tres o más dimensiones y presentando a los vectores como una forma adecuada para tratar a varias variables como una sola entidad. También presentaremos las matrices, ya que tienen utilidad para formular algunos conceptos de cálculo. No obstante, este capítulo no pretende ser un curso de álgebra lineal. Sólo desarrollaremos los aspectos que sean de utilidad en capítulos posteriores y omitiremos las demostraciones.

10.1 Geometría analítica en tres dimensiones

Decimos que el mudo físico en el que vivimos es tridimensional porque por cualquier punto sólo pueden pasar tres rectas **mutuamente perpendiculares**, y no más, de forma que cada una de ellas sea perpendicular a las otras dos. Esto equivale al hecho de que se requieren tres números para localizar un punto en el espacio con respecto a un punto de referencia (el **origen**). Una forma de usar tres números para localizar un punto es hacer que representen las distancias (con signo) desde el origen, medidas en la dirección de tres rectas mutuamente perpendiculares que pasen por dicho origen. Esas rectas se denominan sistema de coordenadas cartesianas, y cada una de las rectas se denomina eje coordenado. Dichos ejes se denominan generalmente eje x, eje y y eje z, con los ejes x e y en un plano horizontal y el eje z vertical. Además, el sistema de coordenadas debe estar **orientado a la derecha**. Esto significa que los dedos pulgar, índice y corazón de la mano derecha extendidos deben apuntar, respectivamente, en las direcciones positivas de los ejes x, y y z. Para quienes están acostumbrados a razonamientos mecánicos, un tornillo derecho avanzará en la dirección del eje z si se rota en la dirección que va del eje x positivo al eje y positivo (*véase* la Figura 10.1(a)).

Con respecto a un sistema cartesiano como éste, las **coordenadas** de un punto P en el espacio tridimensional son una tripleta ordenada de números reales (x, y, z). Los números x, y y z son, respectivamente, las distancias con signo de P hasta el origen, medidas en las direcciones de los ejes x, y y z (*véase* la Figura 10.1(b)).



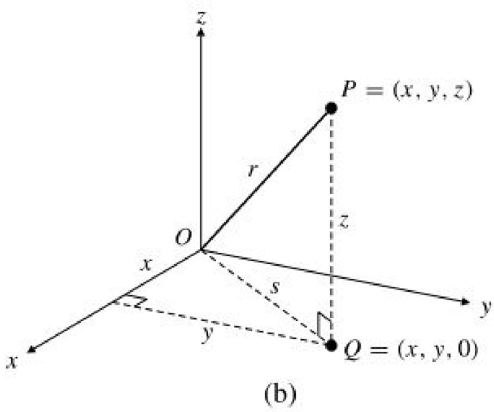


Figura 10.1
(a) El tornillo se mueve hacia arriba cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj visto desde arriba.
(b) Las tres coordenadas de un punto en el espacio tridimensional.

Sea Q el punto de coordenadas $(x, y, 0)$. Entonces, Q está en el plano xy (el plano que contiene a los ejes x e y), directamente por debajo (o por encima) de P. Se dice que Q es la proyección vertical de P en el plano xy. Si r es la distancia desde el origen O hasta P y s es la distancia desde O a Q, entonces, utilizando dos triángulos rectángulos, tenemos que

$$s^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad r^2 = s^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Por tanto, la distancia desde P al origen se expresa como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

De forma similar, la distancia r entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (*véase* la Figura 10.2) es

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

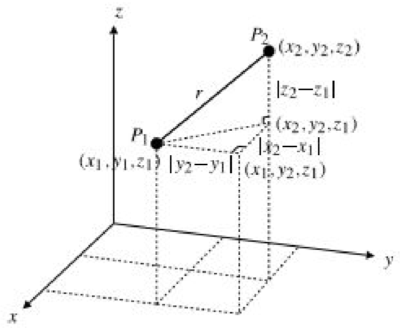


Figura 10.2

Ejemplo 1 Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 3, 8)$ y $C = (2, 0, 1)$ tiene un ángulo recto.

Solución Calculamos las longitudes de los tres lados del triángulo:

$$a = |BC| = \sqrt{(2-3)^2 + (0-3)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{59}$$
$$b = |AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$$
$$c = |AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{56}$$

Por el teorema del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. En este caso, $a^2 = 59 = 3 + 56 = b^2 + c^2$, por lo que $2bc\cos A$ debe ser 0. Por tanto, $\cos A = 0$ y $A = 90^\circ$.

De la misma forma que los ejes x e y dividen al plano xy en cuatro cuadrantes, también los tres **planos coordenados** en el espacio tridimensional (el plano xy, el plano xz y el plano yz) dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**. Denominaremos **primer octante** aquel en el que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y $z \geqslant 0$. Al dibujar gráficas en el espacio tridimensional a veces es más fácil dibujar sólo la parte que está en el primer octante (*véase* la Figura 10.3).

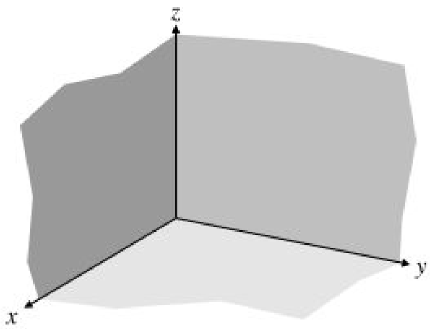


Figura 10.3 El primer octante.

Una ecuación o inecuación en la que intervienen las variables x, y y z define un conjunto de puntos en el espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o inecuación. Una sola ecuación en general representa una superficie (un objeto bidimensional) en el espacio tridimensional.

Ejemplo 2 **(Algunas ecuaciones y las superficies que representan)**

(a) La ecuación $z = 0$ representa a todos los puntos de coordenadas $(x, y, 0)$, es decir, el plano xy. La ecuación $z = -2$ representa a todos los puntos de coordenadas $(x, y, -2)$, es decir, el plano horizontal que pasa por el punto $(0, 0, -2)$ en el eje z.
(b) La ecuación $x = y$ representa a todos los puntos de coordenadas (x, x, z). Se trata de un plano vertical que contiene a la recta de ecuación $x = y$ en el plano xy. El plano contiene también al eje z (*véase* la Figura 10.4).
(c) La ecuación $x + y + z = 1$ representa a todos los puntos tales que la suma de sus coordenadas es 1. Este conjunto es un plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Esos puntos no son colineales (es decir, no están en la misma línea recta), por lo que sólo hay un plano que pase por los tres (*véase* la Figura 10.5). La ecuación $x + y + z = 0$ representa un plano paralelo al de la ecuación $x + y + z = 1$ pero que pasa por el origen.
(d) La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa a todos los puntos del cilindro circular vertical que contiene a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy. Este cilindro tiene radio 2 y su eje es el eje z (*véase* la Figura 10.6).
(e) La ecuación $z = x^2$ representa a todos los puntos cuyas coordenadas son (x, y, x^2). Esta superficie es un cilindro parabólico tangente al plano xy en el eje y (*véase* la Figura 10.7).
(f) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ representa a todos los puntos que están a una distancia 5 del origen. Este conjunto de puntos forma una *esfera* de radio 5 centrada en el origen.

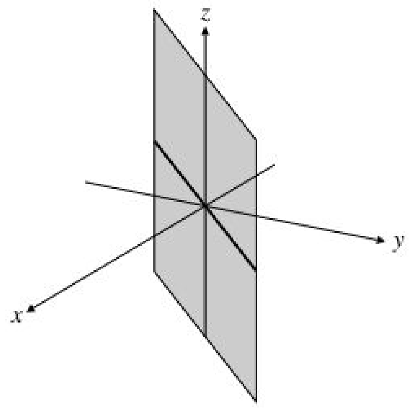


Figura 10.4 La ecuación $x = y$ define un plano vertical.

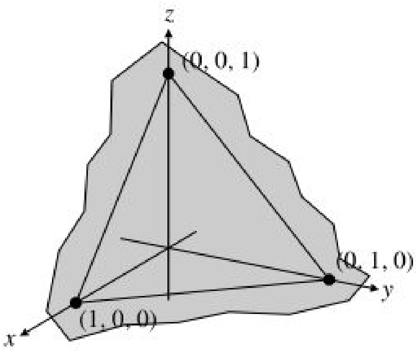


Figura 10.5 El plano de ecuación $x + y + z = 1$.

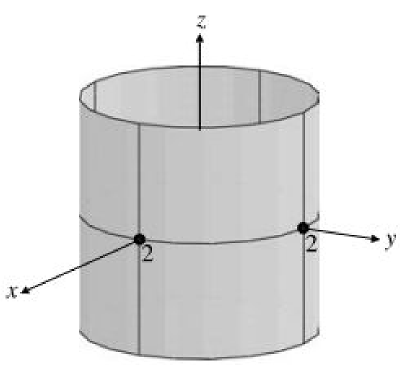


Figura 10.6 El cilindro circular de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

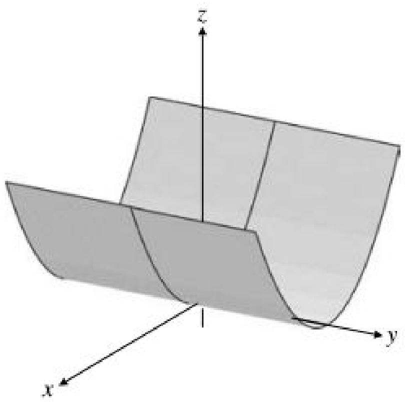


Figura 10.7 El cilindro parabólico de ecuación $z = x^2$.

Obsérvese que las ecuaciones en x, y y z no necesitan que estén presentes las tres variables explícitamente. Cuando una de las variables no está en la ecuación, dicha ecuación representa una superficie *paralela* al eje de la variable que falta. Esa superficie puede ser un plano o un cilindro. Por ejemplo, si en una ecuación falta la variable z, dicha ecuación representa en el espacio tridimensional a una superficie vertical (es decir, paralela al eje z) que contiene a la curva con la misma ecuación en el plano xy.

A veces, puede ocurrir que una sola ecuación no represente a un objeto bidimensional (una superficie). Puede representar a un objeto unidimensional (una recta o curva), a un objeto sin dimensiones (uno o más puntos), o incluso a nada en absoluto.

Ejemplo 3 Identifique las gráficas de las ecuaciones: (a) $y^2 + (z-1)^2 = 4$, (b) $y^2 + (z-1)^2 = 0$, (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ y (d) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$.

Solución

(a) Como falta la variable x, la ecuación $y^2 + (z-1)^2 = 4$ representa un objeto paralelo al eje x. En el plano yz, la ecuación representa una circunferencia de radio 2 centrada en el punto $(y, z) = (0, 1)$. En el espacio tridimensional representa un cilindro circular horizontal, paralelo al eje x, cuyo eje está una unidad por encima de dicho eje x (*véase* la Figura 10.8).
(b) Como los cuadrados no pueden ser negativos, la ecuación $y^2 + (z-1)^2 = 0$ implica que $y = 0$ y $z = 1$, por lo que representa a los puntos $(x, 0, 1)$. Todos estos puntos están en una recta paralela al eje x y una unidad por encima de dicho eje (*véase* la Figura 10.8).
(c) Como en el apartado (b), $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ implica que $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. La ecuación representa a un único punto, el origen.
(d) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ no se cumple para ningún número real x, y y z, por lo que no representa a ningún punto en absoluto.

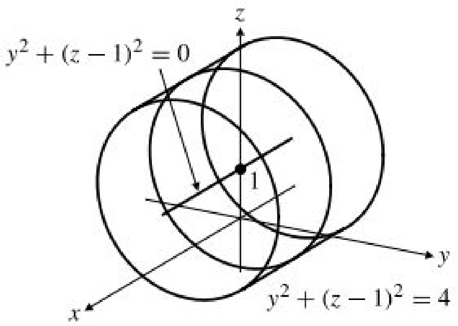


Figura 10.8 El cilindro $y^2 + (z-1)^2 = 4$ y su línea axial $y^2 + (z-1)^2 = 0$.

Una sola inecuación en x, y y z representa generalmente a un conjunto de puntos que están a un lado de la superficie representada por la correspondiente ecuación (junto con los puntos en dicha superficie si la inecuación no es estricta).

Ejemplo 4

(a) La inecuación $z > 0$ representa a todos los puntos que están por encima del plano xy.
(b) La inecuación $x^2 + y^2 \geqslant 4$ dice que el cuadrado de la distancia desde (x, y, z) hasta el punto más cercano $(0, 0, z)$ en el eje z es como mínimo 4. Esta inecuación representa a todos los puntos que están sobre el cilindro del Ejemplo 2(d) o fuera de él.
(c) La inecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$ expresa que el cuadrado de la distancia desde (x, y, z) al origen no es mayor de 25. Representa una bola sólida de radio 5 centrada en el origen, formada por todos los puntos que están en el interior o en la esfera del Ejemplo 2(f).

Dos ecuaciones en x, y y z representan normalmente a un objeto unidimensional, la recta o curva intersección de las dos superficies representadas por las dos ecuaciones. Todo punto cuyas coordenadas cumplan las dos ecuaciones debe estar en las dos superficies, y por tanto pertenecer a su intersección.

Ejemplo 5 ¿A qué conjuntos de puntos del espacio tridimensional representan las siguientes parejas de ecuaciones?

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Solución

(a) La ecuación $x + y + z = 1$ representa al plano oblicuo del Ejemplo 2(c), y la ecuación $y - 2x = 0$ representa un plano vertical que pasa por origen y por el punto (1, 2, 0). En conjunto, estas dos ecuaciones representan a la recta intersección de los dos planos. Esta recta pasa, por ejemplo, por el punto (0, 0, 1) y $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ (*véase* la Figura 10.9(a)).

(b) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ representa una esfera de radio 1 con centro en el origen, y $x + y = 1$ representa un plano vertical que pasa por los puntos (1, 0, 0) y (0, 1, 0). Las dos superficies se cortan en una circunferencia, como se muestra en la Figura 10.9(b). La recta que va desde (1, 0, 0) hasta (0, 1, 0) es un diámetro de la circunferencia, por lo que el centro de dicha circunferencia es el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ y su radio es $\sqrt{2}/2$.

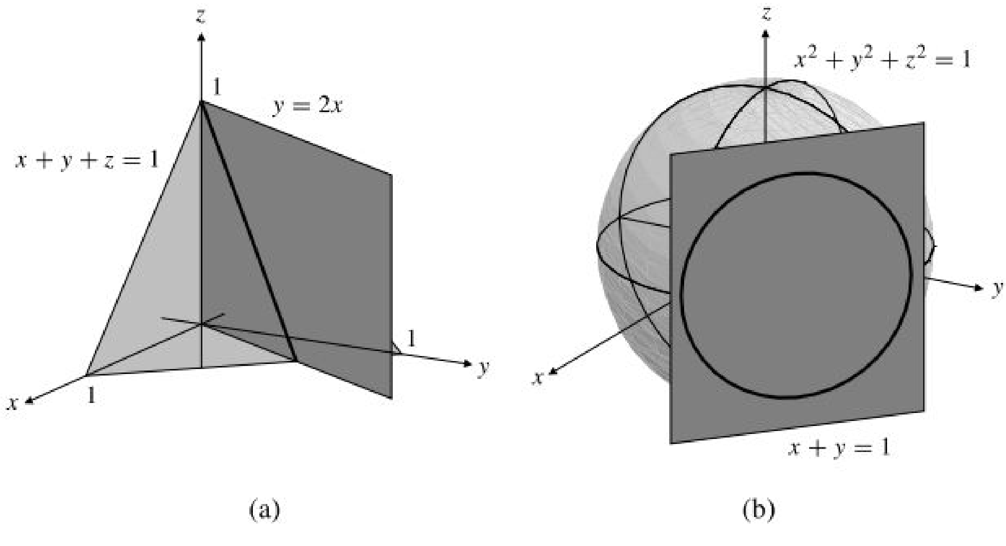


Figura 10.9
(a) Los dos planos se cortan en una línea recta.
(b) Los dos planos cortan a la esfera en una circunferencia.

En las Secciones 10.4 y 10.5 presentaremos muchos más ejemplos de objetos geométricos del espacio tridimensional representados por ecuaciones simples.

Espacio euclídeo *n*-dimensional

Los matemáticos y los usuarios de las matemáticas necesitan frecuentemente considerar un **espacio *n*-dimensional**, siendo n mayor que 3 y pudiendo incluso ser infinito. Es difícil visualizar geométricamente un espacio de dimensión 4 o superior. El secreto para tratar con estos espacios es considerar los puntos de un espacio n-dimensional como una n-tupla de números reales; es decir, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es un punto en el espacio n-dimensional en vez de ser sólo las coordenadas de dicho punto. Ya no consideraremos a los puntos como elementos existentes en un espacio físico, sino que empezaremos a pensar en ellos como objetos algebraicos. Utilizaremos el símbolo $\mathbb{R}^n$ para representar al espacio n-dimensional, indicando así que los puntos son n-tuplas de números *reales*. Por tanto, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ indican el plano y el espacio tridimensional, respectivamente. Nótese que al pasar de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$ hemos cambiado un poco la notación. En $\mathbb{R}^3$ denominamos a las coordenadas x, y y z, mientras que en $\mathbb{R}^n$ las hemos denominado x_1, x_2, ... y x_n, para evitar quedarnos sin letras. Por supuesto, podríamos hablar de coordenadas (x_1, x_2, x_3) en $\mathbb{R}^3$ y (x_1, x_2) en el plano $\mathbb{R}^2$, pero en estos casos se utiliza tradicionalmente (x, y, z) y (x, y).

Aunque pensemos en los puntos de $\mathbb{R}^n$ como n-tuplas y no como objetos geométricos, tampoco deseamos perder toda la perspectiva de la geometría subyacente. Por analogía con los casos de 2 y 3 dimensiones, seguiremos considerando que la expresión

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

representa la *distancia* entre los puntos de coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Además denominaremos **hiperplano** al conjunto $(n-1)$-dimensional de puntos de $\mathbb{R}^n$ que cumplen la ecuación $x_n = 0$, por analogía con el plano $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

Descripción de conjuntos en el plano, el espacio tridimensional y el espacio *n*-dimensional

Concluiremos esta sección recopilando algunas definiciones de términos que se utilizan para describir conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^n$ para $n \geqslant 2$. Estos términos pertenecen a la rama de las matemáticas denominada **topología**, y generalizan las nociones de intervalos abiertos y cerrados y de extremos, utilizados para describir conjuntos en la recta real $\mathbb{R}$. Aunque daremos las definiciones para $\mathbb{R}^n$, en general estaremos más interesados en los casos en que $n = 2$ y $n = 3$.

Se denomina **entorno** de un punto P en $\mathbb{R}^n$ a un conjunto de la forma

$$B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : \text{distancia de } Q \text{ a } P < r\}$$

para algún $r > 0$.

Para $n = 1$, si $p \in \mathbb{R}$, entonces $B_r(p)$ es el **intervalo abierto** $(p - r, p + r)$ centrado en p.

Para $n = 2$, $B_r(P)$ es el **disco abierto** de radio r centrado en el punto P.

Para $n = 3$, $B_r(P)$ es la **bola abierta** de radio r centrada en el punto P.

Un conjunto S se denomina **abierto** en $\mathbb{R}^n$ si todo punto de S tiene un entorno contenido en S. Todo entorno es en sí mismo un conjunto abierto. Otros ejemplos de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$ son los conjuntos de puntos x, y tales que $x > 0$ o tales que $y > x^2$ o incluso tales que $y \neq x^2$. Generalmente, los conjuntos definidos por inecuaciones estrictas (utilizando $>$ y $<$) son abiertos. Como ejemplos en $\mathbb{R}^3$ tenemos los conjuntos de puntos (x, y, z) que cumplen $x + y + z > 2$ o $1 < x < 3$.

El espacio completo $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto en sí mismo. Por razones técnicas, el conjunto vacío (que no contiene puntos) también se considera abierto (ningún punto del conjunto vacío deja de cumplir la condición de tener un entorno contenido en el conjunto vacío).

El **complemento**, S^c, de un conjunto S en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ que no pertenecen a S. Por ejemplo, el complemento del conjunto de puntos (x, y) en $\mathbb{R}^2$ tales que $x > 0$ es el conjunto de puntos tales que $x \leqslant 0$. Se dice que un conjunto es **cerrado** si su complemento es abierto. En general, los conjuntos definidos por inecuaciones no estrictas (utilizando $\geqslant$ y $\leqslant$) son cerrados. Los intervalos cerrados son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$. Como el espacio completo y el conjunto vacío son ambos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y son complementos uno del otro, también son cerrados. Son los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.

Se dice que un punto P es un **punto frontera** de un conjunto S si todo entorno de P contiene puntos de S y puntos de S^c. La **frontera**, fron (S), de un conjunto S es el conjunto de todos los puntos frontera de S. Por ejemplo, la frontera del disco cerrado $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en $\mathbb{R}^2$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos frontera. Un conjunto abierto no contiene a ninguno de sus puntos frontera.

Un punto P se denomina **punto interior** de un conjunto S si pertenece a S pero no a su frontera. P es un **punto exterior** de S si pertenece al complemento de S pero no a su frontera. El **interior** int (S) y el **exterior** ext (S) de S están formados por todos los puntos de su interior y de su exterior, respectivamente. Tanto int (S) como ext (S) son conjuntos abiertos. Si S es abierto, entonces int $(S) = S$. Si S es cerrado, entonces ext $(S) = S^c$. *Véase* la Figura 10.10.

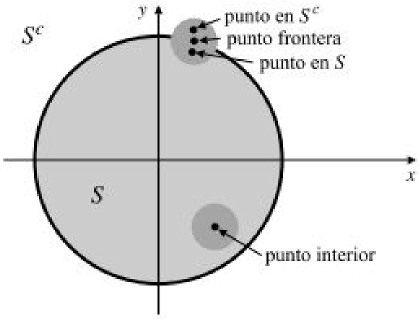


Figura 10.10 El disco cerrado S formado por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen la inecuación $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Nótense los entornos sombreados del punto frontera y el punto interior. Fron (S) es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; int (S) es el disco abierto $x^2 + y^2 < 1$; ext (S) es el conjunto abierto $x^2 + y^2 > 1$.

Ejercicios 10.1

Calcule la distancia entre las parejas de puntos de los Ejercicios 1-4.

1. $(0, 0, 0)$ y $(2, -1, -2)$

2. $(-1, -1, -1)$ y $(1, 1, 1)$

3. $(1, 1, 0)$ y $(0, 2, -2)$

4. $(3, 8, -1)$ y $(-2, 3, -6)$

5. ¿Cuál es la mínima distancia del punto (x, y, z) (a) al plano xy, (b) al eje x?

6. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(1, 2, 3)$, $(4, 0, 5)$ y $(3, 6, 4)$ es un triángulo rectángulo.

7. Calcule el ángulo A en el triángulo de vértices

$$A = (2, -1, -1),\ B = (0, 1, -2) \text{ y } C = (1, -3, 1)$$

8. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$ y $(0, 3, 3)$ es equilátero.

9. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

10. ¿Cuál es la distancia desde el origen hasta el punto $(1, 1, ..., 1)$ en $\mathbb{R}^n$?

11. ¿Cuál es la distancia desde el punto $(1, 1, ..., 1)$ en el espacio n-dimensional al punto más cercano en el eje x_1?

En los Ejercicios 12-23, describa (y dibuje si es posible) el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen las ecuaciones o inecuaciones dadas.

12. $z = 2$

13. $y \geqslant -1$

14. $z = x$

15. $x + y = 1$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

17. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

19. $y^2 + z^2 \leqslant 4$

20. $x^2 + z^2 = 4$

21. $z = y^2$

22. $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$

23. $x + 2y + 3z = 6$

En los Ejercicios 24-32, describa (y dibuje si es posible) el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen las parejas de ecuaciones o inecuaciones dadas.

24. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x \end{cases}$

30. $\begin{cases} y \geqslant x \\ z \leqslant y \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z \geqslant y \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \end{cases}$

En los Ejercicios 33-36, especifique la frontera y el interior de los conjuntos S del plano cuyos puntos (x, y) cumplen las condiciones dadas. ¿Es S abierto, cerrado o ninguna de las dos cosas?

33. $0 < x^2 + y^2 < 1$

34. $x \geqslant 0,\quad y < 0$

35. $x + y = 1$

36. $|x| + |y| \leqslant 1$

En los Ejercicios 37-40, especifique la frontera y el interior de los conjuntos S del espacio tridimensional cuyos puntos (x, y, z) cumplen las condiciones dadas. ¿Es S abierto, cerrado o ninguna de las dos cosas?

37. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$

38. $x \geqslant 0,\quad y > 1,\quad z < 2$

39. $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 0$

40. $x^2 + y^2 < 1,\ y + z > 2$

10.2 Vectores

Un **vector** es una entidad compuesta por un **módulo** (tamaño o longitud) y una **dirección**. Por ejemplo, la *velocidad* de un objeto móvil tiene un valor numérico y una dirección de movimiento, por lo que es un vector. Los vectores se representan geométricamente mediante flechas (segmentos dirigidos) y a menudo se identifican realmente con estas flechas. Por ejemplo, el vector $\overrightarrow{AB}$ es una flecha con origen en el punto A y extremo en el punto B. Los vectores se representan mediante una letra en negrita,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

Véase la Figura 10.11. Cuando se escriben a mano, para representar un vector se puede utilizar una flecha sobre una letra ($\vec{v} = \overrightarrow{AB}$). El *módulo* del vector $\mathbf{v}$ es la longitud de la flecha y se indica como $|\mathbf{v}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$.

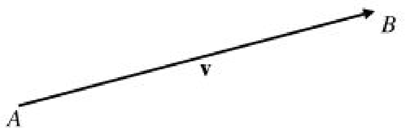


Figura 10.11 El vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

Aunque los vectores tienen módulo y dirección, en general no tienen *posición*, es decir, no están situados en ningún punto en particular. Dos vectores, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, se consideran *iguales* si tienen *la misma longitud* y *la misma dirección*, aunque sus flechas representativas no coincidan. Las flechas deben ser paralelas, tener la misma longitud y apuntar en la misma dirección. Por ejemplo, en la Figura 10.12, si $ABYX$ es un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

Por el momento, consideraremos vectores en el plano, es decir, vectores cuyas flechas representativas están en un plano. Si se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, se pueden definir las componentes x e y de cualquier vector. Si $A = (a, b)$ y $P = (p, q)$, como se muestra en la Figura 10.13, entonces las componentes x e y de $\overrightarrow{AP}$ son, respectivamente, $p - a$ y $q - b$. Nótese que si O es el origen y X es el punto $(p - a, q - b)$, entonces

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} = |\overrightarrow{OX}|$$

$$\text{pendiente de } \overrightarrow{AP} = \frac{q-b}{p-a} = \text{pendiente de } \overrightarrow{OX}$$

Por tanto, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OX}$. En general, dos vectores son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes x e y.

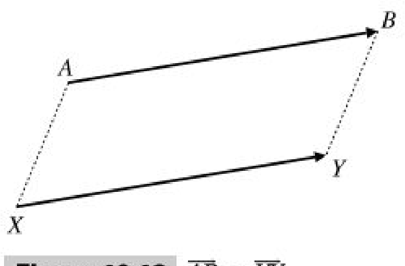


Figura 10.12 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

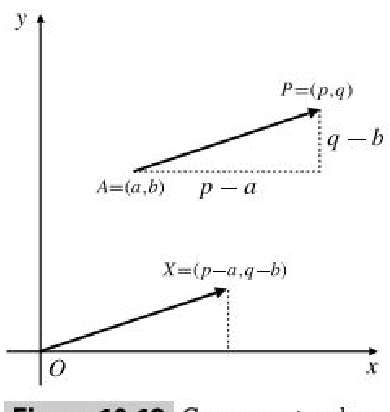


Figura 10.13 Componentes de un vector.

Hay dos importantes operaciones básicas definidas para vectores: suma y multiplicación por un escalar.

DEFINICIÓN 1 **Suma de vectores**

Dados dos vectores **u** y **v**, su suma **u** + **v** se define como sigue. Si se sitúa una flecha que representa al vector **v** con su origen en el extremo de una flecha que representa al vector **u**, entonces la flecha que va desde el origen de **u** hasta el extremo de **v** representa al vector **u** + **v**. En otras palabras, si **u** y **v** tienen su origen en el mismo punto, entonces **u** + **v** se representa por una flecha con su origen en ese punto y su extremo en el vértice opuesto del paralelogramo generado por **u** y **v**. Esto se muestra en la Figura 10.14(a).

DEFINICIÓN 2 **Multiplicación por un escalar**

Si **v** es un vector y t es un número real (denominado también **escalar**), entonces la **multiplicación por un escalar** $t\mathbf{v}$ es un vector de módulo $|t|$ veces el módulo de **v** y cuya dirección coincide con la de **v** si $t > 0$ o es contraria a la de **v** si $t < 0$. *Véase* la Figura 10.14(b). Si $t = 0$, entonces $t\mathbf{v}$ tiene longitud cero y, por tanto, no tiene ninguna dirección en particular. Es el **vector cero**, que se representa por **0**.

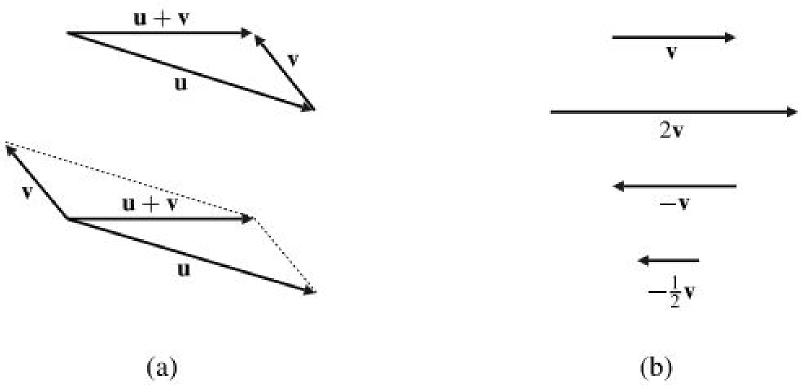


Figura 10.14
(a) Suma de vectores.
(b) Multiplicación por un escalar.

Supongamos que **u** tiene componentes a y b y que **v** tiene componentes x e y. Entonces las componentes de **u** + **v** son $a + x$ y $b + y$, y las de $t\mathbf{v}$ son tx y ty. *Véase* la Figura 10.15.

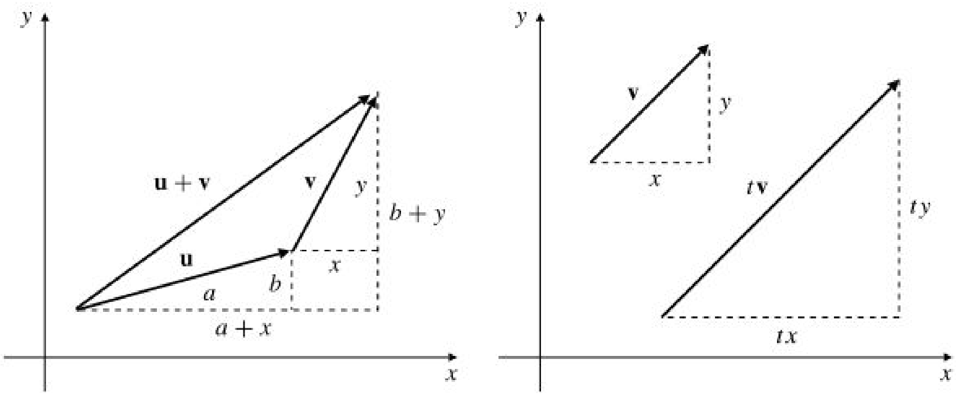


Figura 10.15 Las componentes de una suma de vectores o del producto de un escalar por un vector son la misma suma o multiplicación de las correspondientes componentes de los vectores.

En $\mathbb{R}^2$ consideraremos dos vectores particulares con especial atención. Son los siguientes:

(i) El vector **i** desde el origen al punto (1, 0).
(ii) El vector **j** desde el origen al punto (0, 1).

Es decir, las componentes de $\mathbf{i}$ son 1 y 0 y las componentes de $\mathbf{j}$ son 0 y 1. Estos vectores se denominan **vectores de la base estándar** del plano. Un vector $\mathbf{r}$ desde el origen hasta el punto (x, y) tiene componentes x e y, y se puede expresar de la forma

$$\mathbf{r} = \langle x, y \rangle = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

En la primera forma se especifica el vector indicando sus componentes entre paréntesis angulares; en la segunda forma $\mathbf{r}$ se escribe como una **combinación lineal** de los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ (*véase* la Figura 10.16). El vector $\mathbf{r}$ se denomina **vector de posición** del punto (x, y). Un vector de posición tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el punto cuya posición se especifica. La longitud de $\mathbf{r}$ es $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

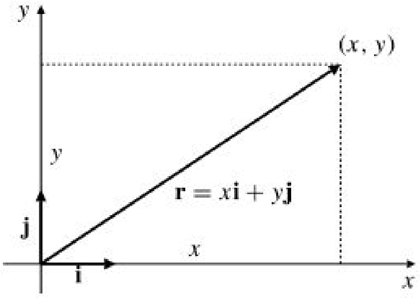


Figura 10.16 Todo vector se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base.

De forma más general, el vector $\overline{AP}$, desde $A = (a, b)$ hasta $P = (p, q)$, en la Figura 10.13, se puede escribir también en forma de una lista de componentes o una combinación lineal de los vectores de la base estándar:

$$\overline{AP} = \langle p - a, q - b \rangle = (p - a)\mathbf{i} + (q - b)\mathbf{j}$$

Las sumas y las multiplicaciones de vectores por un escalar se expresan fácilmente en términos de componentes. Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y si t es un escalar (es decir, un número real), entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$$
$$t\mathbf{u} = (tu_1)\mathbf{i} + (tu_2)\mathbf{j}$$

El vector cero es $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$. Su longitud es cero y no tiene dirección específica. Para todo vector $\mathbf{u}$ se cumple que $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Un **vector unitario** es un vector de longitud 1. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ de la base estándar son vectores unitarios. Dado un vector $\mathbf{v}$ distinto de cero, se puede formar un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ de la misma dirección que $\mathbf{v}$ multiplicándolo por el inverso de su longitud (un escalar):

$$\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|}\right)\mathbf{v}$$

Ejemplo 1 Si $A = (2, -1)$, $B = (-1, 3)$ y $C = (0, 1)$, exprese los siguientes vectores como una combinación lineal de los vectores de la base estándar:

(a) $\overline{AB}$ (b) $\overline{BC}$ (c) $\overline{AC}$ (d) $\overline{AB} + \overline{BC}$ (e) $2\overline{AC} - 3\overline{CB}$

(f) Un vector unitario en la dirección de $\overline{AB}$.

Solución

(a) $\overline{AB} = (-1 - 2)\mathbf{i} + (3 - (-1))\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

(b) $\overline{BC} = (0 - (-1))\mathbf{i} + (1 - 3)\mathbf{j} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

(c) $\overline{AC} = (0 - 2)\mathbf{i} + (1 - (-1))\mathbf{j} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(d) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(e) $2\overline{AC} - 3\overline{CB} = 2(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - 3(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

(f) Un vector unitario en la dirección de $\overline{AB}$ es $\dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = -\dfrac{3}{5}\mathbf{i} + \dfrac{4}{5}\mathbf{j}$

En el ejemplo anterior está implícito el hecho de que las operaciones de suma y multiplicación por un escalar siguen las reglas algebraicas apropiadas, tales como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\,\mathbf{v}$$

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

Vectores en el espacio tridimensional

El álgebra y la geometría de vectores descritas aquí se pueden extender a espacios de cualquier número de dimensiones. Podemos pensar todavía en vectores representados por flechas, y las sumas y los productos escalares se realizan igual que para vectores del plano.

Dado un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional, se definen tres **vectores de la base estándar**, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, representados por flechas desde el origen a los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), respectivamente (*véase* la Figura 10.17). Todo vector en el espacio tridimensional se puede expresar como una *combinación lineal* de esos vectores de la base; por ejemplo, el vector de posición del punto (x, y, z) se expresa como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

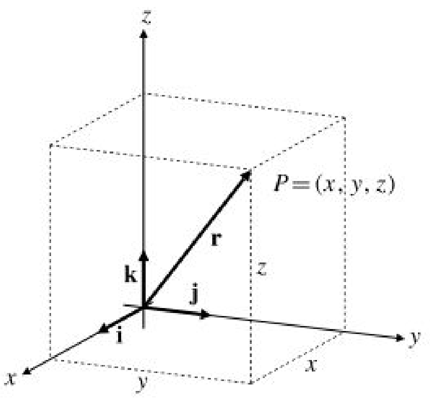


Figura 10.17 Los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

Se dice que las **componentes** de $\mathbf{r}$ son x, y y z. La longitud de $\mathbf{r}$ es

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio tridimensional, entonces las componentes del vector $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2}$, desde P_1 hasta P_2, son $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ y $z_2 - z_1$ y, por tanto, se representan en función de los vectores de la base estándar de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

Ejemplo 2 Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\mathbf{u}$.

Solución

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2+3)\,\mathbf{i} + (1-2)\mathbf{j} + (-2-1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (2-3)\,\mathbf{i} + (1+2)\mathbf{j} + (-2+1)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (6-6)\,\mathbf{i} + (3+4)\mathbf{j} + (-6+2)\mathbf{k} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$
$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{u}|}\right)\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

El siguiente ejemplo ilustra la forma en la que se pueden utilizar los vectores para resolver problemas sobre velocidades relativas. Si A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{A \text{ rel } B}$ relativa a B, y B se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{B \text{ rel } C}$ relativa a C, entonces A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{A \text{ rel } C}$ relativa a C, siendo

$$\mathbf{v}_{A \text{ rel } C} = \mathbf{v}_{A \text{ rel } B} + \mathbf{v}_{B \text{ rel } C}$$

Ejemplo 3 Una aeronave se mueve con una velocidad de 300 km/h. Si la velocidad del viento procedente del este es de 100 km/h, ¿en qué dirección debe moverse la aeronave para volar en línea recta desde la ciudad P hasta la ciudad Q, que está a 400 km al nornoreste de P? ¿Cuánto durará el viaje?

Solución El problema es bidimensional, por lo que utilizaremos vectores en el plano. Escogeremos nuestro sistema de coordenadas de forma que los ejes x e y apunten al este y al norte, respectivamente. La Figura 10.18 ilustra las tres velocidades que se deben considerar. La velocidad del aire relativa a la tierra es

$$\mathbf{v}_{\text{aire rel tierra}} = -100\mathbf{i}$$

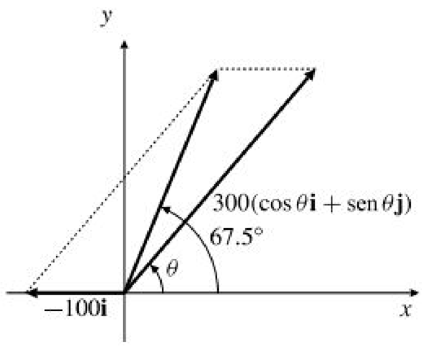


Figura 10.18 Diagrama de velocidades de la aeronave del Ejemplo 3.

Si la aeronave se dirige en una dirección que forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje x, entonces la velocidad de la aeronave relativa al aire es

$$\mathbf{v}_{\text{aeronave rel aire}} = 300\cos\theta\,\mathbf{i} + 300\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

Por tanto, la velocidad de la aeronave relativa a la tierra es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{aeronave rel tierra}} &= \mathbf{v}_{\text{aeronave rel aire}} + \mathbf{v}_{\text{aire rel tierra}}\\ &= (300\cos\theta - 100)\,\mathbf{i} + 300\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

Deseamos que esta última velocidad esté en la dirección nornoreste, es decir, en una dirección que forme un ángulo de $3\pi/8 = 67.5°$ con la dirección positiva del eje x. Por tanto, tenemos que

$$\mathbf{v}_{\text{aeronave rel tierra}} = v\,[(\cos 67.5°)\,\mathbf{i} + (\text{sen}\,67.5°)\,\mathbf{j}]$$

siendo v la velocidad real de la aeronave. Comparando las dos expresiones de $\mathbf{v}_{\text{aeronave rel tierra}}$ se obtiene

$$300\cos\theta - 100 = v\cos 67.5^{\circ}$$
$$300\,\text{sen}\,\theta = v\,\text{sen}\,67.5^{\circ}$$

Eliminando v en esas dos ecuaciones se obtiene

$$300\cos\theta\,\text{sen}\,67.5^{\circ} - 300\,\text{sen}\,\theta\cos 67.5^{\circ} = 100\,\text{sen}\,67.5^{\circ}$$

o

$$3\,\text{sen}\,(67.5^{\circ} - \theta) = \text{sen}\,67.5^{\circ}$$

Por tanto, la aeronave debe dirigirse en una dirección θ dada por

$$\theta = 67.5^{\circ} - \text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\text{sen}\,67.5^{\circ}\right) \approx 49.56^{\circ}$$

es decir, 49.56º al norte del este. Su velocidad es

$$v = 300\,\text{sen}\,\theta/\,\text{sen}\,67.5^{\circ} \approx 247.15 \text{ km/h}$$

Por consiguiente, el viaje de 400 km durará aproximadamente $400/247.15 \approx 1.618$ horas, o aproximadamente 1 hora y 37 minutos.

Cables y cadenas que cuelgan

Cuando se suspende de sus extremos y cuelga bajo el efecto de la gravedad, un cable pesado o una cadena toma la forma de la curva denominada **catenaria**, que se corresponde con la gráfica de la función coseno hiperbólico. Vamos a demostrarlo utilizando vectores para representar las diferentes fuerzas que actúan sobre el cable.

Supongamos que el cable tiene una densidad lineal δ (unidades de masa por unidad de longitud) y cuelga tal como se muestra en la Figura 10.19. Escogeremos un sistema de coordenadas de forma que el punto más bajo L del cable esté en $(0, y_0)$; el valor de y_0 se especificará posteriormente. Si $P = (x, y)$ es otro punto del cable, hay tres fuerzas que actúan sobre el arco LP del cable entre L y P. Todas esas fuerzas se pueden representar utilizando componentes horizontales y verticales.

(i) La tensión horizontal $\mathbf{H} = -H\mathbf{i}$ en L. Es la fuerza que ejerce la parte del cable que está a la izquierda de L sobre el arco LP en L.
(ii) La tensión tangencial $\mathbf{T} = T_h\mathbf{i} + T_v\mathbf{j}$. Es la fuerza que ejerce la parte del cable que está a la derecha de P sobre el arco LP en P.
(iii) El peso $\mathbf{W} = -\delta gs\mathbf{j}$ del arco LP, siendo g la aceleración de la gravedad y s la longitud del arco LP.

Como el cable no se mueve, estas tres fuerzas deben equilibrarse; su vector suma debe ser cero:

$$\mathbf{T} + \mathbf{H} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$(T_h - H)\mathbf{i} + (T_v - \delta gs)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Por tanto, $T_h = H$ y $T_v = \delta gs$. Como $\mathbf{T}$ es tangente al cable en P, la pendiente del cable en ese punto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_v}{T_h} = \frac{\delta gs}{H} = as$$

siendo $a = \delta g/H$ una constante del cable dado. Diferenciando con respecto a x y utilizando el hecho, procedente de nuestro estudio de la longitud de arco, de que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

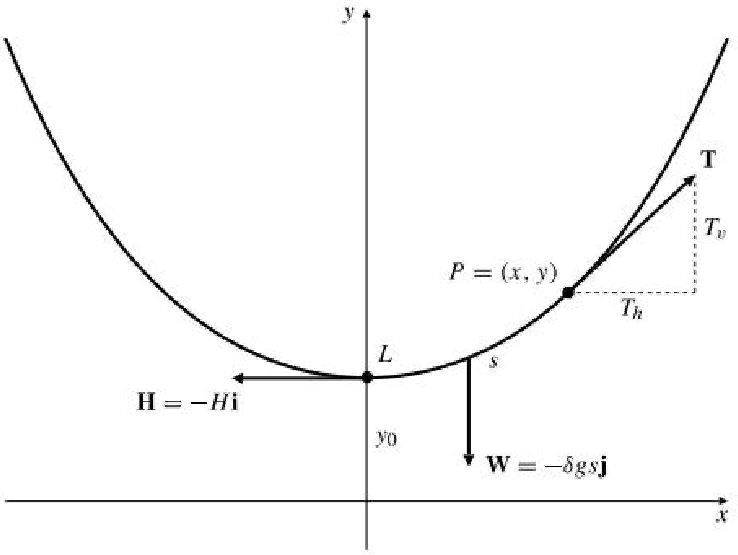


Figura 10.19 Un cable que cuelga y las fuerzas que actúan sobre el arco LP.

se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

que debe resolverse para obtener la ecuación de la curva que representa al cable que cuelga. Las condiciones iniciales apropiadas son $y = y_0$ y $dy/dx = 0$ en $x = 0$.

Como la ecuación diferencial depende de dy/dx, en vez de y, sustituimos $m(x) = dy/dx$ para obtener una ecuación de primer orden en m:

$$\frac{dm}{dx} = a\sqrt{1 + m^2}$$

Esta ecuación es separable; se integra utilizando el cambio $m = \operatorname{senh} u$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\,dm = \int a\,dx$$

$$\int du = \int \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 u}}\,du = ax + C_1$$

$$\operatorname{senh}^{-1} m = u = ax + C_1$$

$$m = \operatorname{senh}(ax + C_1)$$

Como $m = dy/dx = 0$ en $x = 0$, tenemos que $0 = \operatorname{senh} C_1$, por lo que $C_1 = 0$ y

$$\frac{dy}{dx} = m = \operatorname{senh}(ax)$$

Esta ecuación se integra fácilmente para obtener y (si hubiéramos utilizado para m un cambio por la tangente en vez de un cambio por el coseno hiperbólico hubiéramos encontrado más problemas).

$$y = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C_2$$

Si se escoge $y_0 = y(0) = 1/a$, entonces, sustituyendo $x = 0$, se tiene $C_2 = 0$. Con esta selección de y_0, encontramos por tanto que la ecuación de la curva que representa al cable que cuelga es la catenaria

$$y = \frac{1}{a} \cosh (ax)$$

Observación Si un cable que cuelga soporta cargas adicionales a su propio peso, tomará una forma diferente. Por ejemplo, un cable que da soporte a un puente suspendido cuyo peso por unidad de longitud es mucho mayor que el del cable tomará la forma de una parábola. *Véase* el Ejercicio 34 posterior.

Producto escalar y proyecciones

Existe otra operación entre vectores de cualquier dimensión mediante la cual se combinan dos vectores para producir un número denominado *producto escalar*.

DEFINICIÓN 3 Producto escalar de dos vectores

Dados dos vectores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ en $\mathbb{R}^2$, se define su **producto escalar** $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ como la suma de los productos de sus correspondientes componentes:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

A veces utiliza la expresión **producto interno** en vez de producto escalar. De forma similar, dados los vectores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + ui_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ en $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades algebraicas, que se pueden comprobar fácilmente utilizando la definición anterior:

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$	(propiedad conmutativa)
$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$	(propiedad distributiva)
$(t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$	(para t real)
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	

El significado real del producto escalar se demuestra mediante el siguiente resultado, que se podría haber utilizado para definir el producto escalar:

TEOREMA 1 Si θ es el ángulo que forman las direcciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, entonces

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$$

En particular, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares (por supuesto, el vector cero es perpendicular a todo vector).

DEMOSTRACIÓN Obsérvese la Figura 10.20 y aplíquese el Teorema del Coseno al triángulo formado por las flechas $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta &= |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} - \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \\
&= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}
\end{aligned}$$

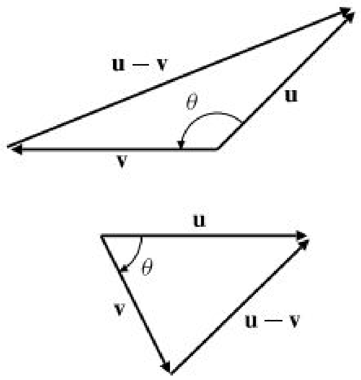


Figura 10.20

Por tanto, $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, como se quería demostrar.

Ejemplo 4 Calcule el ángulo θ que forman los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución Despejando θ de la fórmula $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ se obtiene

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \cos^{-1}\left(\frac{(2)(3)+(1)(-2)+(-2)(-1)}{3\sqrt{14}}\right)\\ &= \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{14}} \approx 57.69^{\circ}\end{aligned}$$

A veces resulta de utilidad proyectar un vector sobre otro. Definiremos la proyección escalar y el vector proyección de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$:

DEFINICIÓN 4 Proyección escalar y vector proyección

La **proyección escalar** s de un vector $\mathbf{u}$ en la dirección de un vector $\mathbf{v}$ distinto de cero es el producto escalar de $\mathbf{u}$ por un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$. Por tanto, es el *número*

$$s = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}|\cos\theta$$

siendo θ el ángulo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

El **vector proyección** $\mathbf{u}_\mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 10.21) es la multiplicación por la proyección escalar de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ de un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ en la dirección de $\mathbf{v}$, es decir,

$$\text{vector proyección de } \mathbf{u} \text{ sobre } \mathbf{v} = \mathbf{u}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\,\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

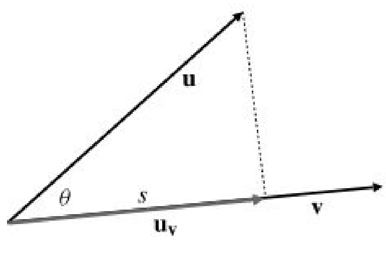


Figura 10.21 Proyección escalar s y vector proyección $\mathbf{u}_\mathbf{v}$ de un vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$.

Nótese que $|s|$ es la longitud del segmento sobre la recta definida por el vector $\mathbf{v}$ que resulta de trazar perpendiculares a esa recta desde el origen y el extremo de $\mathbf{u}$. Además, s es negativo si $\theta > 90°$.

Muchas veces es necesario expresar un vector como una suma de otros dos vectores, uno de ellos paralelo y el otro perpendicular a una dirección dada.

Ejemplo 5 Exprese el vector $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ como suma de vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, siendo $\mathbf{u}$ vector paralelo a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v}$ perpendicular a $\mathbf{u}$.

Solución

MÉTODO I (Uso del vector proyección) Nótese que $\mathbf{u}$ debe ser el vector proyección de $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Por tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j})}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|^2} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{4}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

MÉTODO II (Partiendo de principios básicos) Como $\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$, tenemos que

$$\mathbf{u} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 0$$

para algún escalar t. Queremos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Realizando el producto escalar de esta ecuación por $\mathbf{i} + \mathbf{j}$:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{v} \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 0 = 4$$

Por tanto, $2t = 4$ y $t = 2$. Entonces,

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

Vectores en el espacio n-dimensional

Todas las ideas anteriores son aplicables a vectores en espacios de cualquier dimensión. Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden expresar como combinaciones lineales de los n vectores unitarios

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 & \text{desde el origen al punto} & (1, 0, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e}_2 & \text{desde el origen al punto} & (0, 1, 0, ..., 0) \\ & \vdots & \\ \mathbf{e}_n & \text{desde el origen al punto} & (0, 0, 0, ..., 1) \end{array}$$

Esos vectores forman una *base estándar* en $\mathbb{R}^n$. Un vector $\mathbf{x}$ n-dimensional con componentes x_1, x_2, ..., x_n se puede expresar de la forma

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

La longitud de $\mathbf{x}$ es $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$. El ángulo entre dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

siendo

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

No haremos mucho uso de vectores n-dimensionales para $n > 3$, pero todo lo que se ha dicho hasta ahora para vectores en dos o tres dimensiones se puede aplicar a vectores n-dimensionales.

Ejercicios 10.2

1. Sea $A = (-1, 2)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, -3)$, $D = (0, 4)$. Exprese los siguientes vectores como combinación lineal de los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en $\mathbb{R}^2$.

(a) $\overrightarrow{AB}$, (b) $\overrightarrow{BA}$, (c) $\overrightarrow{AC}$, (d) $\overrightarrow{BD}$, (e) $\overrightarrow{DA}$, (f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, (g) $\overrightarrow{AC} \to 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$, (h) $\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}$.

En los ejercicios 2 y 3, calcule lo siguiente para los vectores dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

(b) Las longitudes $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$.

(c) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ en las direcciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente.

(d) El producto escalar $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.

(e) El ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

(f) La proyección escalar de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

(g) El vector proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$.

2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

3. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

4. Utilice vectores para demostrar que el triángulo de vértices $(-1, 1)$, $(2, 5)$ y $(10, -1)$ es rectángulo.

En los Ejercicios 5-8, demuestre los resultados geométricos que se plantean utilizando vectores.

5. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

6. Si P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, del cuadrilátero $ABCD$, entonces $PQRS$ es un paralelogramo.

* **7.** Las diagonales de todo paralelogramo se cortan en la mitad unas a otras.

* **8.** Las medianas de un triángulo se cortan en un punto común (la mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto común se denomina *centroide* del triángulo).

9. Una veleta montada en el techo de un coche que se mueve al norte con una velocidad de 50 km/h indica que el viento viene del oeste. Cuando el coche duplica su velocidad, la veleta indica que el viento proviene del noroeste. ¿De qué dirección procede el viento y cuál es su velocidad?

10. Un río recto de 500 m de ancho fluye hacia el este con una velocidad constante de 3 km/h. Si un bote se puede desplazar en el agua con una velocidad de 5 km/h, ¿en qué dirección habrá que dirigirlo si se desea remar del punto A en la orilla sur hasta el punto B en la orilla norte situado exactamente al norte de A? ¿Cuánto tiempo durará el viaje?

***11.** ¿En qué dirección habrá que dirigirse para cruzar el río del Ejercicio 10 si sólo se puede remar a 2 km/h, y se desea cruzar desde el punto A hasta un punto C en la orilla norte, situado a k km aguas abajo de B? ¿Para qué valores de k no es posible el viaje?

12. Cierta aeronave vuela con una velocidad de 750 km/h. ¿En qué dirección deberá dirigirse para progresar hacia el este verdadero si el viento es del noreste y tiene una velocidad de 100 km/h? ¿Cuánto tiempo tardará en viajar a una ciudad situada a 1500 km de su punto de partida?

13. ¿Para qué valor de t es el vector $2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (10 + t)\mathbf{k}$ perpendicular al vector $\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

14. Calcule el ángulo que forman la diagonal del cubo y uno de sus lados.

15. Calcule el ángulo que forman una diagonal del cubo y una diagonal de una de las caras del cubo. Obtenga todas las posibles respuestas.

16. **(Cosenos directores)** Si un vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^3$ forma ángulos α, β y γ con los ejes coordenados, demuestre que

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{u}$, de forma que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan *cosenos directores* de $\mathbf{u}$.

17. Calcule un vector unitario que forme ángulos iguales con los tres ejes coordenados.

18. Calcule los tres ángulos de un triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

19. Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores de posición de P_1 y P_2, y λ es un número real, demuestre que

$$\mathbf{r} = (1 - \lambda)\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2$$

es el vector de posición de un punto P situado en la recta que une P_1 y P_2. ¿Dónde está P si $\lambda = 1/2$? ¿Y si $\lambda = 2/3$? ¿Y si $\lambda = -1$? ¿Y si $\lambda = 2$?

20. Sea $\mathbf{a}$ un vector distinto de cero. Describa el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional cuyos vectores de posición $\mathbf{r}$ cumplen que $\mathbf{a} \bullet \mathbf{r} = 0$.

21. Sea $\mathbf{a}$ un vector distinto de cero, y sea b un número real cualquiera. Describa el conjunto de puntos en el espacio tridimensional cuyos vectores de posición $\mathbf{r}$ cumplen que $\mathbf{a} \bullet \mathbf{r} = b$.

En los Ejercicios 22-24, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = \mathbf{k}$.

22. Obtenga dos vectores unitarios tales que los dos sean perpendiculares simultáneamente a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

23. Obtenga un vector $\mathbf{x}$ que cumpla el sistema de ecuaciones $\mathbf{x} \bullet \mathbf{u} = 9$, $\mathbf{x} \bullet \mathbf{v} = 4$, $\mathbf{x} \bullet \mathbf{w} = 6$.

24. Obtenga dos vectores unitarios tales que cada uno forme ángulos iguales con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

25. Obtenga un vector unitario que sea la bisectriz del ángulo entre dos vectores cualesquiera distintos de cero, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

26. Dados dos vectores no paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, describa el conjunto de puntos tales que sus vectores de posición $\mathbf{r}$ sean de la forma $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, siendo λ y μ números reales arbitrarios.

27. **(Desigualdad del triángulo)** Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores.

(a) Demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$.
(b) Demuestre que $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \leqslant |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$.
(c) Deduzca a partir de (a) y (b) que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

28. (a) ¿Por qué se denomina la desigualdad del Ejercicio 27(c) desigualdad del triángulo?
(b) ¿Qué condiciones sobre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ implican que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$?

29. **(Bases ortonormales)** Sean $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{k}$.

(a) Demuestre que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 1$ y $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares y, como tales, se dice que forman una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^3$.
(b) Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, demuestre por cálculo directo que
$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \bullet \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{w})\mathbf{w}$$

30. Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$, entonces $a = \mathbf{r} \bullet \mathbf{u}$, $b = \mathbf{r} \bullet \mathbf{v}$ y $c = \mathbf{r} \bullet \mathbf{w}$.

31. **(Resolución de un vector en direcciones perpendiculares)** Si $\mathbf{a}$ es un vector distinto de cero y $\mathbf{w}$ es un vector cualquiera, obtenga dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ sea paralelo a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ sea perpendicular a $\mathbf{a}$.

32. **(Expresión de un vector como combinación lineal de otros dos vectores coplanares con él)** Suponga que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ son los vectores de posición de los puntos U, V y P, respectivamente, que $\mathbf{u}$ no es paralelo a $\mathbf{v}$ y que P está en el mismo plano que contiene al origen, a U y a V. Demuestre que existen números λ y μ tales que $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. *Sugerencia*: Exprese $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ como suma de vectores paralelos y perpendiculares a $\mathbf{u}$, como se sugiere en el Ejercicio 31.

$*$**33.** Dadas las constantes r, s y t, con $r \neq 0$ y $s \neq 0$, y dado un vector $\mathbf{a}$ que cumple que $|\mathbf{a}|^2 > 4rst$, resuelva el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} r\mathbf{x} + s\mathbf{y} = \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = t \end{cases}$$
obteniendo los vectores desconocidos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Cables que cuelgan

34. **(Un puente en suspensión)** Si un cable que cuelga soporta un peso con densidad lineal horizontal constante (de forma que el peso que soporta el arco LP en la Figura 10.19 es δgx en vez de δgs), demuestre que el cable toma la forma de una parábola en vez de una catenaria. Éste es probablemente el caso de los cables de un puente en suspensión.

35. En un punto P, separado 10 m horizontalmente de su punto más bajo L, un cable forma un ángulo de 55° con la horizontal. Calcule la longitud del cable entre L y P.

36. Calcule la longitud s del arco LP del cable colgante de la Figura 10.19, utilizando la ecuación $y = (1/a)\cosh(ax)$ calculada para dicho cable. A partir de aquí, verifique que el módulo $T = |\mathbf{T}|$ de la tensión del cable en cualquier punto $P = (x, y)$ es $T = \delta gy$.

37. Un cable de 100 m de longitud cuelga entre dos torres separadas 90 m de forma que sus extremos están sujetos a la misma altura en las dos torres. ¿A qué distancia de esa altura está el punto más bajo del cable?

10.3 Producto vectorial en el espacio tridimensional

Se define, *únicamente en el espacio tridimensional*, otra clase de producto entre dos vectores denominado *producto vectorial*, que se expresa como $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

DEFINICIÓN 5

Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$, el **producto vectorial** $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es un único vector que cumple las tres condiciones siguientes:

(i) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} = 0$ y $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{v} = 0$
(ii) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
(iii) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ forman un triedro orientado según la mano derecha.

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, la condición (ii) dice que $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector cero. En otro caso, en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$, existe una única recta que es perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La condición (i) dice que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es paralelo a esta recta. La condición (iii) determina cuál de las dos direcciones de esta recta es la dirección de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$; un tornillo orientado a la derecha avanza en la dirección de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ si se rota en la dirección que va de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ (esto equivale a decir que el pulgar, el índice y el dedo medio de la mano derecha apuntan en las direcciones de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, respectivamente).

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen su origen en el punto P, entonces $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es normal (es decir, perpendicular) al plano que pasa por P y contiene a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y, por la condición (ii), $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ tiene una longitud igual al área del paralelogramo generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 10.22). Estas propiedades hacen del producto vectorial una herramienta muy útil para la descripción de planos tangentes y rectas normales a superficies en $\mathbb{R}^3$.

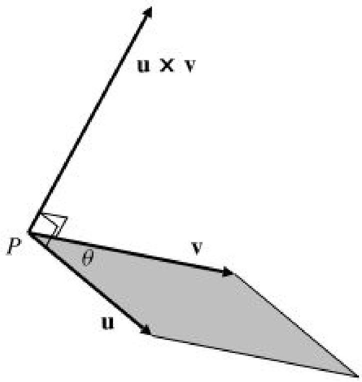


Figura 10.22 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y su longitud es igual al área del paralelogramo sombreado.

La definición de producto vectorial dada anteriormente no requiere ningún sistema de coordenadas y, por tanto, no muestra directamente las tres componentes del producto vectorial con respecto a una base estándar. Estas componentes las proporciona el siguiente teorema:

TEOREMA 2 **Componentes del producto vectorial**

Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

DEMOSTRACIÓN Observemos en primer lugar que el vector

$$\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

es perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, ya que

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

y de forma similar $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = 0$. Por tanto, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{w}$. A continuación, demostraremos que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ tienen la misma longitud. De hecho,

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{w}|^2 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_2v_3u_3v_2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 \\
&\quad - 2u_3v_1u_1v_3 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_2u_2v_1
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \\
&= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\,(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
&= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\
&\quad - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3 \\
&\quad |\mathbf{w}|^2
\end{aligned}
$$

Puesto que $\mathbf{w}$ es paralelo a $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, y tiene su misma longitud, tenemos que $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{w}$ o $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{w}$. Queda demostrar que la elección correcta es la primera. Para ver que esto es así, supongamos que el triedro que forman los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se rota rígidamente en el espacio tridimensional de forma que $\mathbf{u}$ apunte en la dirección del eje x positivo y $\mathbf{v}$ esté en la mitad superior del plano xy. Entonces $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, siendo $u_1 > 0$ y $v_2 > 0$. Por la «regla de la mano derecha», $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ debe apuntar en la dirección del eje z positivo. Pero $\mathbf{w} = u_1v_2\mathbf{k}$ apunta en esa dirección, por lo que $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{w}$ es la elección correcta.

La fórmula del producto vectorial expresada en función de las componentes puede parecer complicada y asimétrica. Sin embargo, como veremos posteriormente, se puede expresar más fácilmente utilizando un determinante. Más adelante en esta sección estudiaremos los determinantes.

Ejemplo 1 **(Cálculo de productos vectoriales)**

(a)
$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}, & \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \\
\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}, & \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \\
\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}, & \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}.
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
&(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})\times(-2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\
&\quad = ((1)(5) - (-2)(-3))\mathbf{i} + ((-3)(0) - (2)(5))\mathbf{j} + ((2)(-2) - (1)(0))\mathbf{k} \\
&\quad = -\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

El producto vectorial tiene algunas de las propiedades de los productos, pero no todas. Resumiremos sus propiedades algebraicas como sigue:

Propiedades del producto vectorial

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ y t es un número real (un escalar), entonces

(i) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ (El producto vectorial es **anticonmutativo**)

(iii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\mathbf{w}$

(iv) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{w}$

(v) $(t\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

(vi) $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$

Todas estas igualdades se pueden verificar fácilmente utilizando las componentes, la definición de producto vectorial o las propiedades de los determinantes que se presentan posteriormente. Se dejan como ejercicios para el lector. Nótese la ausencia de la propiedad asociativa. El producto vectorial no es asociativo (*véase* el Ejercicio 21 al final de esta sección). En general,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

Determinantes

Para simplificar ciertas fórmulas, como las de la representación en componentes del producto vectorial, presentaremos los **determinantes** 2×2 y 3×3. Los determinantes generales $n \times n$ se estudian normalmente en cursos de álgebra lineal. Aparecerán en la Sección 10.6. En esta sección simplemente consideraremos las propiedades de los determinantes, necesarias para utilizarlas como ayuda en la expresión de fórmulas que de otra forma serían complicadas.

Un determinante es una expresión en la que intervienen los elementos de una matriz cuadrada de números. El determinante de una matriz de números 2×2

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

se expresa encerrando la matriz entre barras verticales y su valor es el número $ad - bc$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Es el producto de los elementos de la *diagonal principal* de la matriz menos el producto de los elementos de la *diagonal secundaria*, como se muestra en la Figura 10.23. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = -2$$

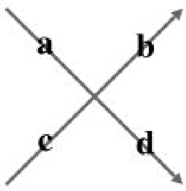


Figura 10.23

De forma similar, el determinante de una matriz de números 3×3 se define como

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Obsérvese que en cada uno de los seis productos del valor del determinante interviene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna. Teniendo esto en cuenta, cada uno de los términos podría verse como el producto de los elementos de la *diagonal* de una matriz *ampliada*, obtenida repitiendo las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la tercera columna, como se muestra en la Figura 10.24. El valor del determinante es la suma de los productos correspondientes a las tres diagonales *principales* completas menos la suma de los correspondientes a las tres diagonales *secundarias*. Con la práctica, podemos formar esos productos de las diagonales sin necesidad de escribir explícitamente la matriz ampliada.

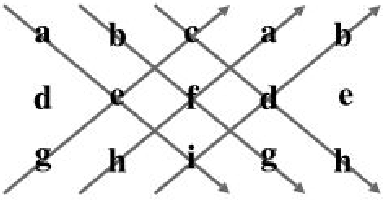


Figura 10.24 ATENCIÓN: Este método no funciona para determinantes de orden 4×4 o superior.

Si se agrupan los elementos de la expresión del determinante sacando factor común los elementos de la primera fila, se obtiene

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Los determinantes 2×2 que aparecen aquí (denominados *menores* del determinante 3×3 dado) se obtienen eliminando la fila y la columna que contienen al elemento correspondiente del determinante 3×3 original. Este proceso se denomina *desarrollo* en *menores* respecto a la primera fila del determinante 3×3.

Este desarrollo en menores se puede realizar con respecto a cualquier fila o columna. Nótese que aparece un signo menos en cualquier término cuyo menor se obtenga borrando la fila i-ésima y la columna j-ésima, siendo $i + j$ un número *impar*. Por ejemplo, podemos desarrollar el determinante anterior en menores respecto a la segunda columna como sigue:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &= -bdi + bfg + eai - ecg - haf + hcd\end{aligned}$$

Por supuesto, se obtiene el mismo valor que antes.

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-8) + 1 = -23\end{aligned}$$

Hemos desarrollado respecto a la segunda fila; la tercera columna también habría sido una buena elección (¿por qué?).

Cualquier fila (o columna) de un determinante puede verse como las componentes de un vector. Entonces el determinante es una *función lineal* de ese vector. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ sx + tl & sy + tm & sz + tn \end{vmatrix} = s\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

ya que el determinante es una función lineal de su tercera fila. Esta propiedad y otras de los determinantes se desprenden directamente de la definición. A continuación se resumen algunas otras de sus propiedades. Se definen por filas y para determinantes 3 × 3, pero se pueden plantear definiciones similares por columnas y para determinantes de cualquier orden.

Propiedades de los determinantes

(i) Si se intercambian dos filas de un determinante, entonces el determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(ii) Si dos filas de un determinante son iguales, el valor del determinante es 0:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

(iii) Si se suma un múltiplo de una fila de un determinante a otra fila, el valor del determinante no cambia:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

El producto vectorial como un determinante

Los elementos de un determinante son en general números que se multiplican para obtener el valor del determinante. Sin embargo, es posible utilizar vectores como elementos de *una fila* (o columna) de un determinante. Cuando se desarrolla en menores respecto a esa fila (o columna), el menor de cada elemento vector es un número que determina el múltiplo escalar de dicho vector. La fórmula para el producto vectorial de

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

presentada en el Teorema 2 se puede expresar simbólicamente como un determinante en el que los vectores de la base estándar forman la primera fila:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

La fórmula del producto escalar dada en ese teorema coincide con el desarrollo de este determinante en menores respecto a la primera fila.

Ejemplo 3 Calcule el área de un triángulo cuyos vértices están en los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ y $C = (0, -1, 1)$.

Solución Dos lados del triángulo (Figura 10.25) están dados por los vectores:

$$\overline{AB} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \overline{AC} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

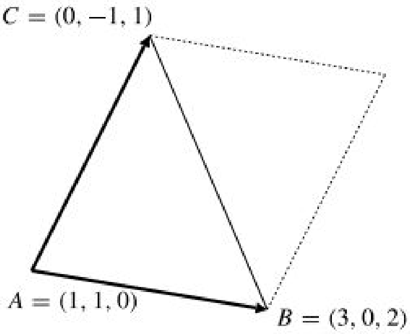


Figura 10.25

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Por definición de producto vectorial, el área del triángulo debe ser, por tanto,

$$\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{9+16+25} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ unidades al cuadrado}$$

Un **paralelepípedo** es el análogo tridimensional de un paralelogramo. Es un sólido con tres parejas de caras planas paralelas. Cada una de las caras tiene la forma de un paralelogramo. Un ladrillo rectangular es un caso especial de paralelepípedo en el cual las caras que no son paralelas se cortan formando ángulos rectos. Se dice que un paralelepípedo está **generado** por tres vectores que coinciden con tres de sus ejes que se cruzan en un vértice (*véase* la Figura 10.26).

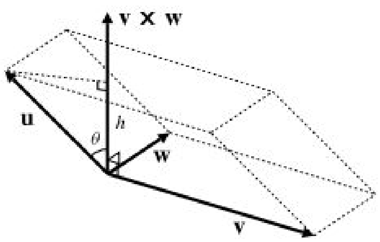


Figura 10.26

Ejemplo 4 Calcule el volumen del paralelepípedo generado por **u**, **v** y **w**.

Solución El volumen del paralelepípedo es igual al área de una de sus caras, por ejemplo, la cara generada por **v** y **w**, multiplicada por la altura del paralelepípedo medida en la dirección perpendicular a esa cara. El área de la cara es $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$. Como $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es perpendicular a esa cara, la altura h del paralelepípedo será el valor absoluto de la proyección escalar de **u** sobre $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$. Si θ es el ángulo que forman **u** y $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, entonces el volumen del paralelepípedo se expresa como

$$\text{Volumen} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|\,|\cos\theta| = |\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| \text{ unidades al cubo}$$

DEFINICIÓN 6

La expresión $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ se denomina **producto escalar triple** de los vectores **u**, **v** y **w**.

El producto escalar triple se expresa fácilmente mediante un determinante. Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, y se utilizan representaciones similares para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

El volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el valor absoluto de este determinante.

Utilizando las propiedades de los determinantes, se verifica fácilmente que (*véase* el Ejercicio 18 posterior)

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Nótese que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ permanecen en el mismo *orden cíclico* en esas tres expresiones. Si se invirtiera el orden se introduciría un factor de -1:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{u} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$$

Se dice que tres vectores en el espacio tridimensional son **coplanares** si el paralelepípedo que generan tiene volumen cero; si sus orígenes coinciden, esos tres vectores deben estar en el mismo plano.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{ y } \mathbf{w} \text{ son coplanares} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

Tres vectores son realmente coplanares si cualquiera de ellos es $\mathbf{0}$, o si cualquier pareja de ellos es paralela. Si no se aplica ninguna de esas dos condiciones degeneradas, sólo pueden ser coplanares si uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros dos (*véase* el Ejercicio 20 posterior).

Aplicaciones del producto vectorial

Los productos vectoriales son de considerable importancia en mecánica y en teoría electromagnética, así como en el estudio del movimiento en general. Por ejemplo:

(a) La velocidad lineal $\mathbf{v}$ de una partícula de un cuerpo en rotación situada en la posición $\mathbf{r}$ con elocidad angular $\mathbf{\Omega}$ respecto al origen, se expresa como $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ (para más detalles, *véase* la Sección 11.2).

(b) El momento angular de un planeta de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en órbita alrededor del sol, se expresa como $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, siendo $\mathbf{r}$ el vector de posición del planeta respecto al origen situado en el sol (*véase* la Sección 11.6).

(c) Si una partícula con carga eléctrica q se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo magnético cuya fuerza y dirección están dados por un vector $\mathbf{B}$, entonces la fuerza que el campo ejerce en la partícula se expresa como $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. El rayo de electrones del tubo de una televisión está controlado por campos magnéticos que utilizan este principio.

(d) El torque $\mathbf{T}$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto P con vector de posición $\mathbf{r}$ con respecto a otro punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}_0$ se define como

$$\mathbf{T} = \overline{P_0P} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$$

Este torque mide la efectividad de la fuerza $\mathbf{F}$ para causar la rotación alrededor del punto P_0. La dirección de $\mathbf{T}$ es la del eje que pasa por P_0 respecto al que actúa $\mathbf{F}$ para rotar P.

Ejemplo 5 Una rueda de automóvil tiene su centro en el origen y gira alrededor del eje y. Una de sus tuercas de retención está situada en la posición $P_0 = (0, 0, 10)$ (las distancias se miden en centímetros). Una llave de neumáticos de 25 cm de longitud e inclinada un ángulo de 60º con respecto a la dirección de su empuñadura, se ajusta a la tuerca como se indica en la Figura 10.27. Si se aplica a la empuñadura de la llave una fuerza horizontal $\mathbf{F} = 500\mathbf{i}$ newtons (N), ¿cuál es el torque sobre la tuerca? ¿Qué parte (componente) de este torque es efectiva para girar la tuerca sobre su eje horizontal? ¿Cuál es el torque efectivo que intenta girar la rueda?

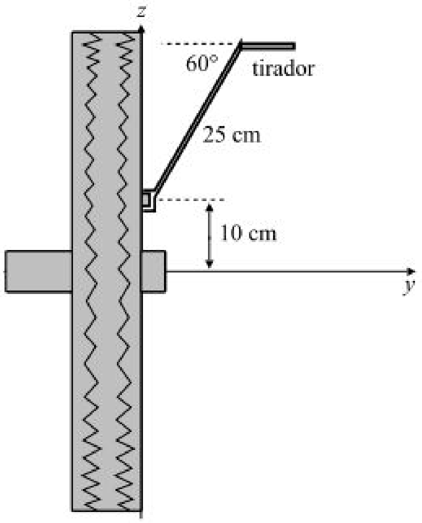


Figura 10.27 La fuerza sobre la empuñadura es de 500 N directamente en nuestra dirección.

Solución La tuerca está en la posición $\mathbf{r}_0 = 10\mathbf{k}$ y la empuñadura de la llave está en la posición

$$\mathbf{r} = 25\cos 60^\circ \mathbf{j} + (10 + 25 \operatorname{sen} 60^\circ)\mathbf{k} \approx 12{,}5\mathbf{j} + 31{,}65\mathbf{k}$$

El torque de la fuerza $\mathbf{F}$ sobre la llave es

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F} \\ &\approx (12{,}5\mathbf{j} + 21{,}65\mathbf{k}) \times 500\mathbf{i} \approx 10\,825\mathbf{j} - 6250\mathbf{k}\end{aligned}$$

que forma ángulos rectos con $\mathbf{F}$ y con el brazo de la llave. Sólo la componente horizontal de este torque es efectiva para girar la tuerca. El módulo de esta componente es de 10 825 N·cm, o 108,25 N·m. Para calcular el torque efectivo sobre la propia rueda, tenemos que sustituir $\mathbf{r}_0$ por $\mathbf{0}$, la posición del centro de la rueda. En este caso el torque horizontal es

$$31{,}65\mathbf{k} \times 500\mathbf{i} \approx 15\,825\mathbf{j}$$

es decir, aproximadamente 158,25 N·m.

Ejercicios 10.3

1. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son (1, 2, 0), (1, 0, 2) y (0, 3, 1).

4. Obtenga un vector unitario perpendicular al plano que contiene a los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$. ¿Cuál es el área del triángulo que tiene esos vértices?

5. Obtenga un vector unitario perpendicular a los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

6. Obtenga un vector unitario con componente $\mathbf{k}$ positiva que sea perpendicular a los vectores $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Verifique las igualdades de los Ejercicios 7-11, utilizando la definición de producto vectorial o las propiedades de los determinantes.

7. $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ **8.** $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

9. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

10. $(t\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times(t\mathbf{v})=t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

11. $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$

12. Obtenga la fórmula de suma

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

examinando el producto vectorial de los dos vectores unitarios $\mathbf{u}=\cos\beta\mathbf{i}+\operatorname{sen}\beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\cos\alpha\mathbf{i}+\operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}$. Suponga $0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi$. *Sugerencia*: Considere $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como vectores de posición. ¿Cuál es el área del paralelogramo que generan?

13. Si $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$, demuestre que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$.

14. **(Volumen de un tetraedro)** Un **tetraedro** es una pirámide con base triangular y sus otras tres caras triangulares. Tiene cuatro vértices y seis aristas. Como toda pirámide o cono, su volumen es igual a $\frac{1}{3}Ah$, siendo A el área de la base y h la altura medida perpendicularmente a la base. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores que coinciden con las tres aristas de un tetraedro que se cruzan en un vértice, demuestre que el volumen del tetraedro se puede expresar como

$$\text{Volumen}=\frac{1}{6}|\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}\right|$$

Es decir, el volumen de un tetraedro generado por tres vectores es 1/6 del volumen del paralelepípedo generado por los mismos vectores.

15. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(1,0,0)$, $(1,2,0)$, $(2,2,2)$ y $(0,3,2)$.

16. Calcule el volumen del paralelepípedo generado por las diagonales de las tres caras de un cubo de lado a que se cruzan en un vértice del cubo.

17. ¿Para qué valor de k los cuatro puntos $(1,1,-1)$, $(0,3,-2)$, $(-2,1,0)$ y $(k,0,2)$ están en un mismo plano?

18. **(Producto escalar triple)** Verifique las igualdades

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}\times\mathbf{u})=\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

19. Si $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\neq 0$ y $\mathbf{x}$ es un vector tridimensional arbitrario, calcule los números λ, μ y ν tales que

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}+\nu\mathbf{w}$$

20. Si $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=0$ pero $\mathbf{v}\times\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$, demuestre que existen constantes λ y μ tales que

$$\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}$$

Sugerencia: Utilice el resultado del Ejercicio 19 empleando $\mathbf{u}$ en vez de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ en vez de $\mathbf{u}$.

21. Calcule $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ y $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$, sabiendo que $\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$. ¿Por qué no se puede esperar que sean iguales?

22. ¿Tiene sentido la notación $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}$? ¿Por qué? ¿Y la notación $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\times\mathbf{w}$?

23. **(Producto vectorial triple)** El producto $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ se denomina **producto vectorial triple**. Como es perpendicular a $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, debe estar en el plano de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Demuestre que

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\bullet\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Sugerencia: Esto se puede hacer por cálculo directo de las componentes de los dos miembros de la ecuación, pero es mucho más fácil si se escogen ejes de coordenadas tales que $\mathbf{v}$ esté en el eje x y $\mathbf{w}$ esté en el plano xy.

24. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores mutuamente perpendiculares, demuestre que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{0}$. ¿Qué es $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ en este caso?

25. Demuestre que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

26. Calcule todos los vectores $\mathbf{x}$ que cumplen la ecuación

$$(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times\mathbf{x}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

27. Demuestre que la ecuación

$$(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\times\mathbf{x}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}$$

no tiene solución en el vector desconocido $\mathbf{x}$.

28. ¿Qué condiciones deben cumplir los vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para garantizar que la ecuación $\mathbf{a}\times\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene solución en $\mathbf{x}$? ¿Es única la solución?

10.4 Planos y rectas

Una única ecuación en las tres variables x, y y z constituye una única restricción en la libertad del punto $P=(x,y,z)$ para situarse en cualquier parte del espacio tridimensional. Esa restricción produce en general la pérdida de un *grado de libertad* y, por tanto, fuerza a P a estar en una superficie bidimensional. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=4$$

indica que el punto (x,y,z) está a una distancia 2 del origen. Todos los puntos que cumplen esta condición están en una **esfera** (es decir, la superficie de una bola) de radio 2 centrada en el origen. La ecuación anterior representa por tanto a dicha esfera, y dicha esfera es la gráfica de la ecuación. En esta sección investigaremos las gráficas de ecuaciones lineales en tres variables.

Planos en el espacio tridimensional

Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en $\mathbb{R}^3$ con vector de posición

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector *distinto de cero*, entonces existe exactamente un **plano** (superficie plana) que pasa por el punto P_0 y es perpendicular a $\mathbf{n}$. Se dice que $\mathbf{n}$ es el **vector normal** al plano. El plano está formado por el conjunto de todos los puntos P que cumplen que $\overline{P_0P}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$ (*véase* la Figura 10.28).

Si $P = (x, y, z)$ tiene como vector de posición $\mathbf{r}$, entonces $\overline{P_0P} = (r - r_0)$. Este vector es perpendicular a $\mathbf{n}$ si y sólo si $\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Ésta es la ecuación del plano en forma vectorial. Podemos escribirla utilizando coordenadas, con lo que obtenemos la correspondiente ecuación escalar.

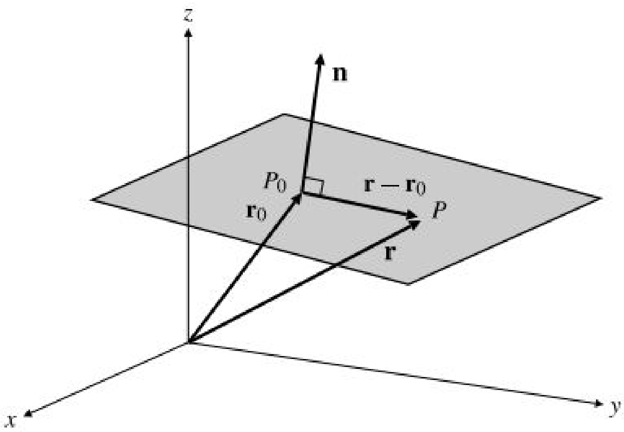


Figura 10.28 El plano que pasa por P_0 con vector normal $\mathbf{n}$ contiene a todos los puntos P tales que $\overline{P_0P}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$.

La ecuación punto-normal de un plano

La ecuación del plano que tiene un vector normal distinto de cero $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ y que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_0$, es

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

en forma vectorial o, en otros términos,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

en forma escalar.

La forma escalar se puede expresar de manera más simple en la denominada **forma estándar** $Ax + By + Cz = D$, siendo $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Si al menos una de las constantes A, B y C es distinta de cero, entonces la *ecuación lineal* $Ax + By + Cz = D$ representa siempre un plano en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, si $A \neq 0$, representa el plano que pasa por el punto $(D/A, 0, 0)$ y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. El vector normal a un plano se puede determinar siempre a partir de los coeficientes de x, y y z. Si el término constante $D = 0$, entonces el plano debe pasar por origen.

Ejemplo 1 **(Reconocer y escribir ecuaciones de planos)**

(a) La ecuación $2x - 3y - 4z = 0$ representa un plano que pasa por el origen y es normal (perpendicular) al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

(b) El plano que pasa por el punto (2, 0, 1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (1, 1, 0) y (4, -1, -2), tiene como vector normal $\mathbf{n} = (4-1)\mathbf{i} + (-1-1)\mathbf{j} + (-2-0)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Por consiguiente su ecuación es $3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$ o, de forma más sencilla, $3x - 2y - 2z = 4$.

(c) El plano cuya ecuación es $2x - y = 1$ tiene un vector normal $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ que es perpendicular al eje z. Por tanto, el plano es paralelo al eje z. Nótese que la ecuación es independiente de z. En el plano xy, la ecuación $2x - y = 1$ presenta una recta; en el espacio tridimensional representa un plano que contiene a esa recta y es paralelo al eje z. ¿Qué representa la ecuación $y = z$ en $\mathbb{R}^3$? ¿Y la ecuación $y = -2$?

(d) La ecuación $2x + y + 3z = 6$ representa un plano con vector normal $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. En este caso las coordenadas de un punto particular del plano no se pueden leer directamente de su ecuación, pero no es difícil descubrir algunos puntos. Por ejemplo, si se pone en la ecuación $y = z = 0$, se obtiene $x = 3$, por lo que (3, 0, 0) es un punto de este plano. Se dice que la **coordenada *x* en el origen** del plano es 3, ya que (3, 0, 0) es el punto donde el plano corta al eje x. De forma similar, la coordenada y en el origen es 6 y la coordenada z en el origen es 2, ya que el plano corta a los ejes y y z en (0, 6, 0) y (0, 0, 2), respectivamente.

(e) En general, si a, b y c son distintos de cero, la ecuación de un plano con coordenadas en el origen a, b y c es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

que se denomina **forma en coordenadas en el origen** de la ecuación del plano (*véase* la Figura 10.29).

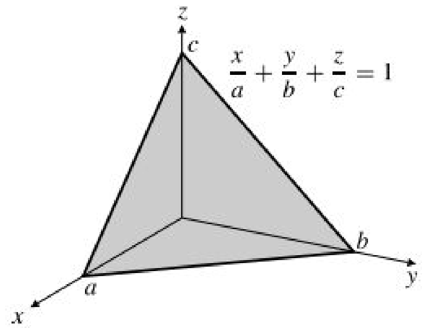


Figura 10.29 El plano cuyas coordenadas en el origen son a, b y c.

Ejemplo 2 Calcule la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 2, 1)$ y $R = (3, 2, -1)$.

Solución Necesitamos obtener un vector $\mathbf{n}$, normal al plano. Ese vector será perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\overrightarrow{PR} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Por tanto, podemos usar

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Ahora podemos utilizar este vector normal junto con las coordenadas de cualquiera de los tres puntos dados para expresar la ecuación del plano. Utilizando el punto P se llega a la ecuación $-2(x-1) + 1(y-1) - 3(z-0) = 0$ o

$$2x - y + 3z = 1$$

Se puede comprobar que utilizando los puntos Q o R se llega la misma ecuación (si el producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ hubiera sido el vector cero, ¿qué se podría haber dicho sobre los puntos P, Q y R? ¿Podrían haber determinado un único plano?).

Ejemplo 3 Demuestre que los dos planos

$$x - y = 3 \quad \text{y} \quad x + y + z = 0$$

se cortan y obtenga un vector $\mathbf{v}$ que sea paralelo a su recta de intersección.

Solución Los vectores normales de los dos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

respectivamente. Como estos vectores no son paralelos, los planos no son paralelos y, por tanto, se cortan formando una línea recta que es perpendicular a $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. Esta recta debe ser entonces paralela a

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Una familia de planos que se cortan en una recta se denomina **haz de planos** (*véase* la Figura 10.30). Un haz de planos queda determinado por dos planos cualesquiera no paralelos de ese haz, ya que tienen una única recta de intersección. Si las ecuaciones de los dos planos paralelos son

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

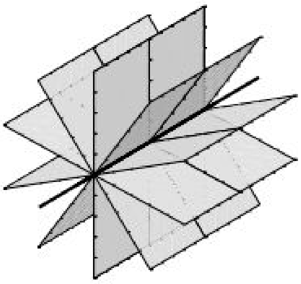


Figura 10.30 Un haz de planos.

entonces, para cualquier valor del número real λ, la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z - D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

representa un plano del haz. Para ver que esto es así, obsérvese que la ecuación es lineal, que representa un plano, y que cualquier punto (x, y, z) que cumpla las ecuaciones de ambos planos cumple también esta ecuación para todo valor de λ. Todo plano del haz excepto el segundo plano de su definición, $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$, se puede obtener mediante una selección adecuada del valor de λ.

Ejemplo 4 Obtenga la ecuación de un plano que pase por la recta de intersección de los planos

$$x + y - 2z = 6 \quad \text{y} \quad 2x - y + z = 2$$

y que pase también por el punto $(-2, 0, 1)$.

Solución Para toda constante λ, la ecuación

$$x + y - 2z - 6 + \lambda(2x - y + z - 2) = 0$$

representa un plano, y por tanto es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la recta de intersección de los planos dados. Este plano pasa por el punto $(-2, 0, 1)$ si $-2 - 2 - 6 + \lambda(-4 + 1 - 2) = 0$, es decir, si $\lambda = -2$. La ecuación del plano requerido se puede simplificar, por tanto, como $3x - 3y + 4z + 2 = 0$ (esta solución no habría funcionado si el punto hubiera estado en un segundo plano, $2x - y + z = 2$. ¿Por qué?).

Rectas en el espacio tridimensional

Como se ha observado anteriormente, dos planos cualesquiera no paralelos en $\mathbb{R}^3$ determinan una única recta de intersección, y se puede obtener un vector paralelo a dicha recta calculando el producto vectorial de los vectores normales a los dos planos.

Supongamos que $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ es el vector de posición de un punto P_0 y que $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es un vector distinto de cero. Existe una única recta que pasa por el punto P_0 y es paralela a $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el vector de posición de cualquier otro punto P de la recta, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ está en dicha recta y, por tanto, es paralelo a $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 10.31). Así, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ para algún número real t. Esta ecuación generalmente se escribe de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

que se denomina **ecuación paramétrica vectorial de la recta**. Se pueden obtener todos los puntos de la recta variando el parámetro t desde $-\infty$ hasta ∞. El vector $\mathbf{v}$ se denomina **vector de dirección** de la recta.

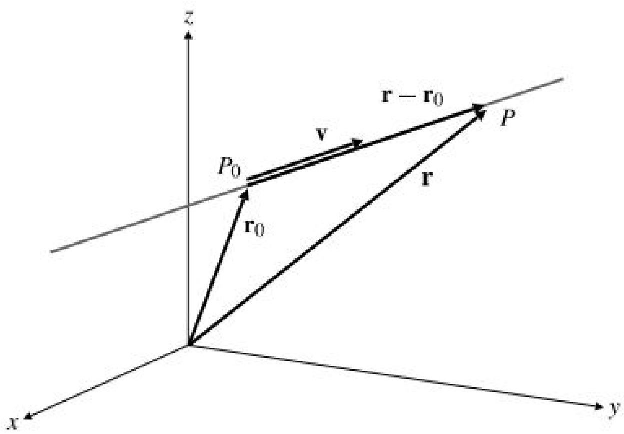


Figura 10.31 La recta que pasa por el punto P_0 y es paralela a $\mathbf{v}$.

Descomponiendo la ecuación paramétrica vectorial en sus componentes se obtienen las **ecuaciones paramétricas escalares** de la recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Parece que se trata de *tres* ecuaciones lineales, pero el parámetro t se puede eliminar para obtener *dos* ecuaciones lineales en x, y y z. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces se puede despejar t de las tres ecuaciones escalares y así obtener

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que se denomina **forma estándar** de las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es paralela al vector $\mathbf{v}$. La forma estándar se debe modificar si cualquiera de las componentes de $\mathbf{v}$ se anula. Por ejemplo, si $c = 0$, las ecuaciones son

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0$$

Nótese que ninguna de las ecuaciones anteriores de la recta es única; todas dependen de la selección particular del punto (x_0, y_0, z_0) de la recta. En general, siempre se pueden utilizar las ecuaciones de dos planos no paralelos para representar su recta de intersección.

Ejemplo 5 **(Ecuaciones de rectas)**

(a) Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = -4t \end{cases}$$

representan la recta que pasa por el punto (2, 3, 0) y es paralela al vector $\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$.

(b) La recta que pasa por el punto $(1, -2, 3)$ y es perpendicular al plano $x - 2y + 4z = 5$ es paralela al vector normal $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ de dicho plano. Por tanto, la ecuación paramétrica vectorial de la recta es

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

y sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Sus ecuaciones en forma estándar son

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{4}$$

Ejemplo 6 Obtenga un vector de dirección de la recta de intersección de los planos

$$x + y - z = 0 \quad \text{y} \quad y + 2z = 6$$

y exprese las ecuaciones en forma estándar de dicha recta.

Solución Los vectores normales a los dos planos son, respectivamente, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_2 = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Por consiguiente, la expresión de un vector de dirección de su recta de intersección es

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Necesitamos saber un punto de la recta para escribir sus ecuaciones en forma estándar. Podemos encontrar dicho punto asignando un valor a una coordenada y calculando las otras dos a partir de las ecuaciones dadas. Por ejemplo, tomando $z = 0$ en las dos ecuaciones, se llega a $y = 6$ y $x = -6$, por lo que $(-6, 6, 0)$ es un punto de la recta. Entonces, las ecuaciones en forma estándar de la recta son

$$\frac{x+6}{3} = \frac{y-6}{-2} = z$$

Este resultado no es único; en vez de $(-6, 6, 0)$ se podría haber utilizado cualquier otro punto de la recta. También se podría haber obtenido un vector de dirección $\mathbf{v}$ restando los vectores de posición de dos puntos diferentes de la recta.

Distancias

La **distancia** entre dos objetos geométricos siempre se refiere a la mínima distancia entre dos puntos, cada uno de ellos perteneciente a uno de los objetos. En el caso de objetos planos, como rectas y planos definidos por ecuaciones lineales, esas distancias mínimas se pueden determinar en general utilizando argumentos geométricos, sin necesidad de utilizar cálculo.

Ejemplo 7 **(Distancia de un punto a un plano)**

(a) Calcule la distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $Ax + By + Cz = D$.

(b) ¿Cuál es la distancia del punto $(2, -1, 3)$ al plano $2x - 2y - z = 9$?

Solución

(a) Sea $\mathbf{r}_0$ el vector de posición de P_0, y sea $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ el vector normal al plano $\mathcal{P}$. Sea P_1 el punto del plano $\mathcal{P}$ más cercano a P_0. Entonces, $\overline{P_1P_0}$ es perpendicular a $\mathcal{P}$ y, por tanto, paralelo a $\mathbf{n}$. La distancia desde P_0 a $\mathcal{P}$ es $s = |\overline{P_1P_0}|$. Si P, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$, es un punto cualquiera de $\mathcal{P}$, entonces s es la longitud de la proyección de $\overline{PP_0} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ en la dirección de $\mathbf{n}$ (*véase* la Figura 10.32). Por tanto,

$$s = \left| \frac{\overline{PP_0} \bullet \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \bullet \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{r}_0 \bullet \mathbf{n} - \mathbf{r} \bullet \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

Como $P = (x, y, z)$ está en $\mathcal{P}$, tenemos que $\mathbf{r} \bullet \mathbf{n} = Ax + By + Cz = D$. En términos de las coordenadas (x_0, y_0, z_0) de P_0 podemos representar, por tanto, la distancia desde P_0 hasta $\mathcal{P}$ como

$$\boxed{s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

(b) La distancia de $(2, -1, 3)$ al plano $2x - 2y - z = 9$ es

$$s = \frac{|2(2) - 2(-1) - 1(3) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6|}{3} = 2 \text{ unidades}$$

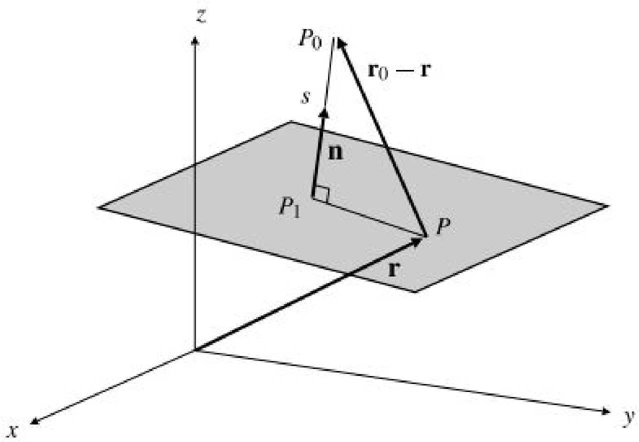


Figura 10.32 La distancia de P_0 al plano $\mathcal{P}$ es la longitud del vector proyección de PP_0 sobre el vector normal $\mathbf{n}$ al plano $\mathcal{P}$, siendo P un punto cualquiera de $\mathcal{P}$.

Ejemplo 8 **(Distancia de un punto a una recta)**

(a) Calcule la distancia del punto P_0 a la recta a $\mathcal{L}$ que pasa por el punto P_1 y es paralela al vector $\mathbf{v}$ distinto de cero.

(b) ¿Cuál es la distancia del punto $(2, 0, -3)$ a la recta $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} - (3 - 4t)\mathbf{k}$?

Solución

(a) Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_1$ los vectores de posición de P_0 y P_1, respectivamente. El punto P_2 en $\mathcal{L}$ más cercano P_0 debe cumplir que P_2P_0 es perpendicular a $\mathcal{L}$. La distancia de P_0 a $\mathcal{L}$ es

$$s = |P_2P_0| = |P_1P_0| \operatorname{sen}\theta = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| \operatorname{sen}\theta$$

siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 10.33(a)). Como

$$|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1||\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$$

tenemos que

$$\boxed{s = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}}$$

(b) La recta $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} - (3 - 4t)\mathbf{k}$ pasa por $P_1 = (1, 1, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. La distancia de $P_0 = (2, 0, -3)$ a esta recta es

$$s = \frac{|((2-1)\mathbf{i} + (0-1)\mathbf{j} + (-3+3)\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$
$$= \frac{|(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})|}{5} = \frac{|-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}|}{5} = \frac{\sqrt{41}}{5} \text{ unidades}$$

Ejemplo 9 **(Distancia entre dos rectas)** Calcule la distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto P_1 y es paralela al vector $\mathbf{v}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que pasa por el punto P_2 y es paralela al vector $\mathbf{v}_2$.

Solución Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ los vectores de posición de los puntos P_1 y P_2, respectivamente. Si P_3 y P_4 (cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$) son los puntos de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, más cercanos entre sí, entonces $\overrightarrow{P_3P_4}$ es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, es paralelo a $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (*véase* la Figura 10.33(b)). $\overrightarrow{P_3P_4}$ es el vector proyección de $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ sobre $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por consiguiente, la distancia $s = |\overrightarrow{P_3P_4}|$ entre las dos rectas se expresa como

$$s = |\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3| = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$$

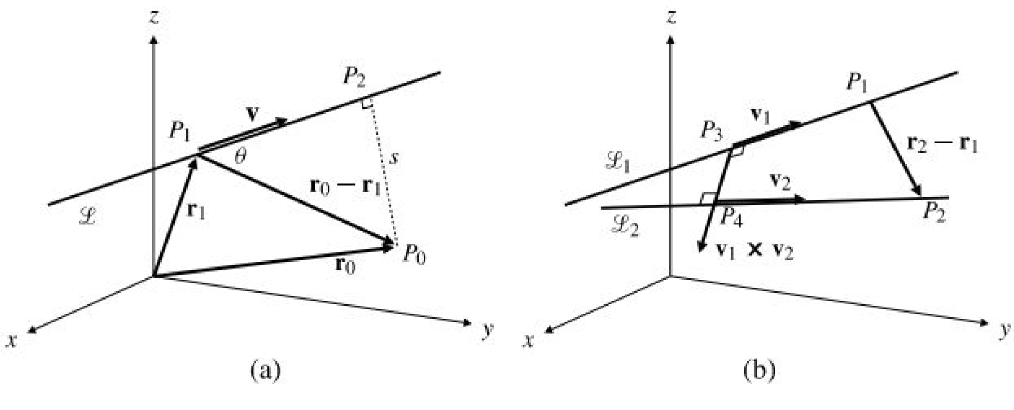


Figura 10.33
(a) La distancia de P_0 a la recta $\mathcal{L}$ es $s = |P_0P_1| \operatorname{sen} \theta$.
(b) La distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es la longitud de la proyección de P_1P_2 sobre el vector $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

Ejercicios 10.4

1. Una única ecuación en las coordenadas (x, y, z) no necesita representar siempre una «superficie» bidimensional en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ representa un solo punto, el $(0, 0, 0)$, cuya dimensión es cero. Proporcione ejemplos de una única ecuación en x, y y z que represente:

(a) Una recta unidimensional.
(b) El espacio $\mathbb{R}^3$ completo.
(c) Ningún punto en absoluto (es decir, el conjunto vacío).

En los Ejercicios 2-9, obtenga las ecuaciones de los planos que cumplen las condiciones dadas.

2. Pasa por el punto $(0, 2, -3)$ y es normal al vector $4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

3. Pasa por el origen y es normal al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

4. Pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano $3x + y - 2z = 15$.

5. Pasa por los tres puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 2)$ y $(0, 3, 3)$.

6. Pasa por los tres puntos $(-2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 4)$.

7. Pasa por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 0, 3)$ y es perpendicular al plano $x + 2y - 3z = 0$.

8. Pasa por la recta de intersección de los planos $2x + 3y - z = 0$ y $x - 4y + 2z = -5$ y también por el punto $(-2, 0, -1)$.

9. Pasa por la recta $x + y = 2$, $y - z = 3$ y es perpendicular al plano $2x + 3y + 4z = 5$.

10. ¿Con qué condición geométrica tres puntos distintos en $\mathbb{R}^3$ no determinan un plano único que pasa por ellos? ¿Cómo se puede expresar correctamente esta condición en función de los vectores de posición $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ de los tres puntos?

11. Obtenga una condición sobre los vectores de posición de cuatro puntos que garantice que dichos puntos son *coplanares*, es decir, que están en el mismo plano.

Describa geométricamente las familias de planos dependientes de un parámetro de los Ejercicios 12-14 (λ es un parámetro real).

12. $x + y + z = \lambda$

***13.** $x + \lambda y + \lambda z = \lambda$

***14.** $\lambda x + \sqrt{1 - \lambda^2}\, y = 1$

En los Ejercicios 15-19, obtenga las ecuaciones de la recta especificada en forma paramétrica vectorial y escalar, y también en forma estándar.

15. Pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

16. Pasa por el punto $(-1, 0, 1)$ es perpendicular al plano $2x - y + 7z = 12$.

17. Pasa por origen y es paralela a la recta de intersección de los planos $x + 2y - z = 2$ y $2x - y + 4z = 5$.

18. Pasa por el punto $(2, -1, -1)$ y es paralela a los planos $x + y = 0$ y $x - y + 2z = 0$.

19. Pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y forma ángulos iguales con las direcciones positivas de los ejes coordenados.

En los Ejercicios 20-22, calcule las ecuaciones de la recta dada en forma estándar.

20. $\mathbf{r} = (1 - 2t)\mathbf{i} + (4 + 3t)\mathbf{j} + (9 - 4t)\mathbf{k}$

21. $\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 3t \\ z = 7 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$

23. Si $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, demuestre que las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

representan una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

24. ¿Qué puntos de la recta del Ejercicio 23 corresponden a los valores del parámetro $t = -1$, $t = 1/2$ y $t = 2$? Describa sus posiciones.

25. ¿En qué condiciones sobre los vectores de posición de cuatro puntos diferentes P_1, P_2, P_3 y P_4, la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 cortará en un único punto a la recta que pasa por los puntos P_3 y P_4?

En los Ejercicios 26-29, calcule las distancias requeridas.

26. Desde el origen al plano $x + 2y + 3z = 4$.

27. Desde el punto $(1, 2, 0)$ al plano $3x - 4y - 5z = 2$.

28. Desde el origen a la recta $x + y + z = 0$, $2x - y - 5z = 1$.

29. Entre las rectas

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2z = -5 \end{cases}$$

30. Demuestre que la recta $x - 2 = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ es paralela al plano $2y - z = 1$. ¿Cuál es la distancia entre la recta y el plano?

En los Ejercicios 31 y 32, describa la familia de rectas dependientes de un parámetro representada por las ecuaciones dadas (λ es un parámetro real).

***31.** $(1 - \lambda)(x - x_0) = \lambda(y - y_0)$, $z = z_0$.

***32.** $\dfrac{x - x_0}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \dfrac{y - y_0}{\lambda} = z - z_0$.

33. ¿Por qué la ecuación de segundo grado factorizada

$$(A_1x + B_1y + C_1z - D_1)(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

representa una pareja de planos en vez de una línea recta?

10.5 Superficies cuadráticas

La forma más general de una ecuación de segundo grado en tres variables es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J$$

No intentaremos realizar la tarea (bastante difícil) de clasificar todas las superficies que dicha ecuación puede representar, pero sí examinaremos algunos casos especiales de interés. Observemos en primer lugar que si la ecuación anterior se puede factorizar de la forma

$$(A_1x + B_1y + C_1z - D_1)(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0$$

entonces la gráfica es, en realidad, una pareja de planos,

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

o bien uno solo si las dos ecuaciones lineales representan el mismo plano. Esto se considera un caso degenerado. Cuando esa factorización no es posible, la superficie (denominada **superficie cuadrática**) no será plana, aunque, no obstante, todavía puede contener rectas. Las superficies cuadráticas no degeneradas se pueden dividir en las siguientes seis categorías.

Esferas. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ representa una esfera de radio a centrada en el origen. De forma más general,

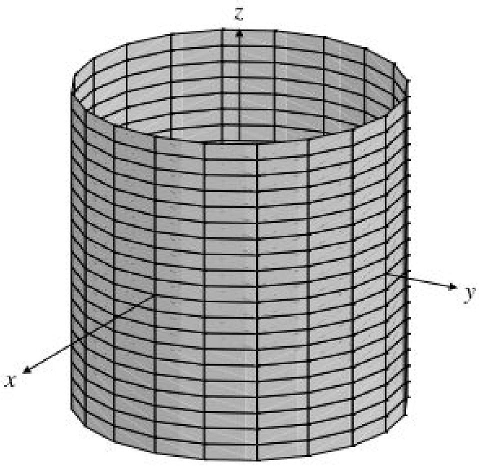
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

representa una esfera de radio a centrada en el punto (x_0, y_0, z_0). Si una ecuación cuadrática en x, y y z tiene los mismos coeficientes de x^2, y^2 y z^2 y no tiene otros términos de segundo grado, entonces, de representar una superficie, será una esfera. El centro se puede obtener completando los cuadrados, de la misma forma que en el caso de circunferencias en el plano.

Cilindros. La ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, independiente de z, representa un **cilindro circular recto** de radio a y cuyo eje es el eje z (*véase* la Figura 10.34(a)). La intersección del cilindro con el plano horizontal $z = k$ es la circunferencia cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = k \end{cases}$$

Los cilindros definidos por ecuaciones cuadráticas pueden aparecer con otras formas: elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Por ejemplo, $z = x^2$ representa un cilindro parabólico con vértice en el eje y (*véase* la Figura 10.34(b)). En general, una ecuación en dos variables representará un cilindro en el espacio tridimensional.



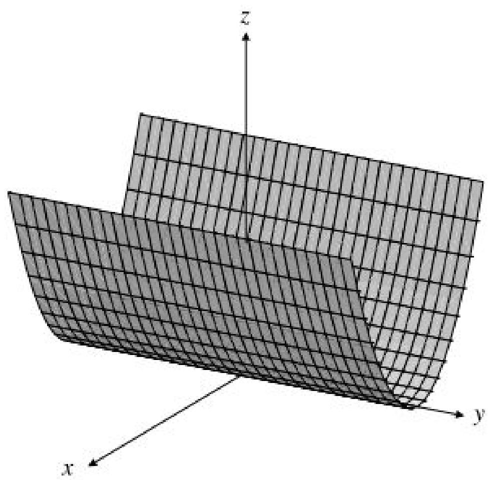


Figura 10.34
(a) El cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$.
(b) El cilindro parabólico $z = x^2$.

Conos. La ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ representa un **cono circular recto** cuyo eje coincide con el eje z. Su superficie se genera rotando alrededor del eje z la recta $z = y$ en el plano yz. Esta *generatriz* forma un ángulo de 45° con el eje del cono. Las secciones cruzadas del cono en planos paralelos al plano xy son circunferencias (*véase* la Figura 10.35(a)). La ecuación $x^2 + y^2 = a^2z^2$ representa también un cono circular recto con vértice en el origen y eje coincidente con el eje z, pero cuyo semiángulo con la vertical es $\alpha = \tan^{-1} a$. Un cono circular tiene secciones planas que pueden ser elípticas, parabólicas e hiperbólicas. A la inversa, cualquier cono cuadrático no degenerado tiene una dirección tal que las secciones planas perpendiculares a dicha dirección son circulares. En ese sentido, todo cono cuadrático es un cono circular, aunque puede ser *oblicuo* en vez de circular recto, en el sentido de que la recta que une el centro de las secciones cruzadas circulares no tiene por qué ser perpendicular a dichas secciones circulares (*véase* el Ejercicio 24).

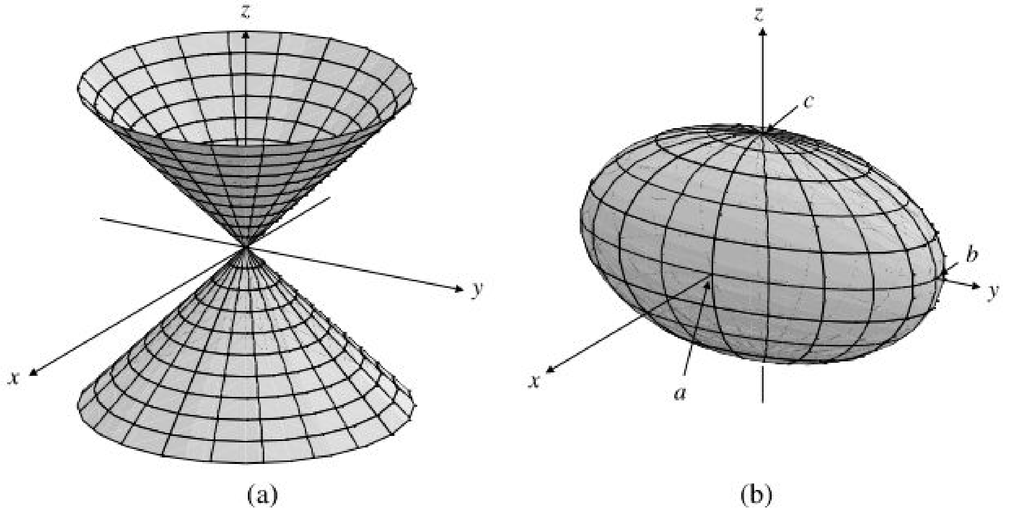


Figura 10.35
(a) El cono circular $a^2z^2 = x^2 + y^2$.
(b) El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Elipsoides. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa un **elipsoide** de *semiejes* a, b y c (*véase* la Figura 10.35(b)). La superficie es oval y está encerrada dentro del paralelepípedo rectangular $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$. Si $a = b = c$, el elipsoide se convierte en una esfera. En general, todas las secciones planas de los elipsoides son elipses. Esto es fácil de ver en el caso de secciones cruzadas paralelas a los ejes coordenados, pero es más difícil de ver para otros planos.

Paraboloides. Las ecuaciones

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{y} \quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

representan, respectivamente, a un **paraboloide elíptico** y a un **paraboloide hiperbólico** (*véase* la Figura 10.36(a) y (b)). Las secciones cruzadas en planos $z = k$ (siendo k una constante positi-

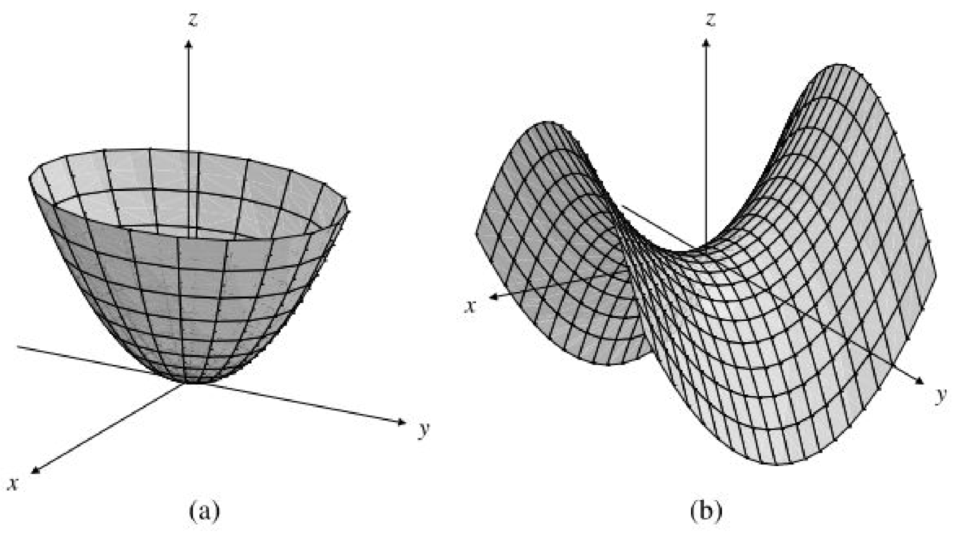


Figura 10.36
(a) El paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
(b) El paraboloide hiperbólico $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

va) son elipses (circunferencias si $a = b$) e hipérbolas, respectivamente. Las antenas parabólicas tienen la forma de un paraboloide circular. El paraboloide hiperbólico es una **superficie reglada**. Una superficie reglada es aquella tal que por cada punto de la misma pasa una recta contenida completamente en la superficie. Los conos y los cilindros son también ejemplos de superficies regladas. Hay dos familias de rectas dependientes de un parámetro contenidas en un paraboloide hiperbólico:

$$\begin{cases} \lambda z = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mu z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

siendo λ y μ parámetros reales. Todo punto del paraboloide hiperbólico pertenece a una recta de cada familia.

Hiperboloides. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

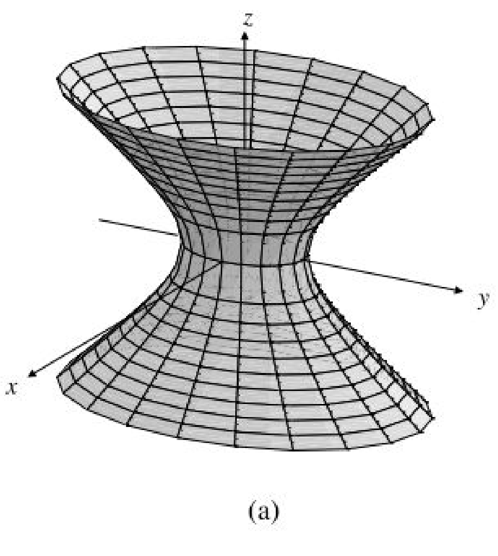
representa una superficie denominada **hiperboloide de una hoja** (*véase* la Figura 10.37(a)). La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

representa un **hiperboloide de dos hojas** (*véase* la Figura 10.37(b)). Ambas superficies tienen secciones cruzadas elípticas en planos horizontales, y secciones cruzadas hiperbólicas en planos verticales. Ambas son *asintóticas* con el cono elíptico cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

ya que se aproximan arbitrariamente a ese cono cuando se alejan arbitrariamente del origen. Como el paraboloide hiperbólico, el hiperboloide de una hoja es una superficie reglada.



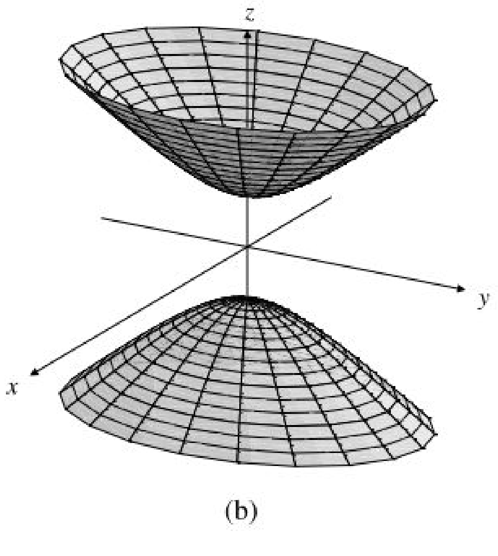


Figura 10.37

(a) El hiperboloide de una hoja $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(b) El hiperboloide de dos hojas $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

Ejercicios 10.5

Identifique las superficies representadas por las ecuaciones de los Ejercicios 1-16 y dibuje sus gráficas.

1. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

2. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$

3. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0$

4. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$

5. $z = x^2 + 2y^2$

6. $z = x^2 - 2y^2$

7. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

8. $-x^2 + y^2 + z^2 = 4$

9. $z = xy$

10. $x^2 + 4z^2 = 4$

11. $x^2 - 4z^2 = 4$

12. $y = z^2$

13. $x = z^2 + z$

14. $x^2 = y^2 + 2z^2$

15. $(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$

16. $(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 4$

Describa y dibuje los objetos geométricos representados por los sistemas de ecuaciones de los Ejercicios 17-20.

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$

19. $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 + x \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ y = 1 \end{cases}$

21. Obtenga dos familias de rectas dependientes de un parámetro que estén contenidas en el hiperboloide de una hoja
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

22. Obtenga dos familias de rectas dependientes de un parámetro que estén contenidas en el paraboloide hiperbólico $z = xy$.

23. La ecuación $2x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro con secciones cruzadas elípticas en planos perpendiculares al eje z. Obtenga un vector **a** tal que las secciones cruzadas del cilindro perpendiculares a él sean circulares.

***24.** La ecuación $z^2 = 2x^2 + y^2$ representa un cono con secciones cruzadas elípticas en planos perpendiculares al eje z. Obtenga un vector **a** tal que las secciones cruzadas del cono perpendiculares a él sean circulares. *Sugerencia*: Haga primero el Ejercicio 23 y utilice el resultado.

10.6 Un poco de álgebra lineal

El cálculo diferencial es esencialmente el estudio de las aproximaciones lineales a funciones. La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = x_0$ proporciona la «mejor aproximación lineal» a la función $f(x)$ en las proximidades de x_0. La diferenciación de funciones de varias variables también se puede ver como un proceso de obtener *las mejores aproximaciones lineales*. Por tanto, el lenguaje del álgebra lineal puede ser muy útil para expresar ciertos conceptos en el cálculo de varias variables.

El álgebra lineal es una materia muy amplia y generalmente se estudia de forma independiente del cálculo. Esto es desafortunado, porque la comprensión de las relaciones entre las dos materias puede mejorar grandemente el entendimiento y la apreciación de cada una de ellas. El conocimiento del álgebra lineal, y por tanto la familiaridad con el material considerado en esta sección, *no es esencial* para un estudio fructífero del resto de este libro. Sin embargo, comentaremos de vez en cuando el significado de algún aspecto del cálculo desde el punto de vista del álgebra lineal. Con este fin, necesitamos conocer al menos un poco la terminología y los contenidos de esta materia, especialmente los aspectos relacionados con el manejo de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales. En el resto de esta sección presentaremos un resumen de este material. Algunos estudiantes ya estarán familiarizados con este tema y otros lo estudiarán posteriormente. La presentación no intenta ser completa y, por tanto, referimos a los estudiantes interesados a los textos estándar de álgebra lineal, donde pueden encontrar las demostraciones de algunas afirmaciones. Los estudiantes que vayan más allá de este libro y estudien cálculo avanzado y ecuaciones diferenciales necesitarán seguro un conocimiento mucho más amplio del álgebra lineal.