UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI
MINISTERUL MUNCII,
FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI
SOCIALE
AMPOSDRU

Fondul Social European
POS DRU
2007 - 2013

Instrumente Structurale
2007 - 2013

MINISTERUL
EDUCAŢIEI
CERCETĂRII
TINERETULUI
ŞI SPORTULUI

OIPOSDRU

Universitatea
POLITEHNICA
din Bucuresti

Contract POSDRU/86/1.2/S/62485

Algebră Liniară

*POSDRU ID 62485 * Bucureşti 2012*

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Universitatea Tehnică
“Gheorghe Asachi” din Iaşi

Universitatea
din Craiova

Prefaţă

Algebra liniară şi geometria analitică stau la baza pregătirii matematice universitare, oferind modelări bazate pe conceptul de liniaritate. Cartea scrisă de noi cuprinde informaţia minimală ce reflectă acest concept şi este structurată în următoarele capitole: *spaţii vectoriale, transformări liniare, valori şi vectori proprii, forme biliniare şi pătratice, vectori liberi, dreapta şi planul, schimbări de repere, conice* şi *cuadrice.*

Limbajul şi notaţiile folosite sunt simplificate, dar aceasta impune şi "citirea printre rânduri", deoarece numai contextul dă sensul corect elementelor omise voit într-o anumită formulă sau propoziţie. Cititorul trebuie să aibă în vedere că lingvistica matematică permite combinarea cuvintelor cu imagini şi formule, pentru a evita supraîncărcarea şi a fluentiza exprimarea.

Conceptele fundamentale ale algebrei liniare, scalari, vectori, transformări liniare şi forme biliniare, se bazează în esenţă pe "adunare şi înmulţire".

Scopul nostru este cvadruplu:

- să dirijăm gândirea studenţilor spre modelul matematic definiţie - teoremă - demonstraţie - problemă;
- să formăm capacitatea cititorului de a manevra concepte matematice, teoretice şi calculatorii;
- să oferim idei pertinente de concentrare a informaţiei (reprezentarea prin formule, desene etc.);
- să implementăm softul specializat MAPLE ce permite simulări sau rezolvări care nu se pot face din vârful creionului.

Cuprins

MA.1.Spaţii vectoriale

Cuvinte cheie: spaţiu vectorial, adunarea vectorilor, înmultirea vectorilor cu scalari, subspaţiu vectorial, suma directă de subspaţii vectoriale, subspaţii suplimentare, familie de generatori.

1.1 Grupuri şi câmpuri

Prin definiţii şi exemple reamintim noţiunile de grup şi de corp comutativ (câmp). Aceste structuri algebrice sunt prezentate pe larg în manualele de matematică pentru liceu.

Fie G o mulţime nevidă. O funcţie $*\colon G \times G \to G$ se numeşte *operaţie binară* pe G. Valoarea operaţiei binare se notează cu $g_1 * g_2$ şi se citeşte "g_1 compus cu g_2".

Definiţia 1. O mulţime G împreună cu o operaţie binară $*$ pe G care satisface condiţiile:

$$1)\ g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G;$$

$$2)\ \exists e \in G,\ \text{astfel încât}\ e * g = g * e = g, \quad \forall g \in G;$$

$$3)\ \forall g \in G, \exists g' \in G,\ \text{astfel încât}\ g * g' = g' * g = e.$$

se numeşte grup.

Un grup se notează fie prin $(G, *)$, fie mai scurt prin G, atunci când operaţia binară se subînţelege din context.

Dacă $\forall g_1, g_2 \in G$, avem $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$, atunci grupul G se numeşte *comutativ* (*abelian*).

Elementul e care satisface axioma 2) este unic şi se numeşte *element neutru*.

Elementul g' care satisface axioma 3) este unic determinat de g şi se numeşte *simetricul* lui g.

Urmând grupurile numerice uzuale operaţia de grup se notează fie aditiv, fie multiplicativ. Din acest punct de vedere avem două tipuri de grupuri:

- *grupul aditiv*, notat $(G, +)$; în acest caz, e se notează cu 0 şi numeşte *zero*, iar g' se notează cu $-g$ şi se numeşte *opusul* lui g. Diferenţa $g_1 - g_2$ se defineşte ca fiind suma $g_1 + (-g_2)$;

- *grupul multiplicativ*, notat $(G, \cdot)$; în acest caz, e se notează cu 1 şi se numeşte *unitate*, iar g' se notează cu g^{-1} şi se numeşte *inversul* lui g.

Exemple:

Concretizând mulţimea G şi specificând operaţia binară, obţinem grupuri particulare şi astfel avem:

1) grupul aditiv al numerelor reale, $(\mathbb{R}, +)$;
2) grupul multiplicativ al numerelor raţionale nenule, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;
3) $(G, *)$, unde G este mulţimea matricelor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

iar $*$ înmulţirea matricelor;
4) mulţimea bijecţiilor definite pe A şi cu valori în A formează un grup în raport cu compunerea funcţiilor.

Definiţia 2. Fie $(G, *)$ un grup. O mulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup al lui G, dacă

$$\forall g_1, g_2 \in H, \quad g_1 * g_2{}' \in H.$$

Interpretând definiţia putem spune că H este un subgrup al grupului $(G, *)$ dacă şi numai dacă H este grup în raport cu operaţia indusă de $*$.

Exemplu. Fie $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $*$ înmulţirea obişnuită. În grupul $(G, *)$ se constată că submulţimea numerelor raţionale formează un subgrup, submulţimea numerelor reale pozitive formează un subgrup şi submulţimea numerelor iraţionale nu formează un subgrup.

Definiţia 3. Fie $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$ două grupuri. O funcţie $\varphi\colon G_1 \to G_2$ care satisface $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G_1$, se numeşte morfism. Un morfism bijectiv se numeşte izomorfism.

De cele mai multe ori, grupurile izomorfe se identifică. Dacă $G_1 = G_2$ şi $* \equiv \circ$, atunci în loc de morfism spunem *endomorfism*, iar în loc de izomorfism spunem *automorfism*.

Exemplu. Grupul Cayley (grup finit cu şase elemente) descris de tabelul

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

este izomorf cu grupul permutărilor a trei obiecte (grupul simetric S_3):

$$E \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$
$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad D \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad F \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi cu grupul următoarelor matrice:

$$E \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$
$$C \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad D \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad F \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(operaţia binară este înmulţirea matricelor). Pe de altă parte există un morfism de la grupul Cayley la grupul $(\{-1, 1\}, \cdot)$ şi anume

$$\begin{matrix} E & A & B & C & D & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Compunând acest morfism cu izomorfismul dintre S_3 şi grupul Cayley, se obţine morfismul care asociază fiecărei permutări signatura sa.

Definiţia 4. O mulţime K împreună cu două aplicaţii ale lui $K \times K$ în K, numite adunare, respectiv înmulţire, care satisfac condiţiile:

a) adunarea determină pe K o structură de grup comutativ;
b) înmulţirea determină pe $K \setminus \{0\}$ o structură de grup;
c) înmulţirea este distributivă faţă de adunare

se numeşte corp.

Un corp pentru care şi înmulţirea este comutativă se numeşte *câmp* (*corp comutativ*). Un câmp se notează $(K, +, \cdot)$ sau mai simplu, K.

Exemplu. Tripletele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt câmpuri. Operaţiile de adunare şi înmulţire sunt cele obişnuite.

Precizare. În cele ce urmează vom folosi în special câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ şi câmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$.

1.2 Spaţii vectoriale

Spaţiul vectorial este una dintre cele mai importante structuri algebrice care serveşte şi disciplinelor aplicate. Această structură constă dintr-un grup aditiv comutativ V, un câmp K şi o "înmulţire" definită pe $K \times V$ cu valori în V care satisface patru axiome. Elementele lui V vor fi notate prin $v, w, \ldots$, iar elementele lui K vor fi notate prin $k, \ell, \ldots$ sau $\alpha, \beta, \ldots$ Evident, vom accepta şi notaţii potrivite contextului.

Definiţia 5. Mulţimea V se numeşte ***spaţiu vectorial*** peste câmpul K dacă admite:
a) o structură de grup comutativ, notată aditiv, $(v, w) \to v + w$, operaţia corespunzătoare numindu-se ***adunarea vectorilor***;
b) o funcţie $f\colon K \times V \to V,\ f(k, v) = kv$, astfel încât $\forall k, \ell \in K, \forall v, w \in V$ să avem:

$$1v = v; \quad k(\ell v) = (k\ell)v; \quad (k + \ell)v = kv + \ell v; \quad k(v + w) = kv + kw,$$

această operaţie numindu-se ***înmultirea vectorilor cu scalari***.

Un spaţiu vectorial se notează fie prin tripletul (V, K, f), fie pe scurt prin V. Elementele lui V se numesc *vectori*, elementele lui K se numesc *scalari*, iar aplicaţia f se numeşte ***înmulţirea cu scalari***.

Un spaţiu vectorial peste câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ se numeşte *spaţiu vectorial real*. Un spaţiu vectorial peste câmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ se numeşte *spaţiu vectorial complex*. Acestea sunt cele două situaţii întâlnite mai frecvent în disciplinele aplicate, motiv pentru care noi ne vom referi numai la ele. De aceea, ori de câte ori scriem simplu "spaţiu vectorial", subînţelegem că el poate fi real sau complex.

Observaţii:
1. De fapt proprietăţile impuse înmulţirii dintre scalari şi vectori reprezintă compatibilitatea acestei operaţii cu operaţiile de grup din V şi operaţiile de câmp din K.
2. Pentru simplificarea scrierii şi pentru evitarea încărcării memoriei cu prea multe simboluri, adunarea din V şi adunarea din K s-au notat cu $+$, iar înmulţirea din K şi înmulţirea cu scalari s-au notat prin alăturarea elementelor înmulţite. Automat zero din V (vectorul nul) şi zero din K (scalarul nul) vor fi notate la fel.
3. Relativ recent s-a demonstrat că doar şapte dintre cele opt axiome (patru pentru grupul comutativ şi patru pentru înmulţirea cu scalari) ce definesc spaţiul vectorial sunt independente. Nimeni nu modifică însă definiţia doar pentru a crea complicaţii matematice.

Să prezentăm acum câteva consecinţe directe ale definiţiei spaţiului vectorial, consecinţe care constituie punctele de sprijin ale tehnicii calculatorii elementare.

Teorema 6. *Dacă V este un spaţiu vectorial peste câmpul K, atunci $\forall v \in V$ şi $\forall k \in K$ au loc următoarele* **proprietăţi**:

$$\text{i) } 0 \cdot v = 0; \qquad \text{ii) } k \cdot 0 = 0; \qquad \text{iii) } (-1) \cdot v = -v;$$

$$\text{iv) } \textit{dacă } v + w = v + u, \ \textit{atunci } w = u; \quad \text{v) } \textit{dacă } kv = \ell v \ \textit{şi } v \neq 0, \ \textit{atunci } k = \ell.$$

Demonstraţie. Se ţine seama de proprietăţile adunării a doi vectori şi de proprietăţile înmulţirii dintre un scalar şi un vector, cu alte cuvinte se aplică definiţia 2.1, care constă din axiomele a) şi b).

i) Avem $v + 0 \cdot v = v$ (ţinând seama de axioma b)$_1$), $1 \cdot v + 0 \cdot v = v$ (vezi axioma b)$_3$), $(1 + 0)v = v$ (K este un grup aditiv), $1 \cdot v = v$ (conform axiomei b)$_1$). Deoarece V este un grup, elementul neutru este unic, deci relaţia $v + 0 \cdot v = v$ implică $0 \cdot v = 0$.

Pornind de la consecinţele anterioare se pot justifica şi relaţiile:

$$-(kv) = (-k)v = k(-v);$$
$$(k - \ell)v = (k + (-\ell))v = kv + (-\ell)v = kv + (-\ell v) = kv - \ell v;$$
$$k(v - w) = k\big[v + (-1)w\big] = kv + (-k)w = kv + (-kw) = kv - kw,$$

$\forall k, \ell \in K$ şi $\forall v, w \in V$. Drept urmare, adunarea şi scăderea elementelor din V, precum şi înmulţirea cu scalari, au formal proprietăţile de la numere reale sau numere complexe. □

Exemple de spaţii vectoriale mai des întâlnite:

Precizăm mulţimile V şi K, adunarea din V şi înmulţirea cu scalari, iar verificarea axiomelor o lăsăm pe seama cititorului.

1) *Spaţiul vectorial K peste câmpul K.* Avem $V = K$, unde K este câmp, adunarea din K şi înmulţirea din K.

2) *Spaţiul vectorial $\mathbb{C}$ peste câmpul $\mathbb{R}$.* Considerăm $V = \mathbb{C}$ (mulţimea numerelor complexe), $K = \mathbb{R}$ (mulţimea numerelor reale), adunarea din $\mathbb{C}$ şi înmulţirea dintre un număr real şi un număr complex.

3) *Spaţiul vectorial aritmetic cu n dimensiuni.* $V = K^n$, K câmp, adunarea

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

şi înmulţirea cu scalari

$$kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n).$$

4) *Spaţiul vectorial al vectorilor liberi.* $V = V_3$, $K = \mathbb{R}$, adunarea vectorilor liberi prin regula paralelogramului, înmulţirea dintre un număr real şi un vector liber.

5) *Spaţiul vectorial al matricelor de tipul $m \times n$.* $V = \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, K câmp, adunarea matricelor, înmulţirea dintre un scalar şi o matrice.

6) *Spaţiul vectorial al soluţiilor unui sistem algebric liniar omogen.* V este mulţimea soluţiilor unui sistem liniar omogen de m ecuaţii cu n necunoscute, cu coeficienţi din K (unde K este un câmp), adunarea din K^n, înmulţirea dintre un scalar şi un element din K^n.

7) *Spaţiu vectorial de funcţii.*

$$V = \big\{ f \,|\, f \colon S \to W, \ S \text{ mulţime nevidă}, \ W \text{ spaţiu vectorial peste câmpul } K \big\},$$

unde K este câmp, adunarea funcţiilor, înmulţirea unei funcţii cu un scalar.

8) *Spaţiu vectorial de funcţii.* V este mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale ordinare, liniară şi omogenă, $K = \mathbb{R}$, adunarea funcţiilor, înmulţirea unei funcţii cu un scalar.

9) *Spaţiul vectorial al şirurilor reale sau complexe.* V este mulţimea tuturor şirurilor reale sau complexe, $K = \mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$, adunarea

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$

înmulţirea cu scalari

$$kx = (kx_1, \dots, kx_n, \dots).$$

10) *Spaţiul vectorial al funcţiilor test.* O funcţie reală cu suport compact, adică anulându-se în afara unei mulţimi compacte care depinde de funcţia considerată, şi indefinit derivabilă, se numeşte *funcţie test*. V este mulţimea tuturor funcţiilor test, $K = \mathbb{R}$, adunarea funcţiilor test, înmulţirea unui număr real cu o funcţie test.

1.3 Subspaţii vectoriale

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K. Ne propunem să cercetăm submulţimile lui V care sunt ele însele spaţii vectoriale în raport cu operaţiile induse de cele din V.

Definiţia 7. O submulţime nevidă W a lui V se numeşte ***subspaţiu vectorial*** al lui V dacă:

$$1)\ u + v \in W, \quad \forall u, v \in W; \qquad 2)\ ku \in W, \quad \forall k \in K,\ \forall u \in W.$$

Aceste condiţii pot fi înlocuite prin condiţia echivalentă

$$ku + \ell v \in W, \quad \forall u, v \in W,\ \forall k, \ell \in K.$$

Vectorul $w = ku + \ell v$ se numeşte *combinaţie liniară a vectorilor* u *şi* v.

De asemenea, întrucât adunarea şi înmulţirea cu scalari sunt restricţii la W ale operaţiilor de pe V, perechea (W, K) satisface toate axiomele spaţiului vectorial. Prin urmare, putem da o definiţie echivalentă, aceea că W este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă W este un spaţiu vectorial peste K în raport cu operaţiile induse de cele din V. Aşa se face că vectorul $0 \in V$ aparţine necesar oricărui subspaţiu vectorial.

Exemple:

1) Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K. Mulţimile $\{0\}$ şi V sunt subspaţii vectoriale ale lui V şi se numesc *subspaţii improprii*. Oricare alt subspaţiu al lui V se numeşte *propriu*.

2) Mulţimea elementelor de forma $(0, x_2, \dots, x_n)$ este un subspaţiu vectorial propriu al lui K^n.

3) Mulţimea funcţiilor impare şi mulţimea funcţiilor pare sunt subspaţii ale spaţiului vectorial real al funcţiilor reale definite pe $(-a, a)$.

4) Fie $V = C^0[a, b]$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale continue definite pe $[a, b]$. Submulţimea $W = \{f \in C^0[a, b] \mid f(a) = f(b)\}$ este un subspaţiu vectorial.

5) Fie $V = \mathbb{R}^3$. Dreptele şi planele care conţin originea sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$.

Contraexemplu. Fie V un spaţiu vectorial. Dacă W este o submulţime a lui V care nu conţine pe 0, atunci W nu poate fi subspaţiu vectorial.

Definiţia 8. Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K şi S o submulţime nevidă a sa. Un vector $v \in V$ de forma

$$v = \sum_{i=1}^{p} k_i v_i, \quad \forall v_i \in S,\ k_i \in K,$$

se numeşte combinaţie liniară finită de elemente din S.

Teorema 9. *Dacă S este o submulţime nevidă a lui V, atunci mulţimea tuturor combinaţiilor liniare finite din S este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Acest subspaţiu se numeşte *subspaţiul generat de submulţimea* S sau *acoperirea liniară a lui* S şi se notează cu $L(S)$. În acest caz spunem că familia S generează pe $L(S)$, sau că S reprezintă o ***familie de generatori*** pentru $L(S)$. Dacă S este mulţimea vidă, atunci prin definiţie $L(S) = \{0\}$.

Demonstraţie. Suma a două combinaţii liniare finite de elemente din S este o combinaţie liniară finită de elemente din S. Produsul dintre un scalar $k \in K$ şi o combinaţie liniară finită de elemente din S este o combinaţie liniară finită de elemente din S. □

Evident, diferite submulţimi de vectori din V pot să genereze acelaşi subspaţiu. De exemplu, mulţimile

$$\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}; \quad \left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}\right\}; \quad \{1, (1-t), (1-t)^2, \ldots, (1-t)^n\},$$

generează spaţiul vectorial al funcţiilor polinomiale care au cel mult gradul n, iar mulţimile

$$\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}, \quad \left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}, \ldots\right\}, \quad \{1, (1-t), (1-t)^2, \ldots, (1-t)^n, \ldots\},$$

generează spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor polinomiale.

Teorema 10. *Dacă W_1 şi W_2 sunt două subspaţii ale spaţiului vectorial V, atunci:*

1) *mulţimea $W_1 + W_2 = \{v = v_1 + v_2 \mid v_1 \in W,\ v_2 \in W_2\}$, numită suma dintre W_1 şi W_2, este un subspaţiu vectorial al lui V;*

2) *intersecţia $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu vectorial al lui V;*

3) *reuniunea $W_1 \cup W_2$ este un subspaţiu vectorial al lui V doar dacă $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$.*

Demonstraţie. 1) Fie $u, v \in W_1 + W_2$, adică $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, unde $u_1, v_1 \in W_1$ şi $u_2, v_2 \in W_2$. Deoarece $u_1 + v_1 \in W_1$ şi $u_2 + v_2 \in W_2$, găsim

$$u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

Fie $k \in K$. Deoarece $ku_1 \in W_1$ şi $ku_2 \in W_2$, rezultă

$$ku = (ku_1) + (ku_2) \in W_1 + W_2.$$

2) Considerând $u, v \in W_1 \cap W_2$, avem $u, v \in W_1$ şi $u, v \in W_2$. Pe de altă parte, W_1 şi W_2 sunt subspaţii vectoriale, deci pentru $\forall k, \ell \in K$, avem $ku + \ell v \in W_1$ şi $ku + \ell v \in W_2$, adică

$$ku + \ell v \in W_1 \cap W_2.$$

3) Presupunem că nu au loc incluziunile menţionate. Fie $u_1 \in W_1$ şi $u_1 \notin W_2$, $v_2 \notin W_1$ şi $v_2 \in W_2$. Rezultă $u_1 + v_2 \notin W_1$ şi $u_1 + v_2 \notin W_2$, deci $u_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$, adică reuniunea precizată nu este subspaţiu vectorial. □

Observaţie. Acoperirea liniară a reuniunii $W_1 \cup W_2$ este subspaţiul vectorial sumă $W_1 + W_2$.

Exemplu. Fie subspaţiile W şi U generate de vectorii $w_1 = (1, 5)$, $w_2 = (-1, -10)$, $w_3 = (3, 15)$, respectiv $u_1 = (-1, -4)$, $u_2 = (-1, 2)$, $u_3 = (2, 0)$ din $\mathbb{R}^2$. Să se construiască subspaţiile $W + U$ şi $W \cap U$.

Soluţie. Subspaţiul sumă $W+U$ este acoperirea liniară a vectorilor w_1, w_2, w_3, u_1, u_2 şi u_3, adică $v \in W+U$ este de forma

$$v = k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4u_1 + k_5u_2 + k_6u_3.$$

Subspaţiul $W \cap U$ conţine acei vectori pentru care

$$\alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \alpha_3w_3 = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3.$$

Folosind operaţiile cu vectori din $\mathbb{R}^2$, obţinem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ 5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 15\alpha_3 = -4\beta_1 + 2\beta_2. \end{cases}$$

Întrucât rangul matricei sistemului este 1, compatibilitatea este asigurată de anularea determinantului caracteristic $\beta_1 + 7\beta_2 - 10\beta_3 = 0$. Obţinem

$$\beta_1 = -7\lambda + 10\mu, \quad \beta_2 = \lambda, \quad \beta_3 = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Atunci avem in final

$$(-7\lambda + 10\mu)u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 = (6\lambda - 8\mu, 30\lambda - 40\mu) \in W \cap U, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Teorema 11. *Fie W_1 şi W_2 două subspaţii vectoriale şi $v \in W_1 + W_2$. Descompunerea $v = v_1 + v_2$ este unică dacă şi numai dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.*

Demonstraţie. Fie $v = v_1 + v_2 = v_1{}' + v_2{}'$, cu $v_1, v_1{}' \in W_1$ şi $v_2, v_2{}' \in W_2$. Vectorul $u = v_1 - v_1{}' = v_2{}' - v_2$ este conţinut în $W_1 \cap W_2$. De aceea ipoteza $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ implică $v_1 = v_1{}'$ şi $v_2 = v_2{}'$, adică unicitatea descompunerii.

Reciproc, unicitatea implică $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, deoarece în caz contrar orice vector nenul $w \in W_1 \cap W_2$, ar avea cel puţin două descompuneri, $w = w + 0 = 0 + w$. □

Definiţia 12. Fie W_1 şi W_2 două subspaţii vectoriale ale lui V. Dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, atunci suma $W_1 + W_2$ se numeşte ***sumă directă*** şi se notează cu $W_1 \oplus W_2$. Dacă în plus $W_1 \oplus W_2 = V$, atunci W_1 şi W_2 se numesc ***subspaţii suplimentare***.

Exemplu. Subspaţiul funcţiilor pare şi respectiv impare sunt suplimentare în spaţiul vectorial real al funcţiilor reale definite pe $(-a, a)$ întrucât intersecţia conţine numai funcţia zero şi

$$f(x) = \frac{1}{2}\big[f(x) + f(-x)\big] + \frac{1}{2}\big[f(x) - f(-x)\big], \quad \forall x \in (-a, a),$$

adică orice funcţie $f\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$ este suma dintre o funcţie pară şi una impară.

Evident noţiunile de sumă şi sumă directă se pot extinde la cazul unui număr finit de subspaţii vectoriale.

1.4 Exerciţii/probleme rezolvate

1.4.1 Enunţuri

1. Determinaţi dacă următoarele operaţii definesc, pe mulţimile specificate, structuri de spaţiu vectorial. În caz negativ, ce proprietaţi **NU** au loc?

a) $V = \mathbb{R}^2,\ x + y = (x_1 + y_1, x_2 + |y_2|),\ \lambda x = (\lambda x_1, 0), \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
b) $(\mathbb{R}^2,\ +\ , \cdot_{\mathbb{R}})$;
c) $(\mathbb{R}_2[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} p \le 2\},\ +\ ,\ \cdot_{\mathbb{R}})$;
d) $(\{p \in \mathbb{C}[X] \mid \operatorname{grad} p = 3\},\ +\ , \cdot_{\mathbb{C}})$;
e) $(C^1(-1,1),\ +\ ,\ \cdot_{\mathbb{R}})$, unde $C^1(-1,1) = \{f : (-1,1) \to \mathbb{R} \mid f' \text{ există şi este continuă în } (-1,1)\}$;
f) $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ +\ ,\ \cdot_{\mathbb{R}})$;
g) $(\{f | f : M \to \mathbb{R}\},\ +\ ,\ \cdot_{\mathbb{R}})$, unde M este o mulţime arbitrară nevidă.

2. Determinaţi dacă următoarele submulţimi reprezintă subspaţii vectoriale în spaţiile vectoriale indicate:
a) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 + a = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, unde $a \in \mathbb{R}$;
b) $W = \{x | x = \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$, unde $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;
c) $W = \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$;
d) $W = C^1(-1,1) \subset C^0(-1,1)$, unde $C^0(-1,1) = \{f : (-1,1) \to \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă în } (-1,1)\}$;
e) $W = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(1) + p(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[X]$;
f) $W = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 1 & b \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
g) $W = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = a, x_1 - x_3 = b - 1\} \subset \mathbb{R}^4$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Se dau $V = \{f \mid f : (-1,1) \to \mathbb{R}\}$ şi submulţimile

$$W_1 = \{f \in V | f \text{ pară}\} \subset V, \quad W_2 = \{f \in V | f \text{ impară }\} \subset V.$$

a) Verificaţi dacă $W_{1,2} \subset V$ sunt subspaţii vectoriale în V.
b) Arătaţi că $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, $W_1 + W_2 = V$, adică $W_{1,2}$ sunt subspaţii suplementare în V.
c) Descompuneţi funcţia exponenţială după W_1 şi W_2.

4. Arătaţi că:
a) $L(\{1 + t, t, 1 - t^2\}) = L(\{1, t, t^2\}) = P_2$;
b) $L(\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\}) = L(\{1 - a, x - a, x^2 - a, \ldots, x^n - a\}) = P_n$, unde $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1.4.2 Soluţii

1. **a) 1.** Se observă că adunarea vectorilor este corect definită: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^2$.

2. Pentru a fi îndeplinită proprietatea de asociativitate a adunării trebuie să avem:

$$\begin{aligned}(x + y) + z = x + (y + z) &\Leftrightarrow ((x_1 + y_1) + z_1, x_2 + |y_2| + |z_2|) = \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + |y_2 + |z_2||) \Leftrightarrow |y_2| + |z_2| = |y_2 + |z_2||.\end{aligned}$$

Dar, dintr-o proprietate a modulului, avem:

$$|y_2 + |z_2|| \le |y_2| + |z_2|$$

iar inegalitatea poate fi strictă. De exemplu, pentru $y_2 = -1, z_2 = 1$ aceasta devine $0 < 2$. Atunci spre exemplu, pentru $x = (0,0), y = (0,-1), z = (0,1)$ obţinem $(x + y) + z = (0,2)$, iar $x + (y + z) = (0,0)$ şi deci $(x + y) + z \ne x + (y + z)$. Deci proprietatea de asociativitate *nu* are loc.

3. Elementul neutru. Proprietatea $\exists e \in V$ a.î. $\forall x \in V, x + e = e + x = x$ se rescrie

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 + e_1, x_2 + |e_2|) = (x_1, x_2) \\ (e_1 + x_1, e_2 + |x_2|) = (x_1, x_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (e_1, |e_2|) = (0,0) \\ (e_1, e_2 + |x_2|) = (0, x_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = e_2 = 0 \\ |x_2| = x_2 \end{array} \right.$$

deci este echivalentă cu condiţiile

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = e_2 = 0 \\ x_2 \ge 0. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Relaţiile (1.1) nu au loc pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ (de exemplu, pentru $e = (0,0)$ şi $x = (0,-1)$ avem $x + e = (0,-1) = x$, dar $e + x = (0,1) \ne x$) şi deci proprietatea de existenţă a elementului neutru nu are loc.

4. Elementul simetrizabil. Evident, dacă nu există element neutru, nu poate exista nici proprietatea de existenţă a simetricului.

5. Comutativitatea. $x+y=y+x \Leftrightarrow (x_1+y_1, x_2+|y_2|)=(y_1+x_1, y_2+|x_2|) \Leftrightarrow x_2+|y_2|=y_2+|x_2|$. Relaţia de mai sus nu este adevărată pentru orice $x=(x_1,x_2)$ şi orice $y=(y_1,y_2)$. De exemplu, pentru $x=(0,-1), y=(0,1)$ obţinem $x+y=(0,-1), y+x=(0,1)$. Deci proprietatea de comutativitate nu este îndeplinită.

6. Se observă că înmulţirea cu scalari este corect definită: $\forall k\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}^2$, rezultă $k\cdot x\in\mathbb{R}^2$.

7. $1\cdot x=x \Leftrightarrow (x_1,0)=(x_1,x_2) \Leftrightarrow x_2=0$, deci egalitatea nu are loc pentru orice $x\in\mathbb{R}^2$. De exemplu, pentru $x=(0,1)$, avem $1\cdot x=(0,0)\neq x$. Prin urmare proprietatea de înmulţire cu elementul unitate nu are loc.

8. $(kl)x=k(lx) \Leftrightarrow ((kl)x_1,0)=(k(lx_1),0) \Leftrightarrow klx_1=klx_1$, deci proprietatea are loc.

9. $(k+l)x=kx+lx \Leftrightarrow ((k+l)x_1,0)=(kx_1,0)+(lx_1,0) \Leftrightarrow (k+l)x_1=kx_1+lx_1$, deci proprietatea are loc.

10. $k(x+y)=kx+ky \Leftrightarrow (k(x_1+y_1),0)=(kx_1,0)+(ky_1,0) \Leftrightarrow k(x_1+y_1)=kx_1+ky_1$, deci proprietatea are loc.

b) Pe $\mathbb{R}^2$ se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari astfel:

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2), \qquad kx=(kx_1,kx_2),$$

$\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, \forall k\in\mathbb{R}$. Evident, aceste operaţii definesc pe $\mathbb{R}^2$ o structură de spaţiu vectorial *Tem'a: verifica'ti.*

c) Pe $\mathbb{R}_2[X]$ se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari astfel:

$$p+q=p_0+q_0+(p_1+q_1)X+(p_2+q_2)X^2, \qquad kp=kp_0+kp_1X+kp_2X^2,$$

$\forall p=p_0+p_1X+p_2X^2, q=q_0+q_1X+q_2X^2\in\mathbb{R}_2[X], \forall k\in\mathbb{R}$. Aceste operaţii definesc pe $\mathbb{R}_2[X]$ o structură de spaţiu vectorial *Tem'a: verifica'ti.*

d) Se observă că adunarea vectorilor nu este corect definită: nu orice două elemente din mulţime au suma tot în mulţime. De exemplu, dacă alegem $p=X^3$ şi $q=-X^3$, rezultă $\text{grad}\,(p+q)=\text{grad}\,(0)=0\neq 3$, deci $p+q$ nu aparţine mulţimii. De asemenea, înmulţirea vectorilor cu scalari nu este bine definită. De exemplu, pentru $k=0$ şi $p=X^3 \Rightarrow \text{grad}\,(kp)=\text{grad}\,(0\cdot X^3)=0\neq 3$, deci $k\cdot p$ nu aparţine mulţimii.

e) Pe $C^1(-1,1)$ se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (kf)(x)=k\cdot f(x),$$

$\forall x\in(-1,1), \forall f,g\in C^1(-1,1), \forall k\in\mathbb{R}$. Operaţiile de mai sus definesc o structură de spaţiu vectorial *Tem'a.*

f) Pe $M_{2\times 3}$ se definesc operaţiile:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} \\ k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\forall A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \forall k\in\mathbb{R}$. Operaţiile de mai sus definesc o structură de spaţiu vectorial pe $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ (verificaţi).

g) Notăm $V=\{f|f:M\to\mathbb{R}\}$. Pe mulţimea V definim operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari astfel:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (kf)(x)=k\cdot f(x),$$

$\forall x\in M, \forall f,g\in V, \forall k\in\mathbb{R}$. Operaţiile de mai sus definesc o structură de spaţiu vectorial pe V (verificaţi).

2. a) Fie $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in W$, deci $x,y\in\mathbb{R}^2$ satisfac condiţiile:

$$\begin{cases} x_1+x_2+a=0 \\ y_1+y_2+a=0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Atunci $\alpha x+\beta y\in W$ doar dacă are loc relaţia:

$$\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2+a=0,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Dar din relaţia (1.2) rezultă $\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + a(\alpha+\beta) = 0$, deci

$$\alpha x + \beta y \in W \Leftrightarrow a(\alpha+\beta-1) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0$$

şi deci mulţimea W este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă $a = 0$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $x = \lambda_1 v, y = \lambda_2 v$, unde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Atunci pentru $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, rezultă $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi deci

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)v \in W.$$

Deci W este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

c) Fie $p, q \in \mathbb{R}_1[X]$. Atunci p şi q sunt polinoame de grad cel mult 1 şi au forma $p = p_0 + p_1 X, q = q_0 + q_1 X$, unde $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathbb{R}$. Pentru $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha p + \beta q = (\alpha p_0 + \beta q_0) + (\alpha p_1 + \beta q_1)X \in \mathbb{R}_1[X]$, deci $\mathbb{R}_1[X]$ formează un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}_3[X]$.

d) Pentru $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\forall f, g \in C^1(-1,1)$, folosind proprietăţile funcţiilor continue şi ale celor derivate, rezultă că $\alpha f + \beta g \in C^1(-1,1)$, deci mulţimea W este subspaţiu vectorial în $C^0(-1,1)$.

e) Fie $p, q \in \mathbb{R}_2[X]$ cu

$$p(1) + p(-1) = 0, \quad q(1) + q(-1) = 0. \tag{1.3}$$

Atunci pentru $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&(\alpha p + \beta q)(1) + (\alpha p + \beta q)(-1) = \alpha p(1) + \beta q(1) + \alpha p(-1) + \beta q(-1) = \\ &= \alpha(p(1) + p(-1)) + \beta(q(1) + q(-1)) \overset{(1.3)}{=} 0.\end{aligned}$$

Deci $\alpha p + \beta q \in W$. Rezultă că W este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}[X]$.

f) Fie $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de forma $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix}$. Atunci pentru $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & 0 \\ \alpha + \beta & \alpha a_2 + \beta b_2 \end{pmatrix}$. Se observă că în general $\alpha A + \beta B \notin \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, deoarece $\alpha + \beta = 1$ nu are loc pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi deci mulţimea W nu formează subspaţiu vectorial.

g) Fie $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ astfel încât

$$x_1 + x_2 = a, x_1 - x_3 = b - 1 \quad \text{şi} \quad y_1 + y_2 = a, y_1 - y_3 = b - 1. \tag{1.4}$$

Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$.

Atunci

$$\begin{aligned}&\alpha x + \beta y \in W \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = a \text{ şi } \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_3 - \beta y_3 = b - 1 \\ &\overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} (\alpha+\beta)a = a \text{ şi } (\alpha+\beta)(b-1) = (b-1), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a(\alpha+\beta-1) = 0 \\ (b-1)(\alpha+\beta-1) = 0 \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b - 1 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Deci mulţimea W formează subspaţiu vectorial $\Leftrightarrow a = 0$ şi $b = 1$.

3. a) **Din oficiu: 1pt.** Fie $f, g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, două funcţii pare, deci satisfăcând condiţiile

$$f(-x) = f(x), \quad g(-x) = g(x), \quad \forall x \in (-1,1). \tag{1.5}$$

Atunci pentru orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, funcţia $\alpha f + \beta g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ satisface relaţiile

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) \overset{(1.5)}{=} \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x), \forall x \in (-1,1)$$

şi deci $\alpha f + \beta g$ este o funcţie pară. Rezultă că mulţimea funcţiilor pare W_1 este subspaţiu vectorial în V **(1 pt.)** . Analog se arată că mulţimea funcţiilor impare pe $(-1,1)$,

$$W_2 = \{f : (-1,1) \to \mathbb{R} | f(-x) = -f(x), \forall x \in (-1.1)\}$$

formează un subspaţiu vectorial în V **(1 pt.)** .

b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, deoarece

$$\begin{aligned} f \in W_1 \cap W_2 \quad &\Leftrightarrow f(x) = f(-x) = -f(x), \forall x \in (-1,1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in (-1,1), \text{ deci } f \equiv 0. \end{aligned}$$

Rezultă $W_1 \cap W_2 \subset \{0\}$ **(2 pt.)** . Incluziunea inversă este imediată, deoarece funcţia nulă este simultan pară şi impară pe $(-1,1)$ **(1 pt.)** . De asemenea, avem $W_1 + W_2 = V$ deoarece incluziunea $W_1 + W_2 \supset V$ este asigurată de descompunerea

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{=f_1(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{=f_2(x)}, \quad \forall x \in (-1,1),$$

iar $f_1 \in W_1, f_2 \in W_2$ **(2 pt.)** .

c) În particular, pentru funcţia exponenţială avem:
$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{ch}x + \text{sh}x, \text{ch} \in W_1, \text{sh} \in W_2, \forall x \in (-1,1),$ **(2 pt.)** ; **Total: 10pt.**.

4. a) Evident $P_2 = L(\{1, t, t^2\})$, deoarece $\forall p \in P_2$, acesta se scrie în mod unic

$$p(t) = a + bt + ct^2, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Fie $p \in L(\{1+t, t, 1-t^2\})$. Atunci $p(t) = \alpha(1+t) + \beta t + \gamma(1-t^2), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Rezultă $p(t) = (\alpha+\gamma) + (\alpha+\beta)t + (-\gamma)t^2$, deci $p \in L(\{1, t, t^2\})$.
Demonstrăm incluziunea inversă. Fie $q = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \in L(\{1, t, t^2\})$, $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$; atunci q se rescrie $q = a(1+t) + bt + c(1-t^2)$. Din identificarea coeficienţilor lui $1, t, t^2$ rezultă $a = \alpha + \gamma, b = -\alpha + \beta - \gamma, c = -\gamma$, deci $q = (\gamma + \alpha)(1+t) + (-\alpha + \beta - \gamma)t + (-\gamma)(1-t^2)$. Rezultă $q \in L(\{1+t, t, 1-t^2\})$.

b) Fie $p \in L(\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\})$. Atunci $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha_n \frac{x^n}{n!}$ şi ţinând cont de faptul că $a \neq 1$ obţinem

$$p = \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1 a + \frac{\alpha_2}{2!} a + \cdots + \frac{\alpha_n}{n!} a}{1-a}\right)(1-a) + \alpha_1(x-a) + \frac{\alpha_2}{2!}(x^2 - a) + \cdots + \frac{\alpha_n}{n!}(x^n - a),$$

deci $p \in L(\{1-a, x-a, x^2-a, \ldots, x^n - a\})$.
Demonstrăm incluziunea inversă: fie $q \in L(\{1-a, x-a, x^2-a, \ldots, x^n-a\})$. Atunci $q = \beta_0(1-a) + \beta_1(x-a) + \beta_2(x^2-a) + \cdots + \beta_n(x^n - a)$, de unde rezultă

$$q = [\beta_0(1-a) - a(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)] + \beta_1 x + 2!\beta_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + n!\beta_n \frac{x^n}{n!}$$

şi deci $q \in L(\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\})$.

1.5 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Fie mulţimea $\mathbb{R}^3$ pe care definim operaţiile:

$$\begin{aligned} &\text{a) } x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3; \\ &\text{b) } kx = (kx_1, 0, kx_3), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^3; \\ &\text{c) } kx = (kx_1, kx_2, kx_3), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Formează $\mathbb{R}^3$ un spaţiu vectorial real faţă de operaţiile a) şi b)? Dar faţă de operaţiile a) şi c)?

2. Să se arate că mulţimea tuturor şirurilor convergente cu elemente din $K = \mathbb{C}$ sau $K = \mathbb{R}$, formează un spaţiu vectorial peste K în raport cu adunarea a două şiruri şi înmulţirea dintre un număr şi un şir.

3. Să se stabilească dacă mulţimea tuturor funcţiilor reale de clasă C^k pe $U \subset \mathbb{R}^n$ este un spaţiu vectorial real în raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea dintre un număr şi o funcţie.

4. Se cere acelaşi lucru pentru mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$.

5. Fie V un spaţiu vectorial real. Pe $V \times V$ definim operaţiile:

$$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y);$$
$$(a + ib)(u, v) = (au - bv, bu + av), \quad a + ib \in \mathbb{C}.$$

Să se arate că $V \times V$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$ (acest spaţiu se numeşte *complexificatul* lui V şi îl notăm cu ${}^{C}V$).

6. Să se stabilească dacă mulţimile:

$$A = \left\{ p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, \exists q \in \mathbb{R}_n[X],\ p(x) = q(x+1) - q(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \right\};$$
$$B = \left\{ p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p(x) = p(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \right\},$$

sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult n.

MA.2.Dependenţă liniară. Bază, dimensiune

Cuvinte cheie: independenţă liniară, dependenţă liniară, acoperire liniară, bază şi dimensiune, coordonatele unui vector relativ la o bază, sistem de coordonate, matrice de schimbare a bazei, matrice asociată unei familii de vectori.

2.1 Dependenţă şi independenţă liniară

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K şi S o submulţime de elemente din V. Zeroul din V se notează cu 0. Ne interesează unicitatea scrierii vectorului prin combinaţii liniare cu elemente din S.

Definiţia 13. Mulţimea S se numeşte ***liniar dependentă*** dacă există o submulţime finită de elemente distincte din S, să zicem $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, astfel încât ecuaţia $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$, în necunoscuta $(k_1, \dots, k_p) \in K^p$ are o soluţie nebanală.

Mulţimea S spunem că este ***liniar independentă*** dacă nu este liniar dependentă, adică dacă pentru fiecare submulţime finită $\{v_1, \dots, v_p\} \subset S$ ecuaţia $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$ în necunoscuta $(k_1, \dots, k_p) \in K^p$ are numai soluţia banală $(0, \dots, 0)$.

Facem observaţia că mulţimea S poate fi o mulţime finită sau infinită. De asemenea, subliniem şi faptul că deşi liniar dependenţa şi liniar independenţa sunt proprietăţi specifice unor mulţimi de vectori, adeseori se vorbeşte direct despre *vectori liniar dependenţi*, respectiv *vectori liniar independenţi.*

Exemple:

1) Mulţimea $\{v\}$, $v \in V \setminus \{0\}$, este liniar independentă, iar mulţimea $\{0\}$ este liniar dependentă.

2) Dacă $0 \in S$, atunci mulţimea S este liniar dependentă. Dacă în S există un vector care se poate exprima ca un multiplu scalar al unui alt vector, atunci S este liniar dependentă.

3) Fie $v_1(t) = e^t$, $v_2(t) = e^{-t}$ şi $v_3(t) = \operatorname{sh} t$. Deoarece $e^t - e^{-t} - 2\operatorname{sh} t = 0$, mulţimea $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar dependentă.

Teorema 14. *Fie $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ o mulţime liniar independentă şi $L(S)$* ***acoperirea liniară*** *a lui S. Orice mulţime de $p+1$ elemente din $L(S)$ este liniar dependentă.*

Demonstraţie. Fie $w_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} v_j$, $i = \overline{1, p+1}$, vectori arbitrari care aparţin lui $L(S)$. Relaţia $k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots + k_{p+1} w_{p+1} = 0$ se transcrie $\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p+1} k_i a_{ij} \right) v_j = 0$ şi întrucât v_j, cu $j = \overline{1, p}$ sunt liniar independenţi, obţinem

$$k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \cdots + k_{p+1}a_{p+1j} = 0, \quad j = \overline{1,p}.$$

Acest sistem liniar omogen cu p ecuaţii şi $p+1$ necunoscute k_i, $i = \overline{1,p+1}$, admite şi soluţii nebanale. Prin urmare, cei $p+1$ vectori w_i sunt liniar dependenţi. □

2.2 Bază şi dimensiune

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K. Spaţiul vectorial V este întotdeauna generat de o submulţime a sa.

Definiţia 15. O mulţime $\mathcal{B}$ de vectori din V se numeşte ***bază*** pentru V dacă $\mathcal{B}$ este liniar independentă şi generează pe V.

Utilizând axioma alegerii din teoria mulţimilor, se poate demonstra că orice spaţiu vectorial diferit de spaţiul nul $\{0\}$ admite o bază.

Spaţiul vectorial V se numeşte *finit dimensional* dacă are o bază finită sau dacă $V = \{0\}$. În caz contrar, V se numeşte *infinit dimensional*.

Teorema 16. *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional. Oricare două baze ale lui V au acelaşi număr de elemente.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ două baze ale lui V. Fie n numărul elementelor din $\mathcal{B}$ şi n' numărul elementelor din $\mathcal{B}'$. Deoarece $\mathcal{B}$ este liniar independentă, teorema 14 (orice mulţime formată din $n+1$ vectori este liniar dependentă) implică $n' \leq n$. Acelaşi raţionament pentru mulţimea $\mathcal{B}$ conduce la $n \leq n'$, deci $n = n'$. □

Numărul

$$\dim V = \begin{cases} n & \text{dacă } V \text{ are o bază formată din } n \text{ elemente} \\ 0 & \text{dacă } V = \{0\} \end{cases}$$

se numeşte ***dimensiunea*** lui V. Un spaţiu vectorial cu dimensiunea n se numeşte n-*dimensional* şi se notează cu V_n.

Exemple:

1) Fie K^n spaţiul vectorial aritmetic. Vectorii

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

determină o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Într-adevăr, $\mathcal{B}$ este liniar independentă: relaţia $k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = 0$ este echivalentă cu $(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (0,0,\ldots,0)$, adică $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Pe de altă parte $\forall x \in K^n$, avem

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

deci $\mathcal{B}$ generează pe V.

2) Spaţiul vectorial $K_n[X]$ al tuturor polinoamelor de grad $\leq n$ are dimensiunea $n+1$. Într-adevăr, observăm că $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ este liniar independentă deoarece identitatea

$$k_0 + k_1X + k_2X^2 + \cdots + k_nX^n = 0,$$

implică $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ şi orice polinom de grad $\leq n$ este o combinaţie liniară finită de elemente din $\mathcal{B}$.

3) Spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ al matricelor dreptunghiulare are dimensiunea mn. O bază este mulţimea $\mathcal{B} = \{E_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$, unde E_{ij} este matricea care are elementul 1 la intersecţia liniei i cu coloana j, celelalte elemente fiind nule.

4) Fie V un spaţiu vectorial complex. Spaţiul vectorial real ${}^{R}V$ care coincide cu V ca grup aditiv şi în care înmulţirea cu un număr real este definită ca în V se numeşte *trecerea în real a lui* V.

În particular, prin trecerea în real a spaţiului n-dimensional $\mathbb{C}^n$ se obţine spaţiul real ${}^{R}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, de dimensiune $2n$. Baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n\}$ din ${}^{R}\mathbb{C}^n$ provine din trecerea în real a bazei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ din $\mathbb{C}^n$.

5) Fie $K[X]$ spaţiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Polinoamele $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$ constituie o bază a lui $K[X]$, deci $\dim K[X] = \infty$.

Teorema 17. *Orice spaţiu vectorial n-dimensional V_n are următoarele* **proprietăţi***:*

1) *o mulţime liniar independentă din V_n este o submulţime a unei baze din V_n;*

2) *orice mulţime formată din n vectori liniar independenţi, este o bază a lui V_n.*

Demonstraţie. 1) Dacă $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este o mulţime liniar independentă din V_n, atunci $L(S) = V_n$, deci S este o bază sau $L(S)$ este o submulţime proprie a lui V_n. În al doilea caz există $v \in V_n \setminus L(S)$ astfel încât mulţimea $S \cup \{v\}$ este liniar independentă.

Dacă $L(S) = V$, atunci S' este o bază ce conţine pe S, iar dacă $L(S')$ este o submulţime proprie a lui V_n, atunci se reia raţionamentul făcut pentru S. După un număr finit de paşi ajungem la o bază întrucât dimensiunea spaţiului este finită.

În concluzie, mulţimea S poate fi prelungită sau completată până la o bază a spaţiului vectorial V_n.

2) Fie S o submulţime liniar independentă care conţine n vectori din V_n. Prima parte a teoremei arată că S este o submulţime a unei baze $\mathcal{B}$ a lui V_n, iar teorema 16 arată că baza $\mathcal{B}$ trebuie să aibă n elemente, deci $S = \mathcal{B}$. □

Spaţiile vectoriale finit dimensionale beneficiază de pe urma prezenţei bazelor întrucât în acest caz există posibilitatea introducerii şi utilizării coordonatelor fără a se ieşi din contextul combinaţiilor liniare finite specifice algebrei vectoriale. Precizăm însă că explicitarea teoriei coordonatelor impune în mod necesar ordonarea elementelor unei baze şi de aceea, în cele ce urmează, printr-o *bază* într-un spaţiu vectorial finit dimensional, se va înţelege *o mulţime finită, ordonată, liniar independentă*, care generează spaţiul respectiv.

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional şi fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spaţiu.

Teorema 18. *Orice vector $x \in V_n$ admite o exprimare unică de forma*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

numită descompunerea lui x după vectorii bazei.

Demonstraţie. Deoarece $V = L(\mathcal{B})$, orice vector $x \in V$ poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectorii bazei, adică $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Presupunem că vectorul x ar admite şi o altă exprimare $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i' e_i$. Prin scădere obţinem $0 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i')e_i$. Întrucât vectorii e_i sunt liniar independenţi, rezultă $x_i - x_i' = 0$, $i = \overline{1,n}$ sau $x_i = x_i'$, cu $i = \overline{1,n}$. □

Numerele x_i se numesc ***coordonatele vectorului*** x în raport cu baza $\mathcal{B}$, iar bijecţia

$$f\colon V_n \to K^n,\ f(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se numeşte ***sistem de coordonate*** pe V_n.

Uneori vom prefera identificările $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. În acest caz

$$kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) \quad \text{şi} \quad x + y = (x_1 + y_1, x_2, +y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Teorema 19. *Dacă W şi U sunt două subspaţii ale spaţiului vectorial V, atunci*

$$\dim W + \dim U = \dim(W + U) + \dim(W \cap U).$$

Verificăm valabilitatea acestei teoreme pentru subspaţiile date în exemplul teoremei 10. Dimensiunea subspaţiului $W + U$ coincide cu rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -10 & 15 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde obţinem $\dim(W + U) = 2$.

Un vector oarecare din subspaţiul $W \cap U$ s-a găsit ca fiind de forma

$$(6\lambda - 8\mu, 30\lambda - 40\mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

astfel încât $\dim(W \cap U) = 1$. Întrucât $\dim W = 1$ şi $\dim U = 2$, deducem că teorema 19 este verificată.

Fie V_n un spaţiu vectorial raportat la baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dacă luăm $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V_n$, atunci

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_1,\ v_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i, \ldots, v_p = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} e_i.$$

Vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_p$ li se ataşează matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix},$$

numită ***matricea asociată familiei de vectori*** $v_1, v_2, \ldots, v_p$ relativ la baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Evident, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sunt identificaţi cu coloanele matricei A. De asemenea, se ştie că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^t A$.

Teorema 20. *Rangul matricei A este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană liniar independenţi.*

Observaţia 21. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n. Mulţimea

$$\mathcal{B}' = \left\{ {e_j}' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i,\ j = \overline{1, n} \right\}$$

este o altă bază a lui V_n dacă şi numai dacă $\det[c_{ij}] \neq 0$.

Schimbarea bazei

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{e_1{}', e_2{}', \dots, e_n{}'\}$ două baze distincte în spaţiul vectorial V_n. Notăm cu $C = [c_{ij}]$ matricea pătratică ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor bazei $\mathcal{B}'$ în raport cu baza $\mathcal{B}$, adică matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, numită şi ***matricea de schimbare a bazei***, unic determinată de egalităţile:

$$e_j{}' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, qquadj = \overline{1,n}.$$

Fie x_i şi $x_i{}'$, cu $i = \overline{1,n}$, coordonatele aceluiaşi vector x în raport cu baza $\mathcal{B}$, respectiv $\mathcal{B}'$. Prin urmare $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, respectiv $x = \sum_{j=1}^{n} x_j{}' e_j{}'$, care este echivalentă cu

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j{}' \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j{}' \right) e_i$$

şi rezultă $x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j{}'$, cu $i = \overline{1,n}$. Aceste relaţii descriu *transformarea coordonatelor* la o schimabre a bazei. Matriceal se scrie $X = CX'$, unde X şi X' sunt matricele coloană cu $X = {}^t[x_1, x_2, \dots, x_n]$, respectiv $X' = {}^t[x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}']$.

Spaţii vectoriale izomorfe

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste câmpul K. O aplicaţie $\mathcal{T} \colon V \to W$ care satisface condiţiile

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}(x+y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y), \quad \forall x, y \in V; \\ &\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x), \quad \forall x \in V, \ \forall k \in K, \end{aligned}$$

se numeşte *transformare liniară* sau *morfism de spaţii vectoriale.*

Definiţia 22. O transformare liniară bijectivă se numeşte izomorfism.

Un sistem de coordonate pe V_n este un izomorfism canonic (natural) între V_n şi K^n.

Teorema 23. *Două spaţii vectoriale V şi W peste câmpul K, de dimensiuni finite, sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.*

Demonstraţie. Presupunem că V_n şi W_m sunt izomorfe, adică există o transformare liniară bijectivă $\mathcal{T} \colon V_n \to W_m$, cu $\mathcal{T}(0) = 0$. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui V_n. Mulţimea

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{T}(e_1), \mathcal{T}(e_2), \dots, \mathcal{T}(e_n)\} \subset W_m$$

este liniar independentă, deoarece avem $k_1\mathcal{T}(e_1) + k_2\mathcal{T}(e_2) + \cdots + k_n\mathcal{T}(e_n) = 0$, adică $\mathcal{T}(k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n) = \mathcal{T}(0)$, echivalent cu $k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = 0$, de unde obţinem $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

Pe de altă parte, pentru orice $w \in W_m$, există $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in V_n$ astfel încât $\mathcal{T}(v) = w$, de unde rezultă că $w = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathcal{T}(e_i)$, deci $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ generează pe W_m, adică $m = n$.

Reciproc, considerăm V_n şi W_n. Utilizând sistemele de coordonate $f \colon V_n \to K^n$ şi $g \colon W_n \to K^n$, găsim că $\mathcal{T} = g^{-1} \circ f \colon V_n \to W_n$ este un izomorfism. □

2.3 Exerciţii/probleme rezolvate

2.3.1 Enunţuri

1. Verificaţi dacă următorii vectori sunt liniar independenţi. În caz negativ, indicaţi o relaţie de dependenţă liniară.

a) $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$;

b) $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (-1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$;

c) $f_1 =$ch, $f_2 =$sh, $f_3 =$exp $\in C^\infty(\mathbb{R})$;

d) $m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; m_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$;

e) $p_1 = 1 + X, p_2 = 1 - X + X^2, p_3 = 3 + X + X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$;

f) $\{\cos^k(t) | k \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Verificaţi că următoarele submulţimi reprezintă baze în spaţiile vectoriale menţionate:
a) $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;
b) $\{m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, unde

$$(m_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & (i, j) = (k, l) \\ 0, & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}, \forall (i, j), (k, l) \in \overline{1, 2} \times \overline{1, 2};$$

c) $\{1, X, X^2, X^3\} \subset \mathbb{R}_3[X]$.

3. Fie $B_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ baza naturală a spaţiului $\mathbb{R}^3$ şi familiile de vectori:

$$B' = \{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (0, 1, 1), f_3 = (1, 1, 0)\};$$
$$B'' = \{g_1 = (0, 0, 1), g_2 = (0, 1, 1), g_3 = (1, 2, 3)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Arătaţi că B' şi B'' sunt baze în $\mathbb{R}^3$;
b) Aflaţi matricile de schimbare de bază $C_{B_0B'}, C_{B''B_0}, C_{B'B''}$;
c) Aflaţi componentele $[v]_{B''}$ ale vectorului $v \in \mathbb{R}^3$ relativ la baza $B'' \subset \mathbb{R}^3$, ştiind că $[v]_{B'} = (1, 1, 5)$.

4. Se dau subspaţiile

$$U = L(u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 0, 0), u_3 = (0, 1, 1), u_4 = (1, 2, 2)),$$
$$V = \{(x, y, z) | x + y - 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Aflaţi câte o bază în subspaţiile $U, V, U \cap V, U + V$.
b) Formează U şi V sumă directă? Sunt U şi V subspaţii suplementare ?
c) Verificaţi teorema Grassmann: $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$.

5. **a)** Arătaţi că $F = \{p_1 = 1 + X, p_2 = X + X^2, p_3 = 1\}$ este bază în P_2.
b) Aflaţi coordonatele vectorului $p = 1 + 2X + 3X^2 \in P_2$ relativ la baza F a lui P_2.

2.3.2 Soluţii

1. **a)** Fie $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $k_1e_1 + k_2e_2 = 0$. Această relaţie se rescrie $k_1(1, 0) + k_2(0, 1) = (0, 0)$ de unde rezultă $k_1 = k_2 = 0$ şi deci ind $\{e_1, e_2\}$.
b) Fie $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0 \tag{2.1}$$

Obţinem

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\alpha \\ k_2 = 2\alpha \\ k_3 = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

De exemplu, pentru $\alpha = 1 \neq 0$ obţinem prin înlocuire în (2.1) următoarea relaţie de dependenţă liniară:

$$v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2 + v_3.$$

c) Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0 \tag{2.2}$$

Relaţia se rescrie

$$\begin{aligned} &\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \beta \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \gamma e^x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \gamma\right) e^x + \left(\tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2}\right) e^{-x} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = t \\ \beta = t \\ \gamma = -t,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

De exemplu, pentru $t = 1$, obţinem $\alpha = \beta = 1, \gamma = -1$ şi înlocuind în (2.2) rezultă relaţia de dependenţă liniară $f_1 + f_2 - f_3 = 0 \Leftrightarrow f_3 = f_1 + f_2$.

d) Având în vedere că $m_3 = 0$, rezultă că cele 3 matrici sunt liniar dependente: este suficient să luăm $k_1 = k_2 = 0$ şi $k_3 = 1 \neq 0$ şi avem relaţia de dependenţă liniară

$$k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3 = 0.$$

Observaţie. În general, orice mulţime de vectori care conţine vectorul nul *este* liniar dependentă.

e) Fie $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 = 0. \tag{2.3}$$

Această relaţie se rescrie

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2t \\ k_2 = t \\ k_3 = -t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De exemplu, pentru $t = 1$, obţinem $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = -1$ şi înlocuind în (2.3) rezultă relaţia de dependenţă liniară:

$$2p_1 + p_2 - p_3 = 0 \Leftrightarrow p_3 = 2p_1 + p_2.$$

f) Este suficient să arătăm că orice submulţime finită a mulţimii date este liniar independentă. Demonstrăm acest lucru pentru submulţimea $\{1, \cos t, \cos^2 t, \ldots, \cos^n t\}$, demonstraţia pentru o submulţime arbitrară de forma $\{\cos^{k_1} t, \ldots, \cos^{k_n} t\}, 0 \leq k_1 < \cdots < k_n, n \geq 1$ decurgând analog. Fie $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$k_0 + k_1 \cos t + k_2 \cos^2 t + \ldots + k_n \cos^n t = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alegem $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $\cos t_1, \cos t_2, \ldots, \cos t_{n+1}$ să fie distincte două câte două, de exemplu $t_k = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^k}$, $k = \overline{1, n+1}$, $(0 < t_{n+1} < t_n < \cdots < t_1 = \frac{\pi}{6})$.

Obţinem sistemul liniar omogen cu $n+1$ ecuaţii şi $n+1$ necunoscute $(k_0, \ldots, k_n)$:

$$\begin{cases} k_0 + k_1 \cos t_1 + k_2 \cos^2 t_1 + \ldots + k_n \cos^n t_1 = 0 \\ k_0 + k_1 \cos t_2 + k_2 \cos^2 t_2 + \ldots + k_n \cos^n t_2 = 0 \\ \ldots \\ k_0 + k_1 \cos t_{n+1} + k_2 \cos^2 t_{n+1} + \ldots + k_n \cos^n t_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Determinantul matricii coeficienţilor este de tip Vandermonde,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos t_1 & \cos^2 t_1 & \ldots & \cos^n t_1 \\ 1 & \cos t_2 & \cos^2 t_2 & \ldots & \cos^n t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos t_{n+1} & \cos^2 t_{n+1} & \ldots & \cos^n t_{n+1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i < j \\ i,j = \overline{1, n+1}}} (\cos t_i - \cos t_j) \neq 0.$$

Deci sistemul omogen (2.4) are doar soluţia banală $k_0 = k_1 = k_2 = \dots k_n = 0$ şi în concluzie mulţimea $\{1, \cos t, \cos^2 t, \dots, \cos^n t\}$ este liniar independentă.

2. a) Fie $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Vectorii e_1, e_2 sunt liniar independenţi deoarece: $k_1e_1+k_2e_2 = 0 \Leftrightarrow (k_1, k_2) = (0, 0)$, de unde rezult' a $k_1 = k_2 = 0$.

Pe de altă parte, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avem $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in L(\{e_1, e_2\})$, deci $\mathbb{R}^2 \subset L(\{e_1, e_2\})$. Incluziunea inversă este banală, deoarece $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, avem $(x, y) = xe_1 + ye_2 \in L(e_1, e_2)$. Deci $\{e_1, e_2\}$ generează $\mathbb{R}^2$.

Deoarece e_1, e_2 sunt liniar independenţi şi formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$, rezultă că mulţimea $\{e_1, e_2\}$ formează bază în $\mathbb{R}^2$.

b) Mulţimea $\{m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}\}$ reprezintă o bază în $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Într-adevăr, mulţimea este liniar independentă, deoarece:

$$k_1m_{11} + k_2m_{12} + k_3m_{21} + k_4m_{22} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ şi orice matrice din spaţiul $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ este o combinaţie liniară de matricile $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$. De exemplu, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se poate scrie în mod unic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = m_{11} + 5m_{12} + 3m_{21} - m_{22}.$$

c) Spaţiul vectorial $\mathbb{R}_3[X] = \{p \in \mathbb{R}[X] |\, \mathrm{grad}\, p \le 3\}$ al tuturor polinoamelor de grad cel mult 3, are dimensiunea $3 + 1 = 4$. Într-adevăr, observăm că familia de polinoame $\{1 = X^0, X^1, X^2, X^3\}$ este liniar independentă, deoarece

$$k_0 + k_1X + k_2X^2 + k_3X^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

şi orice polinom de grad mai mic sau egal cu 3 este o combinaţie liniară finită de monoamele mulţimii $\{1, X, X^2, X^3\}$. De exemplu, polinomul $p = 3 + X + 5X^3$ se scrie în mod unic:

$$p = 3 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 5 \cdot X^3.$$

3. a) Dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}^3$ este 3, iar familia B' are 3 vectori, deci este suficient să demonstrăm că vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi (atunci ei vor forma o bază a lui $\mathbb{R}^3$). Dar $\det[f_1, f_2, f_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci avem $ind\{f_1, f_2, f_3\}$. În concluzie B' este o bază în spaţiul $\mathbb{R}^3$. Analog se demonstrează că B'' formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Matricea de trecere $C_{B_0B'}$ de la baza canonică B_0 la baza $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ are pe coloane coeficienţii vectorilor f_1, f_2, f_3 relativ la B_0.

Avem $f_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 = [f_1]_{B_0} = (1, 1, 1)^t$; procedând analog pentru f_2 şi f_3, obţinem:

$$C_{B_0B'} = [f_1, f_2, f_3]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere $C_{B''B_0}$ de la baza $B'' = \{g_1, g_2, g_3\}$ la baza $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ are pe coloane coeficienţii vectorilor e_1, e_2, e_3 relativ la B''. Determinăm matricea $C_{B''B_0}$. Exprimăm e_1 relativ la baza B'',

$$e_1 = \lambda_1g_1 + \lambda_2g_2 + \lambda_3g_3$$

şi obţinem sistemul:

$$\begin{cases} \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

a cărui soluţie este $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = 1$, deci $[e_1]_{B''} = (-1, -2, 1)^t$.

Analog obţinem componentele lui e_2 în baza B'',

$$e_2 = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \mu_3 g_3 \Leftrightarrow \mu_1 = -1; \mu_2 = 1; \mu_3 = 0, \quad [e_2]_{B''} = (-1, 1, 0)^{\,t},$$

iar pentru e_3,

$$e_3 = \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3 \Leftrightarrow \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 0; \gamma_3 = 0, \quad [e_3]_{B''} = (1, 0, 0)^{\,t}.$$

Aşezând componentele vectorilor bazei B_0 relativ la B'' pe coloane, obţinem matricea de trecere de la B'' la B_0,

$$C_{B''B_0} = [e_1, e_2, e_3]_{B''} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Altfel. În general, avem

$$\left\{ \begin{array}{l} [v]_{B_1} = C_{B_1B_2}[v]_{B_2} \Rightarrow [v]_{B_2} = C^{-1}_{B_1B_2}[v]_{B_1} \\ [v]_{B_2} = C_{B_2B_1}[v]_{B_1} \end{array} \right. \Rightarrow C_{B_2B_1} = C^{-1}_{B_1B_2},$$

deci în cazul nostru obţinem $C_{B''B_0} = C^{-1}_{B_0B''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Matricea de trecere $C_{B'B''}$ de la baza $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ la baza $B'' = \{g_1, g_2, g_3\}$ are pe coloane coeficienţii vectorilor g_1, g_2, g_3 relativ la B'.

Determinăm matricea $C_{B'B''}$. Exprimăm g_1 relativ la baza B'.

$$g_1 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$

şi obţinem sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \end{array} \right.$$

a cărui soluţie soluţie este $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = -1$, deci $[g_1]_{B'} = (1, 0, -1)^{\,t}$.

Analog obţinem componentele noi ale celorlalţi doi vectori

$$[g_2]_{B'} = (0, 1, 0)^{\,t}, \quad [g_3]_{B'} = (2, 1, -1)^{\,t}.$$

Aşezând componentele vectorilor bazei B'' relativ la B' pe coloane, obţinem matricea de trecere de la B' la B'',

$$C_{B'B''} = [g_1, g_2, g_3]_{B'=\{f_1,f_2,f_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Altfel. În general, avem

$$\left\{ \begin{array}{l} [v]_{B_1} = C_{B_1B_2}[v]_{B_2} = C_{B_1B_2}(C_{B_2B_3}[v]_{B_3}) \\ [v]_{B_1} = C_{B_1B_3}[v]_{B_3} \end{array} \right. \Rightarrow C_{B_1B_3} = C_{B_1B_2}C_{B_2B_3},$$

deci în cazul nostru obţinem

$$C_{B'B''} = C_{B'B_0}C_{B_0B''} = C^{-1}_{B_0B'}C_{B_0B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Din formula $X = CX'$ pentru $X = [v]_{B''}$, $X' = [v]_{B'}$, unde C este matricea $C_{B''B'}$ de trecere de la baza B'' la baza B', rezultă $[v]_{B''} = C_{B''B'}[v]_{B'}$, deci

$$[v]_{B''} = C^{-1}_{B'B''}[v]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. **Din oficiu: 1pt.** **a)** Pentru a afla o bază în subspaţiul U este suficient să găsim o familie maximală de vectori liniar independenţi din sistemul dat de generatori (observăm că în mod necesar card$B \leq 3 = \dim \mathbb{R}^3$). Pentru aceasta, calculăm rangul matricii formate din componentele vectorilor u_1, u_2, u_3 şi u_4 relativ la baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ **(1 pt.)** . Obţinem succesiv:

$$u_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 = [u_1]_{B_0} = (1, 1, 1)^t \quad \textbf{(1 pt.)} .$$

Procedând analog pentru u_2, u_3 şi u_4, obţinem:

$$\text{rang}\,[u_1, u_2, u_3, u_4]_{B_0} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

deoarece pe coloanele 3, 4 se formează un minor maximal nenul **(1 pt.)** .

Rezultă $ind\{u_3, u_4\}$ şi $u_1, u_2 \in L(u_3, u_4)$, deci $U = L(u_1, u_2, u_3, u_4) = L(u_3, u_4)$ **(1 pt.)** . Astfel vectorii u_3, u_4 formează şi un sistem de generatori liniar independenţi pentru U **(1 pt.)** . Deci o bază a subspaţiului U este $B_U = \{u_3, u_4\}$ **(1 pt.)** .

Pentru a găsi o bază în subspaţiul V, observăm că notând $y = t, z = s$, ecuaţia $x + y - 2z = 0$ are soluţiile $(x, y, z) = (-t + 2s, t, s) = t(-1, 1, 0) + s(2, 0, 1)$. Deci orice vector $(x, y, z) \in V$ se poate scrie:

$$v = (x, y, z) = (-t + 2s, t, s) = t\underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + s\underbrace{(2, 0, 1)}_{v_2} \in L(v_1, v_2), \quad \textbf{(1 pt.)} .$$

Rezultă $V = L(v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1))$ **(1 pt.)** .

Pe de altă parte, vectorii v_1, v_2 sunt liniar independenţi, deoarece:

$$k_1v_1 + k_2v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 = 0,\ k_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0, \quad \textbf{(1 pt.)} \quad \textbf{Total: 10pt.}$$

Altfel. Avem $\text{rang}[v_1, v_2] = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, deci $ind\{v_1, v_2\}$. În concluzie, $B_V = \{v_1, v_2\}$ formează o bază în subspaţiul V.

Aflăm o bază pentru $U \cap V$. Avem $v \in V \cap U \Leftrightarrow \exists a, b, m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$v = a(-1, 1, 0) + b(2, 0, 1) = m(0, 1, 1) + n(1, 2, 2). \tag{2.5}$$

Obţinem astfel sistemul în necunoscutele a şi b:

$$\begin{cases} -a + 2b = n \\ a = m + 2n \\ b = m + 2n, \end{cases}$$

care este compatibil (conform teoremei Rouche) doar dacă:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & n \\ 1 & 0 & m + 2n \\ 0 & 1 & m + 2n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m + n = 0 \Leftrightarrow m = -n.$$

Deci folosind relaţia (2.5) rezultă că $v \in U \cap V \Leftrightarrow v = -n(0, 1, 1) + n(1, 2, 2) = n(1, 1, 1), \forall n \in \mathbb{R}$ şi prin urmare $U \cap V = L(v_0)$, unde $v_0 = (1, 1, 1)$. Cum $v_0 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, avem $ind\{v_0\}$, deci o bază a subspaţiului $U \cap V$ este $B_{U \cap V} = \{v_0 = (1, 1, 1)\}$.

Pentru a găsi o bază în $U + V$, căutăm o familie maximală de vectori liniar independenţi din $B_U \cup B_V$, deoarece $U + V = L(B_U) + L(B_V) = L(B_U \cup B_V)$. Pentru aceasta calculăm rangul matricei formate din componentele vectorilor u_3, u_4, v_1, v_2 relativ la baza canonică,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Coloanele formate cu vectorii u_3, v_1, v_2 formează un minor nenul, deci $u_4 \in L(u_3, v_1, v_2)$ şi $ind\{u_3, v_1, v_2\}$. Cei trei vectori liniar independenţi determină o bază a lui $U + V$, $B_{U+V} = \{u_3, v_1, v_2\}$ şi deci $\dim(U + V) = 3$.

Se observă că $U+V\subset\mathbb{R}^3$ şi spaţiile $U+V$ şi $\mathbb{R}^3$ au aceeaşi dimensiune, deci $U+V=\mathbb{R}^3$. Putem astfel alege echivalent pentru $U+V$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$, $B'_{U+V}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

b) Deoarece o bază în $U\cap V$ este $B_{U\cap V}=\{(1,1,1)\}$, rezultă $U\cap V\neq\{0\}$. În concluzie, U şi V nu formează sumă directă şi deci nu sunt suplementare.

c) Deoarece bazele subspaţiilor U,V au câte doi vectori, iar bazele subspaţiilor $U\cap V$ şi $U+V$ au 1, respectiv 3 vectori, rezultă $\dim U=\dim V=2$, $\dim(U\cap V)=1$, $\dim(U+V)=3$, deci teorema Grassmann care afirmă că are loc egalitatea

$$\dim U+\dim V=\dim(U+V)+\dim(U\cap V)$$

este verificată $(2+2=3+1)$.

5. **a)** Dimensiunea spaţiului P_2 este 3, deci este suficient să demonstrăm că vectorii p_1,p_2,p_3 sunt liniar independenţi (atunci ei vor forma o bază).

Fie k_1,k_2,k_3 astfel încât $k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3=0$. Rezultă:

$$k_2X^2+(k_1+k_2)X+(k_1+k_3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}k_2=0\\k_1+k_2=0\\k_1+k_3=0,\end{cases}$$

sistem ce are soluţia $k_1=k_2=k_3=0$, deci avem $ind\{p_1,p_2,p_3\}$.

Altfel. Calculăm determinantul matricii formate din componentele vectorilor p_1,p_2,p_3 relativ la baza canonică $\{1,X,X^2\}$ aşezate pe coloane,

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq0.$$

În concluzie avem $ind\{p_1,p_2,p_3\}$.

b) Pentru a găsi componentele vectorului p în baza $F=\{p_1,p_2,p_3\}$, căutăm scalarii $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ astfel încât:

$$p=\alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3.$$

Înlocuind în relaţie vectorii p_1,p_2,p_3, obţinem:

$$1+2X+3X^2=(\alpha+\gamma)+(\alpha+\beta)X+\beta X^2$$

sau echivalent:

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=1\\\alpha+\beta=2\\\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=3\\\gamma=2,\end{cases}$$

deci componentele căutate sunt $[p]_F=(-1,3,2)^{\,t}$.

Altfel. Notând $B=\{1,X,X^2\}$ baza canonică a spaţiului P_2, folosim relaţia $X=CX'$, unde $X=[p]_B$, $X'=[p]_F=(\alpha,\beta,\gamma)^{\,t}$, $C=C_{BF}$ obţinem

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=3\\\alpha+\beta=2\\\alpha+\gamma=1\end{cases},\ \text{deci } [p]_F=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}.$$

2.4 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Să se cerceteze dacă vectorul $v=(1,-2,0,3)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $u_1=(3,9,-4,-2)$, $u_2=(2,3,0,-1)$ şi $u_3=(2,-1,2,1)$.

2. Fiind date subspaţiile W şi U generate de vectorii $w_1=(2,3,11,5)$, $w_2=(1,1,5,2)$, $w_3=(0,1,1,1)$, respectiv $u_1=(2,1,3,2)$, $u_2=(1,1,3,4)$ şi $u_3=(5,2,6,2)$, să se arate că aceste subspaţii sunt suplimentare şi să găsească descompunerea vectorului $v=(2,0,0,3)$ pe aceste subspaţii.

3. Fie $f_1,f_2,\dots,f_n\in C^\infty(\mathbb{R})$. Determinantul $w=\det\left[f_j^{(i-1)}\right]$, cu $i,j=\overline{1,n}$ se numeşte *wronskianul* funcţiilor $f_1,f_2,\dots,f_n$. Să se arate că:

a) dacă mulţimea $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este liniar dependentă, atunci wronskianul este nul; reciproca nu este adevărată;

b) dacă wronskianul este nenul, atunci funcţiile sunt liniar independente. Să se stabilească care dintre următoarele submulţimi:

$$\{1, \cos 2x, \cos^2 x\}, \quad \{e^x, e^{-x}, \mathrm{ch}x\}, \quad \{e^x, xe^x, \ldots, x^{n-1}e^x\},$$

ale lui $C^\infty(\mathbb{R})$ sunt liniar dependente, respectiv liniar independente.

4. Fie $K[X]$ spaţiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Să se arate că

$$\{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$$

este o mulţime liniar independentă.

5. Să se găsească o bază a sumei şi o bază a intersecţiei subspaţiilor vectoriale W şi U generate de vectorii $w_1 = (1, 2, 1)$, $w_2 = (2, 3, 1)$, $w_3 = (3, 1, 1)$, respectiv $u_1 = (0, 4, 1)$, $u_2 = (1, 0, -2)$ şi $u_3 = (1, 0, 3)$.

6. Să se stabilească dimensiunea subspaţiului $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, unde

$$\mathcal{A} = \left\{ A \,|\, A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ u & v & 0 \end{pmatrix}, \ y = u - 3v, \ x, y, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

şi să se găsească o bază.

7. Să se determine coordonatele vectorului $x = (0, 0, 1, 1)$ în baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, cu $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, 3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$ şi $e_4 = (0, 1, -1, -1)$.

8. Fie V_5 spaţiul vectorial real al polinoamelor în $\cos x$ care au cel mult gradul 4. Să se scrie transformarea de coordonate care permite trecerea de la baza $\mathcal{B} = \left\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\right\}$ la baza $\mathcal{B}' = \left\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\right\}$ şi să se găsească inversa acestei transformări.

MA.3.Spaţii vectoriale euclidiene

Cuvinte cheie: spaţiu vectorial euclidian, produs scalar, norma euclidiană, versor, distanţă, inegalitatea Cauchy-Schwartz, unghiul format de doi vectori, ortogonalitate, familie ortogonală, familie ortonormată, bază ortogonală, bază ortonormată, subspaţii ortogonale, proiecţie ortogonală.

3.1 Produs scalar

Adăugăm la structura de spaţiu vectorial o nouă noţiune, aceea de produs scalar a doi vectori, cu ajutorul căreia putem defini lungimea unui vector, ortogonalitatea a doi vectori, unghiul dintre doi vectori, etc.

Definiţia 24. Fie V un spaţiu vectorial complex. O funcţie $\langle\,,\,\rangle\colon V \times V \to \mathbb{C}$ care are **proprietăţile**:

$$\begin{aligned}
&\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \quad \text{(simetrie)};\\
&\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle, \quad \text{(aditivitate-distributivitate)};\\
&k\langle v, w\rangle = \langle kv, w\rangle, \quad \text{(omogenitate)};\\
&\langle v, v\rangle \geq 0; \quad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad \text{(pozitivitate)},
\end{aligned}$$

unde $u, v, w \in V$ şi $k \in \mathbb{C}$, se numeşte ***produs scalar*** pe V.

Axiomele precedente au următoarele **consecinţe**:

$$\begin{aligned}
&\langle v, kw\rangle = \bar{k}\langle v, w\rangle;\\
&\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle;\\
&\langle 0, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0, \quad \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Teorema 25. *Dacă spaţiul vectorial complex V este dotat cu un produs scalar, atunci este satisfăcută* ***inegalitatea Cauchy-Schwarz***

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă v şi w sunt liniar dependenţi.

Demonstraţie. Dacă $v = 0$ sau $w = 0$, relaţia este evidentă. Presupunem că vectorii v şi w sunt nenuli. Dacă α este un număr complex arbitrar, atunci

$$0 \leq \langle v - \alpha w, v - \alpha w\rangle = E(\alpha).$$

Pe de altă parte, $E(\alpha) = \langle v, v\rangle - \dfrac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle}$ pentru $\alpha = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$. □

Dacă V este un spaţiu vectorial real, atunci în definiţia precedentă mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se înlocuieşte cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, axioma $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ se înlocuieşte cu $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, consecinţa $\langle v, kw\rangle = \bar{k}\langle v, w\rangle$ devine $\langle v, kw\rangle = k\langle v, w\rangle$, iar inegalitatea Cauchy-Schwarz se scrie $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$.

Definiţia 26. Un spaţiu vectorial (real sau complex) pe care s-a definit un produs scalar se numeşte ***spaţiu vectorial euclidian*** (real sau complex).

Exemple de spaţii vectoriale euclidiene canonice:

1) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doi vectori oarecare din spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^n$. Funcţia reală definită prin $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

2) Analog $\mathbb{C}^n$ este un spaţiu vectorial euclidian în raport cu

$$\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n,$$

unde "bara" înseamnă conjugarea complexă.

3) Spaţiul vectorial real al tuturor funcţiilor cu valori reale, continue pe un interval $[a, b]$, este un spaţiu euclidian real în raport cu aplicaţia definită prin

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

4) Spaţiul vectorial real al şirurilor reale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, cu proprietatea că $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ este convergentă, este un spaţiu euclidian în raport cu

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i.$$

5) Spaţiul vectorial complex al şirurilor complexe $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ cu proprietatea că $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ este convergentă, este un spaţiu euclidian în raport cu

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\bar{y}_i,$$

unde "bara" înseamnă conjugarea complexă.

Teorema 27. *Fie V un spaţiu vectorial euclidian. Funcţia $||\,||: V \to \mathbb{R}_+$, $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, este o normă pe V, adică satisface relaţiile:*

$$\begin{aligned}
&||v|| > 0, \quad v \neq 0, \ ||0|| = 0, && \textit{(pozitivitate)};\\
&||kv|| = |k|\,||v||, && k \textit{ scalar}, \quad \textit{(omogenitate)};\\
&||v + w|| \leq ||v|| + ||w||, && \textit{(inegalitatea Minkowski)}.
\end{aligned}$$

Norma din această teoremă se numeşte ***norma euclidiană***. Egalitatea din inegalitatea triunghiului se realizează dacă şi numai dacă v şi w sunt coliniari şi de acelaşi sens.

Demonstraţie. Presupunem că V este un spaţiu vectorial complex. Inegalitatea $\langle v, v\rangle \geq 0$ implică $||v|| \geq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă v este vectorul nul. De asemenea, pentru $k \in \mathbb{C}$ şi $v \in V$, găsim

$$||kv|| = \sqrt{\langle kv, kv\rangle} = \sqrt{k\bar{k}\langle v, v\rangle} = \sqrt{|k|^2\langle v, v\rangle} = |k|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |k|\,||v||,$$

adică şi a doua proprietate este satisfăcută. Proprietatea a treia se demonstrează ţinând seama de $\langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} = 2\text{Re}(v, w) \leq 2|\langle v, w\rangle|$ şi folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz transcrisă în forma $|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w||$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \langle w, w\rangle \\ &\leq ||v||^2 + 2||v||\,||w|| + ||w||^2 = \big(||v|| + ||w||\big)^2. \end{aligned}$$

□

Primele două proprietăţi ale normei asigură că orice element v din V poate fi scris sub forma polară $v = ||v||e$, unde $||e|| = 1$. Vectorul e cu proprietatea $||e|| = 1$ se numeşte ***versor***. Evident, versorul asociat unui vector nenul este unic: $e = \dfrac{1}{||v||}v$.

Fie V un spaţiu vectorial euclidian real. Pe submulţimea $V \setminus \{0\}$, inegalitatea Cauchy-Schwarz, $|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,|w||$, se transcrie

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||} \leq 1.$$

Această dublă inegalitate justifică următoarea

Definiţia 28. Fie V un spaţiu vectorial euclidian real şi v, w doi vectori nenuli din V. Numărul $\theta \in [0, \pi]$, definit de egalitatea

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||},$$

se numeşte ***unghiul*** dintre v şi w.

Noţiunea de unghi se poate introduce şi pe spaţiile vectoriale complexe, dar până acum are prea puţine aplicaţii practice.

Denumiri. Un spaţiu vectorial dotat cu o normă se numeşte *spaţiu vectorial normat*. Un spaţiu vectorial normat în care norma provine dintr-un produs scalar se numeşte *spaţiu prehilbertian*. Un spaţiu prehilbertian complet (în sensul că orice şir Cauchy de elemente din spaţiu este un şir convergent) se numeşte *spaţiu Hilbert*.

Teorema 29. *Fie V un spaţiu vectorial normat. Funcţia reală definită prin*

$$d(u, v) = ||u - v||$$

este o ***distanţă*** *(metrică) pe V, adică satisface relaţiile:*

$$\begin{aligned} &d(u, v) \geq 0, \quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v, && \textit{(pozitivitate)};\\ &d(u, v) = d(v, u), && \textit{(simetrie)};\\ &d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \quad \forall u, v, w \in V, && \textit{(inegalitatea triunghiului)}. \end{aligned}$$

Demonstraţia este simplă şi o lasăm drept temă pentru cititori.

Dacă norma este euclidiană, atunci distanţa definită cu ajutorul ei se numeşte *distanţă euclidiană*. În general, o mulţime oarecare înzestrată cu o funcţie distanţă (metrică) se numeşte *spaţiu metric*. Teorema 29 arată că orice spaţiu vectorial normat este un spaţiu metric.

Exemplu. Fie P_2 spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale reale de grad cel mult 2 înzestrat cu produsul scalar $\langle\, ,\, \rangle \colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$,

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2, \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

În acest spaţiu se consideră vectorii $p_1(x) = 2 + x + 5x^2$, $p_2(x) = 2 + x - x^2$, $p_3(x) = 4 + x + 5x^2$, $p_4(x) = 3 + 3x + 5x^2$ şi se cere să se găsească un vector p_0 echidistant acestora. Să se calculeze această distanţă.

Soluţie. Fie $p_0(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Coeficienţii c_0, c_1 şi c_2 se găsesc din egalităţile $||p_1 - p_0|| = ||p_2 - p_0|| = ||p_3 - p_0|| = ||p_4 - p_0||$, de unde obţinem $c_0 = 3$, $c_1 = \frac{15}{8}$ şi $c_2 = 2$. Astfel, distanţa cerută este

$$d = ||p_1 - p_0|| = \sqrt{\langle p_1 - p_0, p_1 - p_0\rangle} = \sqrt{(2-3)^2 + 2\left(1 - \frac{15}{8}\right)^2 + (5-2)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{41}{2}}.$$

3.2 Ortogonalitate

Ortogonalitatea este una dintre cele mai importante relaţii dintre vectorii unui spaţiu vectorial euclidian real sau complex. Ea nu se introduce neapărat cu noţiunea de unghi, ci cu noţiunea de produs scalar.

Definiţia 30. Fie V un spaţiu vectorial euclidian. Doi vectori din V se numesc ***ortogonali***, dacă produsul lor scalar este nul. O submulţime $S \subset V$ se numeşte ***familie ortogonală*** dacă vectorii săi sunt ortogonali doi câte doi, adică $\langle v, w\rangle = 0$, $\forall v, w \subset S$, cu $v \neq w$. O mulţime ortogonală se numeşte ***familie ortonormată*** dacă fiecare element al său are norma egală cu unitatea. O bază care are calităţile de mai sus se va numi ***bază ortogonală***, respectiv ***bază ortonormată***. Două subspaţii vectoriale $V_1, V_2 \subset V$ ai căror vectori sunt relativ ortogonali, adică

$$\forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \quad \langle v_1, v_2\rangle = 0,$$

spunem ca sunt ***subspaţii vectoriale ortogonale***.

Teorema 31. *Fie V un spaţiu vectorial euclidian. Orice submulţime ortogonală formată din elemente nenule este liniar independentă. Dacă $\dim V = n$, atunci orice submulţime ortogonală care conţine n elemente nenule este o bază a lui V.*

Demonstraţie. Fie $S \subset V \setminus \{0\}$ o mulţime ortogonală, iar $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_pv_p$ o combinaţie liniară finită de elemente din S. Ipoteza $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_pv_p = 0$ şi produsul scalar cu v_j implică

$$k_1\langle v_1, v_j\rangle + k_2\langle v_2, v_j\rangle + \cdots + k_p\langle v_p, v_j\rangle = 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

Ţinând seama de ortogonalitate, rând pe rând rezultă

$$k_1\langle v_1, v_1\rangle = 0,\ k_2\langle v_2, v_2\rangle = 0, \ldots, k_p\langle v_p, v_p\rangle = 0.$$

Ipoteza $v_j \neq 0$ implică $k_j = 0$, adică mulţimea S este liniar independentă.
Demonstrarea ultimei părţi a teoremei rezultă imediat din teorema 16, proprietatea 2. □

Pe spaţiile vectoriale euclidiene este comod să se lucreze cu baze ortonormate. Evident, baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V_n$ este ortonormată dacă

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Simbolul δ_{ij} se numeşte *simbolul lui Kronecker.*

Exemplu. În spaţiul vectorial $C^0[0, 2\pi]$ al funcţiilor reale, continue pe intervalul $[0, 2\pi]$, pe care definim produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, considerăm următoarea submulţime infinită $S = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ de funcţii trigonometrice, unde

$$f_0(x) = 1, \quad f_{2n-1}(x) = \cos nx, \quad f_{2n}(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Întrucât $\langle f_m, f_n\rangle = 0$, cu $m \neq n$, urmează că S este o mulţime ortogonală. Datorită ortogonalităţii funcţiilor şi faptului că S nu conţine elementul nul al spaţiului $C^0[0, 2\pi]$, urmează că S este liniar independentă. Împărţind fiecare funcţie prin norma sa,

$$||f_0|| = \sqrt{\langle f_0, f_0\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} dx} = \sqrt{2\pi}, \quad ||f_{2n-1}|| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx} = \sqrt{\pi},$$

$$||f_{2n}|| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx} = \sqrt{\pi},$$

obţinem mulţimea ortonormată $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, unde

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \quad \text{şi} \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}.$$

Definiţia 32. Fie V un spaţiu vectorial euclidian şi $w \in V$, cu $w \neq 0$, un vector fixat. Pentru orice alt vector $v \in V$, vectorul $\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$ se numeşte ***proiecţia*** vectorului v pe w, iar numărul $\frac{\langle v, w\rangle}{\sqrt{\langle w, w\rangle}}$ se numeşte mărimea algebrică a proiecţiei lui v pe w.

Teorema 33. *Fie spaţiul vectorial euclidian V_n. Dacă $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază ortogonală a lui V şi $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci $x_i = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$. În particular, dacă $\mathcal{B}$ este o bază ortonormată, atunci $x_i = \langle x, e_i\rangle$.*

Demonstraţie. Orice vector $x \in V_n$ se scrie unic ca o combinaţie liniară de vectorii bazei, adică $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Înmulţim scalar cu vectorul e_i, cu $i = \overline{1, n}$ şi rezultă

$$\langle x, e_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i\rangle = x_i \langle e_i, e_i\rangle,$$

deci $x_i = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$. □

Dacă baza $\{e_i\}$ este ortonormată, atunci $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ şi rezultă $x_i = \langle x, e_i\rangle$. În acest caz, orice vector $x \in V_n$ admite reprezentarea unică $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Coordonatele $x_i = \langle x, e_i\rangle$, $i = \overline{1, n}$, ale vectorului x, sunt proiecţii pe versorii e_i şi se numesc *coordonate euclidiene.*

Teorema 34. *Fie $x \in V_n$ un spaţiu vectorial euclidian complex şi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată. Atunci $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$, unde $x_j = \langle x, e_j\rangle$ şi $y_j = \langle y, e_j\rangle$. În particular, $||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ şi $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. Ţinând seama de proprietăţile produsului scalar, deducem

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \bar{y}_k \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \bar{y}_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j.$$

□

Fie V un spaţiu vectorial euclidian şi S o submulţime a sa.

Definiţia 35. Un element al lui V se numeşte ortogonal lui S dacă este ortogonal pe fiecare element din S. Mulţimea tuturor vectorilor ortogonali lui S se numeşte S ortogonal şi se notează cu $S^{\perp}$.

Se observă că $S^{\perp}$ este un subspaţiu vectorial al lui V, indiferent dacă S este sau nu un subspaţiu al lui V. În cazul când S este un subspaţiu vectorial, subspaţiul vectorial $S^{\perp}$ se numeşte *complementul ortogonal al lui* S.

Teorema 36. *Dacă V este un spaţiu vectorial euclidian şi W_n este un subspaţiu vectorial n-dimensional al lui V, atunci $V = W_n \oplus W_n^{\perp}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui W_n şi $w = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i$ proiecţia lui $v \in V$ pe subspaţiul W_n. Punând $w^{\perp} = v - w$, rezultă

$$\begin{aligned}
&\langle w^{\perp}, w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle = \langle v, \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i\rangle - \left\langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j\rangle e_j \right\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v, e_i\rangle \langle v, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v, e_i\rangle \langle v, e_j\rangle \delta_{ij} = 0,
\end{aligned}$$

deci $w^{\perp} \in W^{\perp}$. Exprimarea unică $v = w + w^{\perp}$ arată că $V = W_n \oplus W_n^{\perp}$. □

Teorema 37. *(Pitagora) Fie W_n un subspaţiu vectorial al spaţiului euclidian $n-$dimensional V şi $W_n^{\perp}$ subspaţiul ortogonal al subspaţiului W_n. Dacă $v \in V$, $w \in W_n$, $w^{\perp} \in W_n^{\perp}$ astfel încât $v = w + w^{\perp}$, atunci este satisfăcută relaţia*

$$||v||^2 = ||w||^2 + ||w^{\perp}||^2.$$

cunoscută sub numele teorema lui Pitagora.

Demonstraţie. Norma din enunţul teoremei este cea indusă de produsul scalar $\langle\ ,\ \rangle$ pe V; adică $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Prin urmare,

$$||v||^2 = \langle v, v\rangle = \langle w + w^{\perp}, w + w^{\perp}\rangle = \langle w, w\rangle + \langle w, w^{\perp}\rangle + \langle w^{\perp}, w\rangle + \langle w^{\perp}, w^{\perp}\rangle = ||w||^2 + ||w^{\perp}||^2.$$

□

3.3 Exerciţii/probleme rezolvate

3.3.1 Enunţuri

1. Sunt următoarele operaţii produse scalare ?

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \alpha x_2y_2,\ \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) $\langle A, B\rangle = Tr(A \cdot \bar{B}^{\,t}),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

c) $\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_2,\ \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$.

2. Arătaţi că următoarele operaţii definesc produse scalare (numite produse scalare canonice) pe spaţiile vectoriale specificate:

a) $V = \mathbb{R}^n,\quad \langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,\ \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, pentru $n = 3$.

b) $V = P_n = \{p \in \mathbb{R}[X] |\ \text{grad}\ p \le n\}, n \ge 1,\quad \langle p, q\rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + \dots + p_nq_n,$
$\forall p = p_0 + p_1X + \dots + p_nX^n,\ q = q_0 + q_1X + \dots + q_nX^n \in P_n$, pentru $n = 2$.

c) $V = P_n,\quad \langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx,\ \forall p, q \in P_n$.

d) $V = \mathcal{C}^0[a, b],\quad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,\ \forall f, g \in \mathcal{C}^0[a, b]$.

e) $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\quad \langle A, B\rangle = Tr(A^{\,t} \cdot B),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, unde $Tr((c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}) = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$, pentru $n = 2$.

f) $V = \mathbb{C}^n,\quad \langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n,\ \forall x = (x_1, x_2, \dots x_n), y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{C}^n$, pentru $n = 2$.

3. Folosind produsele scalare canonice corespunzătoare din exerciţiul precedent, calculaţi $\langle u, v\rangle, ||u||, ||v||, d(u, v), \overline{pr}_v u, \overline{pr}_u v$ şi cu excepţia cazului f), calculaţi unghiul celor doi vectori de mai jos; determinaţi dacă vectorii sunt ortogonali.

a) $u = (1, 2), v = (-2, 1) \in \mathbb{R}^2$;

b) $u = (1, 1, 1), v = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$;

c) $u = 1 + X, v = X^2 \in P_2$, cu produsele scalare de la punctele b) şi c) din problema precedentă;

d) $u = exp,\ v = ch \in \mathcal{C}^0[0, 1]$;

e) $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

f) $u = (i, -i), v = (1 - i, 1 + i) \in \mathbb{C}^2$.

3.3.2 Soluţii

1. **a)** Verificăm proprietăţile produsului scalar. Fie $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2)\ \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Atunci

- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \Rightarrow x_1y_1 + \alpha x_2y_2 = y_1x_1 + \alpha y_2x_2$. Egalitatea este adevărată, ţinând cont de comutativitatea înmulţirii numerelor reale.
- $\langle x, y + z\rangle = x_1(y_1 + z_1) + \alpha x_2(y_2 + z_2) = x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + x_1z_1 + \alpha x_2z_2 = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda x_1y_1 + \alpha\lambda x_2y_2 = \lambda(x_1y_1 + \alpha x_2y_2) = \lambda\langle x, y\rangle$;
- $\langle x, x\rangle \ge 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^2\ \Leftrightarrow\ x_1^2 + \alpha x_2^2 \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2\ \Leftrightarrow\ \alpha \ge 0$, iar
$$\langle x, x\rangle = 0\ \Leftrightarrow\ x_1^2 + \alpha x_2^2 = 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x_1^2 = 0 \\ \alpha x_2^2 = 0 \end{cases}$$
sistem echivalent cu $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ doar dacă $\alpha > 0$.

În concluzie operaţia definită în enunţ este un produs scalar doar pentru $\alpha > 0$.

b) Fie $A, B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Atunci

- $\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{Tr(B \cdot \bar{A}^{\,t})} = Tr(\overline{B \cdot \bar{A}^{\,t}}) = Tr(\bar{B} \cdot A^{\,t}) = Tr((\bar{B} \cdot A^{\,t})^{\,t}) = Tr(A \cdot \bar{B}^{\,t}) = \langle A, B\rangle$. Am folosit proprietatea $TrA = Tr(A^{\,t})$;

- $\langle A, B+C\rangle = Tr(A\cdot(\overline{B+C})^{\,t}) = Tr(A\cdot(\bar{B}^{\,t}+\bar{C}^{\,t})) = Tr(A\cdot\bar{B}^{\,t}) + Tr(A\cdot\bar{C}^{\,t}) = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$;
- $\langle \lambda A, B\rangle = Tr(\lambda A\cdot\bar{B}^{\,t}) = \lambda Tr(A\cdot\bar{B}^{\,t}) = \lambda\langle A,B\rangle$;
- $\begin{cases} \langle A,A\rangle = Tr(A\cdot\bar{A}^{\,t}) = a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2 \geq 0 \\ \langle A,A\rangle = 0 \Leftrightarrow a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0. \end{cases}$

Fie $A = \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{smallmatrix}\right),\ z_i\in\mathbb{C},\ i=\overline{1,4}$. Rezultă

$$\begin{aligned} Tr(A\cdot\bar{A}^{\,t}) &= Tr\left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{smallmatrix}\right) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 + z_4\bar{z}_4 = \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2 \geq 0,\ \ \forall A\in M_{2\times 2}(\mathbb{C}); \\ \langle A,A\rangle = 0 &\Leftrightarrow\ |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\ z_1=z_2=z_3=z_4=0\ \ \Rightarrow\ A = O_{M_{2\times 2}(\mathbb{C}).} \end{aligned}$$

c) Verificăm proprietăţile produsului scalar. Fie $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ \in\mathbb{C}^2$.

$$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}\quad\Leftrightarrow\ x_1\overline{y_2} = \overline{y_1}x_2.$$

Relaţia obţinută *nu* este adevărată pentru orice $x,y\in\mathbb{C}^2$. De exemplu, pentru $x=(0,1)$ şi $y=(1,1)$ obţinem $x_1y_2 = 0\ \neq\ 1 = \overline{y_1x_2}$. În concluzie, operaţia definită în enunţ nu este un produs scalar, deoarece nu este satisfăcută proprietatea de hermiticitate.

2. Trebuie să verificăm, în fiecare caz, proprietăţile produsului scalar.

a) Fie $x=(x_1,x_2,x_3),\ \ y=(y_1,y_2,y_3),\ \ z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$. Atunci au loc relaţiile:

- $\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3 = \langle y,x\rangle$;
- $\langle x,y+z\rangle = x_1(y_1+z_1)+x_2(y_2+z_2)+x_3(y_3+z_3) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 = \langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$;
- $\langle \lambda x,y\rangle = (\lambda x_1)y_1+(\lambda x_2)y_2+(\lambda x_3)y_3 = \lambda(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) = \lambda\langle x,y\rangle$;
- $\langle x,x\rangle = x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^3$;

$$\langle x,x\rangle = 0\ \ \Leftrightarrow\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0\ \Leftrightarrow\ x_1=x_2=x_3=0\ \ \Leftrightarrow\ x = O_{\mathbb{R}^3}$$

b) Fie $p=a_0+a_1x+a_2x^2,\ \ q=b_0+b_1x+b_2x^2,\ \ r=c_0+c_1x+c_2x^2\in P_2$ şi $\lambda\in\mathbb{R}$. Atunci avem

- $\langle p,q\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2 = b_0a_0+b_1a_1+b_2a_2 = \langle q,p\rangle$;
- $\langle p,q+r\rangle = a_0(b_0+c_0)+a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2) = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_0c_0+a_1c_1+a_2c_2 = \langle p,q\rangle+\langle p,r\rangle$;
- $\langle \lambda p,q\rangle = (\lambda a_0)b_0+(\lambda a_1)b_1+(\lambda a_2)b_2 = \lambda(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2) = \lambda\langle p,q\rangle$;
- $\langle p,p\rangle = a_0^2+a_1^2+a_2^2\geq 0,\ \ \forall p\in P_2$;

$$\langle p,p\rangle = 0\ \ \Leftrightarrow\ a_0^2+a_1^2+a_2^2 = 0\ \Leftrightarrow\ a_0=a_1=a_2=0\ \ \Leftrightarrow\ \ p=0.$$

c) Fie p,q,r polinoamele definite la punctul b).

- $\langle p,q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)dx = \langle q,p\rangle$;

- $\langle p, q+r\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(q+r)(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)(q(x)+r(x))dx =$

$$= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx + \int_{-1}^{1} p(x)r(x)dx = \langle p, q\rangle + \langle p, r\rangle;$$

- $\langle \lambda p, q\rangle = \int_{-1}^{1} (\lambda p)(x)q(x)dx = \lambda \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \lambda\langle p, q\rangle;$

- pozitivitate:

$$\begin{aligned}
\langle p, p\rangle &= \int_{-1}^{1} (p(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)^2 dx = \\
&= \int_{-1}^{1} [a_0^2 + (a_1 x)^2 + (a_2 x^2)^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_1 x \cdot a_2 x^2] dx = \\
&= \int_{-1}^{1} [a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + a_2^2 x^4] dx = \\
&= \left(a_0^2 x + a_0 a_1 x^2 + (a_1^2 + 2a_0 a_2)\tfrac{x^3}{3} + a_1 a_2 \tfrac{x^4}{2} + a_2^2 \tfrac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2a_0^2 + \tfrac{2}{3}(a_1^2 + 2a_0 p_2) + \tfrac{2}{5}a_2^2 = 2\left(a_0 + \tfrac{1}{3}a_2\right)^2 + \tfrac{8}{45}a_2^2 + \tfrac{2}{3}a_1^2 \geq 0, \quad \forall p \in P_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle p, p\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \; 2(a_0 + \tfrac{1}{3}a_2)^2 + \tfrac{8}{45}a_2^2 + \tfrac{2}{3}a_1^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + \frac{1}{3}a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \; \Leftrightarrow p = 0_{P_2}.
\end{aligned}$$

d) Prima proprietate a produsului scalar rezultă din comutativitatea înmulţirii numerelor reale, iar celelalte două rezultă din proprietatea de liniaritate a integralei. Proprietatea a patra

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0,$$

are loc deoarece $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \neq \varnothing$ implică $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ (proprietatea de monotonie a operatorului de integrare definită).

Arătăm că $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Dacă $f \equiv 0$, avem $\langle f, f\rangle = \int_a^b 0^2 dx = 0$. Implicaţia $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ este echivalentă cu implicaţia

$$f \not\equiv 0 \Leftrightarrow \langle f, f\rangle \neq 0.$$

Presupunem că $f \neq 0$. Atunci există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) \neq 0$. Fie $\varepsilon = |f(x_0)|/2$. Funcţia fiind continuă, rezultă că există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, deci $|f(x)| \in (\varepsilon/2, 3\varepsilon/2) \Rightarrow f^2(x) > \varepsilon^2/4, \forall x \in V$. Atunci în mulţimea $V \cap [a,b]$ se găseşte un interval $I = [c,d] \neq \varnothing$ astfel încât $f^2(x) > \varepsilon^2/4, \ \forall x \in [c,d]$. Atunci $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x) \geq \int_c^d \frac{\varepsilon^2}{4}dx \geq \frac{\varepsilon^2}{4}(d-c) > 0$, deci $\langle f, f\rangle \neq 0$.

e) Fie $A, B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \ \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\langle A, B\rangle = Tr(A^t \cdot B) = Tr(A^t \cdot B)^t = Tr(B^t \cdot A) = \langle B, A\rangle$. Am folosit proprietatea $TrA = Tr(A^t)$;

- $\langle A, B+C\rangle = Tr(A^t \cdot (B+C)) = Tr(A^t B + A^t C) = Tr(A^t B) + Tr(A^t C) =$

$$= \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$$

- $\langle \lambda A, B\rangle = Tr((\lambda A)^{\,t}\, B) = Tr(\lambda A^{\,t}\cdot B) = \lambda Tr(A^{\,t}\, B) = \lambda\langle A, B\rangle$;
- $\langle A, A\rangle = Tr(A^{\,t}\cdot A)$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, a_{ij}\in\mathbb{R},\ i,j=\overline{1,2}$. Rezultă

$$Tr(A^{\,t}\cdot A) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0, \forall A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R});$$

$$\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \Leftrightarrow A = O_{M_{2\times 2(\mathbb{R})}}.$$

f) Fie $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2,\ \lambda\in\mathbb{C}$. Atunci au loc relaţiile

- $\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 = \overline{\bar{x}_1 y_1} + \overline{\bar{x}_2 y_2} = \overline{y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2} = \overline{\langle y, x\rangle}$;
- $\langle x, y+z\rangle = x_1(\overline{y_1+z_1}) + x_2(\overline{y_2+z_2}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
- $\langle\lambda x, y\rangle = (\lambda x_1)\overline{y_1} + (\lambda x_2)\overline{y_2} = \lambda(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}) = \lambda\langle x, y\rangle$
- $\langle x, x\rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0, \forall x\in\mathbb{C}^2$;

  $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow\ |x_1| = |x_2| = 0\ \Leftrightarrow\ x_1 = x_2 = 0\ \Leftrightarrow\ x = 0_{\mathbb{C}^2}$.

3. Folosind produsele scalare canonice pe spaţiile considerate şi formulele

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle},\ \overline{pr}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v,\ \cos\widehat{(u, v)} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|},$$

obţinem:

a) Pentru $u = (1, 2), v = (-2, 1)\in\mathbb{R}^2$, avem $\langle u, v\rangle = 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 0$ şi

$$\begin{cases} \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5},\ \ \|v\| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}; \\ d(u, v) = ||u - v|| = ||(3, 1)|| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \\ \overline{pr}_v u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v = \dfrac{0}{5}\cdot(-2, 1) = (0, 0),\ \ \overline{pr}_u v = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = \dfrac{0}{5}\cdot(1, 2) = (0, 0); \\ \cos\widehat{(u, v)} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = 0\ \Rightarrow\ \widehat{(u, v)} = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Deoarece $\langle u, v\rangle = 0$ rezultă ortogonalitatea celor doi vectori.

b) Pentru $u = (1, 1, 1), v = (1, -2, 0)\in\mathbb{R}^3$, avem $\langle u, v\rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 0 = -1$ şi

$$\begin{cases} \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3},\ \ ||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}; \\ d(u, v) = ||u - v|| = ||(0, 3, 1)|| = \sqrt{10} \\ \overline{pr}_v u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\cdot v = \dfrac{-1}{5}(1, -2, 0) = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, 0\right), \\ \overline{pr}_u v = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = \dfrac{-1}{3}(1, 1, 1) = (\dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{3}); \\ \cos\widehat{(u, v)} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}\in[-1, 1], \end{cases}$$

de unde rezultă $\widehat{(u, v)} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. Deoarece $\langle u, v\rangle = -1\neq 0$, cei doi vectori nu sunt ortogonali.

c) Folosind produsul scalar canonic pe P_2, $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx\,,\ \forall p,q \in P_2$, obţinem

$$\begin{cases} \langle u,v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx = \int_{-1}^{1}(1+x)x^2dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}; \\ \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(u(x))^2dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(1+x)^2dx} = \sqrt{\frac{8}{3}}; \\ \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(v(x))^2dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1}x^4dx} = \sqrt{\frac{2}{5}}; \\ d(u,v) = ||u-v|| = ||1+x-x^2|| = \sqrt{\int_{-1}^{1}(1+x-x^2)^2dx} = \sqrt{\frac{26}{15}} \\ \overline{pr}_v u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v = \frac{2/3}{2/5}\cdot x^2 = \frac{5}{3}x^2; \\ \overline{pr}_u v = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u = \frac{2/3}{8/3}(1+x) = \frac{1}{4}(1+x), \end{cases}$$

şi $\cos\widehat{(u,v)} = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{2/3}{4/\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \in [-1,1]$, de unde rezultă $\widehat{(u,v)} = \arccos\frac{\sqrt{15}}{6}$. Deoarece $\langle u,v\rangle \neq 0$, cei doi vectori nu sunt ortogonali.

Folosind cel de-al doilea produs scalar canonic pe P_2 , $\langle p,q\rangle = p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2$, unde $p = p_0+p_1x+p_2x^2$, $q = q_0+q_1x+q_2x^2 \in P_2$, obţinem

$$\begin{cases} \langle u,v\rangle = 0,\ \|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \|v\| = \sqrt{1} = 1; \\ d(u,v) = ||u-v|| = ||1+x-x^2|| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3} \\ \overline{pr}_v u = \overline{pr}_u v = 0,\ \cos\widehat{(u,v)} = 0 \in [-1,1], \end{cases}$$

de unde rezultă $\widehat{(u,v)} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, deci $u \perp v$. Se observă că rezultatele obţinute folosind cele două produse scalare diferă, deşi vectorii sunt aceiaşi.

d) **Din oficiu: 1pt.** Calculăm

$$\begin{aligned} \langle u,v\rangle &= \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 e^x\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \left(\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2+1}{4}; \\ \langle u,u\rangle &= \int_0^1 (u(x))^2dx = \int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{\frac{e^2-1}{2}}$ **(2 pt.)** ; de asemenea, avem

$$\begin{aligned} \langle v,v\rangle &= \int_0^1 (v(x))^2dx = \int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx = \frac{1}{4}\int_0^1(e^{2x}+2+e^{-2x})dx = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2}+2x-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2-e^{-2}+4}{8}; \end{aligned}$$

rezultă $\|v\| = \sqrt{\frac{e^2-e^{-2}+4}{8}}$ **(1 pt.)** ;

$$d(u,v) = ||u-v|| = \sqrt{\int_0^1 (e^x - \operatorname{ch} x)^2dx} = \sqrt{\int_0^1 \operatorname{sh}^2 x dx} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}1\operatorname{sh}1-1}{2}}.$$

De asemenea, obţinem

$$\begin{cases} \overline{pr}_v u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v = \frac{\frac{e^2+1}{4}}{\frac{e^2-e^{-2}+4}{8}}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^2+1}{e^2-e^{-2}+4}(e^x+e^{-x}) \ \boxed{\textbf{(2 pt.)}}\ ; \\ \overline{pr}_u v = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u = \frac{\frac{e^2+1}{4}}{\frac{e^2-1}{2}}\cdot e^x = \frac{e^2+1}{2(e^2-1)}\cdot e^x \ \boxed{\textbf{(1 pt.)}}\ ; \\ \cos\widehat{(u,v)} = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{\frac{e^2+1}{4}}{\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{e^2-e^{-2}+4}{8}}} = \frac{e^2+1}{\sqrt{(e^2-1)(e^2-e^{-2}+4)}} \in [-1,1] \ \boxed{\textbf{(1 pt.)}}\ , \end{cases}$$

de unde rezultă $\widehat{(u,v)} = \arccos\dfrac{e^2+1}{\sqrt{(e^2-1)(e^2-e^{-2}+4)}}$ **(1 pt.)** . Deoarece $\langle u,v\rangle = \frac{e^2+1}{4}\neq 0$, vectorii u şi v nu sunt ortogonali **(1 pt.)** . **Total: 10pt.**

e) Avem

$$\begin{cases} \langle u,v\rangle = Tr(u^{\,t}\cdot v) = Tr\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2+0 = 2; \\ \langle u,u\rangle = Tr(u^{\,t}\cdot u) = Tr\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5+1 = 6; \\ \langle v,v\rangle = Tr(v^{\,t}\cdot v) = Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1+1 = 2, \end{cases}$$

deci $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{6}$, $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{2}$ şi

$$d(u,v) = ||u-v|| = \sqrt{Tr((u-v)^{\,t}\cdot(u-v))} = \sqrt{Tr\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\begin{cases} \overline{pr}_v u = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v = \dfrac{2}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \overline{pr}_u v = \dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u = \dfrac{2}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

De asemenea, $\cos\widehat{(u,v)} = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \in [-1,1]$, deci $\widehat{(u,v)} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. Deoarce $\langle u,v\rangle = 2\neq 0$, vectorii u şi v nu sunt ortogonali.

f) Deoarece

$$\begin{cases} \langle u,v\rangle = i(\overline{1-i}) + (-i)(\overline{1+i}) = i(1+i) - i(1-i) = -2; \\ \langle u,u\rangle = i\cdot\bar{i} + (-i)\cdot(\overline{-i}) = 2; \\ \langle v,v\rangle = (1-i)\cdot(\overline{1-i}) + (1+i)\cdot(\overline{1+i}) = 4; \end{cases}$$

vom avea

$$\begin{cases} \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{2}; \quad \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = 2; \\ d(u,v) = ||u-v|| = ||(2i-1,-2i-1)|| = \sqrt{(2i-1)\overline{(2i-1)} + (-2i-1)\overline{(-2i-1)}} = \sqrt{10} \\ \overline{pr}_v u = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v = \dfrac{-2}{4}\cdot(1-i,1+i) = \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right); \\ \overline{pr}_u v = \dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u = \dfrac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\langle u,u\rangle}\cdot u = \dfrac{-2}{2}(i,-i) = (-i,i). \end{cases}$$

3.4 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Fie spaţiul vectorial complex n-dimensional $\mathbb{C}^n$ şi fie ${}^R C^n$ trecerea în real a lui $\mathbb{C}^n$. ' Stiind că oricărui vector $z = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n)$ din C^n îi corespunde vectorul $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$ din ${}^R C^n$, să se stabilească vectorul din ${}^R C^n$ care este asociat lui iz.

Dacă $\mathbb{C}^n$ este înzestrat cu produsul scalar $\langle v, w\rangle = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$, unde $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ şi $w = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, să se stabilească ce produs scalar se induce în ${}^R C^n$.

2. Să se arate că aplicaţiile $\langle \cdot\, , \,\cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ definite prin formulele:

$$(*)\ \langle p, q\rangle = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j; \qquad (**)\ \langle p, q\rangle = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a_j b_j,$$

cu $p = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ şi $q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, sunt produse scalare. Să se calculeze unghiul dintre polinoamele p şi q, faţă de produsul scalar $(*)$, respectiv $(**)$, unde $p = 4 + X^2$ şi $q = 2 - 3X - 2X^2$.

3. Fie spaţiul vectorial euclidian real $C^0[0, 4]$ pe care produsul scalar este dat de $\langle f, g\rangle = \int_0^4 f(x)g(x)dx$. Să se scrie inegalitatea lui Cauchy-Schwarz şi să se calculeze $d(f, g)$, $||g||$, unde

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2] \\ 4 - x, & x \in (2, 4]. \end{cases}$$

4. În spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$, fie vectorul $v = (14, -3, -6)$ şi submulţimea $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, unde $a_1 = (-3, 0, 7)$, $a_2 = (1, 4, 3)$ şi $a_3 = (2, 2, -2)$. Să se găsească proiecţia ortogonală w a lui v pe $L(S)$ şi vectorul $w^\perp$.

MA.4.Ortogonalizare. Ortonormare

Cuvinte cheie: ortogonalizare, ortonormare, procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.

4.1 Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Fie V un spaţiu vectorial euclidian. Ne propunem să arătăm că din orice mulţime liniar independentă de vectori din V se poate construi o mulţime ortonormată (mulţime ortogonală ale cărei elemente au norma 1). În acest sens, prin demonstraţiile teoremelor care urmează, vom pune în evidenţă ***procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt***.

Teorema 38. *Dacă V este un spaţiu vectorial euclidian cu dimensiunea n, iar $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază a lui V, atunci există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ astfel încât mulţimile $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şi $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ generează acelaşi subspaţiu vectorial $W_k \subset V$ pentru fiecare $k = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie. Mai întâi construim o mulţime ortogonală şi apoi îi normăm elementele. Mulţimea ortogonală $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ se construieşte din $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ în felul următor:

1) se ia $w_1 = v_1$;

2) se pune $w_2 = v_2 + kw_1$. Vectorul w_2 nu este zero deoarece v_1 şi v_2 sunt liniar independenţi. Se determină k din condiţia ca w_2 să fie ortogonal lui w_1, adică

$$0 = \langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 + kw_1, w_1 \rangle,$$

de unde rezultă $k = -\dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$, deci $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$, adică vectorul w_2 se obţine scăzând din v_2 proiecţia lui v_2 pe w_1;

3) vectorul w_3 este definit prin $w_3 = v_3 + k_1 w_1 + k_2 w_2$; el este nenul ca urmare a faptului că v_1, v_2 şi v_3 sunt liniar independenţi. Scalarii k_1 şi k_2 sunt determinaţi din condiţiile ca w_3 să fie ortogonal lui w_1 şi lui w_2, adică

$$0 = \langle w_3, w_1 \rangle = \langle v_3, w_1 \rangle + k_1 \langle w_1, w_1 \rangle \quad \text{şi} \quad 0 = \langle w_3, w_2 \rangle = \langle v_3, w_2 \rangle + k_2 \langle w_2, w_2 \rangle.$$

Găsim

$$k_1 = -\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}, \quad k_2 = -\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle},$$

deci

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2,$$

adică w_3 se obţine scăzând din v_3 proiecţiile lui v_3 pe w_1 şi w_2.

Repetăm schema precedentă până obţinem o mulţime de n vectori ortogonali $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Mulţimea ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ asociată familiei iniţiale se găseşte prin normare, adică definind

$$e_i = \frac{w_i}{||w_i||}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ortogonalizarea urmată de normare poartă numele de *ortonormare*.
Pentru final se poate arăta că $W_k = L\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = L\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. □

Exemplu. Se consideră spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ raportat la baza $\{x_1 = (1,1,-1), x_2 = (3,-1,-1), x_3 = (0,-1,1)\}$. Să se găsească baza ortonormată asociată.

Soluţie. Utilizând procedeul Gram-Schmidt, construim o mulţime ortogonală $\{y_1, y_2, y_3\}$ formată din vectorii nenuli:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 = (1,1,-1);\\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 = (3,-1,-1) - \frac{3}{3}(1,1,-1) = (2,-2,0);\\ y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_3, y_2\rangle} y_2 = (0,1,-1) - \frac{(-2)}{3}(1,1,-1) - \frac{2}{8}(2,-2,0)\\ &= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Împărţim fiecare vector din baza ortogonală prin norma sa şi obţinem o bază ortonormată

$$\frac{y_1}{||y_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \frac{y_2}{||y_2||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \frac{y_3}{||y_3||} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Teorema 38 se generalizează în felul următor:

Teorema 39. *Fie V un spaţiu vectorial euclidian, fie $\{v_1, v_2, \ldots,\} \subset V$ o mulţime finită sau infinită şi $L(v_1, \ldots, v_k)$ subspaţiul generat de primii k vectori. Atunci există o mulţime $\{w_1, w_2, \ldots\} \subset V$ cu următoarele* **proprietăţi**, *pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$:*

1) *vectorul w_k este ortogonal pe $L(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$;*
2) *$L\{w_1, \ldots, w_k\} = L\{v_1, \ldots, v_k\}$;*
3) *$w_1, w_2, \ldots$ sunt unic determinaţi, abstracţie făcând de un factor scalar.*

În loc de *demonstraţie* ne mulţumim cu un mic comentariu. Vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_k$ au expresiile:

$$w_1 = v_1; \qquad w_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i, \quad r = \overline{1, k-1},$$

care se dovedesc bune pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Evident, aceşti vectori sunt construiţi astfel încât w_{r+1} să fie ortogonal cu $w_1, w_2, \ldots, w_r$, adică vectorul w_{r+1} se obţine scăzând din v_{r+1} proiecţiile lui v_{r+1} pe vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_r$. Din mulţimea ortogonală $\{w_1, w_2, \ldots\}$ se obţine mulţimea ortonormată $\left\{\frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \ldots\right\}$.

Exemplu. Fie P spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor polinomiale reale definite pe $[-1,1]$, înzestrat cu produsul scalar $\langle v, w\rangle = \int_{-1}^{1} v(t)w(t)dt$. Baza canonică a acestui spaţiu este alcătuită din vectorii $v_n(t) = t^n$, cu $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ortogonalizând această bază cu procedeul Gram-Schmidt, obţinem polinoamele Legendre

$$w_0(t) = 1, w_1(t) = t, w_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, w_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \ldots, w_n(t) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n], \ldots$$

4.2 Exerciţii/probleme rezolvate

4.2.1 Enunţuri

1. Se dă familia de vectori $S = \{v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (-2, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Verificaţi că familia S este ortogonală;

b) Completaţi S la o bază ortogonală a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

2. Se dă subspaţiul $W = \mathcal{L}(v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1, 0)) \subset \mathbb{R}^4$.

a) Determinaţi $W^\perp$;

b) Arătaţi că $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$;

c) Pentru $v = (1, 1, 1, 1)$, aflaţi $v_0 = pr_W v \in W$ şi $v^\perp = v - v_0 \in W^\perp$; verificaţi teorema lui Pitagora $||v||^2 = ||v_0||^2 + ||v^\perp||^2$;

d) Aflaţi o bază ortogonală B_0 a subspaţiului W;

e) Normaţi baza B_0 obţinând o bază ortonormată $B = \{f_1, f_2\}$ a subspaţiului W;

f) Aflaţi coeficienţii Fourier $\alpha_i = \langle v, f_i\rangle, i = \overline{1, 2}$ ai lui v relativ la B şi verificaţi inegalitatea lui Bessel $||v||^2 \geq \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2$;

g) Verificaţi pentru v_0 egalitatea Parseval $||v_0||^2 = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2$;

h) Arătaţi că funcţia $g(w) = d(v, w), w \in W$ îşi atinge minimul în v_0, valoarea minimă fiind $d(v, W) \equiv \min_{w\in W} d(v, w) = ||v^\perp||$.

3. Ortonormaţi familiile de vectori:

a) $F = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

b) $F = \{ \operatorname{ch}, id\} \subset C^0[0, 1]$;

c) $F = \{p_1 = 1 + X, p_2 = X + X^2, p_3 = X\} \subset C^0[-1, 1]$.

d) $w_1 = (-i, 0, 1), w_2 = (1, -i, 0), w_3 = (0, i, 0) \in \mathbb{C}^3$.

4. Aflaţi proiecţia ortogonală $pr_W v$ a vectorului v pe subspaţiul W, precum şi componenta sa ortogonală $v^\perp$ relativ la acest subspaţiu:

a) $v = 1 + x \in \mathbb{R}_2[x],\ W = \mathcal{L}(p_1 = 1 + x^2, p_2 = 1); \quad \langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$

b) $v = (1, 2, 1);\ W = \mathcal{L}(v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-1, 4, 1)) \in \mathbb{R}^3$;

c) $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ W = \mathcal{L}\left(C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

d) $v = (2, 1, -1),\ W = \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

4.2.2 Soluţii

1. **a)** Familia S este ortogonală deoarece $\langle v_1, v_2\rangle = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$.
b) Determinăm un vector $v_3 \in \mathbb{R}^3, v_3 = (x_1, x_2, x_3), v_3 \neq 0$ astfel încât să fie satisfăcute condiţiile:

$$\langle v_1, v_3\rangle = 0, \langle v_2, v_3\rangle = 0.$$

Obţinem sistemul liniar

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\lambda \\ x_2 = -5\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Aşadar, putem completa sistemul de vectori la o bază ortogonală într-o infinitate de moduri. De exemplu, dacă alegem $\lambda = 1$, obţinem $v_3 = (-2, -5, 1)$.

Vectorii v_1, v_2, v_3 sunt ortogonali şi nenuli, deci sunt liniar independenţi. Numărul lor fiind egal cu dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$, rezultă că ei formează o bază (ortogonală) a lui $\mathbb{R}^3$.

2. **a)** Complementul ortogonal al spaţiului W este mulţimea

$$W^\perp = \{\ y \in \mathbb{R}^4\ \mid y \perp v_1, y \perp v_2\ \}$$

Pentru a găsi vectorii $y \in W$, este suficient să punem condiţiile $\langle y, v_1\rangle = 0$, $\langle y, v_2\rangle = 0$. Notând $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, aceste condiţii sunt echivalente cu sistemul

$$\begin{cases} y_1 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

în care minorul corespunzător lui y_1 şi y_2 este $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci vom considera y_1 şi y_2 drept necunoscute principale, iar y_3 şi y_4 necunoscute secundare. Atunci sistemul are soluţiile: $y_1 = -a - b, y_2 = -b, y_3 = a, y_4 = b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Atunci

$$W^{\perp} = \{(-a-b, -b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Observăm că $(-a-b, -b, a, b) = a(-1, 0, 1, 0) + b\,(-1, -1, 0, 1)$ şi deci o bază în $W^{\perp}$ este formată din vectorii

$$u_1 = (-1, 0, 1, 0), u_2 = (-1, -1, 0, 1).$$

b) Deoarece determinantul

$$\det\,[v_1, v_2, u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

rezultă că vectorii v_1, v_2, u_1, u_2 sunt liniar independenţi. Numărul lor fiind egal cu dimensiunea spaţiului total $\mathbb{R}^4$, rezultă că ei formează o bază în $\mathbb{R}^4$, deci $L(v_1, v_2, u_1, u_2) = \mathbb{R}^4$. Dar $W + W^{\perp} = L(v_1, v_2) + L(u_1, u_2) = L(v_1, v_2, u_1, u_2)$ şi deci $W + W^{\perp} = \mathbb{R}^4$. Deoarece întotdeauna avem $W \cap W^{\perp} = \{0\}$, rezultă $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp}$.

c) Deoarece are loc relaţia $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^4$, rezultă că v se scrie în mod unic sub forma $v = v_0 + v^{\perp}$, cu $v_0 \in W$ şi $v^{\perp} \in W^{\perp}$. Din $v_0 \in W$ rezultă că $v_0 = k_1 v_1 + k_2 v_2$ cu $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, iar condiţia $v^{\perp} \in W^{\perp}$conduce la $\left\langle v^{\perp}, v_1\right\rangle = 0$ şi $\langle v^{\perp}, v_2\rangle = 0$. 'Tinând cont de faptul că

$$v^{\perp} = v - v_0 = v - k_1 v_1 - k_2 v_2,$$

relaţiile anterioare devin:

$$\begin{cases} k_1 \langle v_1, v_1\rangle + k_2 \langle v_2, v_1\rangle = \langle v, v_1\rangle \\ k_1 \langle v_1, v_2\rangle + k_2 \langle v_2, v_2\rangle = \langle v, v_2\rangle \end{cases}$$

Aşadar, k_1şi k_2 sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = 3 \\ 2k_1 + 3k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 7/5 \\ k_2 = -3/5 \end{cases}$$

În concluzie, avem $v_0 = \frac{7}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$ şi $v^{\perp} = v - v_0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

De asemenea, prin calcul direct obţinem $||v|| = 2, ||v_0|| = \sqrt{18/5}, ||v^{\perp}|| = \sqrt{2/5}$, deci teorema Pitagora se verifică: $||v||^2 \equiv 4 = \frac{18}{5} + \frac{2}{5} \equiv ||v_0||^2 + ||v^{\perp}||^2$.

d) Deoarece baza subspaţiului W dată de $B_W = \{v_1, v_2\}$ nu este o bază ortogonală, ortogonalizăm folosind procedeul Gram-Schmidt $\{v_1, v_2\} \to \{w_1, w_2\}$.

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1, 0, 1, 1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1} v_2 = v_2 - \tfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \\ &= (1, -1, 1, 0) - \tfrac{2}{3}(1, 0, 1, 1) = (\tfrac{1}{3}, -1, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}). \end{aligned}$$

Vectorul $\left(\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ este paralel cu vectorul $(1, -3, 1, -2)$, deci o nouă baza ortogonală a lui W este $B_0 = \{w_1 = (1, 0, 1, 1), w_2 = (1, -3, 1, -2)\}$.

Se observă că avem

$$\begin{aligned} v_0 &= pr_W v = pr_{w_1} v + pr_{w_2} v = \tfrac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \tfrac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \\ &= \tfrac{3}{3}\,(1, 0, 1, 1) + \tfrac{-3}{15}\,(1, -3, 1, -2) = (\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{7}{5}), \end{aligned}$$

iar componenta ortogonală a vectorului v relativ la W este

$$v^{\perp} = v - pr_W v = (1,1,1,1) - \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

e) Normând vectorii $\{w_1, w_2\}$, rezultă baza ortonormată $B = \{f_1, f_2\}$ a subspaţiului W formată din vectorii:

$$f_1 = \frac{1}{||w_1||} w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), f_2 = \frac{1}{||w_2||} w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}\right)$$

f) Coeficienţii Fourier ai lui v relativ la B sunt $\alpha_1 = \langle v, f_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ şi $\alpha_2 = \langle v, f_2\rangle = -\frac{3}{\sqrt{15}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$. Se observă că aceşti coeficienţi sunt exact componentele proiecţiei v_0 a lui v pe W relativ la baza B a subspaţiului W: $[pr_W v]_B = [v_0]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$. În plus, are loc inegalitatea Bessel: $2^2 \geq \sqrt{3}^{\,2} + (-\sqrt{3/5})^2$.

g) Egalitatea Parseval se verifică: $\sqrt{18/5}^{\,2} = \sqrt{3}^{\,2} + (-\sqrt{3/5})^2$;

h) Pentru $w = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \in W$, avem

$$d(v,w)^2 = ||v - w||^2 = ||v^{\perp} + (v_0 - w)||^2 = \sqrt{\langle v^{\perp} + (v_0 - w), v^{\perp} + (v_0 - w)\rangle}.$$

Dar $v^{\perp} \in W^{\perp}$ şi $v_0 - w \in W$ implică ortogonalitatea celor doi vectori, deci $\langle v^{\perp}, v_0 - w\rangle = 0$. Prin urmare:

$$\begin{aligned} d(v,w)^2 &= \langle v^{\perp}, v^{\perp}\rangle + \langle v_0 - w, v_0 - w\rangle = ||v^{\perp}||^2 + ||v_0 - w||^2 = \\ &= ||v^{\perp}||^2 + ||(\alpha_1 - \beta_1) f_1 + (\alpha_2 - \beta_2) f_2||^2. \end{aligned}$$

Dar $B = \{f_1, f_2\}$ este familie ortonormată, deci

$$d(v,w)^2 = ||v^{\perp}||^2 + (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2.$$

Se observă că atunci când w variază în W, deci atunci când $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ variază, minimul expresiei $d(v,w)$ se atinge pentru $\beta_1 = \alpha_1$ şi $\beta_2 = \alpha_2$, deci pentru $w = v_0 = pr_W v$, minimul având valoarea $d(v, v_0) = ||v^{\perp}||$.

3. a) Utilizând procedeul Gram-Schmidt, construim o bază ortogonală $F^1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ formată din vectorii

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1,1,1) \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) || (1,1,-2) \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \\ &= (1,0,0) - \tfrac{1}{3}(1,1,1) - \tfrac{1}{6}(1,1,-2) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0) || (1,-1,0). \end{aligned}$$

Împărţim fiecare vector din baza ortogonală prin norma sa şi obţinem o bază ortonormată $F'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ formată din vectorii

$$\begin{cases} w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{cases}$$

Temă. Verificaţi că familia de vectori F'' este ortonormală.

b) Se verifică faptul că $f_1 = \mathrm{ch}$ şi $f_2 = id$ sunt vectori liniar independenţi, unde $f_1(x) = \mathrm{ch}\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ şi $f_2(x) = id(x) = x$, pentru orice $x \in [0,1]$. Mai exact, $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \mathrm{ch}\, x + \alpha_2 x = 0, \forall x \in [0,1]$. Dar pentru $x = 0$ şi $x = 1$ rezultă sistemul $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \frac{e+e^{-1}}{2}\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$ cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, deci ind$\{f_1, f_2\}$.

Folosind produsul scalar canonic din $C^0\,[0,1]$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $\forall f,g \in C^0\,[0,1]$ şi procedeul Gram-Schmidt, construim o bază ortogonală $F' = \{g_1, g_2\}$ formată din vectorii

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 = ch \\ g_2 &= f_2 - \tfrac{\langle f_2,g_1\rangle}{\langle g_1,g_1\rangle} g_1 = \\ &= id - \frac{\int_0^1 x \operatorname{ch} x dx}{\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx} \operatorname{ch} = id - \frac{1-e^{-1}}{(e^2-e^{-2}+4)/8} \operatorname{ch} = id - \frac{8(e-1)}{e(e^2+e^{-2}+4)} \cdot \operatorname{ch}. \end{aligned}$$

Normăm aceste funcţii şi obţinem familia ortonormată $F'' = \{e_1, e_2\}$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \sqrt{\frac{8}{e^2+4-e^{-2}}} \cdot ch \\ e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \dfrac{id - a \operatorname{ch}}{\sqrt{\int_0^1 (x - a \operatorname{ch} x)^2 dx}}, a = \dfrac{8(e-1)}{e(e^2+e^{-2}+4)}. \end{cases}$$

c) Procedând ca la punctele precedente, ortogonalizăm familia $\{p_1 = 1+x, p_2 = x+x^2, p_3 = x\}$ pentru a obţine familia ortogonală $\{q_1, q_2, q_3\}$ unde:

$$q_1 = p_1 = 1+x\ , q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} \cdot q_1\ , q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} \cdot q_1 - \frac{\langle p_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} \cdot q_2.$$

Avem

$$\langle q_1, q_1\rangle = \int_{-1}^1 q_1^2(x)dx = \int_{-1}^1 (1+x)^2 dx = \frac{8}{3}.$$

şi deoarece

$$\langle p_2, q_1\rangle = \int_{-1}^1 p_2(x)q_1(x)dx = \int_{-1}^1 (x+x^2)(1+x)dx = \frac{4}{3},$$

rezultă $q_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2$. Apoi calculăm produsele scalare

$$\begin{aligned} \langle q_2, q_2\rangle &= \int_{-1}^1 q_2^2(x)dx = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2\right)^2 dx = \frac{2}{5}, \\ \langle p_3, q_1\rangle &= \int_{-1}^1 x(1+x)dx = \frac{2}{3}, \\ \langle p_3, q_2\rangle &= \int_{-1}^1 x\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2\right) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Atunci

$$q_3 = x - \frac{1}{4}(1+x) - \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}x^2.$$

Normăm aceste polinoame şi obţinem familia ortonormată $\{r_1, r_2, r_3\}$, unde

$$r_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}x\ , r_2 = -\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}x + \frac{\sqrt{10}}{2}x^2\ , r_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{4}x^2\ .$$

d) **Din oficiu: 1pt.** Ortogonalizăm mulţimea dată folosind relaţiile:

$$u_1 = w_1\ , u_2 = w_2 - \tfrac{\langle w_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} u_1\ , u_3 = w_3 - \tfrac{\langle w_3,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} u_1 - \tfrac{\langle w_3,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle} u_2\ .$$

Obţinem succesiv: $\langle w_2, u_1\rangle = i, \langle u_1, u_1\rangle = 2, u_2 = (\frac{1}{2}, -i, \frac{-i}{2}) || (1, -2i, -i)$ **(2 pt.)** şi $\langle w_3, u_1\rangle = 0$, $\langle w_3, u_2\rangle = -1$, $\langle u_2, u_2\rangle = \frac{3}{2}$ **(3 pt.)** , $u_3 = (\frac{1}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{i}{3}) || (1, i, -i)$ **(1 pt.)** . După efectuarea calculelor rezultă familia ortogonală

$$u_1 = (-i, 0, 1)\ , u_2 = (1, -2i, -i), u_3 = (1, i, -i),$$

şi prin normare, familia ortonormată $\{v_1, v_2, v_3\}$, unde
$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}}, -\frac{i}{\sqrt{6}}\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ **(3 pt.)** **Total: 10pt.**

4. a) Prin ortogonalizarea bazei $B_W = \{p_1 = 1 + x^2, p_2 = 1\}$ obţinem $w_1 = p_1 = 1 + x^2$,

$$\begin{aligned} w_2 &= p_2 - \overline{pr}_{w_1} p_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = 1 - \int_{-1}^{1} (1+t^2)dt \left(\int_{-1}^{1} (1+t^2)^2 dt\right)^{-1} \cdot w_1 = \\ &= 1 - \frac{8/3}{56/15}(1+x^2) = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}x^2 , \end{aligned}$$

deci $B_{W,ortog.} = \left\{w_1 = 1 + x^2 , w_2 = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}x^2\right\}$. Atunci

$$\begin{aligned} v_0 &= \overline{pr}_{w_1} v + \overline{pr}_{w_2} v = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \\ &= \frac{8/3}{56/15} w_1 + \frac{2/21}{2/21} w_2 = \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{7}x^2\right) + \left(\frac{2}{7} - \frac{5}{7}x^2\right) = 1. \text{ Deci } v^\perp = v - v_0 = x. \end{aligned}$$

b) $B_W = \{v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-1, 4, 1)\}$ nefiind o bază ortogonală, ortogonalizăm folosind procedeul Gram-Schmidt $\{v_1, v_2\} \to \{w_1, w_2\}$.

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (2, 1, 0) \\ w_2 &= v_2 - \overline{pr}_{w_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \\ &= (-1, 4, 1) - \tfrac{2}{5}(2, 1, 0) = \left(-\tfrac{9}{5}, \tfrac{18}{5}, 1\right) || (-9, 18, 5) \end{aligned}$$

şi obţinem $B_{ortog, W} = \{ w_1 = (2, 1, 0) , w_2 = (-9, 18, 5)\}$. Atunci avem:

$$v_0 = \overline{pr}_W v = \overline{pr}_{w_1} v + \overline{pr}_{w_2} v = \frac{4}{5}(2, 1, 0) + \frac{32}{430}(-9, 18, 5) = \left(\frac{40}{43}, \frac{92}{43}, \frac{16}{43}\right)$$

şi deci $v^\perp = v - v_0 = \left(\frac{3}{43}, -\frac{6}{43}, \frac{27}{43}\right)$.

c) Se observă că $\langle C, D\rangle = \langle D, C\rangle = 0$, deci baza $B_W = \left\{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ este ortogonală; obţinem

$$v_0 = \overline{pr}_C v + \overline{pr}_D v = \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

şi $v^\perp = v - v_0 = 0$. *Observaţie.* $v^\perp = 0 \Rightarrow v \in L(C, D)$. Într-adevăr, $\alpha C + \beta D = v \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$, deci $v = C + 2D \in L(C, D)$. **d)** Observăm că W se mai poate scrie:

$$W = \{(x, -x + 2z, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \} = \{x \underbrace{(1, -1, 0)}_{v_1} + z \underbrace{(0, 2, 1)}_{v_2} \mid x, z \in \mathbb{R}\},$$

deci o bază a lui W este

$$B_W = \{v_1 = (1, -1, 0) , v_2 = (0, 2, 1)\} .$$

Ortogonalizând B_W, obţinem baza ortogonală $B'_W = \{w_1 = (1, -1, 0), w_2 = (1, 1, 1)\}$, deci

$$\begin{cases} v_0 = \overline{pr}_{w_1} v + \overline{pr}_{w_2} v = \frac{1}{2}(1, -1, 0) + \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \\ v^\perp = (2, 1, -1) - \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{3}\right). \end{cases}$$

4.3 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Fie $\mathbb{R}^4$ spaţiul vectorial euclidian canonic cu patru dimensiuni. Să se găsească o bază ortonormată pentru subspaţiul generat de vectorii $x_1 = (0, 1, 1, 0)$, $x_2 = (0, 4, 0, 1)$, $x_3 = (1, -1, 1, 0)$ şi $x_4 = (1, 3, 0, 1)$.

2. Fie spaţiul vectorial euclidian $C^0[0, 4]$ pe care produsul scalar este definit prin aplicaţia $\langle f, g\rangle = \int_0^4 f(x)g(x)dx$. Să se ortonormeze mulţimea

$$\left\{2, 2 + x, (2 + x)^2, (2 + x)^3\right\}.$$

3. Să se arate că

$$\big|||v|| - ||w||\big| \leq ||v - w||.$$

4. Sfera unitate $S = \{x \in V \mid ||x|| = 1\}$ este subspaţiu vectorial al spaţiului euclidian V?

MA.5.Transformări liniare

Cuvinte cheie: transformare liniară, nucleul şi imaginea unei transformări liniare, matricea unei transformări liniare, endomorfism, izomorfism, automorfism.

5.1 Proprietăţi generale

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste câmpul K.

Definiţia 40. O funcţie $\mathcal{T}\colon V \to W$ cu proprietăţile:

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}(x+y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y), && \forall x, y \in V; \\ &\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x), && \forall k \in K,\ \forall x \in V, \end{aligned}$$

se numeşte ***transformare liniară*** (operator liniar sau morfism de spaţii vectoriale).

Precizare. Uneori, în loc de $\mathcal{T}(x)$ se scrie $\mathcal{T}x$.

Restricţia unei transformări liniare la un subspaţiu vectorial al lui V este tot o transformare liniară, dar restricţia unei transformări liniare la o submulţime a lui V care nu este subspaţiu vectorial nu mai are sens, deoarece ori suma a doi vectori din acea submulţime, ori produsul cu un scalar al unui vector din submulţime, ori ambele pot să nu mai aparţină submulţimii. Orice transformare liniară definită pe un subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial V poate fi prelungită la o transformare liniară definită pe V. Aceste observaţii justifică de ce domeniile de definiţie ale transformărilor liniare nu sunt de regulă precizate ca submulţimi ale unui spaţiu vectorial.

O transformare liniară $\ell\colon V \to K$ (câmpul K este considerat ca spaţiu vectorial aritmetic de dimensiune unu K) se numeşte *formă liniară*.

Teorema 41. *Funcţia $\mathcal{T}\colon V \to W$ este o transformare liniară dacă şi numai dacă*

$$\mathcal{T}(kx + \ell y) = k\mathcal{T}(x) + \ell\mathcal{T}(y), \quad \forall k, \ell \in K,\ \forall x, y \in V.$$

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}\colon V \to W$ este transformare liniară atunci, conform Definiţiei 40, avem

$$\mathcal{T}(kx + \ell y) = \mathcal{T}(kx) + \mathcal{T}(\ell y) = k\mathcal{T}(x) + \ell\mathcal{T}(y),$$

deci condiţia din teoremă este satisfăcută.

Reciproc, condiţia impusă de teoremă împreună cu ipoteza $k = \ell = 1$ implică $\mathcal{T}(x+y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$, iar împreună cu ipoteza $\ell = 0$ implică $\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x)$. $\square$

Exemple:

1) Funcţia $\mathcal{T}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{T}(x) = ax$, este liniară.

2) Funcţia $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{T}(x) = Ax$, unde A este o matrice de tipul $m \times n$, este transformare liniară. În particular, fie aplicaţia $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Succesiv avem

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) &= \mathcal{T}(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2)\\ &= (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (y_1, y_2, y_1 + y_2) = \mathcal{T}(x_1, x_2) + \mathcal{T}(y_1, y_2),\end{aligned}$$

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Analog avem

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\big(k(x_1, x_2)\big) &= \mathcal{T}(kx_1, kx_2) = (kx_1, kx_2, kx_1 + kx_2) = k(x_1, x_2, x_1 + x_2)\\ &= k\mathcal{T}(x_1, x_2), \quad \forall k \in \mathbb{R},\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

deci funcţia $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

3) Fie $V = C^1(a, b)$ şi $W = C^0(a, b)$. Funcţia $\mathcal{T}\colon V \to W$, $\mathcal{T}(f) = f'$ (derivarea) este o transformare liniară.

4) Fie $V = C^0[a, b]$ şi $W = \mathbb{R}$. Funcţia $\mathcal{T}(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ este o transformare liniară.

Teorema 42. *Orice transformare liniară $\mathcal{T}\colon V \to W$ are* **proprietăţile***:*

1) *$\mathcal{T}(0) = 0$;*

2) *dacă U este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci $\mathcal{T}(U)$ este un subspaţiu vectorial al lui W;*

3) *dacă vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sunt liniar dependenţi, atunci şi vectorii $\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2), \dots, \mathcal{T}(x_n) \in W$ sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. 1) Relaţia $\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x)$, $\forall k \in K$, $\forall x \in V$, implică

$$\mathcal{T}(0) = 0\mathcal{T}(0) = 0.$$

2) Fie $u, v \in \mathcal{T}(U)$ şi $k, \ell \in K$. Existenţa elementelor $x, y \in V$ astfel încât $u = \mathcal{T}(x)$, $v = \mathcal{T}(y)$, împreună cu liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică

$$ku + \ell v = k\mathcal{T}(x) + \ell\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(kx + \ell y) \in \mathcal{T}(U).$$

De aceea, $\mathcal{T}(U)$ este un subspaţiu vectorial al lui W.

3) Temă. □

Fie $\mathcal{L}(V, W)$ mulţimea tuturor transformărilor liniare definite pe V şi cu valori în W. Egalitatea transformărilor liniare, adunarea şi înmulţirea cu scalari se definesc ca la funcţii. Dacă $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$, atunci:

$$\begin{aligned}&\mathcal{S} = \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S}(x) = \mathcal{T}(x), \quad \forall x \in V;\\ &(\mathcal{S} + \mathcal{T})(x) = \mathcal{S}(x) + \mathcal{T}(x), \quad \forall x \in V;\\ &(k\mathcal{S})(x) = k\mathcal{S}(x), \quad \forall k \in K,\ \forall x \in V.\end{aligned}$$

În raport cu aceste operaţii, mulţimea $\mathcal{L}(V, W)$ este spaţiu vectorial peste câmpul K.

Elementele lui $\mathcal{L}(V, V)$ se numesc ***endomorfisme*** ale lui V.

Spaţiul vectorial $\mathcal{L}(V, K)$ al tuturor formelor liniare definite pe V şi cu valori în K se numeşte *dualul lui* V. În cazul când V are dimensiune finită, spaţiul vectorial $\mathcal{L}(V, K)$ se identifică cu V, cele două spaţii fiind izomorfe.

Teorema 43. *Fie V_n şi W două spaţii vectoriale peste câmpul K, fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui V_n, iar $w_1, w_2, \dots, w_n$ vectori arbitrari din W. Considerăm o transformare liniară $\mathcal{T}\colon V_n \to W$ care satisface*

$$(*) \qquad \mathcal{T}(e_i) = w_i, \qquad \forall i = \overline{1, n}.$$

1) *Transformarea liniară $\mathcal{T}$ este unică transformare liniară care satisface proprietatea (*).*
2) *Dacă vectorii $w_1, w_2, \dots, w_n$ sunt liniar independenţi, atunci transformarea liniară $\mathcal{T}$ este injectivă.*

Demonstraţie. 1) Fie $x \in V_n$, adică $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Regula $x \to \mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ defineşte o funcţie $\mathcal{T}\colon V_n \to W$, cu proprietatea $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, cu $i = \overline{1, n}$. Să arătăm că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară. Pentru aceasta observăm că dacă $y \in V_n$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, atunci

$$kx + \ell y = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + \ell y_i) e_i \in V_n, \quad \forall k, \ell \in K$$

şi

$$\mathcal{T}(kx + \ell y) = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + \ell y_i) w_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \ell \sum_{i=1}^{n} y_i w_i = k\mathcal{T}(x) + \ell \mathcal{T}(y).$$

Unicitatea lui $\mathcal{T}$ decurge din unicitatea componentelor x_i ale vectorului x.

2) Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ doi vectori oarecare din V_n. Ipotezele $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = \overline{1, n}$, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ implică $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) w_i = 0$. Aceasta, împreună cu liniar independenţa vectorilor $w_1, w_2, \dots, w_n$, dau $x_i = y_i$, adică $x = y$. □

Compunerea a două transformări liniare, definită ca la funcţii, este numită *înmulţire (produs)* şi are ca rezultat tot o transformare liniară. Evident, compunerea nu este comutativă, dar este asociativă.

Compunerea poate fi combinată cu operaţiile algebrice de adunare şi înmulţire cu scalari:

1) dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ sunt transformări liniare pentru care au sens $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AC}$ şi $\mathcal{BC}$, atunci

$$(k\mathcal{A} + \ell \mathcal{B})\mathcal{C} = k\mathcal{AC} + \ell \mathcal{BC}, \quad \forall k, \ell \in K;$$

2) dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ sunt transformări liniare pentru care au sens $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{CA}$ şi $\mathcal{CB}$, atunci

$$\mathcal{C}(k\mathcal{A} + \ell \mathcal{B}) = k\mathcal{CA} + \ell \mathcal{CB}, \quad \forall k, \ell \in K.$$

Fie $\mathcal{T}$ un endomorfism al lui V. Puterile naturale ale lui $\mathcal{T}$ se definesc inductiv:

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{J}, \ \mathcal{T}^n = \mathcal{T}\mathcal{T}^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

unde $\mathcal{J}$ este identitatea.

Fie $\mathcal{T}\colon U \to V$ o transformare liniară bijectivă (inversabilă). Inversa $\mathcal{T}^{-1}\colon V \to U$ este tot o transformare liniară. Într-adevăr, notând $y_1 = \mathcal{T}x_1$ şi $y_2 = \mathcal{T}x_2$, găsim

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= \mathcal{T}^{-1}(\alpha \mathcal{T}x_1 + \beta \mathcal{T}x_2) = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ &= \alpha \mathcal{T}^{-1} y_1 + \beta \mathcal{T}^{-1} y_2. \end{aligned}$$

În plus, dacă $\mathcal{T}: U \to V$ şi $\mathcal{S}: V \to W$ sunt transformări liniare bijective, atunci $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}: U \to W$ este o transformare liniară bijectivă şi $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

O transformare liniară bijectivă se numeşte ***izomorfism*** de spaţii vectoriale. Un endomorfism bijectiv poartă numele de ***automorfism***.

5.2 Nucleu şi imagine

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste câmpul K, iar $\mathcal{T}: V \to W$ o transformare liniară. Reamintim că $\mathcal{T}(0) = 0$.

Ne propunem să arătăm că analizând mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\mathcal{T}(x) = 0$ şi mulţimea valorilor $y = \mathcal{T}(x)$, obţinem proprietăţi relevante ale transformării liniare $\mathcal{T}$.

Definiţia 44. Mulţimea

$$\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{x \mid x \in V,\ \mathcal{T}(x) = 0\} \subset V$$

se numeşte ***nucleul*** lui $\mathcal{T}$. Mulţimea

$$\operatorname{Im} \mathcal{T} = \mathcal{T}(V) = \{y \in W \mid \exists x \in V,\ \mathcal{T}(x) = y\} \subset W$$

se numeşte ***imaginea*** lui V prin $\mathcal{T}$ 1.

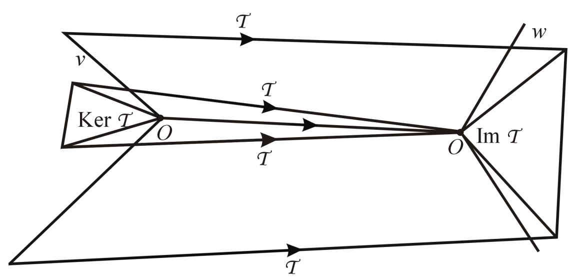

Fig. 1

Teorema 45. *Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$. Avem următoarele proprietăţi:*

1) *nucleul lui $\mathcal{T}$ este un subspaţiu vectorial al lui V;*

2) *imaginea lui V prin $\mathcal{T}$ este un subspaţiu vectorial al lui W;*

3) *soluţia generală a ecuaţiei $\mathcal{T}(x) = y$ este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei $\mathcal{T}(x) = 0$ şi o soluţie particulară a ecuaţiei $\mathcal{T}(x) = y$.*

Demonstraţie. 1) Fie $x, y \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$, adică $\mathcal{T}(x) = 0$ şi $\mathcal{T}(y) = 0$. Liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $\mathcal{T}(kx + \ell y) = 0$, $\forall k, \ell \in K$, deci $kx + \ell y \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$, $\forall k, \ell \in K$. 2), 3) Temă. □

Exemplu. Pentru $\mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$, găsim

$$\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (0, 0, 0)\right\} = \{(0, 0)\}$$

şi

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \mathcal{T} &= \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (y_1, y_2, y_3)\right\} \\ &= \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 = y_3\right\}. \end{aligned}$$

Se observă că $\mathcal{T}$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

Teorema 46. *Dacă $\mathcal{T}: V \to W$ este o transformare liniară, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1) *$\mathcal{T}$ este injectivă;* 2) *$\mathcal{T}: V \to \mathcal{T}(V)$ este inversabilă;* 3) *$Ker\,\mathcal{T} = \{0\}$.*

Demonstraţie. Echivalenţa dintre 1) şi 2) este evidentă. De aceea este suficient să dovedim că 1) este echivalentă cu 3).

Fie $\operatorname{Ker}\mathcal{T} = \{0\}$. Ipoteza $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ împreună cu liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $\mathcal{T}(x-y) = 0$, adică $x - y \in \operatorname{Ker}\mathcal{T}$. Astfel $x - y = 0$, altfel spus $x = y$, deci $\mathcal{T}$ este injectivă.

Presupunem că $\mathcal{T}$ este injectivă. Această ipoteză împreună cu proprietatea generală $\mathcal{T}(0) = 0$ implică $\operatorname{Ker}\mathcal{T} = \{0\}$. □

Definiţia 47. Dimensiunea nucleului lui $\mathcal{T}$ se numeşte *defectul* lui $\mathcal{T}$, iar dimensiunea imaginii lui V prin $\mathcal{T}$ se numeşte *rangul* lui $\mathcal{T}$.

Teorema 48. *Dacă $\mathcal{T}: V \to V$ este o transformare liniară iar spaţiul vectorial V este finit dimensional, atunci şi spaţiul vectorial $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ este finit dimensional şi are loc egalitatea*

$$\dim\, Ker\,\mathcal{T} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{T} = \dim \mathrm{V}.$$

Demonstraţie. Fie $n = \dim V$ şi $p = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{T}$. Cazul $p = 0$ este lăsat pentru cititori. Dacă $p \geq 1$, alegem o bază $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ în V astfel încât $\{e_1, \ldots, e_p\}$ să fie o bază în $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$. Pentru orice $y \in \operatorname{Im}\mathcal{T}$ există un $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ astfel încât

$$y = \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{T}(e_i) = x_{p+1}\mathcal{T}(e_{p+1}) + \cdots + x_n \mathcal{T}(e_n),$$

deoarece $\mathcal{T}(e_1) = 0, \ldots, \mathcal{T}(e_p) = 0$. Rezultă că $\mathcal{T}(e_{p+1}), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ generează pe $\operatorname{Im}\mathcal{T}$.

Să arătăm că aceşti vectori sunt liniar independenţi. Din relaţia

$$k_{p+1}\mathcal{T}(e_{p+1}) + \cdots + k_n \mathcal{T}(e_n) = 0$$

găsim $\mathcal{T}(k_{p+1}e_{p+1} + \cdots + k_n e_n) = 0$, adică $k_{p+1}e_{p+1} + \cdots + k_n e_n \in \operatorname{Ker}\mathcal{T}$ sau

$$k_{p+1}e_{p+1} + \cdots + k_n e_n = k_1 e_1 + \cdots + k_p e_p.$$

Liniar independenţa bazei din V implică $k_1 = \cdots = k_p = k_{p+1} = \cdots = k_n = 0$. În concluzie, spaţiul vectorial $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ este finit dimensional şi

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{T} = \dim \mathrm{V} - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{T}.$$

□

Teorema 48 se extinde şi la cazul în care V este infinit dimensional. În acest caz, cel puţin unul dintre subspaţiile $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ trebuie să fie infinit dimensional.

Exemple:

1) Pentru endomorfismul $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3),\ x = (x_1, x_2, x_3),$$

condiţia $\mathcal{T}(x) = 0$ se reduce la ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. În concluzie, orice vector $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{T}$ are forma

$$x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1).$$

Vectorii $e_1 = (1, 0, -1)$ şi $e_2 = (0, 1, -1)$ sunt liniar independenţi şi generează pe $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ astfel încât ei formează o bază în $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$. Deci $\dim \operatorname{Ker}\mathcal{T} = 2$.

Orice vector din $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ are coordonatele egale astfel încât orice doi vectori din această mulţime sunt liniar dependenţi. Astfel, $\dim \operatorname{Im}\mathcal{T} = 1$. Evident,

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{T} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{T} = 3 - 2 = 1.$$

2) Fie V spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor reale continue pe $[a, b]$ şi endomorfismul

$$\mathcal{T}\colon V \to V,\ g = \mathcal{T}(f),\ g(x) = \int_a^b f(t)\cos(x - t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Să determinăm $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$.

Condiţia $\mathcal{T}(f) = 0$ implică $g(x) = 0$, adică

$$\int_a^b f(t)\cos(x - t)dt = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

care este echivalent cu

$$\left(\int_a^b f(t)\cos t dt\right)\cos x + \left(\int_a^b f(t)\sin t dt\right)\sin x = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

de unde obţinem că

$$\int_a^b f(t)\cos t dt = 0 \quad \text{şi} \quad \int_a^b f(t)\sin t dt = 0.$$

Astfel, $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ conţine toate funcţiile f care sunt ortogonale funcţiilor $\cos$ şi $\sin$.

Teorema 49. *Presupunem că $\mathcal{T}\colon V \to W$ este o transformare liniară, iar $\dim V = n$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) *$\mathcal{T}$ este injectivă;*

2) *dacă $e_1, \ldots, e_p \in V$ sunt vectori liniar independenţi, atunci şi*

$$\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_p) \in \mathcal{T}(V) \subset W$$

sunt vectori liniari independenţi;

3) *$\dim \mathcal{T}(V) = n$;*

4) *dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază pentru V, atunci $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază pentru $\mathcal{T}(V)$.*

Demonstraţie. Cea mai simplă justificare este dovedirea implicaţiilor $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4 \Rightarrow 1)$.

Admitem că $\mathcal{T}$ este injectivă, iar $e_1, \ldots, e_p \in V$ sunt vectori liniar independenţi. Relaţia $k_1\mathcal{T}(e_1) + \cdots + k_p\mathcal{T}(e_p) = 0$ implică $\mathcal{T}(k_1e_1 + \cdots + k_pe_p) = 0$, adică

$$k_1e_1 + \cdots + k_pe_p \in \operatorname{Ker}\mathcal{T} = \{0\},$$

deci $k_1e_1 + \cdots + k_pe_p = 0$ şi prin urmare $k_1 = \cdots = k_p = 0$, astfel $1) \Rightarrow 2)$.

Dacă 2) este adevărată $\forall p \le n$, iar $\{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază în V, atunci vectorii $\mathcal{T}(e_1), \dots, \mathcal{T}(e_n)$ sunt liniar independenţi, de aceea $\dim \mathcal{T}(V) \ge n$. Pe de altă parte, teorema 48 arată că $\dim \mathcal{T}(V) \le n$. Rămâne $\dim \mathcal{T}(V) = n$, adică $2) \Rightarrow 3)$.

Fie 3) şi $\{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V. Pentru orice $y \in \mathcal{T}(V)$ există $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ astfel încât $y = \mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{T}(e_i)$. De aceea $\{\mathcal{T}(e_1), \dots, \mathcal{T}(e_n)\}$ generează pe $\mathcal{T}(V)$. Aceasta împreună cu $\dim \mathcal{T}(V) = n$ implică faptul că $\{\mathcal{T}(e_1), \dots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază a lui $\mathcal{T}(V)$, deci $3) \Rightarrow 4)$.

Dacă 4) este adevărată, atunci $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $x = 0$, deci $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{0\}$, adică $4) \Rightarrow 1)$. □

Teorema 50. *O transformare liniară injectivă $\mathcal{T} : V_n \to W_n$ este bijectivă.*

Demonstraţie. Presupunem că $\mathcal{T}$ este injectivă, adică $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{0\}$. Relaţiile $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{T} = 0$, $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{T} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{T}$ implică $\dim \operatorname{Im} \mathcal{T} = n$. Aceasta împreună cu $\operatorname{Im} \mathcal{T} \subset W_n$ implică $\operatorname{Im} \mathcal{T} = W_n$, adică $\mathcal{T}$ este şi surjectivă. □

Exemple:

1) Transformarea liniară $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

este bijectivă.

Într-adevăr, $\mathcal{T}$ fiind un endomorfism, este suficient să arătăm că este injectiv. Din $\mathcal{T}(x) = 0$ rezultă sistemul liniar şi omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$ care admite numai soluţia banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. În concluzie, $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{0\}$. Pentru a determina transformarea inversă, notăm $\mathcal{T}(x) = y$, unde $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Obţinem sistemul liniar $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3, \end{cases}$ cu soluţia $x_1 = y_2 - y_1 + 2y_3$, $x_2 = y_2$ şi $x_3 = y_2 - y_1 + y_3$, deci

$$\mathcal{T}^{-1}(x) = (x_2 - x_1 + 2x_3, x_2, x_2 - x_1 + x_3).$$

2) Endomorfismul $\mathcal{T} : V \to V$, cu proprietatea că $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{J} = 0$ este inversabil.

Într-adevăr, dacă $\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x_2)$, cu $x_1, x_2 \in V$, avem şi $\mathcal{T}^2(x_1) = \mathcal{T}^2(x_2)$ şi atunci, din $\mathcal{T}^2(x_1) - \mathcal{T}(x_1) + x_1 = 0$ şi $\mathcal{T}^2(x_2) - \mathcal{T}(x_2) + x_2 = 0$, rezultă $x_1 = x_2$, deci $\mathcal{T}$ este injectiv.

Notând $x = y - \mathcal{T}(y)$, rezultă $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Din condiţia $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{J} = 0$, avem $\mathcal{J} = \mathcal{T} - \mathcal{T}^2$ astfel încât $y = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Cele două egalităţi implică $y = \mathcal{T}(x)$, adică $\mathcal{T}(V) = V$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{T}$ este surjectiv. Cum $\mathcal{T}$ este injectiv şi surjectiv, rezultă că $\mathcal{T}$ este bijectiv.

5.3 Matricea unei transformări liniare

Fie V_n şi W_m două spaţii vectoriale, de dimensiune n, respectiv m, peste câmpul K şi $\mathcal{T} : V_n \to W_m$ o transformare liniară. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază a lui V_n, iar $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ este o bază a lui W_m, atunci relaţiile $\mathcal{T}(v_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i$, cu $j = \overline{1, n}$, definesc o matrice unică (citim pe linie şi scriem în matrice pe coloană) $T = [t_{ij}]$ cu elemente din K, numită ***matricea asociată transformării liniare*** $\mathcal{T}$ relativ la cele două baze fixate. Deoarece valorile $\mathcal{T}(v_j) \in W_m$ determină unic pe $\mathcal{T}$, matricea T determină unic pe $\mathcal{T}$.

Teorema 51. *Dacă* $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ *are imaginea* $\mathcal{T}(x) = y = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$*, atunci*

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Notând $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *şi* $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_m]$*, obţinem expresia matriceală* $Y = TX$ *a lui* $\mathcal{T}$*.*

Demonstraţie. Fie $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$. Rezultă

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{T}(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \right) w_i.$$

Ţinând seama de $\mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$, găsim $y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_i$, pentru $i = \overline{1, m}$. □

T se numeşte *matricea asociată* transformării liniare $\mathcal{T}$ în raport cu perechea de baze considerate. Vom scrie $T = \mu(\mathcal{T})$.

Exemplu. Fie endomorfismul $\mathcal{T}\colon V_3 \to V_3$, $\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a}$, $\vec{a}$ fixat (vezi Geometria Analitică). Ne propunem să determinăm o bază în V_3 faţă de care matricea lui $\mathcal{T}$ să fie de forma

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -||\vec{a}||^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza căutată. Deoarece

$$\mathcal{T}(\vec{e}_1) = 0, \quad \mathcal{T}(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \mathcal{T}(\vec{e}_3) = -||\vec{a}||^2 \vec{e}_2,$$

rezultă că $\vec{e}_1 \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}$ şi $\vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}$. De aceea putem lua $\vec{e}_1 = \vec{a}$, $\vec{e}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}$ şi $\vec{e}_3 = \vec{e}_2 \times \vec{a}$.

Considerăm $\mathcal{L}(V_n, W_m)$ mulţimea tuturor transformărilor liniare de la V_n la W_m şi $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulţimea tuturor matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din K. Funcţia $\mu\colon \mathcal{L}(V_n, W_m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ definită prin $\mathcal{T} \to T$ (în raport cu baze fixate în V_n, respectiv W_m) este un izomorfism de spaţii vectoriale. De aceea, spaţiul vectorial $\mathcal{L}(V_n, W_m)$ are dimensiunea mn.

Izomorfismul μ are **proprietăţile**:

1) $\mu(\mathcal{S}\mathcal{T}) = \mu(\mathcal{S})\mu(\mathcal{T})$, dacă $\mathcal{S}\mathcal{T}$ are sens;

2) transformarea liniară $\mathcal{S}\colon V_n \to V_n$ este inversabilă dacă şi numai dacă matricea $\mu(\mathcal{S})$ este inversabilă şi $\mu(\mathcal{S}^{-1}) = (\mu(\mathcal{S}))^{-1}$.

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul K şi $\mathcal{T}\colon V_n \to V_n$ o transformare liniară (endomorfism). Fixăm aceeaşi bază în spaţiul de definiţie şi de valori. Fixând diferite baze în V_n, lui $\mathcal{T}$ i se asociază matrice pătratice diferite.

Teorema 52. *Matricele* A *şi* B*, pătratice de ordinul* n*, cu elemente din* K*, reprezintă aceeaşi transformare liniară* $\mathcal{T}\colon V_n \to V_n$ *dacă şi numai dacă există o matrice nesingulară* C *astfel încât* $B = C^{-1}AC$*.*

Matricea C este de fapt *matricea de trecere de la baza veche la baza nouă.*

Demonstraţie. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ şi $\{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ două baze în V_n, iar $C = [c_{ij}]$ matricea de trecere de la prima bază la a doua, adică $e_j' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$, $j = \overline{1,n}$. Fie $\mathcal{T}: V_n \to V_n$ o transformare liniară. Notăm cu $A = [a_{ij}]$ matricea ataşată lui $\mathcal{T}$ în raport cu prima bază, adică $\mathcal{T}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $j = \overline{1,n}$ şi cu $B = [b_{ij}]$ matricea ataşată lui $\mathcal{T}$ în raport cu a doua bază, adică $\mathcal{T}(e_j') = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i'$, $j = \overline{1,n}$. Relaţiile

$$\mathcal{T}(e_j') = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i' = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki} b_{ij} \right) e_k$$

şi

$$\mathcal{T}(e_j') = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \mathcal{T}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij} \right) e_k$$

implică

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ki} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij}$$

sau altfel scris $CB = AC$, de unde rezultă $B = C^{-1}AC$. □

Exemplu. Fie endomorfismele $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definite prin

$$\mathcal{T}_1(x) = (x_4, x_2, x_3, x_1) \quad \text{şi} \quad \mathcal{T}_2(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0, 0),$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Să se determine matricea sumei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ în raport cu baza determinată de vectorii $f_1 = (1, -1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 1, 0)$, $f_3 = (3, -2, 0, 0)$ şi $f_4 = (4, 0, 0, 0)$.

Soluţie. Deoarece $\mathcal{T}(x) = (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, x_2, x_3, x_1)$, rezultă că pentru baza canonică $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ a lui $\mathbb{R}^4$, avem:

$$\mathcal{T}(e_1) = (1, 0, 0, 1); \quad \mathcal{T}(e_2) = (1, 1, 0, 0); \quad \mathcal{T}(e_3) = (1, 0, 1, 0); \quad \mathcal{T}(e_4) = (2, 0, 0, 0).$$

Matricea lui $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ în această bază este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi având în vedere că matricea de trecere de la baza canonică la baza formată de vectorii f_i, $i = \{1, 2, 3, 4\}$, este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă că matricea lui $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, în baza formată de vectorii f_i este

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{8}{3} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{11}{8} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă folosim matricele T_1 şi T_2 ale lui $\mathcal{T}_1$ şi respectiv $\mathcal{T}_2$.

Definiţia 53. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ se numesc *asemenea* dacă există o matrice nesingulară $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ astfel încât $B = C^{-1}AC$.

Asemănarea matricelor este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, fiecare clasă de echivalenţă corespunzând la un endomorfism $\mathcal{T}$ al lui V_n.

Proprietăţile de bază ale matricelor asemenea sunt:

1) deoarece C este nesingulară, matricele B şi A au acelaşi rang; acest număr este de fapt *rangul endomorfismului* $\mathcal{T}$;

2) deoarece $\det B = \det(C^{-1}) \det A \det C = \det A$, toate matricele dintr-o clasă de echivalenţă au acelaşi determinant. Această observaţie permite să definim *determinantul unui endomorfism* al lui V_n ca fiind determinantul matricei asociate în raport cu o bază fixată.

5.4 Exerciţii/probleme rezolvate

5.4.1 Enunţuri

1. Pentru aplicaţiile de mai jos, verificaţi că T este transformare liniară. Aflaţi nucleul şi imaginea, rangul şi defectul şi aflaţi matricea lui T relativ la bazele canonice ale domeniului şi respectiv codomeniului. Determinaţi dacă T este injectivă / surjectivă /bijectivă.

a) $T(x) = (x_1 - x_3, x_2, 2x_1 - 2x_3), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

b) $(T(p))(x) = x\int_0^1 p(t)dt + p(1) - p'(0), \quad \forall p \in P_2, \quad T : P_2 \to P_2$;

c) $T(A) = A^t - 2Tr(A)I_2, \forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Se dă aplicaţia $T : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$,

$$(T(p))(x) = x\int_0^1 p(t)dt + p(1/2), \forall p \in \mathbb{R}_1[X].$$

a) Arătaţi că T este transformare liniară.

b) Aflaţi nucleul şi imaginea transformării T.

c) Este această transformare injectivă/surjectivă ?

d) Verificaţi teorema dimensiunii pentru T.

e) Pe baza rangului transformării determinaţi dacă T este injectivă/surjectivă.

f) Aflaţi matricea transformării relativ la baza $q_1 = 1 - 2X, q_2 = 1 + X$.

g) Sunt $\text{Ker } T$ şi $\text{Im } T$ subspaţii suplementare în $\mathbb{R}_1[X]$?

3. Se dă transformarea liniară $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, care satisface condiţiile

$$T(v_1 - v_3) = w_1, \quad T(v_2 + 2v_3) = w_2, \quad T(-v_1) = w_1 - w_2,$$

unde $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, 0)\} = B$ şi $w_1 = (0, 1), w_2 = (1, 1)$.

a) Verificaţi că B este bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Aflaţi matricea transformării T.

c) Aflaţi expresia analitică a transformării T.

d) Este această transformare injectivă/surjectivă ?

4. Se dă aplicaţia $T : C^1(0, 1) \to C^0(0, 1)$,

$$(T(f))(x) = f'(x), \forall x \in (0, 1), f \in C^1(0, 1).$$

a) Arătaţi că T este transformare liniară.

b) Aflaţi nucleul şi imaginea transformării T.

c) Rezolvaţi ecuaţia $(T(f))(x) = 1 - x^2$.

d) Este aplicabilă teorema dimensiunii ?

5. Se dă morfismul de spaţii vectoriale $T \in L(\mathbb{R}_1[X], \mathbb{R}_2[X])$,

$$(T(p))(x) = xp(x) - p(0), \quad \forall p \in \mathbb{R}_1[X].$$

a) Determinaţi o bază ortonormată în $\mathrm{Im}\ T$, folosind produsul scalar din $C^0[-1, 1]$.

b) Calculaţi $T(1 - 2X)$.

6. Se dă transformarea $T \in End(\mathbb{R}^3)$,

$$T(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, -x_3),\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Arătaţi că T este bijectivă şi calculaţi inversa T^{-1} a acesteia;

b) Calculaţi $T(v),\ T^{-1}(v)$ şi $(T^3 - 2T + Id)(v)$, unde $v = (1, 1, 1)$.

5.4.2 Soluţii

1. **a)** Pentru ca T să fie liniară trebuie să arătăm că $\forall k \in \mathbb{R}$ şi $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, avem $\begin{cases} T(x + y) = T(x) + T(y) \\ T(kx) = kT(x) \end{cases}$.

Într-adevăr, obţinem succesiv

$$\begin{aligned}
T(x + y) \quad &= (x_1 + y_1 - x_3 - y_3, x_2 + y_2, 2x_1 + 2y_1 - 2x_3 - 2y_3) = \\
&= ((x_1 - x_3) + (y_1 - y_3), x_2 + y_2, (2x_1 - 2x_3) + (2y_1 - 2y_3)) = \\
&= (x_1 - x_3, x_2, 2x_1 - 2x_3) + (y_1 - y_3, y_2, 2y_1 - 2y_3) = T(x) + T(y) \\
T(kx) \quad &= (kx_1 - kx_3, kx_2, 2kx_1 - 2kx_3) = (k(x_1 - x_3), kx_2, k(2x_1 - 2x_3)) = \\
&= k(x_1 - x_3, x_2, 2x_1 - 2x_3) = kT(x).
\end{aligned}$$

Nucleul şi imaginea unei transformări liniare $T : V \to W$ sunt

$$\mathrm{Ker}\ T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}, \quad \mathrm{Im}\, T = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ a.î } T(v) = w\}.$$

În cazul nostru ecuaţia $T(x) = 0$ în necunoscuta $x \in \mathbb{R}^3$ ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 0 \\ x_3 = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $\mathrm{Ker}\ T = \{(a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. O bază pentru $Ker\ T$ este formată din vectorul $v_1 = (1, 0, 1)$, deci

$$\dim \mathrm{Ker}\, T = 1 \tag{5.1}$$

şi prin urmare defectul lui T este 1. Din relaţia (5.1) rezultă că $\mathrm{Ker}\, T \neq \{0\}$, deci T nu este injectivă.

Acţiunea lui T pe baza canonică $B = \{e_1 = (1,\ 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$, furnizează vectori ai căror coeficienţi relativ la baza B constituie coloanele matricii transformării T relativ la B. Din relaţiile

$$\begin{cases} T(e_1) = T((1, 0, 0)) = (1 - 0,\ 0,\ 2 \cdot 1 - 0) = (1, 0, 2) = e_1 + 2e_3 \\ T(e_2) = T((0, 1, 0)) = (0 - 0,\ 1,\ 0 - 0) = (0, 1, 0) = e_2 \\ T(e_3) = T((0, 0, 1)) = (0 - 1,\ 0,\ 0 - 2 \cdot 1) = (-1,\ 0,\ -2) = -e_1 - 2e_3, \end{cases}$$

se obţin $[T(e_1)]_B = (1, 0, 2)^{\,t}, [T(e_2)]_B = (0, 1, 0)^{\,t}, [T(e_3)]_B = (-1, 0, -2)^{\,t}$, deci matricea căutată este $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Dacă $\{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, atunci vectorii $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ generează subspaţiul vectorial $\operatorname{Im} T$. Extragem dintre aceştia un sistem maximal de vectori liniar independenţi şi vom obţine în acest fel o bază pentru $\operatorname{Im} T$. Deoarece matricea transformării liniare T are pe coloane componentele vectorilor $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ relativ la baza canonică, rezultă că este suficient să calculăm rangul acestei matrice. Aceasta va fi dimensiunea spaţiului $\operatorname{Im} T$, deci rangul lui T. Deoarece $\operatorname{rang} A = 2$, (de exemplu $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$), rezultă că rangul transformării liniare T este 2, o bază în $\operatorname{Im} T$ fiind formată din vectorii $T(e_1) = (1,\ 0,\ 2)$ şi $T(e_2) = (0,\ 1,\ 0)$.

Cum $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, rezultă că $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$, deci T nu este surjectivă, şi deci nici bijectivă.

b) Fie $k \in \mathbb{R}$ şi $p, q \in P_2$. Atunci

$$\begin{aligned}(T(p+q))(x) &= x\int_0^1 (p+q)(t)dt + (p+q)(1) - (p+q)'(0) = \\ &= x\int_0^1 (p(t)+q(t))dt + p(1) + q(1) - p'(0) - q'(0) = \\ &= x\int_0^1 p(t)dt + p(1) - p'(0) + x\int_0^1 q(t)dt + q(1) - q'(0) = \\ &= (T(p))(x) + (T(q))(x) = (T(p)+T(q))(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

deci $T(p+q) = T(p) + T(q), \forall p, q \in P_2$. De asemenea, avem

$$\begin{aligned}(T(kp))(x) &= x\int_0^1 (kp)(t)dt + (kp)(1) - (kp)'(0) = \\ &= x\int_0^1 kp(t)dt + kp(1) - kp'(0) = \\ &= k\left(x\int_0^1 p(t)dt + p(1) - p'(0)\right) = (kT(p))(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

deci $T(kp) = kT(p), \forall p \in P_2, \forall k \in \mathbb{R}$. Fie $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in P_2$. Atunci ecuaţia $T(p) = 0$ revine la

$$\begin{aligned}& x\int_0^1 (a_0 + a_1t + a_2t^2)dt + p(1) - p'(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & x\left(a_0t + a_1\tfrac{t^2}{2} + a_2\tfrac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 + (a_0 + a_1 + a_2) - a_1 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & x\left(a_0 + \tfrac{a_1}{2} + \tfrac{a_2}{3}\right) + a_0 + a_2 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0 \\ a_0 + a_2 = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

cu soluţia $a_0 = -\alpha$, $a_1 = \frac{4\alpha}{3}$, $a_2 = \alpha$. Aşadar $\operatorname{Ker} T = \{\alpha(-1 + \frac{4}{3}X + X^2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. O bază pentru $\operatorname{Ker} T$ este polinomul $p_0 = -1 + \frac{4}{3}X + X^2$, deci

$$\dim \operatorname{Ker} T = 1 \tag{5.2}$$

şi prin urmare defectul lui T este 1. Din relaţia (5.2) rezultă $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$, deci T nu este injectivă.

Acţiunea lui T pe baza canonică $B = \{1, X, X^2\}$ a spaţiului P_2 este dată prin

$$\begin{cases} T(1) = X\displaystyle\int_0^1 dt + 1 - 0 = X + 1, \\ T(X) = X\displaystyle\int_0^1 tdt + 1 - 1 = \dfrac{X}{2}, \\ T(X^2) = X\displaystyle\int_0^1 t^2dt + 1 - 0 = \dfrac{X}{3} + 1. \end{cases}$$

Matricea lui T are pe coloane coeficienţii polinoamelor $T(1)$, $T(X)$, $T(X^2)$ relativ la baza $\{1, X, X^2\}$ a codomeniului P_2. Atunci

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina imaginea lui T, procedând ca la punctul a) vom calcula rangul matricii $A = [T]_B = [T(1), T(X), T(X^2)]_B$. Deoarece $\det A = 0$, dar există un minor nenul de ordin 2 al lui A (de exemplu, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \neq 0$), rezultă că rangul matricei A este 2, acesta fiind şi rangul transformării T.

O bază în $\operatorname{Im} T$ este formată din $\{T(1), T(X)\}$. Cum $\dim P_2 = 3$, rezultă $\operatorname{Im} T \neq P_2$, deci T nu este surjectivă. Cum T nu este nici injectivă şi nici surjectivă rezultă că T nu este bijectivă.

c) Pentru $k, \ell \in \mathbb{R}$ şi $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, avem

$$\begin{aligned} T(kA+\ell B) &= (kA+\ell B)^{\,t} - 2\operatorname{Tr}(kA+\ell B)I_2 = (kA)^{\,t} + (\ell B)^{\,t} - 2(\operatorname{Tr}(kA) + \operatorname{Tr}(\ell B))I_2 = \\ &= k\cdot A^{\,t} + \ell\cdot B^{\,t} - 2k\operatorname{Tr}(A)I_2 - 2\ell\operatorname{Tr}(B)\cdot I_2 = kT(A) + \ell T(B). \end{aligned}$$

Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Atunci ecuaţia $T(A) = 0$ se rescrie

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} - 2(a_1+a_4)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 - 2a_1 - 2a_4 & a_3 \\ a_2 & a_4 - 2a_1 - 2a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -a_1 - 2a_4 = 0, a_3 = 0, a_2 = 0, -2a_1 - a_4 = 0, \end{aligned}$$

şi deci $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Aşadar $\operatorname{Ker} T \subseteq \{0\}$ şi cum incluziunea $\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} T$ este întotdeauna adevărată, rezultă $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, deci T este injectivă şi defectul lui T este $\dim \operatorname{Ker} T = 0$.

Baza canonică a spaţiului $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ este

$$B = \left\{ m_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, m_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Din relaţiile

$$\begin{cases} T(m_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -m_{11} - 2m_{22} \\ T(m_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = m_{21} \\ T(m_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = m_{12} \\ T(m_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2m_{11} - m_{22}, \end{cases}$$

se obţine matricea căutată

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rangul matricii $A = [T]_B = [T(m_{11}), T(m_{12}), T(m_{21}), T(m_{22})]$ este 4 (deoarece $\det A \neq 0$); rezultă că rangul transformării T este 4, o bază în $\operatorname{Im} T$ fiind formată din $T(m_{11}), T(m_{12})$, $T(m_{21}), T(m_{22})$. Cum $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, rezultă că această mulţime este bază şi pentru $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Atunci

$$\operatorname{Im} T = L(T(m_{11}), T(m_{12}), T(m_{21}), T(m_{22})) = M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

deci T este surjectivă. În concluzie T rezultă bijectivă.

Altfel. Folosim teorema conform căreia un endomorfism pe un spaţiu vectorial finit-dimensional V_n este simultan injectiv/surjectiv/bijectiv. În cazul nostru $\dim V_n = \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $n = 4 < \infty$, iar $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, deci T este injectivă, surjectiva şi bijectiva; din surjectivitate rezultă $\operatorname{Im} T = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. **Din oficiu: 1pt.** **a)** Pentru $k, l \in \mathbb{R}$ şi $p, q \in \mathbb{R}_1[X]$, avem

$$\begin{aligned}(T(kp+lq))(x) &= x\int_0^1 (kp+lq)(t)dt + (kp+lq)\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= k\left(x\int_0^1 p(t)dt + p\left(\frac{1}{2}\right)\right) + l\left(x\int_0^1 q(t)dt + q\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= (kT(p)+lT(q))(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

deci $T(kp+lq) = kT(p)+lT(q), \forall k, l \in \mathbb{R}, \forall p, q \in \mathbb{R}_1[X]$ **(1 pt.)** .

b) Nucleul transformării liniare T este

$$\operatorname{Ker} T = \{p \in \mathbb{R}_1[X] \mid T(p) = 0\},$$

Dar $T(p) = 0$ doar dacă $(T(p))(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Considerăm polinomul $p = a_0 + a_1X \in \mathbb{R}_1[X]$. Atunci

$$\begin{aligned}(T(p))(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x\int_0^1 (a_0 + a_1t)dt + a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x\left(a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \left(a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)\left(a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Deoarece această egalitate are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$, vom obţine

$$a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

cu soluţia $a_1 = -2a_0$, deci $p = a_0(1-2x)$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Aşadar

$$\operatorname{Ker} T = \{a_0(1-2X) \mid a_0 \in \mathbb{R}\}, \tag{5.3}$$

deci o bază în $\operatorname{Ker} T$ este formată din polinomul $(1-2X)$ **(1 pt.)** .

Imaginea trasformării liniare T este $\operatorname{Im} T = \{q \in \mathbb{R}_1[X] \mid \exists p \in \mathbb{R}_1[X]$ a.î. $T(p) = q\}$. Fie $q \in \mathbb{R}_1[X]$ şi $p = a_0 + a_1X$. Atunci

$$T(p) = q \quad \Leftrightarrow \quad X\int_0^1 (a_0 + a_1t)dt + a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{2} = q \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad (X+1)(a_0 + \frac{a_1}{2}) = q$. Ecuaţia $T(p) = q$ în necunoscuta $p \in \mathbb{R}_1[X]$ are soluţie doar pentru $q \in L(X+1)$ şi deci

$$\operatorname{Im} T = \{\alpha(1+X) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{5.4}$$

Dar $X+1 \not\equiv 0$ şi prin urmare polinomul $(1+X)$ formează o bază în imaginea lui T **(1 pt.)** .

c) Deoarece o bază în $\operatorname{Ker} T$ este formată din polinomul $(1-2X)$, rezultă $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$, deci T nu este injectivă. Deoarece $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}_1[X]$, T nu este nici surjectivă **(0,5 pt.)** .

d) Avem $\underbrace{\dim Ker}_{1} T + \underbrace{\dim \operatorname{Im}}_{1} T = \underbrace{\dim \mathbb{R}_1[X]}_{2}$ **(0,5 pt.)** .

e) Baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}_1[X]$ este $B = \{1, X\}$, deci pentru a afla matricea transformării liniare T calculăm

$$T(1) = X\int_0^1 dt + 1 = X + 1$$

$$T(X) = X\int_0^1 tdt + \frac{1}{2} = \frac{X}{2} + \frac{1}{2}.$$

În concluzie, matricea transformării liniare T este

$$A = [T]_B = [T(1),\, T(X)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$ **(1 pt.)**

iar T este injectivă dacă şi numai dacă sistemul dat de $T(a_0 + a_1X) = 0 \;\Leftrightarrow\; [T]\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (scris în formă matriceală) este compatibil determinat. Dar, deoarece sistemul este omogen şi $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat, deci T nu este injectivă **(0,5 pt.)** .

Deoarece rangul matricii A este 1, rezultă că rangul transformării T este 1, deci o bază în $\operatorname{Im} T$ este formată dintr-un singur vector $(T(1)$ *sau* $T(X))$. Cum $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$ rezultă $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}_1[X]$, deci T nu este surjectivă **(0,5 pt.)** .

f) Notăm cu $B = \{1, X\}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}_1[X]$ şi

$$B' = \{q_1 = 1 - 2X,\; q_2 = 1 + X\}.$$

Are loc relaţia

$$[T]_{B'} = [B']_B^{-1}[T]_B[B']_B,$$

unde $[B']_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, de unde rezultă $[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ **(1,5 pt.)** .

Altfel. Matricea dorită se poate obţine aşezând pe coloane coeficienţii polinoamelor $\{T(q_1), T(q_2)\}$ relativ la noua bază $B' = \{q_1, q_2\}$ **(1,5 pt.)** .

g) Pentru ca imaginea şi nucleul lui T să fie subspaţii suplementare trebuie să avem $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$ şi $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T = \mathbb{R}_1[X]$.

Fie $p \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$. Din relaţiile (5.3) şi (5.4) rezultă

$$\begin{cases} p = a_0(1 - 2X) \\ p = \alpha(1 + X) \end{cases} \Leftrightarrow a_0 - 2a_0X = \alpha + \alpha X \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \alpha \\ -2a_0 = \alpha \end{cases},$$

deci $a_0 = \alpha = 0$. În concluzie $p \equiv 0$, deci $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T \subseteq \{0\}$ **(0,5 pt.)** . Cum incluziunea inversă $\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$ este banală, avem $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

Folosind teorema Grassmann, avem

$$\dim(\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T) = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T - \dim(\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T) = 1 + 1 - 0 = 2 = \dim \mathbb{R}_1[x].$$

Cum $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}_1[X]$ şi subspaţiul are aceeaşi dimensiune ca spaţiul total, rezultă $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T = \mathbb{R}_1[X]$; deci cele două subspaţii sunt suplementare **(1 pt.)** **Total: 10pt.**.

Altfel. Din $ind\{1 - 2X, 1 + X\}$ şi $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T = L(1 + X) + L(1 - 2X) = L(1 + X, 1 - 2X)$ rezultă că $\{1 - 2X, 1 + X\}$ este bază în $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T$. Dar $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}_1[X]$, deci $\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T = \mathbb{R}_1[X]$ şi $\dim(\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T) = 2$. **(1 pt.)**

Am văzut că se verifică egalitatea $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}_1[X]$. Atunci folosind teorema Grassmann, avem

$$\dim(\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T) = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T) - \dim(\operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T) = 1 + 1 - 2 = 0,$$

deci $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$ şi cele două subspaţii sunt suplementare **(0,5 pt.)** **Total: 10pt.**.

3. a) Dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}^3$ este 3, deci este suficient să demonstrăm că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi (atunci ei vor forma o bază a lui $\mathbb{R}^3$). Dar

$$\det[v_1, v_2, v_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

deci avem $ind\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Înlocuind în relaţiile ce definesc aplicaţia T vectorii v_1, v_2, v_3, w_1 şi w_2, obţinem

$$T((1, 0, 1)) = (0, 1),\; T((0, 3, 1)) = (1, 1),\; T((-1, -1, -1)) = (-1, 0),$$

deci
$$T(e_1+e_3)=f_2,\quad T(3e_2+e_3)=f_1+f_2,\quad T(-e_1-e_2-e_3)=-f_1,$$
unde $B=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ şi $B'=\{f_1=(1,0),\ f_2=(0,1)\}$ reprezintă bazele canonice ale spaţiului $\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R}^2$.

Liniaritatea lui T permite rescrierea acestor relaţii sub forma:
$$\begin{cases} T(e_1)+T(e_3)=f_2\\ 3T(e_2)+T(e_3)=f_1+f_2\\ -T(e_1)-T(e_2)-T(e_3)=-f_1\end{cases} \Leftrightarrow [T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)]\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}=[f_1,f_2]\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix},$$
sistem compatibil în necunoscutele $T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)$, cu soluţia
$$T(e_1)=2f_1-3f_2,\ T(e_2)=f_1-f_2,\ T(e_3)=-2f_1+4f_2,$$
deci matricea căutată este $A=[T]_{B,B'}=[T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)]_{B}'=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-3&-1&4\end{pmatrix}$.

c) Avem
$$[T(x)]_B{}'=[T]_{BB'}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_2-2x_3\\-3x_1-x_2+4x_3\end{pmatrix},$$
deci $T(x)=(2x_1+x_2-2x_3,\ -3x_1-x_2+4x_3),\quad \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

d) T este injectivă dacă şi numai dacă sistemul omogen dat de $[T]_{BB'}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ este compatibil determinat. Se observă că în acest caz rangul matricei $[T]_{BB'}$ fiind strict mai mic decât numărul de coloane sistemul este compatil nedeterminat, deci T nu este injectivă.

Rangul matricii $[T]$ este 2, deci şi rangul transformării T este 2, o bază în $\operatorname{Im}T$ fiind formată din vectorii $T(e_1)=(2,-3)^t$ şi $T(e_2)=(1,-1)^t$. Aceasta este o bază pentru $\mathbb{R}^2$, deci rezultă $\operatorname{Im}T=\mathbb{R}^2$, adică T este surjectivă.

4. a) Pentru $k,l\in\mathbb{R}$ şi $f,g\in C^1(0,1)$, avem
$$\begin{aligned}(T(kf+lg))(x)&=(kf+lg)'(x)=k\cdot f'(x)+l\cdot g'(x)=\\&=k(T(f))(x)+l(T(g))(x),\ \ \forall x\in(0,1)\end{aligned}$$
şi deci $T(kf+lg)=kT(f)+lT(g)$.

b) Nucleul transformării liniare T este
$$\operatorname{Ker}T=\{f\in C^1(0,1)\mid T(f)=0\}.$$
Dar
$$T(f)=0\quad\Leftrightarrow\quad (T(f))(x)=0,\forall x\in(0,1)\quad\Leftrightarrow\quad f'(x)=0,\quad\forall x\in(0,1).$$
În concluzie, $\operatorname{Ker}T$ este mulţimea funcţiilor constante pe intervalul $(0,1)$.

Imaginea transformării liniare T este
$$\operatorname{Im}T=\{g\in C^0(0,1)\mid \exists f\in C^1(0,1)\text{ a.î }\ T(f)=g\}.$$
Dar pentru $g\in C^0(0,1)$, avem
$$T(f)=g\ \Leftrightarrow\ T(f)(x)=g(x),\ \forall x\in(0,1)\ \Leftrightarrow\ f'(x)=g(x),\ \forall x\in(0,1),$$
adică $f(x)=\int g(x)dx+c,\ c\in\mathbb{R}$ şi deci $\exists f\in C^1(0,1)$ a.î $T(f)=g$; rezultă $C^0(0,1)\subset\operatorname{Im}T$. Cum $\operatorname{Im}T\subset C^0(0,1)$, rezultă $\operatorname{Im}T=C^0(0,1)$.

c) Avem $T(f)(x)=1-x^2\ \Leftrightarrow\ f'(x)=1-x^2\ \Leftrightarrow\ f(x)=x-\frac{x^3}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

d) Teorema dimensiunii nu se poate aplica, deoarece $\dim\operatorname{Dom}T=\dim C^1(0,1)=\infty$.

5. a) Deoarece baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}_1[X]$ este $B = \{1, X\}$, pentru a afla imaginea lui T calculăm

$$(T(1))(x) = x - 1, \quad (T(X))(x) = x^2.$$

Deci $\operatorname{Im} T = L(\{X-1, X^2\})$ şi deoarece $\{X-1, X^2\}$ este familie de vectori liniar independentă, rezultă $B' = \{u_1 = X - 1,\ u_2 = X^2\}$ bază în $\operatorname{Im} T$.

Folosind procedeul Gram-Schimdt construim o bază ortogonală $B'' = \{v_1, v_2\}$

$$v_1 = u_1 = X - 1$$
$$v_2 = u_2 - pr_{v_1} u_2 = u_2 - \tfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1.$$

Calculăm

$$\langle u_2, v_1\rangle = \int_{-1}^{1} u_2(x)v_1(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(x-1)dx = -\frac{2}{3},$$
$$\langle v_1, v_1\rangle = \int_{-1}^{1} v_1^2(x)dx = \int_{-1}^{1} (x-1)^2 dx = \frac{8}{3},$$

şi obţinem $v_2 = \frac{1}{4}(4X^2 + X - 1)$. Pentru a găsi o bază ortonormată, calculăm

$$\begin{cases} \|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{\frac{8}{3}} \\ \|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{16}(4x^2 + x - 1)^2 dx} = \sqrt{\frac{7}{30}} \end{cases}$$

şi deci baza căutată este $B''' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right\} = \left\{\sqrt{\frac{3}{8}}\,(X-1), 4\sqrt{\frac{30}{7}} \cdot (4X^2 + X - 1)\right\}$.

b) Obţinem $T(1 - 2X) = X(1 - 2X) - 1 = -2X^2 + X - 1$.

6. a) Nucleul şi imaginea unei transformări liniare $T : V \to W$ sunt respectiv date de:

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in V | T(x) = 0\},\ \operatorname{Im} T = \{y \in W | \exists x \in V \text{ a.î. } T(x) = y\}.$$

În cazul nostru ecuaţia $T(x) = 0$, în necunoscuta $x \in V = \mathbb{R}^3$ ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, deci T este injectivă.

Deoarece $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ este o bază (baza canonică) a lui $\mathbb{R}^3$, rezultă că vectorii $T(e_1) = (1,0,0), T(e_2) = (1,1,0), T(e_3) = (1,1,-1)$ generează subspaţiul vectorial $\operatorname{Im} T$. Deoarece

$$\det[T(B)]_B = \det[T(e_1), T(e_2), T(e_3)]_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

rezultă că vectorii $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ sunt liniar independenţi şi deci formează o bază în $\operatorname{Im} T$. Acesta este o bază şi pentru $\mathbb{R}^3$ (deoarece $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ sunt trei vectori liniar independenţi într-un spaţiu de dimensiune 3), deci rezultă $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$, deci T este surjectivă.

Fiind injectivă şi surjectivă, rezultă T bijectivă, deci există T^{-1}.

Calculăm matricea transformării liniare T^{-1} ca fiind inversa matricei $[T]_B$; obţinem $[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

iar $[T^{-1}(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}$, deci expresia analitică a lui T^{-1} este

$$\begin{aligned} T^{-1}(x) &= (x_1 - x_2)e_1 + (x_2 + x_3)e_2 + (-x_3)e_3 = \\ &= (x_1 - x_2, x_2 + x_3, -x_3), \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

b) $T(v) = T((1,1,1)) = (3,2,-1)$; $T^{-1}(v) = T^{-1}((1,1,1)) = (0,2,-1)$. Pentru a afla valoarea expresiei $(T^3 - 2T + Id)(v)$, calculăm mai întâi $[T^3]_B = [T]_B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de unde rezultă

$$[T^3 - 2T + Id]_B = [T^3]_B - 2[T]_B + [Id]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, $[(T^3 - 2T + Id)(v)]_B = [T^3 - 2T + Id]_B (1,1,1)^{\,t} = (1,-1,2)^{\,t}$ şi deci $(T^3 - 2T + Id)(v) = (1,-1,2)$.

5.5 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1.Să se cerceteze care dintre funcţiile $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite prin:

a) $\mathcal{T}(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}^3,\ a$ fixat;
b) $\mathcal{T}(x) = x + a$;
c) $\mathcal{T}(x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
d) $\mathcal{T}(x) = (x_1, x_2, x_3^2), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$;
e) $\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2)$;
f) $\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2 + k), \quad k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$;

$$\text{g) } \mathcal{T}(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + 7x_2 + 8x_3);$$

sunt transformări liniare.

2. Fie $\mathbb{R}_n[X]$ spaţiul vectorial real al polinoamelor de grad $\leq n$. Să se arate că funcţia $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $(\mathcal{T}p)(x) = p(x+2) - p(x)$ este o transformare liniară.

3. Fie spaţiul vectorial $V = \big\{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \in \mathcal{C}^0[a,b]\big\}$. Să se arate că primitiva

$$P\colon V \to V,\ g = P(f),\ g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b,$$

este liniară.

4. Fie spaţiile vectoriale:

$$V = \big\{f\colon (a,b) \to \mathbb{R} \,|\, f \in \mathcal{C}^1(a,b)\big\}; \qquad W = \big\{g\colon (a,b) \to \mathbb{R} \,|\, g \text{ continuă}\big\}.$$

Să se arate că derivata $D\colon V \to W$, $g = D(f) = f'$ este o transformare liniară. Să se determine $\operatorname{Ker} D$.

5. Pe spaţiul vectorial real P_n al funcţiilor polinomiale de grad cel mult n se defineşte funcţia

$$p(x) \to \mathcal{T}\big\langle p(x)\big\rangle = x\int_0^1 tp(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară şi să se determine $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{T}$.

6. În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii:

$$x = (3,2,-1); \qquad y = (1,-2,1); \qquad z = (1,0,2).$$

a) Să se arate că există o singură formă liniară $\ell\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, astfel încât $\ell(x) = -8$, $\ell(y) = 0$ şi $\ell(z) = 6$.

b) Să se determine o bază a subspaţiului $\operatorname{Ker}\ell$.

7. Fie funcţia $\mathcal{T}\colon V_3 \to V_3$, $\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a}$, unde $\vec{a}$ este fixat şi $a \neq 0$.

a) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

b) Să se găsească $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$, $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ şi să se arate că $\operatorname{Ker}\mathcal{T} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{T} = \mathrm{V}_3$.

8. Să se determine matricea asociată transformării liniare, în raport cu bazele canonice ale spaţiilor, în cazurile:

$$\text{a) } \mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3,\ \mathcal{T}(x) = (ix_1, ix_2, ix_3);\quad \text{b) } \mathcal{T}\colon \mathcal{M}_{3\times 3}(K) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(K),\ \mathcal{T}(A) = {}^tA;$$

$$\text{c) } \mathcal{T}\colon \mathbb{C} \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}),\ \mathcal{T}(x) = \begin{pmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{pmatrix}.$$

9. În spaţiul vectorial real al funcţiilor reale, fiecare dintre mulţimile

$$\{\sin x, \cos x\}, \qquad \{e^{2x}\sin 3x, e^{2x}\cos 3x\}, \qquad \{1, 1-x, 1-x-e^x\}$$

este liniar independentă şi generează un subspaţiu V finit dimensional. Utilizând mulţimile date ca baze pentru V, să se găsească matricea ataşată operatorului de derivare $D\colon V \to V$.

10. Să se determine matricele transformărilor liniare $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ în raport cu baza formată din vectorii $f_1 = (1,2,3)$, $f_2 = (2,1,3)$, $f_3 = (1,1,1)$, ştiind că:

$$\text{a) } T_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{b) } T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \qquad \text{c) } T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

sunt matricele transformărilor respective în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

11. Fie V un spaţiu vectorial real, ${}^CV$ complexificatul său şi $\mathcal{T}\colon V \to V$ un endomorfism. Funcţia ${}^C\mathcal{T}\colon {}^CV \to {}^CV$ definită prin ${}^C\mathcal{T}(u,v) = \big(\mathcal{T}u, \mathcal{T}v\big)$ sau altfel scris ${}^C\mathcal{T}(u+iv) = \mathcal{T}u + i\mathcal{T}v$, se numeşte *complexificatul endomorfismului lui* $\mathcal{T}$.

a) Să se arate că ${}^C\mathcal{T}$ este o transformare liniară care are proprietăţile:

$$\text{i) } {}^C(k\mathcal{T}) = k\,{}^C\mathcal{T},\quad k \in \mathbb{R}; \qquad \text{ii) } {}^C(\mathcal{S}+\mathcal{T}) = {}^C\mathcal{S} + {}^C\mathcal{T};$$

$$\text{iii) } {}^C(\mathcal{S}\mathcal{T}) = {}^C\mathcal{S}\,{}^C\mathcal{T}; \qquad \text{iv) } \big({}^C\mathcal{T}\big)^{-1} = {}^C(\mathcal{T})^{-1},\ \text{dacă } \mathcal{T} \text{ este inversabilă.}$$

b) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n şi $\{(e_1,0), \ldots, (e_n,0)\}$ baza corespunzătoare din ${}^CV$. Să se verifice că matricea ${}^CT$ ataşată lui ${}^C\mathcal{T}$ este egală cu matricea T ataşată lui $\mathcal{T}$.

12. Fie $\mathcal{T}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ o transformare liniară. Prin *reprezentarea reală* a transformării $\mathcal{T}$ înţelegem transformarea liniară reală ${}^R\mathcal{T}\colon {}^R\mathbb{C}^n \to {}^R\mathbb{C}^m$ care coincide punctual cu $\mathcal{T}$, unde ${}^R\mathbb{C}^n$ şi ${}^R\mathbb{C}^m$ sunt trecerile în real ale spaţiilor $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{C}^m$. Se dă

$$\mathcal{T}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ \mathcal{T}(x)(x_1 + ix_2, x_1 + x_3, ix_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3.$$

Să se determine matricea reprezentării reale a lui $\mathcal{T}$ în baza ${}^R\{f_1, f_2, f_3\}$, dacă avem $f_1 = (0, i, 1)$, $f_2 = (0, 1, i)$ şi $f_3 = (1+i, -2, 2)$.

MA.6.Transformari nilpotente. Proiectori

Cuvinte cheie: transformare liniară nilpotentă; involuţie; proiecţie, structură produs, structură tangentă, structură complexă, transformarea adjunctă, matrice adjunctă, matrice transpusă, endomorfisme simetrice, endomorfisme ortogonale, endomorfisme hermitice, endomorfisme unitare, endomorfisme antisimetrice, endomorfisme antihermitice, matrice simetrice, matrice ortogonale, matrice hermitice, matrice unitare.

6.1 Endomorfisme particulare

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K şi $\mathcal{L}(V,V)$ mulţimea tuturor endomorfismelor lui V. Mulţimea $\mathcal{L}(V,V)$ este:

1) un spaţiu vectorial peste câmupl K în raport cu adunarea endomorfismelor şi cu înmulţirea dintre un scalar şi un endomorfism;

2) un inel în raport cu adunarea endomorfismelor şi cu produsul (compunerea) endomorfismelor.

Definiţia 54. Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K. Endomorfismul $\mathcal{F}\colon V \to V$ se numeşte:

1) automorfism, dacă este bijectiv;

2) ***proiecţie***, dacă $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$;

3) ***involuţie*** sau ***structură produs*** dacă $\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}$, unde $\mathcal{J}$ este transformarea identitate;

4) ***structură complexă***, dacă $\mathcal{F}^2 = -\mathcal{J}$;

5) endomorfism nilpotent (***transformare liniară nilpotentă***) de indice p dacă $\mathcal{F}^k \neq \mathbf{0}, \forall k \in \overline{1, p-1}$ şi $\mathcal{F}^p = \mathbf{0}$, unde $p = 2, 3, \dots$ iar $\mathbf{0}$ este transformarea zero. Un endomorfism nilpotent de indice 2 şi de rang maxim posibil se mai numeşte ***structură tangentă***.

Un endomorfism $T : V_n \to V_n$ este automorfism dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = n$, unde A este matricea asociată endomorfismului relativ la o bază oarecare a spaţiului vectorial V_n.

Submulţimea lui $\mathcal{L}(V,V)$ ale cărei elemente sunt automorfismele lui V este notată cu $\mathcal{GL}(V)$. Această submulţime nu este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathcal{L}(V,V)$, deoarece suma a două automorfisme poate să nu fie un automorfism. În schimb, $\mathcal{GL}(V)$ este un grup în raport cu produsul (compunerea) automorfismelor. Grupul $\mathcal{GL}(V)$ se numeşte *grupul liniar general*.

Exemplu. Dacă $\mathcal{F}\colon V_n \to V_n$ are proprietatea că $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} - \mathcal{I}\lceil$, atunci $\mathcal{F}$ este un automorfism. Într-adevăr, fie $A = [a_{ij}]$ matricea asociată lui $\mathcal{F}$ în raport cu o bază din V_n. Relaţia $\mathcal{F}^2 - \mathcal{F} + \mathcal{I}\lceil = \mathbf{0}$ este echivalentă cu egalitatea matriceală $-A^2 + A - I = 0$ sau $A(I - A) = (I - A)A = I$, ceea ce arată că $I - A$ este inversa lui A, deci $\mathcal{F}$ este un automorfism.

Teorema 55. *Dacă $\mathcal{F}\colon V \to V$ este o proiecţie, atunci $V = Ker\mathcal{F} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{F}$.*

Demonstraţie. Fie $v \in V$, $\mathcal{F}(v) \in \mathrm{Im}\mathcal{F}$ şi $w = v - \mathcal{F}(v) \in V$. Rezultă

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}(v - \mathcal{F}(v)) = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}^2(v) = 0,$$

adică $w \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{F}$, deci $V \subset \mathrm{Ker}\,\mathcal{F} + \mathrm{Im}\mathcal{F}$. Dar $\mathrm{Ker}\,\mathcal{F} \subset V$ şi $\mathrm{Im}\mathcal{F} \subset \mathrm{V}$, deci $\mathrm{Ker}\,\mathcal{F} + \mathrm{Im}\mathcal{F} \subset \mathrm{V}$. Prin urmare $V = \mathrm{Ker}\,\mathcal{F} + \mathrm{Im}\mathcal{F}$.

Să arătăm că $\mathrm{Ker}\,\mathcal{F} \cap \mathrm{Im}\mathcal{F} = \{0\}$. Fie $u \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{F} \cap \mathrm{Im}\mathcal{F}$. Apartenenţa $u \in \mathrm{Im}\mathcal{F}$ implică existenţa lui $v \in V$ astfel încât $u = \mathcal{F}(v)$. Apartenenţa $u \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{F}$ implică $0 = \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(v)) = \mathcal{F}(v) = u$. Denumirea de proiecţie provine din interpretarea geometrică a relaţiei $V = \mathrm{Ker}\,\mathcal{F} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{F}$.

Fiind dat $v \in V$, există un singur vector $w \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{F}$ şi un singur vector $u \in \mathrm{Im}\mathcal{F}$, astfel încât $v = w + u$, unde $\mathcal{F}(w) = 0$ şi $\mathcal{F}(v) = u$.

Geometric (figura 2), $\mathcal{F}$ proiectează vectorul $v \in V$ pe subspaţiul $\mathrm{Im}\mathcal{F}$ de-a lungul subspaţiului $\mathrm{Ker}\,\mathcal{F}$.

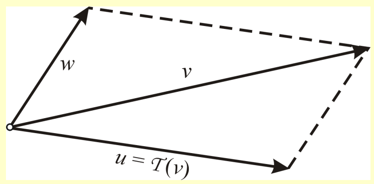

Fig. 2

Dacă $\mathcal{F}$ este o proiecţie, atunci şi $\mathcal{J} - \mathcal{F}$ este o proiecţie. În plus se poate arăta că

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{J} - \mathcal{F}) = \mathrm{Im}\mathcal{F} \quad \text{şi} \quad \mathrm{Im}(\mathcal{J} - \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\,\mathcal{F}.$$

Din aceasta se observă că restricţia lui $\mathcal{F}$ la $\mathrm{Im}\mathcal{F}$ este identitatea pe $\mathrm{Im}\mathcal{F}$, iar restricţia lui $\mathcal{J} - \mathcal{F}$ la $\mathrm{Ker}\,\mathcal{F}$ este identitatea pe $\mathrm{Ker}\,\mathcal{F}$. □

Exemplu. Fie endomorfismul $\mathcal{F}: V \to V$. Să arătăm că endomorfismul $\mathcal{F}_1 = 2\mathcal{F} - \mathcal{J}$ este o involuţie dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este o proiecţie.

Dacă $\mathcal{F}$ este o proiecţie, atunci $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$, de unde rezultă $\mathcal{F}_1^2 = 4\mathcal{F}^2 - 4\mathcal{F} + \mathcal{J} = \mathcal{J}$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}_1$ este o involuţie.

Reciproc, relaţia $\mathcal{F}_1^2 = \mathcal{J}$ implică

$$\mathcal{F}^2 = \frac{1}{4}\mathcal{F}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{J} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{J}) = \mathcal{F},$$

deci $\mathcal{F}$ este o proiecţie.

Teorema 55 se generalizează în felul următor:

Teorema 56. *Dacă* $\mathcal{F}_i: V \to V$, $i = \overline{1,p}$, *sunt proiecţii cu proprietăţile* $\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j = \mathbf{0}$, *pentru* $i \neq j$ *şi* $\sum_{i=1}^{p} \mathcal{F}_i = \mathcal{J}$, *atunci* $V = \mathrm{Im}\mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\mathcal{F}_\mathrm{p}$.

Teorema 57. *Un spaţiu vectorial finit dimensional* V *admite o structură complexă dacă şi numai dacă dimensiunea sa este pară.*

Demonstraţie. Presupunem $\dim V = n = 2m$. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m}\}$ o bază a lui V. Definim o transformare liniară $\mathcal{F}$ prin

$$\mathcal{F}(e_i) = e_{m+i}, \quad \mathcal{F}(e_{m+i}) = -e_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Avem $\mathcal{F}^2(e_\alpha) = -e_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, deci $\mathcal{F}^2 = -\mathcal{J}$, adică $\mathcal{F}$ este o structură complexă.

Reciproc, fie $\mathcal{F}$ o structură complexă pe V. Dacă alegem un vector nenul x_1 din V, atunci se poate arăta că vectorii x_1 şi $\mathcal{F}(x_1)$ sunt liniar independenţi. De asemenea, luând din V un alt vector x_2 cu proprietatea că x_1, x_2 şi $\mathcal{F}(x_1)$ sunt liniar independenţi, deducem uşor că vectorii x_1, x_2, $\mathcal{F}(x_1)$ şi $\mathcal{F}(x_2)$ sunt liniar independenţi. Continuând acest procedeu, obţinem o bază a lui V care conţine un număr par de vectori, adică $\dim V = n = 2m$. □

Observaţie. Matricea ataşată structurii complexe $\mathcal{F}\colon V_{2m} \to V_{2m}$ în raport cu baza

$$\{x_1, \ldots, x_m, \mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_m)\}$$

este $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Teorema 58. *Dacă $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ este un endomorfism nilpotent de indice p şi $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$, astfel încât $\mathcal{T}^{p-1}(x_0) \neq 0$, atunci vectorii $x_0, \mathcal{T}(x_0), \ldots, \mathcal{T}^{p-1}(x_0)$ sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Presupunem că $\sum_{i=0}^{p-1} k_i \mathcal{T}^i(x_0) = 0$, $k_i \in K$, $i = \overline{0, p-1}$. Aplicând succesiv pe $\mathcal{T}$ de $p-1$ ori şi ţinând seama că $\mathcal{T}^p = \mathbf{0}$, iar $\mathcal{T}^{p-1}(x_0) \neq 0$, deducem $k_0 = 0$ şi întorcându-ne, obţinem $k_1 = 0, \ldots, k_{p-1} = 0$. Astfel, vectorii menţionaţi sunt liniar independenţi. □

Observaţie. Dacă $L(S)$ este acoperirea liniară a mulţimii

$$S = \{x_0, \mathcal{T}(x_0), \ldots, \mathcal{T}^{p-1}(x_0)\},$$

atunci există un subspaţiu $U \subset V$, invariant faţă de $\mathcal{T}$, cu $V = U \oplus L(S)$.

Teorema 59. *Dacă $\mathcal{T}\colon V_n \to V_n$ este un endomorfism, atunci există două subspaţii vectoriale $U, W \subset V_n$, invariante faţă de $\mathcal{T}$, astfel încât:*

1) $V_n = U \oplus W$;
2) *restricţia* $\mathcal{T}/_U$ *este nilpotentă;*
3) *restricţia* $\mathcal{T}/_W$ *este inversabilă, dacă* $W \neq \{0\}$.

Demonstraţie. Fie $N_k = \operatorname{Ker}(\mathcal{T}^k)$ şi $R_k = \operatorname{Im}(\mathcal{T}^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Să arătăm că N_k şi R_k sunt subspaţii invariante faţă de $\mathcal{T}$ şi că există un cel mai mic $p \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_p = N_{p+1} = \cdots \quad \text{şi} \quad R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_p = R_{p+1} = \cdots$$

Într-adevăr, dacă $x \in R_k$ şi $y \in V_n$ astfel încât $\mathcal{T}^k(y) = x$, atunci $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}^k(\mathcal{T}(y)) \in R_k$, adică $\mathcal{T}(R_k) \subset R_k$. Analog, $\mathcal{T}(N_k) \subset N_{k-1} \subset N_k$.

În continuare să arătăm că dacă $N_p = N_{p+1}$, atunci rezultă $N_p = N_{p+q}$, $\forall q \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, dacă $x \in N_{p+q}$ rezultă $\mathcal{T}^{p+q}(x) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+1}(\mathcal{T}^{q-1}(x)) = 0$ şi ipoteza $N_p = N_{p+1}$ implică $\mathcal{T}^p(\mathcal{T}^{q-1}(x)) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+q-1}(x) = 0$.

Continuând procedeul, obţinem $\mathcal{T}^p(x) = 0$, ceea ce înseamnă că $x \in N_p$, deci $N_{p+q} \subset N_p$. Aceasta împreună cu $N_p \subset N_{p+q}$ implică $N_p = N_{p+q}$. Analog se tratează cazul lui R_p. În final, obţinem $U = N_p$ şi $W = R_p$.

Să arătăm că $V_n = U \oplus W$. Deoarece $\dim V_n = \dim N_p + \dim R_p$, rămâne să dovedim că $U \cap W = \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x \in U \cap W$, rezultă $x \in U$ şi $x \in W$, adică $\mathcal{T}^p(x) = 0$ şi $x = \mathcal{T}^p(y)$, deci $\mathcal{T}^{2p}(y) = 0$ şi cum $N_{2p} = N_{p+p} = N_p$, rezultă $\mathcal{T}^p(y) = 0$, ceea ce implică $x = 0$.

Să dovedim în continuare că $\mathcal{T}/_U$ este nilpotent de indice p, iar $\mathcal{T}/_W$ este inversabil. Deoarece $\mathcal{T}^p(N_p) = \{0\}$, rezultă că $\mathcal{T}/_U$ este nilpotent de indice p. Apartenenţa $x \in W$ dă $x = \mathcal{T}^p(y)$, deoarece $W = R_p$. Relaţia $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $\mathcal{T}(\mathcal{T}^p(y)) = 0$, adică $\mathcal{T}^p(y) = 0$ şi $x = 0$. Rezultă $\operatorname{Ker}\left(\mathcal{T}/_W\right) = \{0\}$, adică $\mathcal{T}/_W$ este inversabil. □

Exemple:

1) Funcţia $D\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $D(p) = p'$, unde p' este derivata lui p, este un endomorfism nilpotent de indice $n+1$. Într-adevăr, toate derivatele de ordin cel mult n ale unui polinom de grad n sunt nenule, iar dacă p este un polinom de grad cel mult n, atunci derivata de ordinul $n+1$ este identic nulă.

2) $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin matricea

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

este un endomorfism nilpotent de indice 2. Într-adevăr, se constată că $\mathcal{T} \neq \mathbf{0}$ şi $\mathcal{T}^2 = 0$.

6.2 Transformări liniare pe spaţii euclidiene

Fie V şi W două spaţii vectoriale complexe şi euclidiene ale căror produse scalare le notăm la fel. De asemenea, normele induse de produsele scalare pe V şi W le vom nota cu acelaşi simbol.

Considerăm $\mathcal{T}\colon V \to W$ o transformare liniară. Se poate demonstra că egalitatea $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y)$, $\forall x \in W$, $\forall y \in V$, defineşte o transformare liniară unică $\mathcal{T}^*\colon W \to V$.

Definiţia 60. Transformarea liniară $\mathcal{T}^*\colon W \to V$, definită prin

$$(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y), \quad \forall x \in W,\ \forall y \in V,$$

se numeşte ***adjuncta*** lui $\mathcal{T}$.

Definiţia 61. Un endomorfism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ se numeşte:

1) ***endomorfism hermitic***, dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$;

2) ***endomorfism antihermitic***, dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.

Teorema 62. *Un endomorfism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ este hermitic dacă şi numai dacă produsul scalar $(x, \mathcal{T}x)$ este real, $\forall x \in V$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, atunci $(x, \mathcal{T}x) = (\mathcal{T}x, x) = \overline{(x, \mathcal{T}x)}$, unde $\overline{(x, \mathcal{T}x)}$ este conjugatul complex. Deci numărul $(x, \mathcal{T}x)$ este real, $\forall x \in V$.

Reciproc, dacă $(x, \mathcal{T}x)$ este număr real, atunci $(x, \mathcal{T}x) = \overline{(x, \mathcal{T}x)} = \overline{(\mathcal{T}^*x, x)} = (x, \mathcal{T}^*x)$.

Aşadar, $(x, (\mathcal{T} - \mathcal{T}^*)x) = 0$, $\forall x \in V$. Notăm $\mathcal{S} = \mathcal{T} - \mathcal{T}^*$ şi înlocuim pe x cu $x + \alpha y$, α fiind un număr complex arbitrar. Rezultă $(y, \mathcal{S}x) = 0$, $\forall x, y \in V$. Punând $y = \mathcal{S}x$, găsim $\mathcal{S}x = 0$, $\forall x \in V$, adică $\mathcal{S} = 0$ sau $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. □

Exemplu. Funcţia $\mathcal{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathcal{T}(x) = (x_1 + ix_2, -ix_1 + x_2)$, cu $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ este un endomorfism hermitic.

Întradevăr, avem

$$(\mathcal{T}x,x)=(x_1+ix_2)\overline{x_1}+(-ix_1+x_2)\overline{x_2}=|x_1|^2+ix_2\overline{x_1}-ix_1\overline{x_2}+|x_2|^2=$$
$$=|x_1|^2+ix_2\overline{x_1}+\overline{ix_2\overline{x_1}}+|x_2|^2,$$

care este real, deoarece $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$, dacă $z\in\mathbb{C}$. Astfel, T este un endomorfism hermitic.

Teorema 63. *Fie endomorfismele hermitiene $\mathcal{T},\mathcal{S}\in\mathcal{L}(V,V)$ şi $k\in\mathbb{R}$.*

1) *Endomorfismul $k\mathcal{T}+\mathcal{S}$ este hermitic.*
2) *Dacă endomorfismul $\mathcal{T}$ este inversabil, atunci şi endomorfismul $\mathcal{T}^{-1}$ este hermitic.*
3) *Endomorfismul $\mathcal{T}\mathcal{S}$ este hermitic dacă şi numai dacă $\mathcal{T}\mathcal{S}=\mathcal{S}\mathcal{T}$.*

Demonstraţie. Afirmaţia 1) este evidentă având în vedere că $(\mathcal{T}+\mathcal{S})^*=\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^*$ şi $(k\mathcal{T})^*=k\mathcal{T}^*$.

2) Rezultă din $(\mathcal{T}^{-1})^*=(\mathcal{T}^*)^{-1}$.

3) Presupunem că endomorfismul $\mathcal{T}\mathcal{S}$ este hermitic, adică $(\mathcal{T}\mathcal{S})^*=\mathcal{T}\mathcal{S}$. Pe de altă parte, $(\mathcal{T}\mathcal{S})^*=\mathcal{S}^*\mathcal{T}^*=\mathcal{S}\mathcal{T}$, deci $\mathcal{T}\mathcal{S}=\mathcal{S}\mathcal{T}$. Reciproca este evidentă. □

Definiţia 64. O transformare liniară $\mathcal{T}\colon V\to W$ se numeşte ***unitară*** dacă păstrează produsul scalar, adică $\langle\mathcal{T}x,\mathcal{T}y\rangle=\langle x,y\rangle$, $\forall x,y\in V$.

Teorema 65. *Transformarea liniară $\mathcal{T}\colon V\to W$ este unitară dacă şi numai dacă păstrează norma, adică $||\mathcal{T}x||=||x||$, $\forall x\in V$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}$ este unitară, atunci $\langle\mathcal{T}x,\mathcal{T}y\rangle=\langle x,y\rangle$, $\forall x,y\in V$. În particular, pentru $y=x$ avem $\langle\mathcal{T}x,\mathcal{T}x\rangle=\langle x,x\rangle$, adică $||\mathcal{T}x||^2=||x||^2$, deci $||\mathcal{T}x||=||x||$.

Reciproc, dacă $||\mathcal{T}x||=||x||$, $\forall x\in V$, atunci folosind egalitatea

$$(x,y)=\frac{1}{4}\big(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2\big),$$

avem

$$(\mathcal{T}x,\mathcal{T}y)=\frac{1}{4}\big(||\mathcal{T}(x+y)||^2-||\mathcal{T}(x-y)||^2+i||\mathcal{T}(x+iy)||^2-i||\mathcal{T}(x-iy)||^2\big)=(x,y),$$

deci $\mathcal{T}$ este unitară. □

Observaţie. Condiţia $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}y)=(x,y)$ este echivalentă cu $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}=\mathcal{J}$, deci putem spune că $\mathcal{T}$ este unitar dacă şi numai dacă $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}=\mathcal{J}$.

Teorema 66. *Orice transformare unitară $\mathcal{T}\colon V\to W$ este injectivă.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}$ este unitară, atunci $||\mathcal{T}x||=||x||$, adică $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=(x,x)$. Din $\mathcal{T}x=0$ rezultă $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=0$, adică $(x,x)=0$, care implică $x=0$. Rezultă $\operatorname{Ker}\mathcal{T}=\{0\}$, deci $\mathcal{T}$ este injectivă. □

Presupunem că V şi W sunt n-dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată. Transformării liniare $\mathcal{T}: V \to W$ i se ataşează matricea T. Matricea $T^* = {}^t\bar{T}$ ataşată lui $\mathcal{T}^*$ se numeşte ***adjuncta*** matricei T.

Dacă $T = {}^t\bar{T}$, atunci matricea pătratică T se numeşte *hermitică*. Dacă $T = -{}^t\bar{T}$, atunci matricea pătratică T se numeşte *antihermitică*. O matrice pătratică T cu proprietatea $TT^* = I$, unde I este matricea unitate, se numeşte *matrice unitară*.

Teorema 67. *Un endomorfism $\mathcal{T}: V_n \to V_n$ este hermitic dacă şi numai dacă matricea lui într-o bază ortonormată este hermitică.*

Demonstraţie. Fie $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V_n$, baza ortonormată faţă de care matricea lui $\mathcal{T}$ este $T = [tij]$. Prespunem că endomorfismul $\mathcal{T}$ este hermitic. Din $\mathcal{T}e_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}e_k$, prin înmulţire scalară cu e_i, obţinem

$$\langle \mathcal{T}e_j, e_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{kj}e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\langle e_k, e_i\rangle = t_{ij}$$

şi analog $\langle \mathcal{T}^*e_j, e_i\rangle = t^*_{ij}$. Dar

$$\langle \mathcal{T}^*e_j, e_i\rangle = \langle e_j, \mathcal{T}e_i\rangle = \overline{\langle \mathcal{T}e_i, e_j\rangle} = \overline{t_{ij}}.$$

Deci $t^*_{ij} = \overline{t_{ji}}$ şi cum $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, rezultă $t_{ij} = \overline{t_{ji}}$, adică $T ={}^t \overline{T}$.

Reciproc, dacă $T ={}^t \overline{T}$, avem

$$\langle x, \mathcal{T}x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_je_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathcal{T}e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{x_k}\langle e_j, \mathcal{T}e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{x_k}\overline{\langle \mathcal{T}e_k, e_j\rangle} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{x_k}\overline{t_{jk}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{x_k}t_{kj} = \overline{\langle x, \mathcal{T}x\rangle},$$

adică $\langle x, \mathcal{T}x\rangle \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{T}$ este hermitic. □

Condiţia ca baza să fie ortonormată este esenţială şi vom ilustra acest lucru prin exemplul următor.

Exemplu. Fie endomorfismul $\mathcal{T}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, în baza $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (1, 1)$. Deoarece ${}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq A$, matricea A nu este hermitică şi totuşi endomorfismul $\mathcal{T}$ este hermitic. Să găsim matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ a lui $\mathbb{C}^2$, care este o bază ortonormată. Avem $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, deci $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ este matricea de trecere. Matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică, pe care o notăm prin B, este

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = {}^t\bar{B}.$$

Observaţie. Un endomorfism $\mathcal{T}: V_n \to V_n$ este unitar dacă şi numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată a spaţiului este unitară.

Exemplu. Funcţia $\mathcal{T}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$\mathcal{T}(x) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha), \quad x = (x_1, x_2),\ \alpha \in [0, 2\pi],$$

este un endomorfism unitar deoarece matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică ortonormată $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ este unitară.

Într-adevăr avem $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, iar $T^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, aşadar $TT^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

În continuare presupunem că V şi W sunt două spaţii vectoriale reale şi euclidiene ale căror produse scalare (respectiv norme) le notăm la fel. Fie $\mathcal{T}: V \to W$ o transformare liniară.

Definiţia 68. Tranformarea liniară $\mathcal{T}^*: W \to V$ definită prin

$$(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y), \quad \forall x \in W,\ \forall y \in V,$$

se numeşte ***transpusa*** lui $\mathcal{T}$.

Definiţia 69. Endomorfismul $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ se numeşte:
1) ***endomorfism simetric***, dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$;
2) ***endomorfism antisimetric***, dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.

Definiţia 70. Transformarea liniară $\mathcal{T}: V \to W$ se numeşte ***ortogonală*** dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (x, y)$, $\forall x, y \in V$. Evident, păstrarea produsului scalar este echivalent cu conservarea normei, adică $||\mathcal{T}x|| = ||x||$, $\forall x \in V$.

Dacă admitem V şi W finit dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată, atunci transformării $\mathcal{T}$ i se ataşează matricea T, iar lui $\mathcal{T}^*$ matricea ${}^tT$. Unui endomorfism simetric îi corespunde o ***matrice simetrică***, iar unui endomorfism antisimetric îi corespunde o ***matrice antisimetrică***. Unui endomorfism ortogonal îi corespunde o ***matrice ortogonală***.

Observaţie. Transformările simetrice, respectiv antisimetrice, au proprietăţi analoage proprietăţilor transformărilor hermitiene, respectiv antihermitiene. Transformările ortogonale au proprietăţi analoage proprietăţilor transformărilor unitare.

6.3 Exerciţii/probleme rezolvate

6.3.1 Enunţuri

1. Dacă A este matricea ataşată unei transformări liniare T relativ la o bază ortonormată, arătaţi că T are proprietatea indicată.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $T \in End(\mathbb{C}^2)$ - hermitică;

b) $A = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$, $T \in End(\mathbb{C}^2)$ - hermitică;

c) $A = \begin{pmatrix} ia & z \\ -\bar{z} & ib \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$, $T \in End(\mathbb{C}^2)$ - antihermitică;

d) $A = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$, $u, v \in \mathbb{C}, |u|^2 + |v|^2 = 1$, $T \in End(\mathbb{C}^2)$ - unitară;

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T \in End(\mathbb{R}^2)$ (simetria faţă de bisectoarea I) - simetrică;

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T \in End(\mathbb{R}^2)$ (rotaţie de unghi drept în sens trigonometric) - antisimetrică, structură complexă, ortogonală;

g) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $T \in End(\mathbb{R}^2)$ (rotaţie plană în jurul originii în sens trigonometric de unghi α) - ortogonală;

h) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $T \in End(\mathbb{R}^2)$ - proiecţie pe subspaţiul $L(v = (1,1))$;

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T \in End(\mathbb{R}^3)$ - operator nilpotent de ordinul trei.

2. Arătaţi că aplicaţia

a) $T(A) = A^t, \forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), T \in End(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ este simetrică;

b) $T \in End(V)$, $T(f) = f', \forall f \in V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b), \forall k \geq 0\}$ este antisimetrică relativ la produsul scalar din $C^0([a,b])$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

6.3.2 Soluţii

1. **Din oficiu: 1pt.** **a)** Baza canonică $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ este ortonormată, deci endomorfismul T este transformare hermitică dacă matricea sa $A = [T]_B$ satisface relaţia $A = \bar{A}^t$. Această egalitate se verifică în acest caz deoarece: $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-i} \\ \bar{i} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A$ **(1 pt.)** .

b) Deoarece $a, b \in \mathbb{R}$, rezultă $\bar{a} = a$ şi $\bar{b} = b$, deci avem $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{\bar{z}} \\ \bar{z} & \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & b \end{pmatrix} = A$ **(1 pt.)** .

c) Avem $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} \overline{ia} & \overline{\overline{-z}} \\ \bar{z} & \overline{ib} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ia & -z \\ \bar{z} & -ib \end{pmatrix} = -A$, deci endomorfismul T este antihermitic **(1 pt.)** .

d) Endomorfismul T este unitar dacă $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_2$, unde $A^* = \bar{A}^t$. Avem $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ -\bar{\bar{v}} & \bar{\bar{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ -v & u \end{pmatrix}$ şi deci $A \cdot A^* = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ -v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u|^2+|v|^2 & 0 \\ 0 & |v|^2+|u|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Analog se verifică egalitatea $A^* \cdot A = I_2$ **(1 pt.)** .

e) Endomorfismul real T se numeşte simetric dacă matricea sa $A = [T]_B$ relativ la baza ortonormată canonică $B = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ satisface relaţia $A = A^t$. Evident, în cazul nostru această relaţie este satisfăcută **(1 pt.)** .

f) Endomorfismul T este antisimetric deoarece $A = -A^t$ (ceea ce se poate verifica uşor). T se numeşte structură complexă dacă $A^2 = -I_2$; avem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. Deoarece $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ şi analog $A^t \cdot A = I_2$. Rezultă T endomorfism ortogonal **(1 pt.)** .

g) Avem

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = I_2$$

şi analog $A^t \cdot A = I_2$, deci T este ortogonal **(1 pt.)** .

h) Endomorfismul T se numeşte proiecţie dacă $A^2 = A$. Dar $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A$, deci T este o proiecţie **(1 pt.)** .

i) T este operator nilpotent de ordinul trei dacă $A^3 = 0_{M_{3\times 3}(\mathbb{R})}$, egalitate care se verifică **(1 pt.)** **Total: 10pt.**.

2. **a)** Se foloseşte produsul scalar $\langle A, B\rangle$=Tr $\langle A \cdot {}^tB\rangle$, $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Dacă endomorfismul real T are proprietatea $T = T^*$, adică $\langle TA, B\rangle = \langle A, TB\rangle$, $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$, atunci T se numeşte transformare simetrică.

În acest caz, folosind proprietăţile urmei $Tr(C) = Tr(C^t), Tr(AB) = Tr(BA)$, avem $\langle TA, B\rangle = \langle A^t, B\rangle = Tr\langle A^t \cdot B^t\rangle = Tr(BA)^t = Tr(BA) = Tr(AB) = Tr(A^t \cdot B^t)$= $\langle A, B^t\rangle = \langle A, TB\rangle$, deci T este simetrică relativ la produsul scalar canonic pe $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Se foloseşte produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$, $\forall f, g \in C^0[a,b] \supset V$.

Fie $f, g \in V$. Folosind integrarea prin părţi şi egalităţile $f(a) = f(b), g(a) = g(b)$, obţinem:

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \int_a^b (T(f)(x))g(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx \;=\; f(x)g(x)|_a^b \;-\; \int_a^b f(x)g'(x)dx = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)(T(g)(x))dx = 0 - \langle f, Tg\rangle = -\langle f, Tg\rangle,\end{aligned}$$

deci transformarea liniară este antisimetrică relativ la produsul scalar canonic pe $C^0[a, b] \supset V$.

6.4 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1.1. Să se arate că transformările liniare asociate matricelor

$$T_1 = \begin{pmatrix} 27 & 18 & 27 \\ -21 & -14 & -21 \\ -12 & -8 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sunt proiecţii.

2. Fie V_2 spaţiul vectorial al vectorilor legaţi în originea O, identificat cu mulţimea punctelor din plan şi fie $\mathcal{T}: V_2 \to V_2$ transformarea liniară definită prin $\mathcal{T}(\vec{a}) = \vec{b}$ şi $\mathcal{T}(\vec{b}) = \vec{c}$, unde $A(\vec{a})$ şi $B(\vec{b})$ sunt două puncte fixe necoliniare cu $O(0)$, iar $C(\vec{c})$ un punct din plan. Să se determine $C(\vec{c})$, astfel încât:

a) $\mathcal{T}$ să fie o proiecţie; b) $\mathcal{T}$ să fie o involuţie.

3. Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este o matrice nilpotentă de ordinul 3.

4. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul care transformă vectorii:

$$v_1 = (0, 0, 1); \qquad v_2 = (0, 1, 1); \qquad v_3 = (1, 1, 1)$$

în vectorii:

$$w_1 = (1, 2, 1); \qquad w_2 = (3, 1, 2); \qquad w_3 = (7, -1, 4).$$

Să se determine matricea lui $\mathcal{T}^*$, transpusa lui $\mathcal{T}$, în baza ortonormată $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

5. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ endomorfismul definit prin matricea

$$T = \begin{pmatrix} 3 + 2i & 2 - 2i \\ 1 - i & 3 + 4i \end{pmatrix}$$

în baza canonică a lui $\mathbb{C}^2$. Să se găsească endomorfismele hermitiene $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ cu proprietatea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + i\mathcal{T}_2$.

MA.7.Izometrii

Cuvinte cheie: izometrii, translaţii, transformări ortogonale, rotaţii, simetrii, izometrie pozitivă, izometrie negativă.

Fie V un spaţiu vectorial euclidian real. Transformările ortogonale pe V au proprietăţile că păstrează distanţa euclidiană şi au drept punct fix originea.

Să introducem acum o altă funcţie pe V care păstrează distanţa euclidiană.

Definiţia 71. Funcţia $\mathcal{T}\colon V \to V$ definită prin $\mathcal{T}(x) = x + a$, $a \in V$, unde a este fixat, se numeşte ***translaţia*** de vector a.

Teorema 72. 1) *Dacă $\mathcal{T}_1$ este translaţia de vector a_1 şi $\mathcal{T}_2$ este translaţia de vector a_2, atunci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translaţia de vector $a_1 + a_2$.*

2) *Dacă $\mathcal{T}$ este translaţia de vector a, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există şi este translaţia de vector $-a$.*

Demonstraţie. 1) Fie $\mathcal{T}_1$ translaţia de vector a_1 şi $\mathcal{T}_2$ translaţia de vector a_2. Produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ este translaţia de vector $a_1 + a_2$. Analog, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translaţia prin $a_2 + a_1$, deci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \text{id}$ pe V. □

Rezultă că produsul (compunerea) defineşte pe mulţimea tuturor translaţiilor lui V o structură de grup comutativ (*grupul translaţiilor*). Acest grup este izomorf cu grupul aditiv comutativ V.

Teorema 73. *Translaţia păstrează distanţa euclidiană, adică*

$$d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

Demonstraţie. Succesiv găsim

$$d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = ||(y + a) - (x + a)|| = ||y - x|| = d(x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

□

Definiţia 74. O funcţie surjectivă $\mathcal{F}\colon V \to V$ care păstrează distanţa euclidiană, adică

$$d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in V,$$

se numeşte ***izometrie***.

Orice izometrie este injectivă, deci bijectivă.

Transformările ortogonale - transformările liniare F care conservă produsul scalar, deci care au proprietatea

$$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in V, \tag{7.1}$$

precum şi translaţiile sunt izometrii. De asemenea, se dovedeşte uşor că produsul a două izometrii este o izometrie. În cazul finit dimensional, dacă $F : V \to V$ ($\dim V = n$), este o transformare ortogonală iar A este matricea lui F relativ la o bază ortonormată a lui V, din relaţia (7.1) rezultă uşor că are loc proprietatea ${}^tAA = I_n$, de unde, folosind proprietăţile determinantului reziultă

$$\det({}^tAA) = \det I_n \Leftrightarrow \det({}^tA)\det(A) = \det(I_n) \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det a \in \{\pm 1\}.$$

Deci determinantul matricei unei transformări ortogonale relativ la o bază ortonormată poate lua doar valorile $+1$ (caz în care $\mathcal{T}$ spunem că este ***rotaţie***), sau -1 (caz în care $\mathcal{T}$ spunem că este ***simetrie***) şi scriem $\det(\mathcal{T}) = 1$, respectiv $\det(\mathcal{T}) = -1$.

Teorema 75. *O izometrie $\mathcal{F}\colon V \to V$ cu proprietatea $\mathcal{F}(0) = 0$ este o transformare ortogonală.*

Demonstraţie. Să arătăm că $\mathcal{F}$ păstrează norma

$$||x|| = ||x - 0|| = d(0, x) = d(\mathcal{F}(0), \mathcal{F}(x)) = d(0, \mathcal{F}(x)) = ||\mathcal{F}(x) - 0|| = ||\mathcal{F}(x)||, \quad \forall x \in V.$$

Utilizând acest rezultat putem dovedi că $\mathcal{F}$ păstrează produsul scalar. Avem $d\big(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\big) = d(x, y)$, ceea ce este echivalent cu $||\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)|| = ||y - x||$, dacă şi numai dacă $\big\langle \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)\big\rangle = \langle y - x, y - x\rangle$, deci

$$\big\langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\big\rangle = (x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

Rămâne să dovedim că orice izometrie care păstrează produsul scalar este o transformare liniară. Avem $\big\langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle$, de unde rezultă

$$\big\langle \mathcal{F}(kx), \mathcal{F}(y)\big\rangle = \langle kx, y\rangle = k\langle x, y\rangle = k\big\langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\big\rangle = \big\langle k\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\big\rangle,$$

deci

$$\big\langle \mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\big\rangle = 0, \quad \forall \mathcal{F}(y),\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

Punem $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x)$ şi din pozitivitatea produsului scalar rezultă că $\mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x) = 0$, adică $\mathcal{F}$ este omogenă. Pe de altă parte avem

$$\Big\langle \mathcal{F}(x+y), \mathcal{F}(z)\Big\rangle = \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \Big\langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(z)\Big\rangle + \Big\langle \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)\Big\rangle = \Big\langle \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)\Big\rangle,$$

aşadar

$$\big\langle \mathcal{F}(x+y) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)\big\rangle = 0, \quad \forall \mathcal{F}(z),$$

deci $\mathcal{F}(x+y) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y) = 0$, adică $\mathcal{F}$ este aditivă. □

Teorema 76. *Dacă $\mathcal{F}$ este o izometrie, atunci există o translaţie $\mathcal{T}$ şi o transformare ortogonală $\mathcal{R}$, astfel încât $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{T}$ translaţia prin $\mathcal{F}(0)$ şi $\mathcal{T}^{-1}$ translaţia prin $-\mathcal{F}(0)$. Funcţia $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o izometrie care păstrează pe 0. Conform teoremei 75, izometria $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o transformare ortogonală $\mathcal{R}$. Deci $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{R}$ sau $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$. □

Compunerea defineşte pe mulţimea tuturor izometriilor lui V o structură de grup.

Presupunem $\dim V = n$. Dacă $\{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază ortonormată şi $\mathcal{R}$ este o transformare ortogonală pe V, atunci şi $\{\mathcal{R}(e_1), \dots, \mathcal{R}(e_n)\}$ este o bază ortonormată. Reciproc, dacă în V sunt date două baze ortonormate, atunci există o singură transformare ortogonală care ne duce de la o bază la alta.

Fie $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ o izometrie pe spaţiul n-dimensional V. Dacă $\det \mathcal{R} = 1$, atunci $\mathcal{F}$ se numeşte ***izometrie pozitivă***, iar dacă $\det \mathcal{R} = -1$, atunci $\mathcal{F}$ se numeşte ***izometrie negativă***.

Aplicaţie. Punctele $M(x, y, z)$ raportate la reperul cartezian $Oxyz$ verifică ecuaţia

$$g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 14y + 4z + 1 = 0.$$

Ne propunem să găsim ecuaţia verificată de coordonatele (x', y', z') ale acestor puncte faţă de reperul $O'x'y'z'$ obţinut din cel iniţial printr-o translaţie în punctul $O'(3, -1, -2)$. Formulele care dau translaţia sunt $x = x' + 3$, $y = y' - 1$ şi $z = z' - 2$. Înlocuind pe x, y şi z în ecuaţia dată, găsim $x'^2 + 3y'^2 + 4y'z' - 19 = 0$.

Ecuaţia $g(x, y, z) = 0$ reprezintă o cuadrică cu centru. Punctul O' reprezintă centrul de simetrie al cuadricei. Ecuaţia cuadricei raportată la sistemul translatat $O'x'y'z'$ s-a simplificat deoarece au dispărut termenii liniari, iar termenul liber a căpătat valoarea $g(3, -1, -2) = -19$.

7.1 Problemă rezolvată

Fie V un spaţiu euclidian. Se dă translaţia T_v de vector v, $T_v : V \to V$, $T_v(x) = x + v$, $\forall x \in V$, unde $v \in V$.
a) Arătaţi că T_v este liniară doar în cazul $v = 0$; în acest caz verificaţi că $T_v = Id$.
b) Pentru $v \neq 0$ arătaţi că T_v nu conservă nici produsul scalar, nici norma.
c) Verificaţi că T_v este surjectivă şi conservă distanţa (deci este o izometrie).

Soluţie. **Din oficiu: 1pt.** **a)** T_v este liniară dacă $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V$. Avem

$$T_v(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y + v, \alpha T_v(x) + \beta T_v(y) = \alpha(x + v) + \beta(y + v) = \alpha x + \beta y + \alpha v + \beta v,$$

deci T_v este liniară dacă şi numai dacă $v = \alpha v + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\alpha + \beta - 1)v = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, condiţie echivalentă cu $v = 0$ **(2 pt.)** . Evident, pentru $v = 0$, obţinem $T_v = Id$, unicul caz în care T_v este liniară **(1 pt.)** .

b) Fie $v \neq 0$. Se ştie că $T = T_v$ conservă produsul scalar dacă $\forall x, y \in V$ avem

$$\begin{aligned} \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad &\Leftrightarrow \langle x + v, y + v\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle + \langle x, v\rangle + \langle v, y\rangle + \langle v, v\rangle = \langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, v\rangle + \langle v, y\rangle + \langle v, v\rangle = 0, \end{aligned}$$

relaţie ce trebuie să aibă loc pentru orice $x, y \in V$ **(1 pt.)** . Dar pentru $x = y = v$ obţinem

$$3\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow 3\|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

în contradicţie cu presupunerea $v \neq 0$; deci T nu conservă produsul scalar **(1 pt.)** . De asemenea, $T = T_v$ nu conservă norma pentru $v \neq 0$, deoarece

$$\|T_v(v)\| = \|2v\| = 2\|v\| \neq \|v\|,$$

şi deci relaţia $\|T_v(x)\| = \|x\|, \forall x \in V$ nu are loc **(1 pt.)** .

c) Se observă că $\forall y \in V$, avem $T_v(y - v) = y$, deci T_v este surjectivă **(1 pt.)** . De asemenea, se observă că aplicaţia $T = T_v$ conservă distanţa dacă $d(T_v(x), T_v(y)) = d(x, y), \forall x, y \in V$, unde $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in V$ **(1 pt.)** . Avem

$$d(T_v(x), T_v(y)) = \|T(x) - T(y)\| = \|(x + v) - (y + v)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

deci $T = T_v$ conservă distanţa indusă de norma dată de produsul scalar **(1 pt.)** **Total: 10pt.**.

Observaţie. Dacă $|| \cdot ||$ este o normă oarecare pe V, se poate arăta analog că $T = T_v$ conservă distanţa indusă de $|| \cdot ||$.

7.2 Probleme propuse

1. Se dă aplicţia $\mathcal{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}(x,y)=(x+1,y-2),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

a) Arătaţi că $\mathcal{T}$ este o translaţie.

b) Verificţi că $\mathcal{T}$ este o izometrie şi aflaţi expresia analitică (în coordonate) a aplicaţiei $\mathcal{T}^{-1}$.

c) Să se scrie $\mathcal{T}$ ca o compunere de două simetrii distincte. **2**. Fie $\mathcal{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ endomorfismul definit prin matricea

$$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

a) Să se arate că endomorfismul $\mathcal{T}$ este ortogonal şi surjectiv.

b) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o rotaţie.

c) Pentru $\theta=\pi/3$, să se scrie $\mathcal{T}$ ca o compunere de două simetrii distincte.

MA.8.Valori şi vectori proprii

Cuvinte cheie: vector propriu, subspaţiu propriu, valoare proprie, spectrul unui endomorfism, polinom caracteristic, ecuaţie caracteristică, sistem caracteristic.

8.1 Valori şi vectori proprii

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $\mathcal{A}\colon V \to V$ un endomorfism pe V. Reamintim că

$$\mathcal{A}(0) = 0, \quad Ker\mathcal{A} = \{x \in V : \ \mathcal{A}x = 0\}; \quad Im\mathcal{A} = \{y \in V : \exists\, x \in V \text{ astfel încât } y = \mathcal{A}x\}.$$

Ne propunem să analizăm ecuaţia $\mathcal{A}x = \lambda x$.

Definiţia 77. Un vector $x \in V \setminus \{0\}$ se numeşte ***vector propriu*** al endomorfismului dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $\mathcal{A}x = \lambda x$. Scalarul λ se numeşte ***valoare proprie*** a lui $\mathcal{A}$ corespunzătoare vectorului propriu x. Mulţimea tuturor valorilor proprii ale endomorfismului $\mathcal{A}$ poartă numele de ***spectrul*** lui $\mathcal{A}$.

Ecuaţia $\mathcal{A}x = \lambda x$, cu $x \neq 0$, este echivalentă cu $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J})$, $x \neq 0$, unde $\mathcal{J}$ este endomorfismul identitate. În particular, vectorii nenuli din $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ sunt vectori proprii ai lui $\mathcal{A}$ ataşaţi valorii proprii 0. De asemenea, se observă că dacă x este un vector propriu al lui $\mathcal{A}$, atunci pentru fiecare $k \in K \setminus \{0\}$, vectorul kx este propriu.

Teorema 78. 1) *La un vector propriu al lui $\mathcal{A}$ îi corespunde o singură valoare proprie.*

2) *Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenţi.*

3) *Fie $\lambda \in K$ o valoare proprie a endomorfismului $\mathcal{A}$. Mulţimea*

$$S(\lambda) = \big\{x \,|\, \mathcal{A}x = \lambda x, \ x \in V\big\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui V, invariant faţă de $\mathcal{A}$, adică $\mathcal{A}(S) \subseteq S$.

Subspaţiul $S(\lambda)$ poate fi finit sau infinit dimensional şi se numeşte ***subspaţiul propriu*** ataşat lui λ.

Demonstraţie. 1) Fie x un vector propriu corespunzător valorii proprii λ, adică $\mathcal{A}x = \lambda x$, $x \neq 0$. Dacă ar exista $\lambda' \in K$ astfel încât $\mathcal{A}x = \lambda' x$, $x \neq 0$, atunci $\lambda x = \lambda' x$, $x \neq 0$. De aici găsim $(\lambda - \lambda')x = 0$, $x \neq 0$, deci $\lambda = \lambda'$.

2) Fie $x_1, \ldots, x_p$ vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$, corespunzători la valorile proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Procedăm prin inducţie după $p \in \mathbb{N}$. Pentru $p = 1$, proprietatea este evidentă deoarece vectorul propriu este diferit de vectorul nul. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru $p - 1$ vectori. Din relaţia

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_{p-1}x_{p-1} + k_px_p = 0,$$

rezultă $\mathcal{A}(k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_px_p) = 0$, deci $k_1\lambda_1x_1 + k_2\lambda_2x_2 + \cdots + k_p\lambda_px_p = 0$. Prin multiplicare şi diferenţă găsim

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \cdots + k_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0,$$

care, împreună cu ipoteza de inducţie, dă $k_1 = k_2 = \cdots = k_{p-1} = 0$. Rezultă $k_px_p = 0$, deci $k_p = 0$.

3) Pentru orice $x, y \in S(\lambda)$ şi $k, \ell \in K$, găsim

$$\mathcal{A}(kx + \ell y) = k\mathcal{A}(x) + \ell\mathcal{A}(y) = k\lambda x + \ell\lambda y = \lambda(kx + \ell y),$$

deci $kx + \ell y \in S(\lambda)$, adică $\mathcal{A}(S(\lambda)) \subseteq S(\lambda)$. □

Exemplu. Fie spaţiul vectorial real $V = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty\}$. Endomorfismul

$$\mathcal{S}\colon V \to V,\ \mathcal{S}(f(x)) = \left[(x^2-1)f'(x)\right]', \quad \forall x \in [-1,1],$$

se numeşte *operatorul Sturm-Liouville*. Să arătăm că $\lambda_n = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, sunt valori proprii, iar polinoamele

$$x \to P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \quad n \in \mathbb{N},$$

sunt vectori proprii. Dacă notăm $f_n(x) = (x^2-1)^n$, avem egalitatea evidentă $(x^2-1){f_n}'(x) = 2nxf_n(x)$. Derivând de $n+1$ ori ambii membri, utilizând formula Leibniz, găsim

$$(x^2-1)f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)f_n^{(n)}(x) = 2nxf_n^{(n+1)}(x) + 2n(n+1)f_n^{(n)}(x),$$

sau

$$\left[(x^2-1){P_n}'(x)\right]' = n(n+1)P_n(x),$$

deci $\mathcal{S}(P_n(x)) = n(n+1)P_n(x)$, ceea ce arată că $\lambda_n = n(n+1)$ sunt valori proprii, iar $P_n(x)$ sunt vectorii proprii corespunzători.

Teorema 79. *Subspaţiile proprii corespunzătoare la valori proprii distincte au în comun doar vectorul nul.*

Demonstraţie. Fie valorile proprii distincte λ_1 şi λ_2, iar $S(\lambda_1)$ şi $S(\lambda_2)$ subspaţiile proprii asociate. Dacă ar exista $x \in S(\lambda_1) \cap S(\lambda_2)$, nenul, ar rezulta $\mathcal{A}x = \lambda_1x$ şi $\mathcal{A}x = \lambda_2x$, deci $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, adică $\lambda_1 = \lambda_2$, ceea ce este absurd. Prin urmare, $S(\lambda_1) \cap S(\lambda_2) = \{0\}$. □

8.2 Polinom caracteristic

Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice pătratică de ordinul n şi $X = [x_j]$ o matrice nenulă de tipul $n \times 1$ cu elemente din câmpul K ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă există $\lambda \in K$, astfel încât să avem $AX = \lambda X$, atunci X se numeşte *vector propriu*, iar λ se numeşte *valoare proprie* pentru matricea A.

Ecuaţia matriceală $(A - \lambda I)X = 0$ este echivalentă cu sistemul liniar şi omogen, numit şi ***sistemul caracteristic*** asociat valorii proprii λ,

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

care are soluţii nebanale dacă şi numai dacă

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Definiţia 80. Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se numeşte ***polinomul caracteristic*** al matricei A, iar ecuaţia $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, $\lambda \in K$, se numeşte ***ecuaţia caracteristică*** a matricei A.

Valorile proprii ale matricei A sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice. Fie A o matrice pătratică reală de ordinul n şi $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ ecuaţia ei caracteristică. Deoarece nu orice ecuaţie algebrică admite soluţii în $\mathbb{R}$, dar admite în $\mathbb{C}$, uneori valorile proprii ale lui A se definesc ca fiind elemente din $\mathbb{C}$. În acest caz, vectorii proprii corespunzători aparţin complexificatului lui $\mathbb{R}^n$, notat ${}^C\mathbb{R}^n$.

Teorema 81. 1) *Polinomul caracteristic al matricei A are expresia*

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - \cdots \pm \delta_n),$$

cu $\delta_1 = \operatorname{urma} A$, $\delta_2 = \sum_{j<k} (a_{jj}a_{kk} - a_{kj}a_{jk}), \ldots, \delta_{n-1} = \sum_j \operatorname{minor} a_{jj}$, $\delta_n = \det A$, *unde* δ_i, $i = \overline{1,n}$, *reprezintă suma minorilor principali de ordinul* i *ai matricei* $A - \lambda I$.

2) *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.*

3) *Matricele A şi ${}^tA$ au acelaşi polinom caracteristic.*

Demonstraţie. 1) Omitem demonstraţia generală, fiind prea laborioasă. În cazul matricelor de ordinul 2 sau 3 este suficient un calcul direct, având:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(\operatorname{urma} A) + \det A, \quad \operatorname{urma} A = a_{11} + a_{22};$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(\operatorname{urma} A) - \lambda J + \det A,$$

unde $\operatorname{urma} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ şi $J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2) Fie A şi B două matrice asemenea, adică $B = C^{-1}AC$, unde C este o matrice nesingulară. Atunci

$$\det(B - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det\left[C^{-1}(A - \lambda I)C\right] = \det(C^{-1})\det(A - \lambda I)\det C = \det(A - \lambda I).$$

3) Determinantul unei matrice este egal cu determinantul transpusei. De aceea,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det{}^t(A - \lambda I) = \det({}^tA - \lambda I).$$

□

Să presupunem că A este o matrice reală (A coincide cu conjugata ei, $\bar{A}$) şi simetrică (matricea A coincide cu transpusa ${}^tA$).

Teorema 82. *Valorile proprii ale unei matrice reale şi simetrice sunt reale.*

Demonstraţie. Pornim de la (1), $AX = \lambda X$ şi prin conjugarea complexă găsim (2) $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$. În (1) înmulţim la stânga cu ${}^t\bar{X}$, iar în (2) înmulţim la stânga cu ${}^tX$. Relaţia $A = {}^tA$ implică ${}^t\bar{X}AX = {}^tXA\bar{X}$, deci $(\lambda - \bar{\lambda}){}^tX\bar{X} = 0$. Deoarece ${}^tX\bar{X} \neq 0$, rămâne că $\lambda = \bar{\lambda}$, adică $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Exemple:

1) Matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

are polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4$ şi valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Din $AX = X$, cu $X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

cu soluţia nenulă $x_2 = 2x_1 + x_3$ şi $x_4 = 2x_3$. Notând $x_1 = a$ şi $x_3 = b$, soluţia se scrie $x_2 = 2a + b$, $x_4 = 2b$ şi rezultă

$$X = {}^t[a, 2a + b, b, 2b] = a\ {}^t[1, 2, 0, 0] + b\ {}^t[0, 1, 1, 2].$$

Deci valorii proprii $\lambda = 1$ îi corespund doi vectori proprii liniar independenţi, de exemplu

$$v_1 = {}^t[1, 2, 0, 0] \quad \text{şi} \quad v_2 = {}^t[0, 1, 1, 2].$$

2) Pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

se obţine $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$. Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ şi vectorii proprii liniar independenţi $v_1 = {}^t[-2, 1, 0]$, $v_2 = {}^t[0, 0, 1]$ şi $v_3 = {}^t[1, -1, -1]$.

Fie V_n un spaţiu vectorial finit dimensional peste câmpul K şi $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ un endomorfism. Fie x un vector propriu al lui $\mathcal{A}$ şi λ valoarea proprie asociată. Acestea satisfac relaţia $\mathcal{A}x = \lambda x$.

Fixăm o bază în V_n. Notăm cu A matricea ataşată endomorfismului $\mathcal{A}$ şi cu X matricea ataşată vectorului x. Relaţia $\mathcal{A}x = \lambda x$ este echivalentă cu ecuaţia matriceală $AX = \lambda X$.

Fie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul caracteristic al matricei A. Consideraţiile precedente arată că dacă există, valorile proprii ale endomorfismului $\mathcal{A}$ sunt rădăcinile lui $P(\lambda)$ în K, iar vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$ sunt soluţiile nenule ale ecuaţiei matriceale $(A - \lambda I)X = 0$. Pe de altă parte, teorema 81 arată că polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ este invariant faţă de o schimbare o bazei din V_n sau altfel spus, coeficienţii lui $P(\lambda)$ depind de endomorfismul $\mathcal{A}$ şi nu de reprezentarea matriceală particulară A. Desigur, numărul $\det A$ se numeşte *determinantul lui* $\mathcal{A}$, numărul urma A se numeşte *urma lui* $\mathcal{A}$ etc. Aceastea justifică

Definiţia 83. Fie $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ un endomorfism şi A matricea asociată în raport cu o bază fixată în V_n. Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se numeşte polinomul caracteristic al endomorfismului $\mathcal{A}$.

Endomorfismul $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ are cel mult n valori proprii distincte. Dacă $\mathcal{A}$ are exact n valori proprii distincte, atunci vectorii proprii liniar independenţi determină o bază a lui V_n şi matricea A ataşată lui $\mathcal{A}$ în raport cu această bază este o matrice diagonală având drept elemente pe diagonală valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$.

Fie V_n un spaţiu real n-dimensional şi $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ un endomorfism. Notăm cu ${}^C V_n$ complexificatul lui V_n şi cu ${}^C\mathcal{A}$ complexificatul lui $\mathcal{A}$. Deoarece $\mathcal{A}$ şi ${}^C\mathcal{A}$ au aceeaşi reprezentare matriceală, valorile proprii ale lui ${}^C\mathcal{A}$ sunt valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei reale asociată lui $\mathcal{A}$. Având în vedere acest lucru, uneori ${}^C\mathcal{A}$ se identifică cu $\mathcal{A}$, căutându-se valorile proprii ale unui endomorfism real direct în $\mathbb{C}$ şi bineînţeles vectorii proprii în complexificatul spaţiului vectorial real.

Exemplu. Pentru endomorfismul $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ descris de matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

obţinem polinomul caracteristic $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, valorile proprii $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ şi vectorii proprii liniar independenţi $v_1 = (1, 0, 0)$ şi $v_2 = (0, 1, 1)$.

8.3 Exerciţii/probleme rezolvate

8.3.1 Enunţuri

1. Se dă transformarea $T \in End(\mathbb{R}^3)$ a cărei matrice relativ la baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aflaţi vectorii şi valorile proprii ale matricei A.

2. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei simetrice reale

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

8.3.2 Soluţii

1. **Din oficiu: 1pt.** Corpul scalarilor este $\mathbb{R}$. Calculăm polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12, \text{ (1 pt.)} .$$

Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0,$$

deci ecuaţia algebrică $-(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$ **(1 pt.)** . Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile reale ale acestei ecuaţii şi deoarece toate rădăcinile sunt reale, spectrul este $\sigma(T) = \sigma(T^{\mathbb{C}}) = \{3, 2, 2\}$ **(1 pt.)** . Deoarece $\sigma(T^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$, rezultă că T este jordanizabilă.

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 3$ avem sistemul caracteristic asociat

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 0 \\ -c = 0, \end{cases}$$

care are soluţiile $(a, b, c) = (t, 0, 0) = t(1, 0, 0), t \in \mathbb{R}$ **(2 pt.)** . Deci o bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda_1 = 3}$ este generatorul nenul (deci liniar independent) $v_1 = (1, 0, 0)$ **(1 pt.)** .

Pentru $\lambda = \lambda_2 = 2$, sistemul caracteristic asociat este:

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0, \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (a, b, c) = (0, t, 0) = t(0, 1, 0), t \in \mathbb{R}$ **(2 pt.)** . În concluzie, o bază în $S_{\lambda_2 = 3}$ este vectorul $v_2 = (0, 1, 0)^t$ **(1 pt.)** **Total: 10pt.**.

2. Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2).$$

Ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0$ este de gradul doi, cu disciminantul

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + b^2 \geq 0.$$

Prin urmare rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic sunt totdeauna reale. Acestea sunt valorile proprii ale matricei A:

$$\lambda_{+,-} = (a + c \pm \sqrt{\Delta})/2.$$

Dacă $\Delta > 0$ cele două rădăcini sunt distincte şi obţinem respectiv sistemele caracteristice pentru vectorii proprii asociaţi $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (a - c \mp \sqrt{\Delta})/2 \cdot u_1 + b \cdot u2 = 0 \\ b \cdot u_1 + (c - a \mp \sqrt{\Delta})/2 \cdot u_2 = 0. \end{cases}$$

Sistemul este omogen, de rang cel mult 1. Avem următoarele cazuri:

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci subspaţiile proprii sunt respectiv $W_\pm = L(\{(-b, (a - c \mp \sqrt{\Delta})/2)\})$ şi distingem două subcazuri remarcabile:

a) dacă $b = 0$ (şi $a \neq c$), atunci matricea este deja diagonală ($A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$), valorile proprii sunt exact a şi c, iar subspaţiile proprii sunt respectiv $S_{\lambda=a} = L(\{(0,1)\})$, $S_{\lambda=c} = L(\{(1,0)\})$;

b) dacă $a = c$ (şi $b \neq 0$), atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, valorile proprii sunt $\{a \pm b\}$ iar subspaţiile proprii asociate sunt respectiv $S_\pm = L(\{(1, \pm 1)\})$.

Dacă $\Delta = 0$, atunci $a - c = b = 0$, iar matricea dată devine $A = a \cdot I_2$, matrice diagonală cu valoarea proprie dublă a şi subspaţiul propriu asociat $S_{\lambda=a} = \mathbb{R}^2$.

8.4 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Fie V spaţiul vectorial al funcţiilor reale de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe $(0,1)$. Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului

$$\mathcal{A}\colon V \to V,\ g = \mathcal{A}(f),\ g(x) = xf'(x), \quad \forall x \in (0,1).$$

2. Se consideră V_n un spaţiu vectorial real. Endomorfismul $\mathcal{F}\colon V_n \to V_n$ cu proprietatea $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ se numeşte $\mathcal{F}$*-structură* pe V_n. Să se determine valorile proprii ale lui ${}^C\mathcal{F}\colon {}^C V_n \to {}^C V_n$.

3. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dat prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Să se determine polinomul caracteristic al matricei Frobenius

$$F = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $U \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ şi $B = \begin{pmatrix} A & -AV \\ -UA & UAV \end{pmatrix}$. Presupunând $\det A = 0$, să se arate că polinomul caracteristic al lui B se divide cu λ^2.

6. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei simetrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Fie $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfism care satisface relaţia $\mathcal{A}^4 - \mathcal{A}^2 = 0$. Să se determine valorile proprii.

MA.9.Diagonalizare

Cuvinte cheie: endomorfism diagonalizabil, diagonalizare, multiplicitate algebrică, multiplicitate geometrică, bază formata din vectori proprii, bază diagonalizatoare, matrice diagonalizatoare.

9.1 Endomorfisme diagonalizabile

Deoarece matricea oricărui endomorfism $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ depinde de alegerea bazei în V_n, prezintă interes cazul când se poate găsi o bază în V_n faţă de care matricea endomorfismului să aibă o formă cât mai simplă. În acest paragraf, asemenea baze vor fi construite cu ajutorul vectorilor proprii.

Definiţia 84. Un endomorfism $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ se numeşte diagonalizabil dacă există o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ astfel încât matricea lui în această bază să fie o matrice diagonală.

Matricele din clasa de asemănare care îi corespund endomorfismului diagonalizabil $\mathcal{A}$ se numesc *matrice diagonalizabile*.

Teorema 85. *Un endomorfism $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă există **o bază a spaţiului V_n formată din vectori proprii ai endomorfismului** (**bază diagonalizatoare**).*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{A}$ este diagonalizabil, atunci există o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ a spaţiului faţă de care matricea lui este diagonală,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathcal{A}e_i = a_{ii}e_i$, $i = \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că vectorii e_i, $i = \overline{1,n}$, sunt vectori proprii ai endomorfismului $\mathcal{A}$.

Reciproc, dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază în V_n, formată din vectori proprii ai lui $\mathcal{A}$, adică $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$, $i = \overline{1,n}$, atunci matricea lui $\mathcal{A}$ în această bază este

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Evident, unele dintre numerele λ_i pot fi egale. $\square$

Teorema 86. *Dimensiunea unui subspaţiu propriu al endomorfismului $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ (**multiplicitatea geometrică** a valorii proprii) este cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare subspaţiului (**multiplicitatea algebrică** a valorii proprii).*

Demonstraţie. Fie λ_0 o valoare proprie multiplă de ordinul m şi $S(\lambda_0)$ subspaţiul propriu corespunzător. Notăm $\dim S(\lambda_0) = p \leq n$. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ o bază în subspaţiul propriu. Completăm această bază până la o bază $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ în V_n. Întrucât vectorii e_i, $i = \overline{1,p}$, sunt vectori proprii corespunzători la valoarea proprie λ_0, avem:

$$\mathcal{A}(e_i) = \lambda_0 e_i; \qquad \mathcal{A}(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k, \quad i = \overline{1,p},\ j = \overline{p+1,n}.$$

Matricea endomorfismului $\mathcal{A}$ faţă de baza specificată este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1p+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & a_{2p+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & a_{pp+1} & \ldots & a_{pn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{np+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

astfel încât polinomul caracteristic al lui $\mathcal{A}$ are forma

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^p \Delta(\lambda),$$

unde $\Delta(\lambda)$ este un determinant de ordinul $n - p$.

Pe de altă parte, prin ipoteză avem $P(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m Q(\lambda)$. În concluzie, $\Delta(\lambda_0) = 0$ implică $p < m$, iar $\Delta(\lambda_0) \neq 0$ implică $p = m$, deci $p \leq m$. □

Teorema 87. *Un endomorfism $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă polinomul caracteristic al lui A are n rădăcini în câmpul peste care este luat V_n şi dimensiunea fiecărui subspaţiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare.*

Demonstraţie. Admitem că $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este diagonalizabil. Rezultă că există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ în V_n, formată din vectori proprii pentru $\mathcal{A}$, faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ este diagonală. Fie

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

adică λ_i, $i = \overline{1,p}$, sunt valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ de multiplicităţi m_i, cu $\sum\limits_{i=1}^{p} m_i = n$. Fără a afecta generalitatea, putem admite că primii m_1 vectori din baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ corespund lui λ_1, următorii m_2 lui λ_2 etc. În concluzie, vectorii $e_1, \ldots, e_{m_1}$ aparţin subspaţiului propriu $S(\lambda_1)$ corespunzător valorii proprii λ_1, ceea ce înseamnă că numă-rul lor m_1 este mai mic sau cel mult egal cu $\dim S(\lambda)_1$. Pe de altă parte, conform teoremei 86, avem $\dim S(\lambda_1) \leq m_1$. În concluzie, $m_1 = \dim S(\lambda_1)$. Analog rezultă egalităţile $\dim S(\lambda_i) = m_i$, $i = \overline{2,p}$.

Reciproc, admitem că $\dim S(\lambda_i) = m_i$, $i = \overline{1,p}$. Atunci fie

$$B = \{e_1, \ldots, e_{m_1}, e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_2}, \ldots, e_{m_{p-1}+1}, \ldots, e_{m_p}\}, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = n,$$

o mulţime de vectori din V_n astfel încât primii m_1 vectori să constituie o bază în $S(\lambda_1)$, următorii m_2 să constituie o bază în $S(\lambda_2)$ şi aşa mai departe. Utilizând inducţia asupra lui p, se dovedeşte că B este o bază a lui V_n. Faţă de această bază, matricea lui $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \begin{array}{cccc} \lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{array} \\ & & 0 & & \end{array}\right),$$

adică o matrice diagonală. □

Corolarul 88. *Endomorfismul* $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ *este* ***diagonalizabil*** *dacă şi numai dacă*

$$V_n = S(\lambda_1) \oplus S(\lambda_2) \oplus \dots \oplus S(\lambda_p).$$

Practic, pentru ***diagonalizarea*** unui endomorfism $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ procedăm în felul următor:

1) fixăm o bază în V_n şi determinăm matricea $A = [a_{ij}]$ a lui $\mathcal{A}$ în această bază;

2) aflăm valorile proprii care sunt soluţiile în K ale ecuaţiei $P(\lambda) = 0$;

3) dacă există p $(p \leq n)$ valori proprii distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, cu ordinele de multiplicitate $m_1, \dots, m_p$, atunci calculăm rangul fiecărei matrice $A - \lambda_j I$, $j = \overline{1,p}$. Fie $m_j = \dim S(\lambda_j) = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{J})$. Dacă $\operatorname{rang}(A - \lambda_j I) = n - m_j$, $j = \overline{1,p}$, este numărul de soluţii independente ale sistemului omogen $(A - \lambda_j I)X = 0$, atunci (conform teoremei 87) $\mathcal{A}$ este diagonalizabil;

4) se rezolvă cele p sisteme omogene $(A - \lambda_j I)X = 0$. Un sistem fundamental de soluţii pentru un asemenea sistem reprezintă coordonatele vectorilor corespunzători valorii proprii λ_j;

5) matricea lui $\mathcal{A}$, în raport cu baza formată din vectori proprii ai lui $\mathcal{A}$, are pe diagonală elementele $\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p$, adică valorile proprii;

6) notăm prin $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ matricea diagonală ataşată lui $\mathcal{A}$ în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$. Dacă $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ este matricea ale cărei coloane sunt vectori proprii care alcătuiesc noua bază a lui V_n (***matricea diagonalizatoare***), adică matricea de trecere de la baza iniţială din V_n (baza canonică în $\mathbb{R}^n$) la baza formată din vectorii proprii, atunci $D = C^{-1}AC$.

Observaţie. Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, cu valoare proprie dublă, este diagonalizabilă dacă şi numai dacă $a_{11} = a_{22}$ şi $a_{12} = a_{21} = 0$.

Exemple:

1) Pentru endomorfismul $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

avem polinomul caracteristic $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$, valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, (triplă, $m_1 = 3$) şi

$$\operatorname{rang}(A - 1 \cdot I) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq n - m_1 = 3 - 3 = 0,$$

deci endomorfismul $\mathcal{A}$ nu este diagonalizabil.

2) Fie $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definit prin

$$\mathcal{A}(x) = (x_1 + x_4, x_2, x_3 - 2x_4, x_1 - 2x_3 + 5x_4), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

În raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, matricea lui $\mathcal{A}$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rezultă polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(1-\lambda)^2(\lambda - 6)$ şi valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 6$. Ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii sunt $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ şi $m_3 = 1$. Deoarece $\operatorname{rang}(A - \lambda_1 I) = 3 = n - m_1 = 4 - 1 = 3$, prin rezolvarea sistemului omogen $(A - 0\cdot I)X_1 = 0$, obţinem vectorul propriu $v_1 = {}^t[-1, 0, 2, 1]$.

Analog, $\operatorname{rang}(A - \lambda_2 I) = 2 = n - m_2 = 4 - 2$, astfel încât $\dim S(\lambda_2) = 2$. Vectorii proprii liniar independenţi sunt $v_2 = {}^t[0, 1, 0, 0]$, $v_3 = {}^t[2, 0, 1, 0]$, apoi

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_4 I) = 3 = n - m_3,$$

astfel încât vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4 = 6$ este $v_4 = {}^t[1, 0, -2, 5]$. În concluzie, endomorfismul $\mathcal{A}$ este diagonalizabil cu matricea diagonalizatoare

$$C = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obţinem

$$D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

9.2 Exerciţii/probleme rezolvate

9.2.1 Enunţuri

1. Se dă transformarea $T \in End(\mathbb{R}^3)$ a cărei matrice relativ la baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculaţi polinomul caracteristic P al endomorfismului T.

b) Rezolvaţi ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0$ şi aflaţi spectrul $\sigma(T)$. Notând cu $\sigma(T^{\mathbb{C}})$ mulţimea rădăcinilor (complexe) ale polinomului caracteristic, verificaţi dacă $\sigma(T^{\mathbb{C}}) \subset K = \mathbb{R}$.

c) Pentru fiecare valoare proprie distinctă λ a lui T, aflaţi subspaţiul propriu S_λ, multiplicităţile algebrică $\mu_a(\lambda)$ şi geometrică $\mu_g(\lambda)$ şi verificaţi dacă $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$.

d) Dacă endomorfismul T este diagonalizabil, atunci:
- aflaţi o bază diagonalizatoare $B' \subset \mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii ai lui T;
- aflaţi matricea $C = [B']_{B_0}$ de trecere de la baza canonică la baza diagonalizatoare;
- aflaţi matricea diagonală $D = A' = C^{-1}AC = [T]_{B'}$ asociată endomorfismului T relativ la baza B';
- verificaţi relaţia $CD = AC$.

2. Aceeaşi problemă pentru matricele

i) $A = ()$; ii) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

9.2.2 Soluţii

1. a) Calculăm polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2.$$

b) Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

deci ecuaţia algebrică $-(\lambda^2+1)(\lambda-2) = 0$. Rădăcinile reale ale acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A şi formează spectrul transformării T, $\sigma(T) = \{2\}$. Deoarece nu toate rădăcinile polinomului $P(\lambda)$ sunt reale, rezultă că T nu este jordanizabilă, deci nu este nici diagonalizabilă.

În acest caz $\sigma(T^{\mathbb{C}}) = \{2, -i, +i\} \not\subset \mathbb{R}$.

c) Se observă că pentru $\lambda = \lambda_1 = 2$ avem $\mu_a(\lambda_1) = 1$, pentru $\lambda = -i$ avem $\mu_a(-i) = 1$, iar pentru $\lambda = i$ avem $\mu_a(i) = 1$.

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 2$ sistemul caracteristic asociat este un sistem de ecuaţii liniare care are drept soluţii vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda_1 = 2$. Acest sistem este:

$$(A - 2I_3)(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + z = 0 \\ -y - 2z = 0, \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (x, y, z) = (t, 0, 0) = t(1, 0, 0), t \in \mathbb{R}$. Deci $S_{\lambda_1} = L(v_1)$, unde $v_1 = (1, 0, 0)$ este nenul, deci liniar independent, care formează astfel bază în subspaţiul propriu S_{λ_1}, de unde $\mu_g(\lambda_1) = \dim\ S_{\lambda_1} = 1$.
Precizăm că deoarece $\lambda_{2,3} = \pm i \notin \mathbb{R}$, $\lambda_{2,3}$ nu sunt valori proprii ale endomorfismului T. Pentru $T^{\mathbb{C}}$ (complexificatul morfismului T), deci pentru matricea $A = [T^{\mathbb{C}}] \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$, diagonalizarea poate avea loc.
Pentru $\lambda = \lambda_2 = -i$, sistemul caracteristic asociat este:

$$(A + iI_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)x = 0 \\ iy + z = 0 \\ -y + iz = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (x, y, z) = (0, it, t) = t(0, i, 1), t \in \mathbb{C}$. Deci $S_{\lambda_2} = L(v_2)$, unde $v_2 = (0, i, 1)$ este nenul, deci liniar independent, care formează astfel bază în subspaţiul propriu S_{λ_2}, de unde $\mu_g(\lambda_2) = \dim S_{\lambda_2} = 1$.
Pentru $\lambda = \lambda_3 = i$, sistemul caracteristic asociat este:

$$(A - iI_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-i)x = 0 \\ -iy + z = 0 \\ -y - iz = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (x, y, z) = (0, -it, t) = t(0, -i, 1), t \in \mathbb{C}$. Deci $S_{\lambda_3} = L(v_3)$, unde $v_3 = (0, -i, 1)$ este nenul, deci liniar independent, care formează astfel bază în subspaţiul propriu S_{λ_3}, de unde $\mu_g(\lambda_3) = \dim\ S_{\lambda_3} = 1$.
Se observă că $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$, pentru orice $\lambda = \lambda_1$, λ_2, λ_3, deci transformarea $T^{\mathbb{C}}$ este diagonalizabilă.

2. i) Calculăm polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12.$$

Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0,$$

deci ecuaţia algebrică $-(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$. Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile reale ale acestei ecuaţii şi deoarece toate rădăcinile sunt reale, spectrul este $\sigma(T) = \sigma(T^{\mathbb{C}}) = \{3, 2, 2\}$. Deoarece $\sigma(T^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$, rezultă T jordanizabilă.

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 3$ şi $\lambda = \lambda_2 = 2$ avem $\mu_a(3) = 1$, respectiv $\mu_a(2) = 2$.
Pentru $\lambda = \lambda_1 = 3$, sistemul caracteristic asociat este

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 0 \\ -c = 0, \end{cases}$$

şi are soluţiile $(a, b, c) = (t, 0, 0) = t(1, 0, 0), t \in \mathbb{R}$. Deci o bază în subspaţiul propriu S_{λ_1} este generatorul nenul (deci liniar independent) $v_1 = (1, 0, 0)$, de unde rezultă $\mu_g(\lambda_1) = \dim\ S_{\lambda_1} = 1 = \mu_a(\lambda_1)$.
Pentru $\lambda = \lambda_2 = 2$, sistemul caracteristic asociat este:

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0, \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (a, b, c) = (0, t, 0) = t(0, 1, 0), t \in \mathbb{R}$. În concluzie, o bază în S_{λ_2} este vectorul $v_2 = (0, 1, 0)^{\,t}$, de unde rezultă $\mu_g(\lambda_2) = \dim S_{\lambda_2} = 1$.
Deoarece pentru $\lambda = \lambda_2$ avem $\mu_g(\lambda_2) = 1 \neq \mu_a(\lambda_2) = 2$ rezultă că endomorfismul T nu este diagonalizabil.

ii) **Din oficiu: 1pt.** Calculăm polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & 7-\lambda & -1 \\ -4 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda + 108,$$ **(1 pt.)** .

Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda + 108 = 0,$$

deci ecuaţia algebrică $-(\lambda - 3)^2(\lambda - 12) = 0$. Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile acestei ecuaţii şi deoarece toate sunt reale, spectrul este $\sigma(T) = \sigma(T^{\mathbb{C}}) = \{12, 3, 3\}$ **(1 pt.)** . Deoarece $\sigma(T^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$, rezultă T jordanizabilă.
Pentru $\lambda = \lambda_1 = 12$ şi $\lambda = \lambda_2 = 3$ avem $\mu_a(\lambda_1) = 1$, respectiv $\mu_a(\lambda_2) = 2$.
Pentru $\lambda = \lambda_1 = 12$ sistemul caracteristic asociat este

$$(A - 12I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + 4b - c = 0 \\ 4a - 5b - c = 0 \\ -4a - 4b - 8c = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (a, b, c) = (t, t, -t) = t(1, 1, -1), t \in \mathbb{R}$ **(1 pt.)** . Deci o bază în subspaţiul propriu S_{λ_1} este vectorul $v_1 = (1, 1, -1)$ **(1 pt.)** de unde rezultă $\mu_g(\lambda_1) = \dim S_{\lambda_1} = 1 = \mu_a(\lambda_1)$.
Pentru $\lambda = \lambda_2 = 3$ sistemul caracteristic asociat este

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4a + 4b - c = 0$$

şi are soluţiile $v = (a, b, c) = (\alpha, \beta, 4\alpha + 4\beta) = \alpha(1, 0, 4) + \beta(0, 1, 4)$ **(1 pt.)** . În concluzie, o bază în S_{λ_2} este formată din vectorii $v_2 = (1, 0, 4)$ şi $v_3 = (0, 1, 4)$ **(1 pt.)** , de unde rezultă $\mu_g(\lambda_2) = \dim S_{\lambda_2} = 2 = \mu_a(\lambda_2)$.
Deoarece avem $\mu_a(\lambda_1) = \mu_g(\lambda_1)(= 1)$ şi $\mu_a(\lambda_2) = \mu_g(\lambda_2)(= 2)$, rezultă că endomorfismul T este diagonalizabil **(1 pt.)** .
Baza B' a spaţiului $\mathbb{R}^3$ relativ la care matricea endomorfismului T este diagonală, este formată din vectorii (proprii ai) bazelor de subspaţii proprii ale lui T, adică $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$.
În concluzie, endomorfismul T este diagonalizabil, cu matricea diagonalizatoare şi matricea diagonală, respectiv

$$C = [v_1, v_2, v_3]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$ **(2 pt.)** .

Observaţie. Se poate verifica relaţia $D = C^{-1}AC$ sub forma $CD = AC$:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 3 \\ -12 & 12 & 12 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 3 \\ -12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = CD.$$

9.3 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1.Să se diagonalizeze matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie endomorfismul

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathcal{A}(x) = (x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - 2x_2 - 2x_3, -4x_1 - 2x_2 + x_3),$$

cu $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ faţă de care matricea endomorfismului să fie diagonală.

3. Să se cerceteze dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

poate fi diagonalizată. În caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare C.

MA.10.Forma Jordan

Cuvinte cheie: bază formată din vectori proprii şi principali, bază jordanizatoare, celulă Jordan, endomorfism jordanizabil, forma canonică Jordan.

10.1 Endomorfisme jordanizabile

Fie V_n un spaţiu vectorial peste câmpul K ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ un endomorfism. Matricea A a endomorfismului $\mathcal{A}$ depinde de alegerea bazei în V_n. Uneori această matrice poate fi diagonalizată, alteori nu. Condiţiile în care matricea A se poate diagonaliza au fost date în teoremele de diagonalizare. Una dintre formele relativ simple şi utile, care se poate obţine în unele dintre cazurile când nu este posibilă diagonalizarea, este ***forma canonică Jordan***. Baza lui V_n, faţă de care endomorfismul $\mathcal{A}$ se reprezintă printr-o matrice Jordan, se construieşte din vectori proprii şi vectori principali.

Fie $\lambda \in K$. Matricele de tipul:

$$[\lambda], \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

se numesc ***celule Jordan*** ataşate scalarului λ.

Definiţia 89. Endomorfismul $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ se numeşte ***jordanizabil*** dacă există o bază în V_n (numită ***bază jordanizatoare***) faţă de care matricea endomorfismului să fie de forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_s \end{pmatrix}$$

(***forma canonică Jordan***), unde J_i sunt celule Jordan ataşate valorilor proprii λ_i, $i = \overline{1, s}$, ale endomorfismului $\mathcal{A}$.

O celulă Jordan de ordinul p ataşată unei valori proprii λ multiplă de ordinul $s \geq p$ corespunde vectorilor liniar independenţi $e_1, e_2, \ldots, e_p$ astfel încât

$$\mathcal{A}e_1 = \lambda e_1, \quad \mathcal{A}e_2 = \lambda e_2 + e_1, \ldots, \mathcal{A}e_p = \lambda e_p + e_{p-1}.$$

Vectorul e_1 este ***vector propriu***, iar vectorii $e_2, \ldots, e_p$ se numesc ***vectori principali***.

În reprezentarea matriceală putem scrie $(A - \lambda I)E_1 = 0$, $(A - \lambda I)E_2 = E_1$, ..., $(A - \lambda I)E_p = E_{p-1}$.

Există endomorfisme ale spaţiilor vectoriale reale care nu pot fi aduse la forma Jordan şi anume acelea pentru care ecuaţia caracteristică nu are n rădăcini în $\mathbb{R}$. Discuţia următoare pune în evidenţă că endomorfismele spaţiilor complexe pot fi aduse întotdeauna la forma Jordan, întrucât orice ecuaţie de gradul n în $\mathbb{C}$ are n rădăcini.

Observaţii:

1) Forma diagonală a unui endomorfism diagonalizabil este un caz particular de formă canonică Jordan şi anume cazul când toate celulele Jordan sunt de ordinul 1.

2) Forma canonică Jordan nu este unică, dar numărul celulelor Jordan (egal cu numărul total de vectori proprii liniar independenţi ai lui $\mathcal{A}$) ca şi ordinul celulelor Jordan sunt unice pentru un endomorfism $\mathcal{A}$ dat.

3) Ordinea celulelor Jordan pe "diagonala" formei canonice Jordan depinde de ordinea vectorilor din bază.

Teorema 90. *Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul K ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este un endomorfism şi $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sunt valorile proprii distincte ale lui $\mathcal{A}$ cu multiplicităţile $m_1, m_2, \ldots, m_p$, care satisfac $\sum\limits_{k=1}^{p} m_k = n$, atunci există p subspaţii vectoriale $V_j \subset V$, $j = \overline{1,p}$, invariante faţă de $\mathcal{A}$, de dimensiuni m_j, $j = \overline{1,p}$, astfel încât $V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p$, iar $\mathcal{A}/_{V_j} = \mathcal{N}_j + \lambda_j \mathcal{J}_{m_j}$, $\quad j = \overline{1,p}$, unde $\mathcal{N}_j$ sunt endomorfisme nilpotente de diferite ordine.*

Demonstraţie. Considerăm endomorfismele $\mathcal{K}_j = \mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{J}$, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ fixat, şi aplicând teorema de jordanizare, se obţin subspaţiile V_j şi R_j astfel încât $\mathcal{K}_j/_{V_j}$ este un endomorfism nilpotent, iar $\mathcal{K}_j/_{R_j}$ este nesingular. Deoarece V_j este invariant faţă de $\mathcal{K}_j$, el este invariant şi faţă de endomorfismul $\mathcal{K}_j + \lambda_j \mathcal{J} = \mathcal{A}$.

Fie $\mathcal{A}_{V_j}$ şi $\mathcal{A}_{R_j}$ restricţiile lui $\mathcal{A}$ la subspaţiile V_j şi respectiv R_j, deci unica valoare proprie a lui $\mathcal{A}_{V_j}$ este λ_j, care nu este valoare proprie şi pentru $\mathcal{A}_{R_j}$ (deoarece $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{J}$ este nesingular pe R_j, iar $\det(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{J}) = \det(\mathcal{A}/_{V_j} - \lambda_j \mathcal{J}_1) \det(\mathcal{A}/_{R_j} - \lambda_j \mathcal{J}_2)$). Rezultă $\dim V_j = m_j$ şi $V_j \cap V_h = \{0\}$, pentru $j \neq h$, astfel încât $V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p$ (ştim prin ipoteză că $\sum\limits_{k=1}^{p} m_k = n$).

În plus, din $\mathcal{A} = \mathcal{K}_j + \lambda_j \mathcal{J}$ rezultă $\mathcal{A}/_{V_j} = \mathcal{K}_j/_{V_j} + \lambda_j \mathcal{J}_{m_j} = \mathcal{N}_j + \lambda_j \mathcal{J}_{m_j}$, unde $\mathcal{N}_j = \mathcal{K}/_{V_j}$ este nilpotent prin construcţie. □

Utilizând teorema precedentă se poate demonstra

Teorema 91 (Jordan). *Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul K ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă endomorfismul $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ are valori proprii în K şi dacă suma multiplicităţilor acestor valori proprii este n, atunci există o bază în V_n faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ are forma Jordan.*

10.1.1 Algoritm general pentru găsirea unei baze Jordan

1) Fixarea unei baze în V_n şi explicitarea matricei A ataşată endomorfismului $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$.

2) Determinarea valorilor proprii distincte λ_j, respectiv multiple de ordinul m_j, $j = \overline{1,p}$, prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice. Pentru continuarea algoritmului este suficient ca $\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n$.

3) Găsirea vectorilor proprii liniar independenţi corespunzători fiecărei valori proprii.

4) Calcularea numărului de celule Jordan,

$$\dim S(\lambda_j) = \dim V_n - \operatorname{rang}(A - \lambda_j I) = n - r_j.$$

5) Rezolvarea sistemului $(A - \lambda_j I)^{m_j} X = 0$ pentru fiecare $j = \overline{1,p}$. Pentru j fixat, soluţiile nenule generează subspaţiul V_j.

În cazul matricelor de ordin relativ mic putem ocoli unele dintre etapele precedente, ţinând seama de observaţia că la o celulă Jordan corespunde un singur vector propriu.

10.1.2 Algoritm pentru găsirea unei celule Jordan de ordinul p corespunzătoare valorii proprii λ multiplă de ordinul $s \geq p$

1) Se determină soluţia generală pentru $(A - \lambda I)E_1 = 0$.

2) Se impun condiţii de compatibilitate şi se determină pe rând soluţii generale pentru sistemele liniare

$$(A - \lambda I)E_2 = E_1, \ldots, (A - \lambda I)E_p = E_{p-1}.$$

3) Se dau valori particulare parametrilor care apar în soluţiile de la paşii 2) şi 1), ţinând seama de condiţiile de compatibilitate şi de condiţia $E_1 \neq 0$.

Algoritmul precedent se repetă pentru fiecare valoare proprie, în final obţinându-se baza Jordan. Dacă notăm prin C matricea care are pe coloane coordonatele vectorilor din baza Jordan, atunci

$$J = C^{-1}AC.$$

Exemplu. Să se găsească forma canonică Jordan a endomorfismlui $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{A}(x) = (3x_1 + x_2, -4x_1 - x_2, 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, -17x_1 - 6x_2 - x_3),$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Soluţia I. În baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, endomorfismul $\mathcal{A}$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $(1-\lambda)^4 = 0$ are soluţia $\lambda_{1,2,3,4} = 1 = \lambda$. Deoarece $m_1 = 4$ şi $\operatorname{rang}(A - \lambda I) = 2$, numărul celulelor Jordan este egal cu

$$n - \operatorname{rang}(A - \lambda I) = \dim S(\lambda) = 4 - 2 = 2.$$

Ele ar putea fi amândouă de tipul 2×2 sau una de tipul 1×1 şi cealaltă de tipul 3×3. Pentru a lămuri situaţia, folosim indicele de nilpotenţă al restricţiei $\mathcal{N}_1 = \mathcal{A}/_{V_1} - \lambda \mathcal{J}_1$, iar pentru aceasta trebuie să determinăm pe $V_1 = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J})^4$.

Deoarece

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obţinem

$$S(\lambda) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J}) \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J})^2 = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J})^3 = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J})^4$$
$$= V_1 = V = \mathbb{R}^4.$$

Rezultă restricţia $\mathcal{N}_1 = \mathcal{A}/_{V_1} - \lambda \mathcal{J}$ astfel încât indicele de nilpotenţă h_1 al restricţiei $\mathcal{N}_1$ este egal cu 2. Deoarece $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J})^2 = 4$ şi $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J}) = \dim S(\lambda) = 2$, rezultă că numărul celulelor Jordan de tip $h_1 \times h_1$, cu $h_1 = 2$, este egal cu

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J})^2 - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{J}) = 4 - 2 = 2.$$

În concluzie, forma Jordan este

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

unde $J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ şi $J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Soluţia II. Deoarece $\operatorname{rang}(A-\lambda I)=2$, la $\lambda=1$ corespund doi vectori proprii liniar independenţi pe care-i determinăm rezolvând sistemul omogen $(A-\lambda I)E_1=0$, unde $E_1={}^t[x_1,x_2,x_3,x_4]$. Explicit, sistemul

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=0\\ -4x_1-2x_2=0\\ 7x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ -17x_1-6x_2-x_3-x_4=0, \end{cases}$$

este dublu nedeterminat. Notând $x_3=a$ şi $x_4=b$, obţinem $x_1=-\dfrac{a+b}{5}$ şi $x_2=\dfrac{2(a+b)}{5}$. Deci

$$E_1={}^t\left(-\frac{a+b}{5},\frac{2(a+b)}{5},a,b\right),\quad a\neq 0\quad \text{sau}\quad b\neq 0,$$

adică există numai doi vectori proprii liniar independenţi.

Fie $E_2={}^t[u_1,u_2,u_3,u_4]$ matricea corespunzătoare vectorului principal. Obţinem sistemul neomogen $(A-\lambda I)E_2=E_1$, adică

$$\begin{cases} 2u_1+u_2=-\dfrac{a+b}{5}\\ -4u_1-2u_2=2\dfrac{a+b}{5}\\ 7u_1+u_2=u_3+u_4=a\\ -17u_1-6u_2-u_3-u_4=b. \end{cases}$$

Notând $u_3=c$ şi $u_4=d$, găsim

$$E_2={}^t\left(\frac{6a+b-5c-5d}{25},\frac{-17a-7b+10c+10d}{25},c,d\right).$$

Deoarece sistemul neomogen este compatibil oricare ar fi a şi b, rezultă că fiecăruia dintre vectorii proprii liniar independenţi i se ataşează un vector principal. Luând $a=7$ şi $b=-17$, deducem vectorul propriu $e_1=(2,-4,7,-17)$, iar pentru $a=7$, $b=-17$ şi $c=d=0$, se obţine vectorul principal $e_2=(1,0,0,0)$ ataşat lui e_1. Pentru $a=1$ şi $b=-6$ se găseşte vectorul propriu $e_3=(1,-2,1,-6)$, iar pentru $a=1$, $b=-6$ şi $c=d=0$, găsim vectorul principal $e_4=(0,1,0,0)$, care se ataşează lui e_3. În baza Jordan $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, matricea lui $\mathcal{A}$ este

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere

$$C=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\-4&0&-2&1\\7&0&1&0\\-17&0&-6&0\end{pmatrix}$$

verifică $C^{-1}AC=J$.

10.2 Exerciţii/probleme rezolvate

10.2.1 Enunţuri

1. Se dă transformarea $T\in End(\mathbb{R}^3)$ de matrice A (relativ la baza canonică), $A=\begin{pmatrix}3&3&3\\-1&11&6\\2&-14&-7\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi polinomul caracteristic P al endomorfismului T, rezolvaţi ecuaţia caracteristică $P(\lambda)=0$ şi aflaţi spectrul $\sigma(T)$. Notând cu $\sigma(T^{\mathbb{C}})$ mulţimea rădăcinilor complexe ale polinomului caracteristic, verificaţi dacă $\sigma(T^{\mathbb{C}})\subset K=\mathbb{R}$. Deduceţi în consecinţă că T este jordanizabilă.

b) Pentru fiecare valoare proprie distinctă λ a lui T, efectuaţi următoarele:
- aflaţi multiplicitatea algebrică $\mu_a(\lambda)$;
- aflaţi subspaţiul propriu S_λ şi multiplicitatea geometrică $\mu_g(\lambda)$;
- dacă $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$ aflaţi o bază în S_λ;
- dacă $\mu_a(\lambda) > \mu_g(\lambda)$ aflaţi $m = \mu_a(\lambda) - \mu_g(\lambda)$ vectori principali asociaţi vectorilor proprii şi subspaţiile invariante ale valorii proprii.

c) Reunind familiile de vectori determinate mai sus, aflaţi o bază jordanizatoare $B' \subset \mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii şi principali ai lui T;

d) aflaţi matricea $C = [B']_{B_0}$ de trecere de la baza canonică la baza jordanizatoare;

e) aflaţi matricea Jordan $J = A' = C^{-1}AC = [T]_{B'}$ asociată endomorfismului T relativ la baza B';

f) verificaţi relaţia $CJ = AC$.

2. Aceeaşi problemă pentru matricele:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, **e)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Să se jordanizeze endomorfismul T de matrice A folosind metoda şirului de nuclee, pentru matricele din problema anterioară.

10.2.2 Soluţii

1. **Din oficiu: 1pt.** **a)** Calculăm polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 11-\lambda & 6 \\ 2 & -14 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12, \quad \textbf{(0,5 pt.)}.$$

Rezolvăm ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12$, deci ecuaţia algebrică $-(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$. Rădăcinile reale ale acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A şi formează spectrul transformării T, $\sigma(T) = \{3, 2, 2\}$ **(1 pt.)** . Deoarece toate rădăcinile polinomului $P(\lambda)$ sunt reale, rezultă T jordanizabilă.

b) Se observă că pentru $\lambda = \lambda_1 = 3$ avem multiplicitatea algebrică $\mu_a(\lambda_1) = 1$, iar pentru $\lambda = \lambda_2 = 2$ avem $\mu_a(\lambda_2) = 2$.

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 3$ sistemul caracteristic asociat este un sistem de ecuaţii liniare care are drept soluţii vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda_1 = 3$. Acest sistem este:

$$(A - 3I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ -x + 8y + 6z = 0 \\ 2x - 14y - 10z = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $(x, y, z) = (-2t, -t, t) = t(-2, -1, 1), t \in \mathbb{R}$ **(0,5 pt.)** . Deci $S_{\lambda_1} = L(v_1)$ unde $v_1 = (-2, -1, 1)$ este nenul (deci liniar independent), care formează astfel bază în subspaţiul propriu S_{λ_1}; rezultă multiplicitatea geometrică $\mu_g(\lambda_1) = \dim S_{\lambda_1} = 1 = \mu_a(\lambda_1)$ **(0,5 pt.)** . Deci $\mu_a(\lambda_1) = \mu_g(\lambda_1)$ şi o bază în S_{λ_1} este $\{v_1 = (-2, -1, 1)^t\}$; familiei v_1 îi corespunde celula Jordan $J_1(3) = (3)$ **(0,5 pt.)** .

Pentru $\lambda = \lambda_2 = 2$, sistemul caracteristic asociat este

$$(A - 2I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 9y + 6z = 0 \\ 2x - 14y - 9z = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (x, y, z) = (-3t, -3t, 4t) = t(-3, -3, 4), t \in \mathbb{R}$ **(0,5 pt.)** . Deci $S_{\lambda_2} = L(v_2)$, unde $v_2 = (-3, -3, 4)$ este nenul (deci liniar independent), care formează astfel bază în subspaţiul propriu S_{λ_2};

rezultă $\mu_g(\lambda_2) = \dim S_{\lambda_2} = 1$. Deoarece avem $\mu_g(\lambda_2) = 1 \neq 2 = \mu_a(\lambda_2)$, rezultă că endomorfismul T nu este diagonalizabil **(0,5 pt.)** .

Numărul de vectori principali necesari este $\mu_a(\lambda_2) - \mu_g(\lambda_2) = 2 - 1 = 1$. Vectorii proprii au forma $v = (-3t, -3t, 4t), t \in \mathbb{R}$; vectorii principali $p = (a, b, c)$ asociaţi îi determinăm rezolvând sistemul

$$(A - \lambda_2 I_3)p = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ -3t \\ 4t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + 3c = -3t \\ -a + 9b + 6c = -3t \\ 2a - 14b - 9c = 4t, \end{cases}$$

cu minorul principal $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ **(0,5 pt.)** . Condiţia de compatibilitate $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3t \\ -1 & 6 & -3t \\ 2 & -9 & 4t \end{vmatrix} \equiv 0$ este identic satisfăcută, deci sistemul este compatibil nedeterminat. Considerând b necunoscută secundară, notăm $b = s$ şi obţinem $p = (a, b, c) = (s - t, s, -\frac{4}{3}s - \frac{2}{3}t)$ **(0,5 pt.)** . Obţinem spre exemplu, pentru $t = 1$ şi $s = 1$, vectorul propriu $v = (-3, -3, 4)^t$ şi vectorul principal $p = (0, 1, -2)^t$ **(1 pt.)** . Familiei $\{v_2, p\}$ îi corespunde celula Jordan $J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(1 pt.)** .

c) Reunind familiile de vectori determinate mai sus, obţinem baza jordanizatoare $B' = \{v_1 = (-2, -1, 1); v_2 = (-3, -3, 4), p = (0, 1, -2)\}$ **(0,5 pt.)** , căreia îi corespunde matricea Jordan $J = \operatorname{diag}(J_1(3), J_2(2)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt.)** .

d) Matricea de trecere de la baza canonică la baza jordanizatoare este $C = [B']_{B_0} = [v_1; v_2, p]_{B_0} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt.)** .

e) v. pct. c). **f)** Matricea Jordan asociată endomorfismului T relativ la baza B' satisface relaţia $J = C^{-1}AC$. Verificăm această relaţie sub forma $CJ = AC$:

$$C \cdot J = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 \\ -3 & -6 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 11 & 6 \\ 2 & -14 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 \\ -3 & -6 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} = C \cdot J.$$

Deci $C \cdot J = A \cdot C$ **(0,5 pt.)** **Total: 10pt.**.

2. a) Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

deci ecuaţia algebrică $-(\lambda + 1)^3 = 0$. Rădăcinile reale ale acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A şi formează spectrul transformării liniare, $\sigma(T) = \{-1, -1, -1\}$.

Deoarece toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale, rezultă T jordanizabilă.

Pentru $\lambda = \lambda_1 = -1$, cu ordinul de multiplicitate algebrică $\mu_a(\lambda_1) = 3$, sistemul caracteristic asociat este un sistem de ecuaţii liniare care are drept soluţii nebanale vectorii proprii $v = (x, y, z)$ asociaţi valorii proprii $\lambda = -1$. Acest sistem este

$$(A + I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = 0 \\ 5a - 2b + 3c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (a, b, c) = (-t, -t, t) = t(-1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$. Deci $S_\lambda = L(v_1)$ unde $v_1 = (-1, -1, 1)$ este nenul (deci liniar independent) şi formează astfel o bază în subspaţiul propriu S_{λ_1}, de unde rezultă $\mu_g(\lambda_1) = \dim S_{\lambda_1} = 1 \neq 3 = \mu_a(\lambda_1)$.

Numărul de vectori principali necesari este $\mu_a(\lambda_1) - \mu_g(\lambda_1) = 3 - 1 = 2$, pe care îi vom determina rezolvând, pe rând, sistemele $(A + I_3)p_1 = v$ şi $(A + I_3)p_2 = p_1$.

Rezolvăm $(A + I_3)p_1 = v$, cu $p_1 = (a, b, c)$, impunând condiţiile de compatibilitate, sistemul fiind neomogen. Avem

$$(A + I_3)p_1 = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = -t \\ 5a - 2b + 3c = -t \\ -a - c = t. \end{cases}$$

Sistemul este compatibil ($\Delta_{car} = 0$, verificaţi!) nedeterminat. Considerând $c = s$ drept necunoscută secundară, se obţine $p_1 = (a, b, c) = (-t - s, -2t - s, s)$.

Pentru aflarea celui de-al doilea vector principal $p_2 = (a, b, c)$, rezolvăm sistemul

$$(A + I_3)p_2 = p_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t - s \\ -2t - s \\ s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = -t - s \\ 5a - 2b + 3c = -2t - s \\ -a - c = s. \end{cases} \tag{10.1}$$

Pentru a avea sistem compatibil punem condiţia $\Delta_{car} \equiv \begin{vmatrix} 3 & -1 & -t - s \\ 5 & -2 & -2t - s \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = 0$, condiţie identic satisfăcută.

Astfel, pentru $s = -t$, sistemul (10.1) devine $\begin{cases} 3a - b + 2c = 0 \\ 5a - 2b + 3c = -t \\ -a - c = -t \end{cases}$, cu soluţiile $p_2 = (a, b, c) = (-\alpha + t, -\alpha + 3t, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Obţinem, spre exemplu, pentru $t = -1$ şi $\alpha = 1$ vectorul propriu $v = (1, 1, -1)$ şi vectorii principali asociaţi $p_1 = (0, 1, 1)$ şi $p_2 = (-2, -4, 1)$. Reunind familiile de vectori determinate mai sus, obţinem baza jordanizatoare

$$B' = \{v = (1, 1, -1); p_1 = (0, 1, 1); p_2 = (-2, -4, 1)\},$$

căreia îi corespunde celula Jordan $J_3(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J$.

În concluzie, matricea de trecere de la baza canonică la baza jordanizatoare este $C = [B']_{B_0} = [v, p_1, p_2]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan J asociată endomorfismului T relativ la baza B' satisface relaţia $J = C^{-1}AC \Leftrightarrow CJ = AC$. Într-adevăr, avem

$$C \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = C \cdot J.$$

b) Rezolvăm ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -7 & -5 \\ 2 & 3 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, deci ecuaţia algebrică $-\lambda^3 = 0$. Rădăcinile reale ale acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A şi formează spectrul transformării liniare, $\sigma(T) = \{0, 0, 0\}$. Deoarece toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale, rezultă T jordanizabilă.

Pentru $\lambda = 0$, avem $\mu_a(\lambda) = 3$; determinăm vectorii proprii asociaţi $v = (a, b, c) \in S_{\lambda_1}$, rezolvând sistemul caracteristic asociat

$$A \cdot v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 7b - 5c = 0 \\ 2a + 3b + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0, \end{cases}$$

care are soluţiile $v = (a,b,c) = (-3t,t,t) = t(-3,1,1), t \in \mathbb{R}$. În concluzie, o bază în S_λ este formată din vectorul $v_1 = (-3,1,1)$, de unde rezultă $\mu_g(\lambda) = \dim S_\lambda = 1$.

Numărul de vectori principali necesari este $\mu_a(\lambda) - \mu_g(\lambda) = 3 - 1 = 2$ pe care îi vom determina rezolvând pe rând, sistemele $A \cdot p_1 = v$ şi $A \cdot p_2 = p_1$.

Rezolvăm $A \cdot p_1 = v$ cu $p_1 = (a,b,c)$, impunând condiţiile de compatibilitate, sistemul fiind neomogen. Avem

$$A \cdot p_1 = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 7b - 5c = -3t \\ 2a + 3b + 3c = t \\ a + 2b + c = t. \end{cases}$$

Sistemul este compatibil ($\Delta_{car} = 0$, verificaţi!) nedeterminat. Considerând $c = s$ drept necunoscută secundară, se obţine $p_1 = (a,b,c) = (-3s - t, s + t, s)$.

Pentru aflarea celui de-al doilea vector principal $p_2 = (a,b,c)$, rezolvăm

$$A \cdot p_2 = p_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3s - t \\ s + t \\ s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 7b - 5c = -3s - t \\ 2a + 3b + 3c = s + t \\ a + 2b + c = s. \end{cases} \tag{10.2}$$

Pentru a avea sistem compatibil punem condiţia $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} -4 & -7 & -3s - t \\ 2 & 3 & s + t \\ 1 & 2 & s \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot s + 0 \cdot t = 0$; deci sistemul este compatibil pentru orice $s, t \in \mathbb{R}$ şi are soluţiile $p_2 = (a,b,c) = (-3\alpha - s + 2t, \alpha + s - t, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Obţinem, spre exemplu, pentru $t = s = \alpha = 1$, vectorul propriu $v = (-3,1,1)$ şi vectorii principali asociaţi $p_1 = (-4,2,1)$ şi $p_2 = (-2,1,1)$.

Familia celor trei vectori formează baza jordanizatoare

$$B' = \{v = (-3,1,1), p_1 = (-4,2,1), p_2 = (-2,1,1)\},$$

căreia îi corespunde celula Jordan $J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. În concluzie, matricea de trecere de la baza canonică la baza jordanizatoare este $C = [B']_{B_0} = [v, p_1, p_2]_{B_0} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar matricea Jordan J asociată endomorfismului T relativ la baza B' este $J = \operatorname{diag}(J_3(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Relaţia $J = C^{-1}AC \Leftrightarrow CJ = AC$ are loc; într-adevăr, obţinem:

$$C \cdot J = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C \cdot J.$$

c) Rezolvăm ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$, deci ecuaţia algebrică $-(\lambda - 2)^3 = 0$. Rădăcinile reale ale acestei ecuaţii sunt valorile proprii ale matricei A şi formează spectrul transformării liniare, $\sigma(T) = \{2,2,2\}$. Deoarece toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale, rezultă T jordanizabilă.

Pentru $\lambda = 2$, cu ordinul de multiplicitate algebrică $\mu_a(\lambda) = 3$, sistemul caracteristic asociat este un sistem de ecuaţii liniare care are drept soluţii nebanale vectorii proprii $v = (a,b,c)$ asociaţi valorii proprii $\lambda = 2$. Acest sistem este

$$(A - 2I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ -4a + 2b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $v = (a, b, c) = (t, 2t, s) = t(1, 2, 0) + s(0, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$. În concluzie, o bază în S_{λ_1} este formată din vectorii $v_1 = (1, 2, 0)$ şi $v_2 = (0, 0, 1)$, de unde rezultă $\mu_g(\lambda_1) = \dim S_{\lambda_1} = 2$.

Numărul de vectori principali necesari este $\mu_a(\lambda_1) - \mu_g(\lambda_1) = 3 - 2 = 1$, pe care îi vom determina rezolvând, sistemul $(A-2I_3)p = v$. Rezolvăm acest sistem, impunând condiţiile de compatibilitate, sistemul fiind neomogen. Notând $p = (a, b, c)$, sistemul se rescrie

$$(A - 2I_3)p = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = t \\ -4a + 2b = 2t \\ 0 = s. \end{cases}$$

Pentru a avea sistem compatibil punem condiţiile $\Delta_{car_1} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t \end{vmatrix} = 0$ şi $\Delta_{car_2} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{vmatrix} = 0$, de unde rezultă că trebuie să avem $s = 0$.

Considerând a şi c necunoscute secundare şi notând $a = \alpha$ şi $c = \beta$, se obţine $p = (a, b, c) = (\alpha, t + 2\alpha, \beta)$.

Obţinem, spre exemplu pentru $t = 1, s = 0$, $\alpha = 1$ şi $\beta = 2$, vectorul propriu $v_1 = (1, 2, 0)$ şi vectorul principal asociat $p_1 = (1, 3, 2)$. Al doilea vector propriu va fi ales astfel încât $s \neq 0$; spre exemplu pentru $t = 1, s = -1$ obţinem $v_2 = (1, 2, -1)$. Reunind familiile de vectori determinate mai sus, obţinem baza jordanizatoare

$$B' = \{v_1 = (1, 2, 0), p_1 = (1, 3, 2); v_2 = (1, 2, -1)\},$$

deci matricea de trecere de la baza canonică la baza jordanizatoare este $C = [B']_{B_0} = [v_1, p_1; v_2]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Matricea Jordan J asociată endomorfismului T relativ la baza B' este $J = \operatorname{diag}(J_2(2), J_1(2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Relaţia $J = C^{-1}AC \Leftrightarrow CJ = AC$ are loc; într-adevăr, obţinem

$$C \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = C \cdot J.$$

d) Subspaţiul propriu asociat unicei valori proprii distincte $\lambda = 0$ ($\mu = 4$) este $S_{\lambda=0} = L(\{f_1 = (1, -2, 1, -6)^t, f_2 = (0, 0, 1, -1)^t\})$. Deci multiplicitatea geometrică este $2 < 4$. Determinăm cei $4-2 = 2$ vectori principali rezolvând sistemul $(A - 0I_4)p = v$, unde $v = af_1 + bf_2$. Alegând minorul principal la intersecţia liniilor 1 şi 3 cu primele două coloane, compatibilitatea ecuaţiilor secundare 2 şi 4 este identic satisfăcută, iar soluţiile sunt de forma $p = (s, a - 2s, b - t - 5s, t)^t$. Pentru $s = t = b = 0, a = 1$ rezultă $v_1 = (1, -2, 1, -6)^t, p_1 = (0, 1, 0, 0)^t$, iar pentru $s = t = a = 0, b = 1$ rezultă $v_2 = (0, 0, 1, -1)^t, p_2 = (0, 0, 1, 0)^t$. Celor două familii de vectori le corespunde în matricea Jordan J câte o celulă Jordan $J_2(0)$. Baza jordanizatoare este deci $B' = \{v_1, p_1; v_2, p_2\}$, matricea jordanizatoare este $C = [B']_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ iar matricea Jordan asociată este $J = \operatorname{diag}(J_2(0), J_2(0))$.

e) Cele două valori proprii distincte sunt $\sigma(A) = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2\}$ cu multiplicităţile algebrice $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$ respectiv. Pentru $\lambda_1 = -1$ avem $S_{\lambda_1} = L(v_1 = (1, 1, 1))$, deci multiplicităţile algebrică şi geometrică sunt egale şi avem $B_1 = \{v_1\}$ bază în subspaţiul propriu S_{λ_1}. Pentru $\lambda_2 = 2$, avem $S_{\lambda_2} = L(v_0 = (0, 1, 1)^t)$, deci multiplicitatea geometrică este $1 < \mu_2 = 2$. Determinăm un vector principal p rezolvând sistemul liniar $(A - 2I_3)p = v$, unde $v = (0, t, t)^t$. Condiţia de compatibilitate a sistemului neomogen este identic satisfăcută şi obţinem soluţia $p = (0, s, s + t)^t$; alegând $t = 1, s = 0$ rezultă familia de vectori $B_2 = \{v_2 = (0, 1, 1)^t, p_2 = (0, 0, 1)^t\}$, bază în subspaţiul invariant asociat valorii proprii $\lambda_2 = 2$. Atunci baza jordanizatoare este $B' = B_1 \cup B_2 = \{v_1; v_2, p_2\}$, matricea jordanizatoare este $C = [B']_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ iar matricea Jordan $J = \operatorname{diag}(J_1(-1), J_2(2))$.

3. Prezentăm întâi pe scurt algoritmul de jordanizare folosind metoda şirului de nuclee.

- Se determină rădăcinile complexe distincte $\rho(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ ale polinomului caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ matricii A a endomorfismului $T \in End(V)$ ($\dim_K V = n$).

- Dacă $\rho(A) \not\subset K$, atunci T nu este jordanizabil, stop algoritm. În caz contrar, T admite formă canonică Jordan şi algoritmul continuă.

- Pentru fiecare valoare proprie distinctă $\lambda = \lambda_i$ ($i = \overline{1,p}$) având multiplicitatea algebrică μ_i, se parcurg următorii paşi:

  i) se determină o bază în subspaţiul propriu $S_i = \text{Ker}\,(T - \lambda Id)$. Dacă $\dim S_i = \mu_i$, atunci se notează această bază cu B_i (căreia în matricea Jordan îi corespunde blocul $\text{diag}\,(\lambda_i, \ldots, \lambda_i)$ de dimensiune μ_i) şi se trece la următoarea valoare proprie distinctă . În caz contrar, se trece la subpunctul următor.

  ii) notăm $\tau = T - \lambda Id$, $M = [\tau] = A - \lambda I_n$ şi $K_j = \text{Ker}\,(\tau^j)$. Se determină ordinul maxim al unei celule Jordan asociată valorii proprii λ (ordinul de nilpotenţă) ca fiind numărul natural $s \geq 2$ pentru care $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_s = K_{s+1} = K_{s+2} = \ldots$.

  iii) se descompun succesiv bazele β_j ale subspaţiilor K_j ($j = \overline{1,s}$), după cum urmează:

$$\begin{array}{llllllll}
\beta_s & = \beta_{s-1} & \cup\, C_s & & & & & \\
\beta_{s-1} & = \beta_{s-2} & \cup\, \tau(C_s) & \cup\, C_{s-1} & & & & \\
\beta_{s-2} & = \beta_{s-3} & \cup\, \tau^2(C_s) & \cup\, \tau(C_{s-1}) & \cup\, C_{s-2} & & & \\
\ldots & & & & & & & \\
\beta_2 & = \beta_1 & \cup\, \tau^{s-2}(C_s) & \cup\, \tau^{s-3}(C_{s-1}) & \cup\, \ldots & \cup\, \tau(C_3) & \cup\, C_2 & \\
\beta_1 & = \emptyset & \cup\, \tau^{s-1}(C_s) & \cup\, \tau^{s-2}(C_{s-1}) & \cup\, \ldots & \cup\, \tau^2(C_3) & \cup\, \tau(C_2) & \cup\, C_1
\end{array}$$

  unde $C_s, C_{s-1}, \ldots C_1$ sunt mulţimi de vectori (nu toate vide) construite pentru a completa reuniunile ce le preced, la bazele $\beta_s, \ldots \beta_1$ respectiv. Pentru fiecare $k \in \overline{1,s}$ şi fiecare vector $p_k \in C_k$, se construieşte familia

$$\{v = \tau^{k-1}(p), \tau^{k-2}(p), \ldots, \tau(p), p\},$$

  formată din k vectori (v = vector propriu şi $k-1$ vectori principali pentru $k \geq 2$ şi vectorul propriu $v = p$ pentru $k = 1$), căreia în matricea Jordan J îi corespunde celula $J_k(\lambda)$. Se notează cu B_i reuniunea acestor familii. Aceasta este o bază în subspaţiul invariant K_s ($K_s \supset K_1 = S_1$) asociat valorii proprii λ_i.

- Se construieşte baza jordanizatoare $B' = B_1 \cup \cdots \cup B_p$ şi matricea de trecere la această bază, $C = [B']_B$. Se construieşte matricea Jordan $J = [T]_{B'}$ asociată endomorfismului T aşezând pe diagonală blocurile/celulele asociate familiilor care compun B', în ordinea apariţiei acestor familii în noua bază B'.

- Se verifică relaţia $J = C^{-1}AC$ sub forma echivalentă a acesteia, $CJ = AC$.

a) Pentru unica valoare proprie distinctă $\lambda = -1$ ($\mu = 3$), obţinem $M^2 \neq 0_3, M^3 = 0$, deci $s = 3$ şi $K_3 = \mathbb{R}^3$. Deoarece $K_2 = L(\{(1,0,-2),(0,1,1)\} \not\ni e_3 = (0,0,1)$, alegem $C_3 = \{p = e_3\}$. Atunci avem

$$\begin{array}{llll}
\beta_3 & = \beta_2 & \cup & \{p = e_3\} \\
\beta_2 & = \beta_1 & \cup & \tau(e_3) \quad \cup \quad \emptyset \\
\beta_1 & = \emptyset & \cup & \tau^2(e_3) \quad \cup \quad \emptyset\,.
\end{array}$$

Familia de vectori

$$B' = B_1 = \{v = M^2 e_3 = (1,1,-1)^t, p_1 = Me_3 = (2,3,-1)^t, p_2 = e_3 = (0,0,1)\}$$

este baza a subspaţiului invariant $K_3 = \mathbb{R}^3$ şi reprezintă o bază jordanizatoare a endomorfismului T. Ei îi corespunde matricea de schimbare de bază $C = [v, p_1, p_2]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi matricea Jordan $J = J_3(-1)$. Se observă că alegând $p = (-2, -4, 1)^t \notin K_2$, se obţine baza jordanizatoare

$$B' = \{v = M^2 p = (1, 1, -1)^t, Mp = (0, 1, 1)^t, p = (-2, -4, 1)^t\}.$$

b) Pentru unica valoare proprie distinctă $\lambda = 0$ obţinem $M^2 \neq 0_3, M^3 = 0_3$, deci $s = 3$ şi $K_3 = \mathbb{R}^3$. Deoarece $K_2 = L(\{(1, -1, 0)^t, (0, -2, 1)^t\} \not\ni e_3 = (0, 0, 1)^t$, alegem $C_3 = \{p = e_3\}$. Atunci avem

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \beta_2 \quad \cup \quad \{p = e_3\} \\ \beta_2 &= \beta_1 \quad \cup \quad \tau(e_3) \quad \cup \quad \varnothing \\ \beta_1 &= \varnothing \quad \cup \quad \tau^2(e_3) \quad \cup \quad \varnothing\,. \end{aligned}$$

Familia de vectori $B' = B_1 = \{v = M^2 e_3 = (-6, 2, 2)^t, p_1 = Me_3 = (-5, 3, 1)^t, p_2 = e_3 = (0, 0, 1)^t\}$ este o bază a subspaţiului invariant $K_3 = \mathbb{R}^3$, bază jordanizatoare B' . Ei îi corespunde matricea de schimbare de bază $C = [v, p_1, p_2]_B = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi matricea Jordan $J = J_3(0)$. Se observă că alegând $p = (-2, 1, 1)^t \notin K_2$, se obţine baza jordanizatoare, $B' = \{v = M^2 p = (-3, 1, 1)^t, Mp = (-4, 2, 1)^t, p = (-2, 1, 1)^t\}$.

c) Pentru unica valoare proprie distinctă $\lambda = 2$ obţinem $M^2 = 0$, deci $s = 2$ şi $K_2 = \mathbb{R}^3$. Deoarece $K_1 = L(\{(1, 2, 0)^t, e_3 = (0, 0, 1)^t\} \not\ni e_2 = (0, 1, 0)$, alegem $C_2 = \{p = e_2\}$. Atunci avem

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1 \quad \cup \quad \{e_2\} \\ \beta_1 &= \varnothing \quad \cup \quad \tau(e_2) \quad \cup \quad \{e_3\}. \end{aligned}$$

Familiei de vectori $\{v_1 = Mp_1 = (1, 3, 2)^t, p_1 = (0, 1, 0)^t\}$ îi va corespunde celula Jordan $J_2(2)$, iar vectorului $C_1 = \{v_2 = e_3\}$, celula Jordan $J_1(2)$. O bază a subspaţiului invariant $K_2 = \mathbb{R}^3$ este $B' = \{v_1, p_1; v_2\}$, bază jordanizatoare. Ei îi corespunde matricea de schimbare de bază $C = [v_1, p_1, v_2]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi matricea Jordan $J = [T]_{B'} = \operatorname{diag}(J_2(2), J_1(2))$. Se observă că alegând $p = (1, 3, 2)^t \notin K_1$ şi selectând $C_1 = \{v_2 = (1, 2, -1)^t\}$, se obţine baza jordanizatoare $B' = \{v = Mp = (1, 2, 0)^t, p = (1, 3, 2)^t; v_2 = (1, 2, -1)^t\}$.

d) Avem $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 0\}, \mu_1 = 4$ şi pentru unica valoare proprie distinctă $\lambda = 0$ obţinem $M = A, M^2 = 0$, deci $s = 2$ şi $K_2 = \mathbb{R}^4$. Deoarece $K_1 = L(\{(0, 0, -1, 1)^t, (1, -2, 1, -6)^t\} \not\ni p_1 = e_2 = (0, 1, 0, 0)^t, p_2 = e_3 = (0, 0, 1, 0)^t$, alegem $C_3 = \{e_2, e_3\}$. Atunci avem

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1 \quad \cup \quad \{e_2, e_3\} \\ \beta_1 &= \varnothing \quad \cup \quad \{\tau(e_2), \tau(e_3)\} \quad \cup \quad \varnothing\,. \end{aligned}$$

Familia de vectori $B' = B_1 = \{v_1 = Me_2 = (1, -2, 1, -6)^t, p_1 = e_2 = (0, 1, 0, 0)^t; v_2 = Me_3 = (0, 0, 1, -1)^t, p_2 = e_3 = (0, 0, 1, 0)^t\}$ bază a subspaţiului invariant $K_4 = \mathbb{R}^4$, o bază jordanizatoare pentru T. Matricea jordanizatoare este matricea de schimbare de bază $C = [v_1, p_1; v_2, p_2]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ iar matricea Jordan este $J = \operatorname{diag}(J_2(0), J_2(0))$.

e) Pentru $\lambda_1 = -1$ avem $S_1 = K_1 = K_2 = \ldots$, deci $s = 1$ şi rezolvând sistemul $(A + I_3)v = 0_3$ rezultă $B_1 = \varnothing \cup \{v_1 = (1, 1, 1)^t\} = \{v_1\}$, bază a subspaţiului propriu, căruia în matricea Jordan îi corespunde blocul (celula Jordan) $J_1(-1)$. Pentru $\lambda = 2$ obţinem $K_1 \subset K_2 = K_3 = \ldots$, deci $s = 2$ şi avem $K_2 = L(e_1, e_2)$. Alegem $p_2 = e_3 \notin K_2$ şi obţinem

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1 \quad \cup \quad \{e_3\} \\ \beta_1 &= \varnothing \quad \cup \quad \{\tau(e_3)\} \quad \cup \quad \varnothing\,. \end{aligned}$$

Familia de vectori $B_2 = \{v_2 = Me_3 = (1, 1, 1)^t, p_2 = e_3 = (0, 0, 1)^t\}$ este o bază a subspaţiului invariant K_2. Ei îi corespunde în matricea J celula Jordan $J_2(2)$. Atunci baza jordanizatoare este $B' = B_1 \cup B_2 = \{v_1; v_2, p_2\}$.

10.3 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Să se determine baza faţă de care matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

are forma canonică Jordan.

2. Fie $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismul definit prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine matricea Jordan pentru ${}^C\mathcal{A}\colon {}^C\mathbb{R}^4 \to {}^C\mathbb{R}^4$ şi să se scrie matricea corespondentă pentru $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

3. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{pmatrix}$$

cu elemente din $\mathbb{C}$. Să se determine o matrice unitară T astfel încât matricea $T^{-1}AT$ să fie triunghiulară.

MA.11.Endomorfisme pe spaţii euclidiene

Cuvinte cheie: endomorfisme simetrice, endomorfisme ortogonale, endomorfisme hermitice, endomorfisme unitare, endomorfisme antisimetrice, endomorfisme antihermitice.

11.1 Endomorfisme hermitice. Endomorfisme antihermitice

Fie V un spaţiu euclidian peste câmpul $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, fie $\mathcal{A}\colon V \to V$ un endomorfism, λ o valoare proprie a lui $\mathcal{A}$ şi x un vector ataşat lui λ. Aceste date produc formula $\lambda = \dfrac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}$ sau mai general, $\lambda = \dfrac{(\mathcal{A}x, y)}{(x, y)}$, pentru orice vector y neortogonal cu x. Aceste formule stau la baza demonstraţiei pentru

Teorema 92. *Fie V un spaţiu euclidian complex şi fie $\mathcal{A}\colon V \to V$ un endomorfism hermitic.*
1) *Valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ sunt reale.*
2) *La valori proprii distincte ale lui $\mathcal{A}$ corespund vectori proprii ortogonali.*
3) *Dacă $\dim V = n$, atunci endomorfismul hermitic $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ admite exact n vectori proprii ortogonali doi câte doi (deci este diagonalizabil).*

Demonstraţie. Prin ipoteză $(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}x, y)$, $\forall x, y \in V$.

1) Se observă că $\bar{\lambda} = \overline{\dfrac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}} = \dfrac{(x, \mathcal{A}x)}{(x, x)} = \dfrac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda$, deci λ este un număr real.

2) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii ale lui $\mathcal{A}$ şi $v_1, v_2 \in V$ vectori proprii liniar independenţi asociaţi. Dacă $(v_1, v_2) \neq 0$, atunci $\lambda_1 = \dfrac{(\mathcal{A}v_1, v_2)}{(v_1, v_2)} = \dfrac{(v_1, \mathcal{A}v_2)}{(v_1, v_2)} = \lambda_2$.

3) Fie x un vector propriu al lui $\mathcal{A}$, corespunzător la valoarea proprie a lui λ. Atunci mulţimea $W = \{y \in V_n \mid (x, y) = 0\}$ este un subspaţiu vectorial $n-1$ dimensional, cu proprietatea $\mathcal{A}(W) = W$. Într-adevăr, $(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}x, y) = \lambda(x, y) = 0$. Deoarece endomorfismul $\mathcal{A}/_W$ este hermitic, putem aplica inducţia asupra lui n. □

Observaţii:

1) Pentru un *endomorfism antihermitic*, valorile proprii sunt pur imaginare sau nule. Vectorii proprii corespunzători au aceleaşi proprietăţi ca şi în cazul hermitic.

2) Pe spaţiile euclidiene reale, valorile proprii ale unui *endomorfism simetric* sunt reale, iar valorile proprii ale unui *endomorfism antisimetric* sunt nule. Dacă V_n este un spaţiu euclidian real n-dimensional, iar $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este simetric, atunci $\mathcal{A}$ posedă n vectori proprii care constituie o bază ortogonală a lui V_n. Această proprietate nu este adevărată pentru un endomorfism antisimetric.

Exemplu. Fie spaţiul euclidian complex $\mathbb{C}^3$ şi $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ endomorfismul dat prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să arătăm că $\mathcal{A}$ este hermitic şi să determinăm o bază în $\mathbb{C}^3$ faţă de care matricea endomorfismului să aibă forma diagonală. Valorile proprii sunt reale, adică $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, iar vectorii proprii $e_1 = (1, i, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$ corespunzători valorii $\lambda = 4$ şi $e_3 = (i, 1, 0)$, pentru $\lambda = 2$, sunt ortogonali doi câte doi, deci $\mathcal{A}$ este hermitic. Normând vectorii proprii, obţinem baza ortonormată:

$$u_1 = \frac{e_1}{||e_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right); \qquad u_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \qquad u_3 = e_2.$$

Matricea de trecere de la baza canonică la baza $\{u_1, u_2, u_3\}$ este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

astfel încât

$$D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

11.2 Endomorfisme ortogonale. Endomorfisme unitare

Teorema 93. *Fie V un spaţiu euclidian complex (real) şi $\mathcal{A}\colon V \to V$ un endomorfism* ***unitar*** *(respectiv* ***ortogonal****).*

1) *Dacă există, valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ au modulul egal cu 1.*
2) *La valori proprii distincte ale lui $\mathcal{A}$ corespund vectori proprii ortogonali.*
3) *Dacă V este complex şi n-dimensional, atunci $\mathcal{A}$ posedă n vectori proprii ortogonali doi câte doi.*

Demonstraţie. 1) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie pentru endomorfismul unitar $\mathcal{A}\colon V \to V$ şi $x \in V \setminus \{0\}$ un vector propriu corespunzător lui λ. Avem

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x, x) \quad \text{şi} \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x),$$

unde $\bar{\lambda}$ este conjugatul complex al lui λ. Prin scădere, rezultă $(\lambda\bar{\lambda} - 1)(x, x) = 0$. Deoarece $(x, x) \neq 0$, găsim $\lambda\bar{\lambda} - 1 = 0$ sau $|\lambda|^2 = 1$, adică $|\lambda| = 1$.

2) Fie valorile proprii $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi x_1, x_2 vectorii proprii corespunzători. Atunci

$$(\mathcal{A}x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, x_2) \quad \text{şi} \quad (\mathcal{A}x_1, \mathcal{A}x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1\bar{\lambda}_2(x_1, x_2).$$

Prin scădere rezultă $(\lambda_1\bar{\lambda}_2 - 1)(x_1, x_2) = 0$. Deoarece $\lambda_1\bar{\lambda}_2 - 1 \neq 0$, deducem că $(x_1, x_2) = 0$, adică x_1 şi x_2 sunt ortogonali.

3) Endomorfismul $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este injectiv (fiind unitar) şi surjectiv (deoarece dimensiunea nucleului este 0). Pe de altă parte, dacă în $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ înlocuim x cu $\mathcal{A}^{-1}x$, obţinem $(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y)$.

Fie x un vector propriu al lui $\mathcal{A}$ corespunzător la valoarea proprie a lui λ. Atunci mulţimea $W = \{y \in V_n \,|\, (x, y) = 0\}$ este un subspaţiu vectorial $n - 1$ dimensional, cu proprietatea $\mathcal{A}(W) = W$. Într-adevăr, $(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y) = \frac{1}{\lambda}(x, y) = 0$. Acum putem aplica inducţia asupra lui n. $\square$

Exemplu. Pe spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^4$ fie endomorfismul $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dat prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matricea A este ortogonală, adică $A\ {}^tA = I$, deci şi endomorfismul $\mathcal{A}$ este ortogonal. Să verificăm dacă valorile proprii ale lui ${}^C\mathcal{A}\colon {}^C\mathbb{R}^n \to {}^C\mathbb{R}^n$ au modulul egal cu unitatea şi dacă vectorii proprii corespunzători sunt ortogonali.

Valorile proprii ale lui ${}^C\mathcal{A}$ sunt soluţiile ecuaţiei $\det(A - \lambda I) = 0$, adică $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$ şi $\lambda_4 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}$. Evident, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ şi $|\lambda_3| = |\lambda_4| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{15}{16}} = 1$. Vectorii proprii, liniari independenţi, sunt $e_1 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 1, -\sqrt{3})$, $e_3 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + i\left(\sqrt{\frac{15}{4}}, \sqrt{\frac{15}{4}}, 0, 0\right)$ şi $e_4 = \bar{e}_3$. Vectorilor e_3 şi e_4 li se ataşează vectorii reali $u = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)$ şi $v = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0, 0\right)$ astfel încât $e_3 = u + iv$ şi $e_4 = u - iv$. Se verifică imediat relaţiile de ortogonalitate: $(e_1, e_2) = 0$, $(e_1, u) = 0$, $(e_1, v) = 0$, $(e_2, u) = 0$, $(e_2, v) = 0$ şi $(u, v) = 0$.

11.3 Problemă rezolvată

Aflaţi o bază diagonalizatoare ortonormată pentru transformarea simetrică de matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Soluţie. **a)** Rezolvăm ecuaţia caracteristică:

$$P(\lambda\ ) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda\ I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-4) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii fiind reale, sunt valorile proprii ale matricei A şi formează spectrul transformării $\sigma\ (T) = \{-1, -1, 4\}$.

Deoarece matricea A este simetrică $(A = A^{\,t})$, rezultă că endomorfismul T este diagonalizabil şi vectorii săi proprii din susbpaţii proprii distincte sunt ortogonali.

Pentru $\lambda\ = \lambda_{\,1} = -1$, sistemul caracteristic asociat este

$$(A + I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2a + b = 0$$

şi are soluţiile $(a, b, c) = s(1, -2, 0) + t(0, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$. Deci am obţinut vectorii proprii generatori $v_1 = (1, -2, 0)$ şi $v_2 = (0, 0, 1)$. Se observă că $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, deci $v_1 \perp v_2$.

Pentru $\lambda\ = \lambda_{\,2} = 4$, sistemul caracteristic asociat este

$$(A - 4I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -5c = 0 \end{cases}$$

şi are soluţiile $(a, b, c) = t(2, 1, 0), t \in \mathbb{R}$.

Notăm $v_3 = (2, 1, 0)$ vectorul propriu generator al subspaţiului propriu S_{λ_2}. Deoarece v_1, v_2, v_3 formează o bază diagonalizatoare ortogonală, baza diagonalizatoare ortonormată este

$$B=\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|},\ \frac{v_2}{\|v_2\|},\ \frac{v_3}{\|v_3\|}\ \right\}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)\ ,(0,0,1)\ ,\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right\}.$$

b) **Din oficiu: 1pt.** Rezolvăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda\ )=0\Leftrightarrow \det(A-\lambda\ I_3)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\lambda\ (\lambda+3)^2=0,\ \textbf{(1 pt.)}\ .$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt reale, deci formează spectrul transformării $\sigma(T)=\{0,-3,-3\}$ **(0,5 pt.)** . Deoarece matricea A este simetrică $(A=A^{\,t})$, rezultă că endomorfismul T este diagonalizabil şi că vectorii săi proprii din susbpaţii proprii distincte sunt ortogonali **(0,5 pt.)** .

Pentru $\lambda\ =\lambda_1=0$, sistemul caracteristic asociat este

$$A\cdot v=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b+c=0\\ a-2b+c=0\\ a+b-2c=0 \end{cases}$$

şi are soluţiile

$$v=(a,b,c)=(t,t,t)=t\,(1,1,1),t\in\mathbb{R}\ \textbf{(1 pt.)}\ .$$

Deci am obţinut vectorul propriu generator $v_1=(1,1,1)$ **(0,5 pt.)** .

Pentru $\lambda\ =\lambda_2=-3$, sistemul caracteristic asociat este

$$(A+3I_3)v=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow a+b+c=0\ \textbf{(0,5 pt.)}$$

şi are soluţiile $v=(a,b,c)=(-s-t,s,t)=s(-1,1,0)+t(-1,0,1),\ s,t\in\mathbb{R}$ **(1 pt.)** .

Se observă că vectorii $v_2=(-1,1,0)$ şi $v_3=(-1,0,1)$ nu sunt ortogonali **(0.5 pt.)** . Folosind procedeul Gram-Schmidt obţinem vectorii ortogonali $u_2=(-1,1,0)$şi $u_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ **(1 pt.)** . În concluzie, vectorii $v_1=(1,1,1)$, $u_2=(-1,1,0)$ şi $u_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ formează o bază diagonalizatoare ortogonală **(0,5 pt.)** , deci prin normare obţinem baza diagonalizatoare ortonormată

$$B=\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|},\ \frac{u_2}{\|u_2\|},\ \frac{u_3}{\|u_3\|}\ \right\}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\ ,\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\ \right\}\ \textbf{(2 pt.)}\ \ \textbf{Total: 10pt.}$$

11.4 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii şi apoi să se diagonalizeze (în cazurile în care acest lucru este posibil) matricea ortogonală

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii şi apoi să se diagonalizeze matricea hermitică

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i & 0\\ -i & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

MA.12.Polinoame şi funcţii de matrice

Cuvinte cheie: polinom de matrice, funcţie de endomorfism, serie de matrice, serie de endomorfism, funcţie de matrice, funcţie de endomorfism, teorema Cayley-Hamilton, exponenţiala unei matrice.

12.1 Polinoame de matrice

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul K şi $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ un endomorfism căruia, în raport cu o bază a lui V_n, i se ataşează matricea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

Oricărui polinom

$$Q(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

cu coeficienţi din câmpul K, i se poate ataşa polinomul

$$Q(\mathcal{A}) = a_m \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \mathcal{A} + a_0 \cdot Id,$$

unde $Id : v \to V$ este aplicaţia identitate a spaţiului vectorial V, sau polinomul

$$Q(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \cdot I_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n.

Definiţia 94. Polinoamele $Q(\mathcal{A})$ se numesc ***polinoame de endomorfisme***, iar polinoamele $Q(A)$ se numesc ***polinoame de matrice***.

Evident, pe spaţii finit dimensionale, cercetarea polinoamelor de endomorfisme se reduce la cercetarea polinoamelor de matrice. În ceea ce priveşte calculul matricei $Q(A)$ când se dă matricea A, este recomandabil să se folosească observaţiile următoare:

1) dacă A se reduce la o matrice diagonală D, atunci

$$A = CDC^{-1}, \quad A^2 = CD^2C^{-1}, \ldots, A^m = CD^mC^{-1};$$

2) dacă A se reduce la o matrice Jordan J, atunci

$$A = CJC^{-1}, \quad A^2 = CJ^2C^{-1}, \ldots, A^m = CJ^mC^{-1}.$$

Teorema 95 (*Cayley-Hamilton*). *Dacă $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei A, atunci $P(A) = 0$.*

Demonstraţie. Dacă $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, atunci $(*)\, C \cdot C^+ = (\det C)I$, unde C^+ este reciproca lui C. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ şi $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ polinomul său caracteristic. Având în vedere $(*)$, avem $(**)\, (A-\lambda I)(A-\lambda I)^+ = P(\lambda)I$.

Prin construcţie, $(A-\lambda I)^+$ este o matrice de polinoame de grad $n-1$, adică

$$(A-\lambda I)^+ = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_0,$$

unde $B_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, $i = \overline{0, n-1}$. Fie $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k$, cu $a_k, \lambda \in K$. Egalitatea $(**)$ devine

$$(A-\lambda I)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0) = (a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)I$$

sau

$$(-B_{n-1})\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + \cdots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 = (a_nI)\lambda^n + \cdots + (a_1I)\lambda + a_0I.$$

Amplificând la stânga cu A^n, $A^{n-1}, \ldots, A$, respectiv I şi adunând parte cu parte, obţinem

$$P(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI =$$
$$-A^nB_{n-1} + A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} + A^{n-1}B_{n-2} - \cdots + AB_0 + AB_0 = 0.$$

□

Corolarul 96. *Dacă $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ este un endomorfism, iar $P(\lambda)$ este polinomul său caracteristic, atunci $P(\mathcal{A}) = 0$.*

Exemple:

1) Dacă

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

să calculăm matricea $P(A) = A^4 - 2A^2 + I$. Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda^2 - 1)^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1,$$

deci în baza teoremei Cayley-Hamilton, avem $P(A) = 0$.

2) Să calculăm A^{-1} pentru matricea nesingulară

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

folosind teorema Cayley-Hamilton. Găsim $P(\lambda) = (1-\lambda)^3$, deci $P(A) = 0$, adică $(A-I)^3 = 0$ sau $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$. De aici rezultă

$$A(A^2 - 3A + 3I) = (A^2 - 3A + 3I)A = I,$$

astfel încât

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să arătăm acum că gradul unui polinom de matrice este cel mult $n-1$, unde n este ordinul matricei.

Teorema 97. *Fie n ordinul matricei A. Orice polinom în A, de grad cel puţin n, poate fi exprimat printr-un polinom de gradul $n-1$.*

Demonstraţie. Fie
$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \cdots \pm \delta_n)$$
polinomul caracteristic ataşat matricei A. Teorema Cayley-Hamilton implică
$$A^n = \delta_1 A^{n-1} - \cdots \mp \delta_n I.$$

Prin recurenţă rezultă că puterile A^{n+p}, $p \in \mathbb{N}$, se exprimă cu ajutorul puterilor $A^{n-1}, \ldots, A, I$. □

12.2 Funcţii de matrice

Fie acum o serie de puteri $f(t) = \sum\limits_m a_m t^m$, cu coeficienţi din K. Se ştie că aceste serii au sens pe acele spaţii vectoriale pe care putem defini puterea t^m (numere reale, numere complexe, matrice pătratice, endomorfisme etc). Teoria convergenţei seriilor de puteri o presupunem cunoscută de la cursul de Analiză Matematică.

Definiţia 98. Fie $\mathcal{A}\colon V_n \to V_n$ un endomorfism arbitrar şi A matricea pătratică de ordinul n ataşată lui $\mathcal{A}$ în raport cu o bază din V_n. Seria $\sum\limits_m a_m \mathcal{A}^m$ se numeşte ***serie de endomorfism***, iar suma sa se numeşte ***funcţie de endomorfism***. Seria $\sum\limits_m a_m A^m$ se numeşte ***serie de matrice***, iar suma sa se numeşte ***funcţie de matrice***.

Evident, pe spaţiile finit dimensionale, studiul seriilor de endomorfisme se reduce la studiul seriilor de matrice. Pe de altă parte, teorema 97 (consecinţă a teoremei Cayley-Hamilton) asigură că $f(A) = \sum\limits_m a_m A^m$ se reduce la un polinom $Q(A)$ de gradul $n-1$ în A, unde n este ordinul matricei A. Dacă $\sum\limits_m a_m A^m$ este convergentă, atunci coeficienţii polinomului $Q(A)$ sunt serii convergente.

În cazul când A admite valori proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, polinomul de gradul $n-1$ ataşat seriei $\sum\limits_m a_m A^m$ se poate scrie în forma Lagrange
$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(A-\lambda_i I)\cdots(A-\lambda_{j-1}I)(A-\lambda_{j+1}I)\cdots(A-\lambda_n I)}{(\lambda_j-\lambda_1)\cdots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j-\lambda_n)} f(\lambda_j)$$
sau în forma
$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} Z_j f(\lambda_j),$$
unde matricele $Z_j \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ nu depind de funcţia f, deci pot fi determinate prin particularizarea funcţiei f.

În cazul valorilor proprii multiple se arată că
$$f(A) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_k-1} Z_{kj} f^{(j)}(\lambda_k),$$
unde $f^{(j)}(\cdot)$ sunt valorile derivatei de ordinul j a lui f, iar $Z_{kj} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ sunt matrice independente de f.

În particular se admit umătoarele definiţii:

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}, \qquad \sin A = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad \cos A = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{A^{2m}}{(2m)!},$$

aceste serii având raza de convergenţă ∞. Dintre acestea, un rol deosebit îl joacă ***matricea exponenţială*** e^A. Deseori, în loc de e^A se utilizează e^{At}, $t \in \mathbb{R}$ (vezi teoria sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi).

Exemplu. Să calculăm e^{At} pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = 3$ sunt valori proprii distincte ale lui A, rezultă

$$f(A) = Z_1 f(1) + Z_2 f(2) + Z_3 f(3). \qquad (*)$$

Matricele Z_j, $j = 1, 2, 3$, nu depind de f şi de aceea, pentru a le determina, particularizăm pe f, succesiv, prin $f(z) = z - 1$, $f(z) = z + 1$ şi $f(z) = z^2$. Atunci

$$f(A) = A - I, \qquad f(A) = A + I, \qquad f(A) = A^2$$

şi din relaţia $(*)$ rezultă

$$f(A) = 1Z_2 + 2Z_3, \qquad f(A) = 2Z_1 + 3Z_2 + 4Z_3, \qquad f(A) = Z_1 + 4Z_2 + 9Z_3,$$

astfel încât obţinem sistemul matriceal

$$\begin{cases} Z_2 + 2Z_3 = A - I \\ 2Z_1 + 3Z_2 + 4Z_3 = A + I \\ Z_1 + 4Z_2 + 9Z_3 = A^2, \end{cases}$$

cu soluţia $Z_1 = \frac{1}{2}(A^2 + 5A + 6I)$, $Z_2 = -A^2 + 4A - 3I$, $Z_3 = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 2I)$. Pentru $f(A) = e^{At}$, găsim

$$e^{At} = \frac{1}{2}\left[(A^2 + 5A + 6I)e^t + 2(-A^2 + 4A - 3I)e^{2t} + (A^2 - 3A + 2I)e^{3t}\right].$$

12.3 Exerciţii/probleme rezolvate

12.3.1 Enunţuri

1. Se dau matricele

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

În fiecare din cele două cazuri, aflaţi:

a) inversa A^{-1}, folosind teorema Cayley-Hamilton;
b) polinomul $Q(A)$, folosind teorema Cayley-Hamilton, unde $Q(t) = t^5 + 2t^4 - t^2 + 5$.
c) matricea e^A.

2. Aflaţi funcţia de matrice $\operatorname{ctg}(A)$ pentru matricele din problema anterioară.

3. Aplicând teorema Cayley-Hamilton pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

a) aflaţi A^{-1};
b) calculaţi $Q(A)$, unde $Q(t) = t^4 - 2t^3 + 3t - 4$.

4. Calculaţi e^A şi $\sin A$, pentru $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

12.3.2 Soluţii

1. **i)** **Din oficiu: 1pt.** **a)** Polinomul caracteristic al matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ este

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \ \textbf{(0,5 pt.)}\ .$$

Termenul liber al polinomului caracteristic este $-2 = \det A$, nenul, deci matricea A este inversabilă **(0,5 pt.)** . Folosind teorema Cayley-Hamilton, are loc egalitatea $P(A) = 0$, adică

$$P(A) \equiv -A^3 + 2A^2 + A - 2I = 0. \tag{12.1}$$

Relaţia se rescrie $-A^3 + 2A^2 + A = 2I \Leftrightarrow A(-A^2 + 2A + I) = 2I$, de unde, înmulţind la stânga cu $\frac{1}{2}A^{-1}$ obţinem $\frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I) = A^{-1}$ **(1 pt.)** şi deci

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ \textbf{(0,5 pt.)}\ .$$

b) Aplicând teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{R}[t]$, obţinem

$$Q(t) \equiv t^5 + 2t^4 - t^2 + 5 = (-t^2 - 4t - 9)\cdot P(t) + 19t^2 + t - 13 \ \textbf{(0,5 pt.)}\ .$$

Dar $P(A) = 0$, deci

$$\begin{aligned} Q(A) &= 19A^2 + A - 13I_3 = 19\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 116 & 0 \\ 0 & 65 & 0 \\ -2 & -116 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \ \textbf{(1 pt.)}\ .$$

c) Valorile proprii ale matricei A sunt distincte: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ **(1 pt.)** . Putem scrie:

$$f(A) = f(-1)Z_1 + f(1)Z_2 + f(2)Z_3 \tag{12.2}$$

unde matricele $Z_j, j = \overline{1,3}$ nu depind de f; pentru a le afla particularizăm funcţia f succesiv:

$$\begin{aligned} f(t) &= t - 1 && \Rightarrow f(A) = A - I = -2Z_1 + Z_3 \\ f(t) &= t + 1 && \Rightarrow f(A) = A + I = 2Z_2 + 3Z_3 \\ f(t) &= t^2 && \Rightarrow f(A) = A^2 = Z_1 + Z_2 + 4Z_3, \end{aligned}$$

de unde obţinem sistemul liniar care are drept necunoscute matricele Z_1, Z_2, Z_3: $\begin{cases} -2Z_1 + Z_3 = A - I \\ 2Z_2 + 3Z_3 = A + I \\ Z_1 + Z_2 + 4Z_3 = A^2 \end{cases}$ **(0,5 pt.)** . Acesta admite soluţia

$$Z_1 = \begin{vmatrix} A-I & 0 & 1 \\ A+I & 2 & 3 \\ A^2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}(A^2 - 3A + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} -2 & A-I & 1 \\ 0 & A+I & 3 \\ 1 & A^2 & 4 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}(-3A^2 + 3A + 6I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ \textbf{(1 pt.)}\ .$$

$$Z_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & A-I \\ 0 & 2 & A+I \\ 1 & 1 & A^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}(2A^2 - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci, pentru $f(z) = Q(z) = z^5 + 2z^4 - z^2 + 5$ în relaţia (12.2), obţinem:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(-1)Z_1 + f(1)Z_2 + f(2)Z_3 = 5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+65\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 116 & 0 \\ 0 & 65 & 0 \\ -2 & -116 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} , \ \textbf{(0,5 pt.)}\ . \tag{12.3}$$

Pentru $f(A) = e^A$, prin înlocuirea funcţiei f şi a soluţiei Z_1, Z_2, Z_3 în relaţia (12.3) obţinem:

$$e^A = \frac{1}{6}[e^{-1}(A^2 - 3A + 2I) + e(-3A^2 + 3A + 6I) + e^2(2A^2 - 2I)],$$

şi deci $e^A = \begin{pmatrix} e & 2e^2 - 2e & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ e^{-1} - e & 2e - 2e^2 & e^{-1} \end{pmatrix}$ **(2 pt.)** **Total: 10pt.**.

Altfel. Pentru cele trei valori proprii $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ se obţin vectorii proprii generatori pentru subspaţiile proprii corespunzătoare

$$v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (2, 1, -2),$$

deci matricea diagonalizatoare este $C = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **(1 pt.)** . Atunci $e^A = Ce^DC^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ este matricea diagonală $D = C^{-1}AC$ asociată lui A. Prin calcul direct, rezultă:

$$e^A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2e^2 - 2e & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ e^{-1} - e & 2e - 2e^2 & e^{-1} \end{pmatrix},$$ **(1 pt.)** **Total: 10pt.**.

ii) a) Polinomul caracteristic al matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

şi deci, în baza teoremei Cayley-Hamilton, avem

$$-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^3 - 4A^2 + 5A) = I,$$

deci $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Aplicăm teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{R}[t]$; împărţim polinomul Q la $P = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$ şi obţinem $Q(t) \equiv t^5 + 2t^4 - t^2 + 5 = (-t^2 - 6t - 19) \cdot P(t) + 47t^2 - 83t + 43$, deci ţinând cont că $P(A) = 0$, rezultă

$$Q(A) = A^5 + 2A^4 - A^2 + 5I = 47A^2 - 83A + 43I = \begin{pmatrix} 7 & 116 & 0 \\ 0 & 65 & 0 \\ -22 & -304 & 7 \end{pmatrix}.$$

c) Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 2$. Deoarece $\lambda_1 = \lambda_2$, în acest caz scriem:

$$f(A) = f(\lambda_1)Z_1 + f'(\lambda_1)Z_2 + f(\lambda_3)Z_3 \tag{12.4}$$

sau echivalent

$$f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 + f(2)Z_3, \tag{12.5}$$

unde matricile $Z_j, j = \overline{1,3}$ nu depind de f; pentru a le afla, particularizăm funcţia f succesiv:

$$\begin{aligned} f(t) &= t - 1 && \Rightarrow f(A) = A - I = Z_2 + Z_3 \\ f(t) &= t + 1 && \Rightarrow f(A) = A + I = 2Z_1 + Z_2 + 3Z_3 \\ f(t) &= t^2 && \Rightarrow f(A) = A^2 = Z_1 + 2Z_2 + 4Z_3, \end{aligned}$$

de unde obţinem sistemul liniar compatibil determinat în necunoscute matricele Z_1, Z_2, Z_3

$$\begin{cases} Z_2 + Z_3 = A - I \\ 2Z_1 + Z_2 + 3Z_3 = A + I \\ Z_1 + 2Z_2 + 4Z_3 = A^2. \end{cases}$$

sistem a cărui soluţie este $Z_1 = -A^2 + 2A, Z_2 = -A^2 + 3A - 2I, Z_3 = A^2 - 2A + I$, deci

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $f(A) = e^A$, prin înlocuirea funcţiei f şi a soluţiei z_1, z_2, z_3 în relaţia (12.5), obţinem:

$$e^A = (-A^2 + 2A)e + (-A^2 + 3A - 2I)e + (A^2 - 2A + I)e^2 =$$

$$= (-2A^2 + 5A - 2I)e + (A^2 - 2A + I)e^2 =$$

$$= e\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \end{pmatrix} + e^2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2e^2 - 2e & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ -2e & 10e - 6e^2 & e \end{pmatrix}.$$

Pentru $f(z) = Q(z) = z^5 + 2z^4 - z^2 + 5$ în relaţia (12.4), rezultă

$$\begin{aligned} Q(A) &= Q(1)Z_1 + Q'(1)Z_2 + Q(2)Z_3 = \\ &= 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 65 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 116 & 0 \\ 0 & 65 & 0 \\ -22 & -304 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. i) Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $f(A) = \operatorname{ctg} A$, prin înlocuirea funcţiei f în relaţia (12.2), obţinem:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A &= \frac{1}{6}[(A^2 - 3A + 2I)\operatorname{ctg}(-1) + (-3A^2 + 3A + 6I)\operatorname{ctg} 1 + (2A^2 - 2I)\operatorname{ctg} 2] = \\ &= \frac{1}{6}[(-4A^2 + 6A + 4I)\operatorname{ctg} 1 + (2A^2 - 2I)\operatorname{ctg} 2] = \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & -6 \end{pmatrix}\operatorname{ctg} 1 + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}\operatorname{ctg}2. \end{aligned}$$

ii) Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $f(A) = \operatorname{ctg} A$, înlocuind în relaţia (12.4), avem

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A &= (-A^2 + 2A)\operatorname{ctg} 1 + (-A^2 + 3A - 2I)(-\tfrac{1}{\sin^2 1}) + (A^2 - 2A + I)\operatorname{ctg} 2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}\operatorname{ctg} 1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sin^2 1} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}\operatorname{ctg} 2. \end{aligned}$$

3. a) Polinomul caracteristic al matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Termenul liber -3 al acestui polinom este exact determinantul matricii A, deci A este inversabilă. Conform teoremei Cayley-Hamilton avem

$$P(A) \equiv A^2 - 2A - 3I = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A = 3I \Leftrightarrow A(A - 2I) = (A - 2I)A = 3I$$

şi înmulţind la stânga (respectiv la dreapta) cu $\frac{1}{3}A^{-1}$, rezultă

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) Aplicăm teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{R}[t]$; împărţim polinomul Q la $P = t^2 - 2t - 3$ şi obţinem

$$Q(t) = t^4 - 2t^3 + 3t - 4 = (t^2 + 3)(t^2 - 2t - 3) + 9t + 5,$$

şi cum $P(A) \equiv A^2 - 2A - 3I = 0$, rezultă

$$Q(A) = A^4 - 2A^3 + 3A - 4I = 9A + 5I = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 18 & 14 \end{pmatrix}.$$

4. Polinomul caracteristic al matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2),$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = -2$ şi $\lambda_2 = 2$. Putem scrie

$$f(A) = f(\lambda_1)Z_1 + f(\lambda_2)Z_2,$$

deci

$$f(A) = f(-2)Z_1 + f(2)Z_2, \tag{12.6}$$

unde matricile $Z_j, j = \overline{1,3}$ nu depind de f; pentru a le afla particularizăm funcţia f succesiv:

$$\begin{aligned} f(t) = t - 1 \quad &\Rightarrow f(A) = A - I = -3Z_1 + Z_2 \\ f(t) = t + 1 \quad &\Rightarrow f(A) = A + I = -Z_1 + 3Z_2, \end{aligned}$$

de unde obţinem sistemul liniar care are matrice drept necunoscute

$$\begin{cases} -3Z_1 + Z_3 = A - I \\ -Z_1 + 3Z_3 = A + I, \end{cases}$$

care admite soluţia

$$Z_1 = \frac{1}{4}(-A + 2I) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \frac{1}{4}(A + 2I) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Pentru $f(t) = e^t$, prin înlocuirea funcţiei f şi a soluţiei Z_1 şi Z_2 în relaţia (12.6) obţinem

$$e^A = \frac{1}{4}(-A + 2I)e^{-2} + \frac{1}{4}(A + 2I)e^2 = \begin{pmatrix} (e^2 + e^{-2})/2 & (e^2 - e^{-2})/2 \\ (e^2 - e^{-2})/2 & (e^2 + e^{-2})/2 \end{pmatrix}.$$

Pentru $f(t) = \sin t$, prin înlocuirea funcţiei f în relaţia (12.6) obţinem

$$\sin A = \frac{1}{4}(-A + 2I)\sin(-2) + \frac{1}{4}(A + 2I)\sin 2 = \frac{1}{2}A\sin 2 = \begin{pmatrix} 0 & \sin 2 \\ \sin 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.4 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Să se determine valoarea polinomului de matrice

$$Q(A) = A^4 - 4A^3 + 6A^2 - 4A + I,$$

pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Folosind teorema lui Cayley-Hamilton să se calculeze A^{-1} şi A^n, pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Fie V un spaţiu euclidian complex şi $\mathcal{A}\colon V \to V$ un endomorfism hermitian. Să se arate că $e^{i\mathcal{A}}$, ştiind că $i^2 = -1$, reprezintă un endomorfism unitar.

4. Să se calculeze matricea e^A pentru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

MA.13.Forme biliniare şi pătratice

Cuvinte cheie: **formă liniară, formă biliniară; formă biliniară simetrică, formă biliniară antisimetrică, matricea formei bilinare, formă patratică, vectori izotropi, formă patratică degenerată, formă patratică nedegenerată, formă patratică pozitiv definita, formă patratică negativ definita, formă patratică nedefinita, formă patratică pozitiv semidefinita, formă patratică negativ semidefinita, expresia analitică a unei forme biliniare, metoda Gauss, metoda Jacobi, metoda valorilor proprii, signatura unei forme pătratice**

13.1 Forme biliniare

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K. O transformare liniară $\omega\colon V \to K$ se numeşte ***formă liniară***. Acest concept se extinde în felul următor:

Definiţia 99. O funcţie $\mathcal{A}\colon V \times V \to K$ se numeşte ***formă biliniară*** sau tensor covariant de ordinul 2 pe V, dacă:

$$\mathcal{A}(kx + \ell y, z) = k\mathcal{A}(x, z) + \ell\mathcal{A}(y, z);$$
$$\mathcal{A}(x, ky + \ell z) = k\mathcal{A}(x, y) + \ell\mathcal{A}(x, z), \quad \forall x, y, z \in V,\ \forall k, \ell \in K.$$

Această definiţie spune că o formă biliniară este o funcţie de două variabile vectoriale, liniară în raport cu fiecare variabilă.

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial real este o formă biliniară.

Contraexemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial complex nu este o formă biliniară deoarece

$$(x, ky + \ell z) = (x, ky) + (x, \ell z) = \bar{k}(x, y) + \bar{\ell}(x, z) \neq k(x, y) + \ell(x, z).$$

Fie $\mathcal{B}(V, K)$ mulţimea tuturor formelor biliniare pe V. Adunarea formelor biliniare şi înmulţirea cu scalari se definesc ca la funcţii. În raport cu aceste operaţii, mulţimea $\mathcal{B}(V, K)$ este un spaţiu vectorial peste câmpul K.

Definiţia 100. Forma biliniară $\mathcal{A}$ se numeşte ***simetrică*** dacă $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$. Forma biliniară $\mathcal{A}$ se numeşte ***antisimetrică*** dacă $\mathcal{A}(x, y) = -\mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$.

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste câmpul K şi fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spaţiu. Pentru

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \quad x, y \in V_n$$

şi $\mathcal{A}\colon V_n \times V_n \to K$ o formă biliniară pe V_n, avem

$$\mathcal{A}(x,y) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathcal{A}(e_i, e_j),$$

ceea ce arată că forma biliniară $\mathcal{A}$ pe V_n este unic determinată dacă se cunosc cele n^2 valori ale ei $\mathcal{A}(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, pentru vectorii bazei $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Notând $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j) \in K$, obţinem expresia

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

care se numeşte ***expresia analitică*** a formei biliniare faţă de baza considerată (polinom în $2n$ variabile).

Matricea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ de elemente $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$ se numeşte ***matricea formei bilinare*** $\mathcal{A}$ în raport cu baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dacă introducem matricele coloană $X = [x_j] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ şi $Y = [y_j] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$, ataşate vectorilor x, respectiv y, atunci expresia analitică a formei biliniare poate fi scrisă sub forma matriceală $\mathcal{A}(x,y) = {}^t XAY$.

Aplicaţia care asociază fiecărei forme biliniare $\mathcal{A}\colon V_n \times V_n \to K$ matricea ei în raport cu o bază dată a spaţiului V_n este un izomorfism între spaţiul vectorial $\mathcal{B}(V_n, K)$ şi spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$. În consecinţă, $\dim \mathcal{B}(V_n, K) = \dim \mathcal{M}_{n\times n}(K) = n^2$.

Teorema 101. *O formă biliniară $\mathcal{A}\colon V_n \times V_n \to K$ este simetrică (antisimetrică) dacă şi numai dacă matricea formei într-o bază fixată a spaţiului este simetrică (antisimetrică).*

Demonstraţie. Admitem că $\mathcal{A}$ este o formă simetrică. Dacă $A = [a_{ij}]$ este matricea formei într-o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a spaţiului, avem $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j) = \mathcal{A}(e_j, e_i) = a_{ji}$, deci $A = {}^t A$. Reciproc, admitem că există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a spaţiului astfel încât matricea $A = [a_{ij}]$ este simetrică. Atunci $\forall x, y \in V$, avem

$$\mathcal{A}(y,x) = {}^t YAX = {}^t({}^t YAX) = {}^t X\, {}^t AY = {}^t XAY = \mathcal{A}(x,y).$$

□

Teorema 102. *Dacă $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ este matricea de trecere de la baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la baza $\{e_1{}', \ldots, e_n{}'\}$ din V_n, iar $A = [a_{ij}]$ şi $B = [b_{ij}]$ sunt matricele formei biliniare $\mathcal{A}\colon V_n \times V_n \to K$ faţă de cele două baze, atunci*

$$B = {}^t CAC.$$

Demonstraţie. În raport cu baza $\{e_1{}', \ldots, e_n{}'\}$ avem

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i{}' e_i{}', \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j{}' e_j{}', \quad x, y \in V_n.$$

Dacă $X' = [x_j{}']$, $Y = [y_j{}']$, iar $B = [b_{ij}]$, unde $b_{ij} = \mathcal{A}(e_i{}', e_j{}')$, $i, j = \overline{1, n}$, este matricea lui $\mathcal{A}$ faţă de baza $\{e_1{}', \ldots, e_n{}'\}$, atunci

$$\mathcal{A}(x,y) = {}^t X' BY'.$$

Pe de altă parte, matricele coloană X, Y şi X', Y' ale lui x şi y în cele două baze sunt legate prin egalităţile $X = CX'$, $Y = CY'$. De aceea

$$\mathcal{A}(x,y) = {}^t XAY = {}^t(CX')A(CY') = {}^t X'({}^t CAC)Y',$$

de unde rezultă ${}^t X'BY' = {}^t X'({}^t CAC)Y'$, iar prin identificare găsim $B = {}^t CAC$. □

Definiţia 103. Dacă matricea A este nesingulară (singulară), atunci forma biliniară $\mathcal{A}$ se numeşte *nedegenerată* (*degenerată*). Rangul matricei A se numeşte *rangul* formei biliniare $\mathcal{A}$.

Definiţia 104. Fie $\mathcal{A}\colon V \times V \to K$ o formă biliniară simetrică. Mulţimea

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \big\{x \in V \,|\, \mathcal{A}(x,y) = 0,\ \forall y \in V\big\}$$

se numeşte nucleul formei.

Teorema 105. *$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstraţie. Fie $u, v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{A}(u,w) = 0$, $\mathcal{A}(v,w) = 0$, $\forall w \in V$ şi pentru $k, \ell \in K$, avem $k\mathcal{A}(u,w) + \ell\mathcal{A}(v,w) = 0$ sau $\mathcal{A}(ku + \ell v, w) = 0$, deci $ku + \ell v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. □

Teorema 106 (Teorema rangului). *Dacă $\mathcal{A}\colon V_n \times V_n \to K$ este o formă biliniară simetrică, atunci*

$$\operatorname{rang}\mathcal{A} = n - \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A}).$$

Demonstraţie. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n şi $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in K$, matricea formei biliniare în raport cu această bază. Atunci $\forall x, y \in V_n$ avem

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \quad \mathcal{A}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right) y_j,$$

care arată că $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă x este o soluţie a sistemului liniar şi omogen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Deci $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ coincide cu mulţimea soluţiilor acestui sistem. Dar $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \operatorname{rang}[a_{ij}]$, deci rangul lui $\mathcal{A}$ este egal cu diferenţa dintre numărul necunoscutelor sistemului şi dimensiunea spaţiului vectorial al soluţiilor sistemului. □

13.2 Forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K şi $\mathcal{A}\colon V \times V \to K$ o formă biliniară simetrică. Funcţia $\mathcal{A}$ determină unic funcţia $Q\colon V \to K$, $Q(x) = \mathcal{A}(x,x)$, care se numeşte *formă pătratică*.

Cunoaşterea formei pătratice Q permite recuperarea formei biliniare simetrice $\mathcal{A}$. Într-adevăr,

$$\mathcal{A}(x,y) = \mathcal{A}(y,x), \quad \forall x, y \in V$$

şi

$$Q(x+y) = \mathcal{A}(x+y, x+y) = \mathcal{A}(x,x) + \mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(y,x) + \mathcal{A}(y,y) = \mathcal{A}(x,x) + 2\mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(y,y)$$

implică
$$\mathcal{A}(x,y)=\frac{1}{2}\big[Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\big].$$
De exemplu, forma pătratică corespunzătoare produsului scalar real (formă biliniară simetrică) este pătratul normei euclidiene
$$Q(x)=(x,x)=||x||^2,\quad x\in V.$$

Forma biliniară simetrică $\mathcal{A}$ asociată formei pătratice Q se numeşte *forma polară* sau *forma dedublată a lui* Q.

Presupunem $\dim V=n$. Dacă $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ este o bază în spaţiul vectorial V_n, atunci pentru fiecare $x\in V_n$, $x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$, avem
$$Q(x)=\mathcal{A}(x,x)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j={}^tXAX,$$
unde $a_{ij}=\mathcal{A}(e_i,e_j)$, $i,j=\overline{1,n}$, $X={}^t[x_1,x_2,\ldots,x_n]$. De aici deducem că matricea şi rangul formei pătratice Q coincid cu matricea, respectiv cu rangul formei biliniare simetrice $\mathcal{A}$ asociate lui Q.

Definiţia 107. Fie $\mathcal{A}\colon V\times V\to K$ o formă biliniară simetrică şi Q forma pătratică asociată. Vectorii $x,y\in V$ se numesc *ortogonali* în raport cu $\mathcal{A}$ (sau Q) dacă $\mathcal{A}(x,y)=0$.

Definiţia 108. Fie $U\subset V$ un subspaţiu vectorial al lui V. Mulţimea
$$U^\perp=\big\{y\in V\,|\,\mathcal{A}(x,y)=0,\ \forall x\in U\big\}$$
se numeşte complementul ortogonal al lui U în V faţă de $\mathcal{A}$.

Teorema 109. *Fie $\mathcal{A}\colon V\times V\to K$ o formă biliniară simetrică.*

1) *$U^\perp$ este subspaţiu vectorial al lui V.*

2) *Dacă $\{u_1,u_2,\ldots,u_p\}$ este o bază în U, apartenenţa $y\in U^\perp$ este echivalentă cu sistemul*
$$\mathcal{A}(u_1,y)=\mathcal{A}(u_2,y)=\cdots=\mathcal{A}(u_p,y)=0.$$

3) *Dacă $\dim V=n$, avem $\dim U+\dim U^\perp\geq\dim V$. Egalitatea are loc dacă $\mathcal{A}$ este nedegenerată.*

4) *Dacă $\mathcal{A}/_U$ şi $\mathcal{A}/_U{}^\perp$ sunt restricţiile lui $\mathcal{A}$ la U, respectiv $U^\perp$ şi $\dim V=n$, atunci $U\oplus U^\perp=V$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A}/_U$ este nedegenerată.*

Demonstraţie. 1) Fie $y_1,y_2\in U^\perp$, adică $\mathcal{A}(x,y_1)=0$ şi $\mathcal{A}(x,y_2)=0$. Pentru $k,\ell\in\mathbb{R}$ avem $k\mathcal{A}(x,y_1)+\ell\mathcal{A}(x,y_2)=0$ sau $\mathcal{A}(x,ky_1+\ell y_2)=0$, deci $ky_1+\ell y_2\in U^\perp$.

2) $y\in U^\perp$ implică $\mathcal{A}(x,y)=0$, $\forall x\in U$. În particular $\mathcal{A}(u_i,y)=0$, $i=\overline{1,p}$, deoarece $u_i\in U$.

Reciproc, folosind ipoteza şi $x\in U$, $x=\sum\limits_{i=1}^p x_iu_i$, $x_i\in K$, găsim $\mathcal{A}(x,y)=\sum\limits_{i=1}^p x_i\mathcal{A}(u_i,y)=0$, adică $y\in U^\perp$.

4) Admitem că restricţia $\mathcal{A}|_U$ este nedegenerată. Aceasta înseamnă că singurul vector din U ortogonal pe toţi vectorii din U este vectorul nul, astfel încât $U\cap U^\perp=\{0\}$. Cum, pe de altă parte, $\dim U+\dim U^\perp\geq\dim V$, avem cu necesitate $\dim U+\dim U^\perp=\dim V$ şi $U\oplus U^\perp=V$.

Reciproc, dacă $U\oplus U^\perp=V$, rezultă $U\cap U^\perp=\{0\}$ astfel încât $\mathcal{A}/_U$ este nedegenerată. $\square$

Observaţie. Chiar dacă o formă biliniară simetrică $\mathcal{A}$ (sau forma pătratică Q) este nedegenerată pe spaţiul V, se poate întâmpla ca restricţiile ei la anumite subspaţii vectoriale ale lui V să fie degenerate. De exemplu, forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ este nedegenerată pe $\mathbb{R}^3$, dar restricţia ei la subspaţiul $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 - x_3 = 0\}$ este degenerată având rangul egal cu unitatea. Într-adevăr, dacă facem schimbarea de coordonate $x_1 = y$, $x_2 = y_2$ şi $x_2 - x_3 = y_3$, forma pătratică devine $Q(y) = y_1^2 + 2y_2y_3 - y_3^2$. Prin schimbarea menţionată, mulţimea U se scrie $U = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_3 = 0\}$ şi $Q/_U(y) = y_1^2$ are, evident, rangul 1. Pentru a obţine complementul ortogonal $U^\perp$, considerăm o bază în U formată din vectorii $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,1,1)$ şi impunem condiţiile $\mathcal{A}(u_1, y) = 0$ şi $\mathcal{A}(u_2, y) = 0$, cu $y \in U^\perp$. Rezultă $y_2 - y_3 = 0$ şi $y_1 + y_2 - y_3 = 0$, cu soluţia generală $y_1 = 0$ şi $y_2 = y_3 = a$, deci $y = (0, a, a) \in U^\perp$.

Definiţia 110. Un vector $x \in V$ se numeşte ***vector izotrop*** în raport cu o formă biliniară simetrică $\mathcal{A}\colon V \times V \to K$ (sau în raport cu forma pătratică asociată Q) dacă $Q(x) = \mathcal{A}(x, x) = 0$.

Exemplu. Fie forma biliniară $\mathcal{A}\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$. Forma pătratică asociată este $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$. Din $Q(x) = 0$ rezultă $x_2 = \pm i x_1$ astfel încât vectorii izotropi ai formei sunt (x_1, ix_1) şi $(x_1, -ix_1)$, cu $x_1 \in \mathbb{C}$.

Definiţia 110 spune că un vector $x \in V$ este izotrop dacă şi numai dacă el este ortogonal lui însuşi. Evident, vectorul nul al spaţiului este întotdeauna izotrop deoarece $Q(0) = 0$.

Definiţia 111. Fie $\mathcal{A}\colon V_n \times V_n \to K$ o formă biliniară simetrică. Baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \in V_n$ se numeşte bază ortogonală în raport cu forma $\mathcal{A}$ (sau în raport cu forma pătratică asociată Q) dacă $\mathcal{A}(e_i, e_j) = 0$, pentru $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, adică vectorii ei sunt ortogonali doi câte doi faţă de forma $\mathcal{A}$.

În raport cu o bază ortogonală matricea formei este diagonală,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şi dacă notăm $a_{ii} = a_i$, $i = \overline{1, n}$, atunci expresiile analitice ale formei biliniare $\mathcal{A}$ şi formei pătratice asociate Q devin *expresii canonice*,

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i, \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

13.3 Reducerea formelor pătratice la expresia canonică

Fie V_n un spaţiu peste K ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $Q(x) = {}^tXAX$ o formă pătratică pe V_n exprimată prin matricea simetrică A faţă de o bază fixată a lui V_n. O schimbare a bazei în V_n corespunde la $X = CX'$, deci $Q(x) = {}^tX'BX'$, unde $B = {}^tCAC$ este tot o matrice simetrică. Prin urmare B poate fi o matrice diagonală, dar nu poate fi o matrice Jordan ce conţine cel puţin o celulă de ordin ≥ 2.

Teorema 112 (***Metoda Gauss***)**.** *Dacă $Q\colon V_n \to K$ este o formă pătratică, atunci există o bază în V_n care este ortogonală în raport cu Q (relativ la această bază, Q are o expresie canonică).*

Demonstraţie. Se utilizează inducţia după n. Fie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază a spaţiului V_n şi $Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ expresia analitică a formei în această bază. Dacă $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$ şi Q nu este identic nulă, există cel puţin un element $a_{ij} \neq 0$ pentru $i \neq j$. Prin transformarea de coordonate

$$x_i = x_i{}' + x_j{}', \qquad x_j = x_i{}' - x_j{}', \qquad x_k = x_k{}', \quad k \neq i, j,$$

expresia formei pătratice devine $Q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}{}' x_i{}' x_j{}'$, în care cel puţin unul dintre elementele diagonale $a_{ii}{}'$, $i = \overline{1, n}$, este nenul (deoarece $x_i x_j = x_i{}'^2 - x_j{}'^2$).

Notăm cu $\{e_1{}', \ldots, e_n{}'\}$ baza lui V_n faţă de care coordonatele lui x sunt $x_i{}'$, $i = \overline{1, n}$. Matricea de trecere este

$$C_1 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \xleftarrow{i} \\ \xleftarrow{j} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Fără a micşora generalitatea, putem admite că $a_{11}{}' \neq 0$ astfel încât putem scrie

$$Q(x) = a_{11}{}' x_1{}'^2 + 2 \sum_{k=2}^{n} a_{1k}{}' x_1{}' x_k{}' + \sum_{i,j \neq 1}^{n} a_{ij}{}' x_i{}' x_j{}'.$$

Adăugăm şi scădem termenii potriviţi pentru a introduce pătratul formei liniare

$$a_{11}{}' x_1{}' + a_{12}{}' x_2{}' + \cdots + a_{1n}{}' x_n{}'$$

în expresia lui Q, adică

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}{}'} (a_{11}{}' x_1{}' + a_{12}{}' x_2{}' + \cdots + a_{1n}{}' x_n{}')^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ii}{}'' x_i{}' x_j{}',$$

unde $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}{}'' x_i{}' x_j{}'$ nu conţine pe $x_1{}'$. Fie $\{e_1{}'', e_2{}'', \ldots, e_n{}''\}$ baza din V_n faţă de care coordonatele vectorului x să satisfacă egalităţile:

$$x_1{}' = a_{11}{}' x_1{}' + a_{12}{}' x_2{}' + \cdots + a_{1n}{}' x_n{}', \qquad x_j{}'' = x_j{}', \quad j = \overline{2, n}.$$

În raport cu această bază, expresia formei pătratice devine

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}{}'} x_1{}''^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}{}'' x_i{}'' x_j{}''.$$

Matricea de trecere la noua bază este

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a_{11}{}'} & -\dfrac{a_{12}{}'}{a_{11}{}'} & \ldots & -\dfrac{a_{1n}{}'}{a_{11}{}'} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Suma $Q(x) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}{}'' x_i{}'' x_j{}''$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile astfel încât poate fi tratată asemănător.
În concluzie, după încă cel mult $n - 1$ paşi obţinem o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ în V_n, ortogonală faţă de Q, forma pătratică reducându-se la expresia canonică care reprezintă o sumă de pătrate de $p = \operatorname{rang} Q \leq n$ forme liniare independente. $\square$

Exemple:

1) Pentru forma pătratică

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3,$$

avem $a_{ii} = 0$, $i = \{1, 2, 3\}$.

Prin schimbarea de coordonate $x_1 = x_1{}' + x_2{}'$, $x_2 = x_1{}' - x_2{}'$ şi $x_3 = x_3{}'$, obţinem

$$Q(x) = x_1{}'^2 - x_2{}'^2 - x_1{}'x_3{}' - 3x_2{}'x_3{}'.$$

Folosind matricea de trecere

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

găsim noua bază

$$e_1{}' = e_1 + e_2, \qquad e_2{}' = e_1 - e_2, \qquad e_3{}' = e_3.$$

În

$$Q(x) = \left(x_1{}' - \frac{1}{2}x_3{}'\right)^2 - x_2{}'^2 - 3x_2{}'x_3{}' - \frac{1}{4}x_3{}'^2$$

notăm $x_1{}'' = x_1{}' - \dfrac{1}{2}x_3{}'$, $x_2{}'' = x_2{}'$, $x_3{}'' = x_3{}'$ şi obţinem

$$Q(x) = x_1{}''^2 - x_2{}''^2 - 3x_2{}''x_3{}'' - \frac{1}{4}x_3{}''^2.$$

Baza corespunzătoare este $e_1{}'' = e_1{}'$, $e_2{}'' = e_2{}'$, $e_3{}'' = \dfrac{1}{2}e_1{}' + e_3{}'$, iar matricea de trecere este

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asemănător,

$$Q(x) = x_1{}''^2 - \left(x_2{}'' + \frac{3}{2}x_3{}''\right)^2 + 2x_3{}''^2$$

astfel încât, prin schimbarea de coordonate

$$x_1{}''' = x_1{}'', \quad x_2{}''' = x_2{}'' + \frac{3}{2}x_3{}'', \quad x_3{}''' = x_3{}'',$$

avem

$$Q(x) = x_1{}'''^2 - x_2{}'''^2 + 2x_3{}'''^2,$$

care reprezintă expresia canonică a formei pătratice. Baza faţă de care am obţinut această expresie este formată din vectorii $e_1{}''' = e_1 + e_2$, $e_2{}''' = e_1 - e_2$ şi $e_3{}''' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, unde e_1, e_2 şi e_3 sunt vectorii bazei canonice. S-a folosit matricea de trecere

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriceal, avem legătura

$${}^t[e_1{}''', e_2{}''', e_3{}'''] = {}^tC_1{}^tC_2{}^tC_3{}^t[e_1, e_2, e_3].$$

2) Pentru forma pătratică

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, obţinem succesiv

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{1}{9}(9x_1+6x_2-5x_3)^2 - \frac{36}{9}x_2^2 - \frac{25}{9}x_3^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= \frac{1}{9}(9x_1+6x_2-5x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \frac{29}{9}x_3^2 \\
&= \frac{1}{9}(9x_1+6x_2-5x_3)^2 + \frac{1}{2}(2x_2-x_3)^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{29}{9}x_3^2 \\
&= \frac{1}{9}(9x_1+6x_2-5x_3)^2 + \frac{1}{2}(2x_2-x_3)^2 + \frac{49}{18}x_3^2 \\
&= \frac{1}{9}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{49}{18}y_3^2,
\end{aligned}$$

unde $y_1 = 9x_1 + 6x_2 - 5x_3$, $y_2 = 2x_2 - x_3$ şi $y_3 = x_3$ sunt coordonatele lui x în baza ortogonală faţă de Q, formată din vectorii:

$$f_1 = \frac{1}{9}e_1, \qquad f_2 = -\frac{3}{9}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \qquad f_3 = \frac{2}{9}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3.$$

Teorema 113 (***Metoda Jacobi***)**.** *Fie $Q\colon V_n \to K$ o formă pătratică şi $A = [a_{ij}]$ matricea ei în baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n. Notăm $\Delta_0 = 1$. Dacă determinanţii:*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A$$

sunt nenuli, există o bază $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ în V_n faţă de care forma pătratică Q are expresia canonică

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} {x_i'}^2,$$

unde x_i', $i = \overline{1,n}$, sunt coordonatele lui x în baza $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Căutăm vectorii $f_1, \ldots, f_n$ de forma

$$f_1 = c_{11}e_1, \quad f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2, \ldots, f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \cdots + c_{nn}e_n$$

astfel încât să avem

$$\mathcal{A}(f_i, e_j) = 0, \qquad \mathcal{A}(f_i, e_i) = 1, \quad 1 \le j < i \le n,$$

unde $\mathcal{A}$ este polara formei pătratice Q. Scrise dezvoltat, aceste condiţii devin

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A}(f_i, e_1) = c_{i1}a_{11} + c_{i2}a_{12} + \cdots + c_{ii}a_{1i} = 0 \\
\mathcal{A}(f_i, e_2) = c_{i1}a_{21} + c_{i2}a_{22} + \cdots + c_{ii}a_{2i} = 0 \\
\ldots \\
\mathcal{A}(f_i, e_{i-1}) = c_{i1}a_{i-1,1} + c_{i2}a_{i-1,2} + \cdots + c_{ii}a_{i-1i} = 0 \\
\mathcal{A}(f_i, e_i) = c_{i1}a_{i1} + c_{i2}a_{i2} + \cdots + c_{ii}a_{ii} = 1.
\end{array}$$

Acest sistem are soluţie unică, deoarece prin ipoteză determinantul sistemului este chiar $\Delta_i \neq 0$. Regula lui Cramer dă

$$c_{ii} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,i-1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_i} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

astfel încât baza $\{f_1, \dots, f_n\}$ este perfect determinată. Să găsim acum expresia formei pătratice în această bază. Matricea lui Q în baza $\{f_1, \dots, f_n\}$ este matricea B de elemente

$$b_{ij} = \mathcal{A}(f_i, f_j) = \mathcal{A}(f_i, c_{j1}e_1 + \cdots + c_{jj}e_j) = c_{j1}\mathcal{A}(f_i, e_1) + c_{j2}\mathcal{A}(f_i, e_2) + \cdots + c_{jj}\mathcal{A}(f_i, e_j).$$

Deoarece $\mathcal{A}(f_i, e_j) = 0$ pentru $j < i$ (prin construcţie), deducem că $b_{ij} = 0$ pentru $j < i$. Din proprietatea de simetrie a formei biliniare $\mathcal{A}$ rezultă că $b_{ij} = 0$ şi pentru $j > i$. În concluzie, $b_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. În plus, dacă $j = i$, atunci

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \mathcal{A}(f_i, f_i) = \mathcal{A}(f_i, c_{i1}e_1 + \cdots + c_{ii}e_i) \\ &= c_{i1}\mathcal{A}(f_i, e_1) + \cdots + c_{i,i-1}\mathcal{A}(f_i, e_{i-1}) + c_{ii}\mathcal{A}(f_i, e_i) = c_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Prin urmare, expresia lui Q în baza $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ este

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}{x_i}'{x_j}' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}{x_i}'^2.$$

□

Exemplu. Pentru forma pătratică

$$Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

matricea ataşată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali Δ_i sunt $\Delta_1 = a_{11} = 5$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26$ şi $\Delta_3 = \det A = 80$. Rezultă expresia canonică

$$Q(x) = \frac{1}{5}{x_1}'^2 + \frac{5}{26}{x_2}'^3 + \frac{13}{40}{x_3}'^2,$$

în baza formată din vectorii $f_1 = \frac{1}{5}e_1$, $f_2 = \frac{1}{13}e_1 + \frac{5}{26}e_2$ şi $f_3 = \frac{3}{20}e_1 + \frac{1}{20}e_2 + \frac{13}{40}e_3$.

Teorema 114 (*Metoda valorilor proprii*). *Fie V_n un spaţiu vectorial real euclidian. Dacă $Q\colon V_n \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică (reală), atunci există o bază $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ a lui V_n faţă de care expresia canonică a formei este*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}'^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei formei, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atâtea ori cât este multiplicitatea sa, iar ${x_i}'$, $i = \overline{1, n}$, sunt coordonatele lui x în baza $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Fie A matricea asociată lui Q într-o bază iniţială a lui V_n. Ca matrice reală şi simetrică, matricea A are n valori proprii reale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (unele pot fi egale) şi se poate diagonaliza. Baza $\{f_1, \dots, f_n\}$ formată din vectori proprii ai matricei A, ortonormaţi în raport cu produsul scalar preexistent, determină matricea diagonalizatoare C, care este ortogonală (${}^tC = C^{-1}$). Aceasta este o bază faţă de care Q are o expresie canonică deoarece

$$D = C^{-1}AC = {}^tCAC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

Comparaţia celor trei metode

1) Metoda Gauss dă un algoritm elementar de aducere la forma canonică, dar nu se obţine direct noua bază (care de altfel nu are nişte proprietăţi speciale), ci schimbarea de coordonate.

2) Metoda Jacobi este utilă când ne trebuie rapid o formă canonică (de exemplu în aprecierea naturii punctelor de extrem ale unei funcţii reale) fără a fi interesaţi şi de baza corespunzătoare, deoarece aceasta se obţine destul de greu.

3) Metoda vectorilor proprii este cea mai eficace, ea dând destul de comod şi o formă canonică şi o bază canonică ortonormată faţă de produsul scalar preexistent.

Exemplu. Fie forma pătratică

$$Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. În această bază, matricea formei este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

şi are valorile proprii $\lambda_1 = -9$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Vectorii proprii ortonormaţi cores-punzători sunt:

$$f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad f_2 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad f_3 = \left(-\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

astfel încât matricea de trecere la această bază este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Prin transformarea $X = CX'$, obţinem $Q(x) = -9{x_1}'^2 + 9{x_2}'^2 + 9{x_3}'^2$.

13.4 Signatura unei forme pătratice reale

Formele pătratice reale care păstrează semn constant intervin în multe probleme aplicative, motiv pentru care suntem interesaţi în detalierea noţiunilor ce conduc la stabilirea acestui semn.

Fie V un spaţiu vectorial real şi $Q\colon V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Evident, $Q(0) = 0$. De asemenea, pentru anumite forme pătratice există $x \in V$, $x \neq 0$, cu proprietatea $Q(x) = 0$.

Definiţia 115. O formă pătratică $Q\colon V \to \mathbb{R}$ se numeşte ***pozitiv semidefinită*** (respectiv ***negativ semidefinită***) dacă $Q(x) \geq 0$ (respectiv $Q(x) \leq 0$), pentru orice $x \in V$. Forma pătratică Q se numeşte ***pozitiv definită*** (respectiv ***negativ definită***) dacă $Q(x) > 0$ (respectiv $Q(x) < 0$), pentru orice $x \neq 0$ din V.

O formă biliniară simetrică $\mathcal{A}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *pozitiv definită (negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită)* dacă forma pătratică asociată Q are această proprietate.

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial real este o formă biliniară simetrică şi pozitiv definită.

Dacă există $x_1 \in V$ astfel încât $Q(x_1) > 0$ şi $x_2 \in V$ astfel încât $Q(x_2) < 0$, spunem că forma pătratică Q este ***nedefinită***.

Reducerea la expresia canonică prin metoda lui Jacobi ne permite să obţinem o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o formă pătratică $Q\colon V_n \to \mathbb{R}$ să fie pozitiv definită (respectiv negativ definită).

Teorema 116 (Criteriul lui Sylvester). *Forma pătratică $Q\colon V_n \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, şi este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. În particular, sunt îndeplinite condiţiile teoremei Jacobi.*

Demonstraţie. Fie Q pozitiv definită. Admitem prin absurd că există $p \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $\Delta_p = 0$. Aceasta înseamnă că una dintre liniiile lui Δ_p este o combinaţie liniară de celelalte, adică există numerele $k_1, \dots, k_p$ nu toate nule, astfel încât

$$k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \cdots + k_p a_{pi} = 0, \quad i = \overline{1,p},$$

sau

$$k_1 \mathcal{A}(e_1, e_i) + k_2 \mathcal{A}(e_2, e_i) + \cdots + k_p \mathcal{A}(e_p, e_i) = 0.$$

De aici rezultă

$$\mathcal{A}(k_1 e_1 + \cdots + k_p e_p, e_i) = 0, \quad i = \overline{1,p},$$

deoarece Q este o formă biliniară simetrică. Amplificând prin k_i, $i = \overline{1,p}$, şi adunând relaţiile obţinute, găsim

$$k_1 \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_1\right) + k_2 \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_2\right) + \cdots + k_p \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_p\right) = 0$$

sau

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, \sum_{i=1}^{p} k_i e_i\right) = 0.$$

Rezultă $\sum\limits_{i=1}^{p} k_i e_i = 0$, deoarece $\mathcal{A}$ este admisă pozitiv definită. Cum k_i, $i = \overline{1,p}$, nu sunt toţi nuli, rezultă că vectorii $e_1, \dots, e_p$ sunt liniar dependenţi, ceea ce contrazice ipoteza că $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este bază în V_n. Rămâne $\Delta_p \neq 0$, $p = \overline{1,n}$. Mai mult, conform teoremei 113, există o bază a lui V_n faţă de care $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} {x_i'}^2$ şi cum Q este admisă pozitiv definită, rezultă $\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0$, adică $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Reciproc, dacă $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, rezultă $\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0$, $i = \overline{1,n}$ şi din

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} {x_i'}^2$$

deducem $Q(x) \geq 0$, având $Q(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x_1' = x_2' = \cdots = x_n' = 0$, echivalent cu $x = 0$. În concluzie $Q(x) > 0$, $\forall x \neq 0$.

Dacă Q este negativ definită, rezultă că forma $-Q$ este pozitiv definită şi totul se repetă ca mai sus, având în vedere că matricea lui $-Q$ este $-A = [-a_{ij}]$. $\square$

Definiţia 117. Fie $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ expresia canonică a formei pătratice $Q\colon V_n \to \mathbb{R}$ în care p coeficienţi sunt strict pozitivi, q sunt strict negativi, iar $d = n - (p + q)$ sunt nuli. Tripletul (p, q, d) se numeşte ***signatura formei pătratice*** Q.

Evident, expresia canonică a unei forme pătratice nu este unică, dar toate expresiile canonice au aceeaşi signatură. Mai precis,

Teorema 118 (Legea de inerţie). *Signatura unei forme pătratice este invariantă la trecerea de la o expresie canonică la alta.*

Demonstraţie. Fie $\{e_1, \dots, e_n\}, \{e_1{}', \dots, e_n{}'\} \subset V_n$ două baze în V_n faţă de care forma pătratică $Q\colon V_n \to \mathbb{R}$ are expresiile canonice:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j {x_j{}'}^2, \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j{}' e_j{}'.$$

Putem considera cele două baze astfel încât a_i şi b_j, $i, j = \overline{1, n}$, să fie 1, -1 sau 0. În plus, putem presupune (eventual printr-o renumerotare) că primii p coeficienţi sunt 1, următorii q sunt -1 şi restul nuli, adică $\forall x \in V_n$ să avem

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{h=p+1}^{p+q} x_h^2, \quad \text{în baza } \{e_1, \dots, e_n\}, \tag{13.1}$$

analog

$$Q(x) = \sum_{r=1}^{p'} {x_r{}'}^2 - \sum_{s=q'+1}^{p'+q'} {x_s{}'}^2, \quad \text{în baza } \{e_1{}', \dots, e_n{}'\}, \tag{13.2}$$

signaturile corespunzătoare fiind (p, q, d) şi (p', q', d'). Să arătăm că $p = p'$ şi $q = q'$. Să presupunem că $p \neq p'$ şi anume $p > p'$. Fie U subspaţiul generat de vectorii $e_1, e_2, \dots, e_p$ şi U' subspaţiul generat de vectorii $e_{p'+1}{}', \dots, e_n{}'$, deci $\dim U = p$ şi $\dim U' = n - p'$. Ipoteza $p > p'$ implică $\dim U + \dim U' = p + n - p' > n$, iar aceasta arată că subspaţiile U şi U' nu sunt disjuncte, adică $U \cap U' \neq \{0\}$. Pentru $x \in U \cap U'$, $x \neq 0$, putem scrie:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = x_{p'+1}{}' + e_{p'+1}{}' + \dots + x_n{}' e_n{}';\\
x &= x_1 e_1 + \dots + x_1 e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n;\\
x &= 0 \cdot e_1{}' + \dots + 0 \cdot e_p{}' + x_{p'+1}{}' e_{p'+1}{}' + \dots + x_n{}' e_n{}'.
\end{aligned}$$

Din relaţia (13.1) găsim

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 \geq 0,$$

iar din expresia (13.2) rezultă

$$Q(x) = -{x_{p+1}{}'}^2 - \dots - {x_n{}'}^2 \leq 0.$$

Aceste inegalităţi impun $Q(x) = 0$, ceea ce implică

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0 \quad \text{şi} \quad x_{p'+1}{}' = \dots = x_n{}' = 0,$$

deci $x = 0$, care contrazice ipoteza $x \neq 0$. Singura posibilitate corectă este $p = p'$. Analog $q = q'$, deci şi $d = d'$. În concluzie, $(p, q, d) = (p', q', d')$. □

Forma pătratică $Q\colon V_n \to \mathbb{R}$ este *pozitiv definită* dacă şi numai dacă una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:

i) are signatura $(n, 0, 0)$;

ii) determinanţii Δ_i, $i = \overline{1, n}$, sunt strict pozitivi;

iii) valorile proprii ale matricei A sunt strict pozitive.

Evident, în literatura matematică specializată (optimizări) sunt prezentate şi alte criterii de pozitivitate.

13.5 Exerciţii/probleme rezolvate

13.5.1 Enunţuri

1. Se dă aplicaţia $\mathcal{A}: V \times V \to \mathbb{R},\ V = \mathcal{C}^0[0,1]$,

$$\mathcal{A}(f,g) = \int_0^1 f(t)dt \cdot \int_0^1 g(s)ds,\ \forall f,g \in V.$$

a) Arătaţi că $\mathcal{A}$ este formă biliniară.
b) Arătaţi că $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică.
c) Determinaţi forma pătratică Q asociată lui $\mathcal{A}$.
d) Admite Q vectori izotropi ? În caz afirmativ, exemplificaţi.

2. Considerăm aplicaţia

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2,\ \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Arătaţi că $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică.
b) Determinaţi forma pătratică Q asociată lui $\mathcal{A}$.
c) Aflaţi matricea A asociată lui $\mathcal{A}$ şi Q relativ la baza naturală $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.
d) Aflaţi matricea A asociată lui $\mathcal{A}$ şi Q relativ la baza $B' = \{e_1{}' = (1,1), e_2{}' = (1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

3. Se dă forma pătratică $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2, \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Aflaţi forma biliniară simetrică (forma polară) $\mathcal{A}$ asociată lui Q.

4. Verificaţi dacă aplicaţiile următoare $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt forme biliniare:

a) $\mathcal{A}(x,y) = x_1y_2 - x_2^2,\ \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$;
b) $\mathcal{A}(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1,\ \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

5. Se dă forma biliniară $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1,\ \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Este $\mathcal{A}$ formă biliniară simetrică ?
b) Este $\mathcal{A}$ formă biliniară antisimetrică ?
c) Aflaţi matricea A a lui $\mathcal{A}$ relativ la baza canonică. Folosind matricea determinaţi dacă $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică sau formă biliniară antisimetrică.
d) Aflaţi matricea A a lui $\mathcal{A}$ relativ la baza $B' = \{u_1 = (1,2), u_2 = (3,-1)\}$.

6. Se dă forma biliniară $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 4x_2y_2,\ \forall x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Arătaţi că $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică.
b) Aflaţi matricea lui $\mathcal{A}$ relativ la baza canonică; verificaţi rezultatul folosind relaţia $\mathcal{A}(x,y) = X^t AY$, unde X şi Y sunt vectorii coloană asociaţi respectiv lui x, respectiv y.
c) Aflaţi $\text{Ker}\ \mathcal{A}$, $\text{rang}\ \mathcal{A}$ şi verificaţi teorema dimensiunii: $\dim\ \text{Ker}\ \mathcal{A} + \text{rang}\ \mathcal{A} = \dim\ \mathbb{R}^3$.
d) Determinaţi forma pătratică Q asociată lui $\mathcal{A}$.
e) Este Q (deci $\mathcal{A}$) degenerată sau nedegenerată. Admite Q vectori izotropi nenuli ?

7. Se dă aplicaţia $\mathcal{A}: V \times V \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(p,q) = \int_0^1 p(t)dt \int_0^1 q(s)ds, \forall p,q \in V = \mathbb{R}_2[X]$ şi $B' = \{q_1 = 1 + X, q_2 = X^2, q_3 = 1\} \subset V$ o bază a lui V. Răspundeţi la cerinţele a)-e) ale problemei anterioare.

8. Se dă forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3, \forall x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Aflaţi forma biliniară simetrică $\mathcal{A}$ asociată lui Q (forma polară).
b) Aflaţi matricea lui Q (a lui $\mathcal{A}$) relativ la baza canonică.

9. Se dă forma biliniară simetrică $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 4x_2y_2, \ \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Aflaţi $U^\perp$, unde $U = L(v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1))$.
b) Este adevărată egalitatea $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^3$?
c) Este $\mathcal{A}$ (deci Q) nedegenerată ?

10. Se dă forma pătratică Q de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Folosind metoda Gauss aflaţi expresia canonică a lui Q şi baza B' corespunzătoare.

11. Se dă forma pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Folosind metoda Jacobi aflaţi expresia canonică a lui Q şi baza B' corespunzătoare.

12. Pentru forma pătratică din problema anterioară, folosind metoda valorilor proprii aflaţi expresia canonică a lui Q şi baza B' corespunzătoare. Verificaţi că signatura formei pătratice Q se conservă.

13. Aplicaţi cele trei metode (Gauss, a valorilor proprii şi Jacobi) acolo unde este posibil, pentru a obţine expresia canonică şi signatura pentru următoarele forme pătratice Q date prin matrice $A = [Q]$ (relativ la baza canonică) sau prin expresie analitică:

a) $Q(v) = x^2 - 8xy - 16xz + 7y^2 - 8yz + z^2, \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
b) $Q(x) = 4x_1x_2 - 5x_2^2, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;
e) $Q(x) = -x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
g) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Sunt aceste forme pătratice pozitiv/negativ definite/semidefinite ?
Sunt acestea degenerate/nedegenerate ?

13.5.2 Soluţii

1. **a)** Se verifică aditivitatea şi omogenitatea aplicaţiei $\mathcal{A}$ în f şi g:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda f + \mu g, h) &= \int_0^1 (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt \cdot \int_0^1 h(s) ds = \\
&= \lambda \int_0^1 f(t) dt \cdot \int_0^1 h(s) ds + \mu \int_0^1 g(t) dt \cdot \int_0^1 h(s) ds = \\
&= \lambda \cdot \mathcal{A}(f, h) + \mu \cdot \mathcal{A}(g, h) \\
\mathcal{A}(f, \lambda g + \mu h) &= \int_0^1 f(t) dt \cdot \int_0^1 (\lambda g(s) + \mu h(s))\, ds = \\
&= \lambda \int_0^1 f(t) dt \cdot \int_0^1 g(s) ds + \mu \int_0^1 f(t) dt \cdot \int_0^1 h(s) ds = \\
&= \lambda \cdot \mathcal{A}(f, g) + \mu \cdot \mathcal{A}(f, h), \forall f, g, h \in V, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f,g) &= \int_0^1 f(t)dt \cdot \int_0^1 g(s)ds = \\ &= \int_0^1 g(s)ds \cdot \int_0^1 f(t)dt = A(g,f), \forall f,g \in V,\end{aligned}$$

deci $\mathcal{A}$ este simetrică.

c) $Q(f) = \mathcal{A}(f,f) = \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2, \forall f \in C^0[0,1]$.

d) Vectorii izotropi ai formei pătratice Q sunt funcţiile $f \in V$ pentru care $Q(f) = 0$. Deoarece $f \in V \in C^0[0,1]$, avem $\int_0^1 f(t)dt = 0$. De exemplu, vectorii izotropi ai formei pătratice Q pot fi funcţii de forma $f(t) = t^n - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{R}$. (Verificaţi!)

2. a) Se verifică aditivitatea şi omogenitatea în x şi y:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda x + \mu x', y) &= (\lambda x_1 + \mu x_1{}')y_1 - 2(\lambda x_1 + \mu x_1{}')y_2 - 2(\lambda x_2 + \mu x_2{}')y_1 + 3(\lambda x_2 + \mu x_2{}')y_2 = \\ &= \lambda(x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2) + \mu(x_1{}'y_1 - 2x_1{}'y_2 - 2x_2{}'y_1 + 3x_2{}'y_2) = \\ &= \lambda\mathcal{A}(x,y) + \mu\mathcal{A}(x',y).\end{aligned}$$

Analog

$$\mathcal{A}(x, \lambda y + \mu y') = \lambda \mathcal{A}(x,y) + \mu \mathcal{A}(x,y'), \forall x,x',y,y' \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Arătăm că forma biliniară $\mathcal{A}$ este simetrică:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x,y) &= x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 = \\ &= y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 3y_2x_2 = \mathcal{A}(y,x).\end{aligned}$$

b) $Q(x) = \mathcal{A}(x,x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 3x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

c) Matricea asociată formei pătratice Q relativ la $B = \{e_1, e_2\}$ este

$$A = [\mathcal{A}]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(e_1,e_1) & \mathcal{A}(e_1,e_2) \\ \mathcal{A}(e_2,e_1) & \mathcal{A}(e_2,e_2) \end{pmatrix}.$$

Dar $\begin{cases} \mathcal{A}(e_1,e_1) = 1, \mathcal{A}(e_1,e_2) = -2 \\ \mathcal{A}(e_2,e_1) = -2, \mathcal{A}(e_2,e_2) = 3, \end{cases}$ deci matricea asociată lui $\mathcal{A}$ (şi lui Q) relative la baza naturală este $A = [\mathcal{A}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $[\mathcal{A}]_{B'} = [B']_B{}^t\, [\mathcal{A}]_B\, [B']_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Prin dedublare, deci prin substituţiile

$$\begin{cases} x_ix_j & \to \frac{1}{2}(x_iy_j + x_jy_i) \\ x_i^2 & \to \frac{1}{2}(x_iy_i + y_ix_i) = x_iy_i \end{cases}$$

efectuate în expresia analitică a formei pătratice Q, obţinem expresia analitică a formai polare ataşate

$$\mathcal{A}(x,y) = x_1y_1 - 4 \cdot \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + 3x_2y_2 = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

4. a), b) La ambele subpuncte se verifică aditivitatea şi omogenitatea în x şi y.

a) Se observă că

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda x + \mu x', y) &= (\lambda x_1 + \mu x'_1) \cdot y_2 - (\lambda x_2 + \mu x'_2)^2 \neq \\ &\neq \lambda x_1y_2 + \mu x'_1y_2 - \lambda x_2^2 - \mu x'_2{}^2 = \lambda\mathcal{A}(x,y) + \mu\mathcal{A}(x',y),\end{aligned}$$

deci $\mathcal{A}$ nu este formă biliniară.

b) Avem

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda x+\mu x',y) &= (\lambda x_1+\mu x_1{}')\cdot y_2-(\lambda x_2+\mu x_2{}')\cdot y_1=\\&=\lambda(x_1y_2-x_2y_1)+\mu\,(x_1{}'y_2-x_2{}'y_1)=\\&=\lambda\mathcal{A}(x,y)+\mu\mathcal{A}(x',y)\\ \mathcal{A}(x,\lambda\,y+\mu\,y') &= x_1(\lambda\,y_2+\mu\,y_2{}')-x_2(\lambda\,y_1+\mu\,y_1{}')=\\&=\lambda\,(x_1y_2-x_2y_1)+\mu\,(x_1y_2{}'-x_2y_1{}')=\\&=\lambda\mathcal{A}(x,y)+\mu\mathcal{A}(x,y'),\ \forall x,x',y,y'\ \in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda,\mu\ \in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

5. a) şi b) Avem

$$\mathcal{A}(x,y)=x_1y_2-x_2y_1,\quad \mathcal{A}(y,x)=y_1x_2-y_2x_1=-x_1y_2+x_2y_1.$$

Se observă că $\mathcal{A}(x,y)=-\mathcal{A}(y,x)\ ,\forall\,x,y\in\mathbb{R}^2$, deci forma biliniară A este antisimetrică.

c) Notăm $B=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$. Calculăm

$$\begin{cases}\mathcal{A}(e_1,e_1)=0, & \mathcal{A}(e_1,e_2)=1\\ \mathcal{A}(e_2,e_1)=-1, & \mathcal{A}(e_2,e_2)=0,\end{cases}$$

de unde rezultă $A=[\mathcal{A}]_B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Deoarece $A=-A^{\,t}$, rezultă că forma biliniară $\mathcal{A}$ este antisimetrică.

d) $[\mathcal{A}]_{B'}=[B']_B{}^{\,t}\,[\mathcal{A}]_B\,[B']_B=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-7\\7&0\end{pmatrix}$.

6. a) Obţinem

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\,(\lambda\,x+\mu x',y) &= 2(\lambda x_1+\mu x_1{}')y_1-3(\lambda x_1+\mu x_1{}')\cdot y_3-3(\lambda x_3+\mu x_3{}')y_1+4(\lambda x_2+\mu x_2{}')y_2=\\&=\lambda(2x_1y_2-3x_1y_3-3x_3y_1+4x_2y_2)+\mu\,(2x_1{}'y_1-3x_1{}'y_3-3x_3{}'y_1+4x_2{}'y_2)=\\&=\lambda\mathcal{A}(x,y)+\mu\mathcal{A}(x',y).\end{aligned}$$

Analog

$$\mathcal{A}(\,x,\lambda\,y+\mu\,y')=\lambda\,\mathcal{A}(x,y)+\mu\mathcal{A}(x,y')\ ,\forall x,x',y,y'\ \in\mathbb{R}^3,\ \forall\lambda,\mu\ \in\mathbb{R}.$$

Arătăm că forma biliniară A este simetrică:

$$\mathcal{A}(x,y)=2x_1y_1-3x_1y_3-3x_3y_1+4x_2y_2=2y_1x_1-3y_1x_3-3y_3x_1+4y_2x_2=\mathcal{A}(y,x)\ ,\forall x,y\in\mathbb{R}^3.$$

b) Notăm $B=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Calculăm

$$\begin{cases}\mathcal{A}(e_1,e_1)=2, & \mathcal{A}(e_1,e_2)=0, & \mathcal{A}(e_1,e_3)=-3\\ \mathcal{A}(e_2,e_1)=0, & \mathcal{A}(e_2,e_2)=4, & \mathcal{A}(e_2,e_3)=0\\ \mathcal{A}(e_3,e_1)=-3, & \mathcal{A}(e_3,e_2)=0, & \mathcal{A}(e_3,e_3)=0,\end{cases}$$

de unde rezultă $A=[\mathcal{A}]_B=\begin{pmatrix}2&0&-3\\0&4&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$. Efectuăm verificarea

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x,y) &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&-3\\0&4&0\\-3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2y_1-3y_3\\4y_2\\-3y_1\end{pmatrix}=\\&=2x_1y_1-3x_1y_3+4x_2y_2-3x_3y_1.\end{aligned}$$

c) Nucleul unei forme biliniare simetrice este definit prin

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{x\in V\mid\mathcal{A}(x,y)=0,\ \forall\,y\in V\}.$$

Avem

$$\mathcal{A}(x,y)=0,\forall\, y\in V \quad \Leftrightarrow 2x_1y_1-3x_1y_3-3x_3y_1+4x_2y_2=0,\forall y=(y_1,y_2,y_3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x_1=x_2=x_3=0\ \Leftrightarrow\ x=0_{\mathbb{R}^3},$$

deci $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}=\{0\}$, de unde rezultă $\dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}=0$. Rangul formei biliniare $\mathcal{A}$ este egal cu rangul matricii A. Deoarece $\det A=-36\ \neq\ 0$, rezultă $\mathrm{rang}\,\mathcal{A}=\ \mathrm{rang}\,A=3$. În concluzie, se verifică teorema dimensiunii:

$$\underbrace{\dim\,\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}}_{0}+\underbrace{\mathrm{rang}\,\mathcal{A}}_{3}=\underbrace{\dim\mathbb{R}^3}_{3}.$$

d) $Q(x)=\mathcal{A}(x,x)=2x_1^2-3x_1x_3-3x_3x_1+4x_2^2=2x_1^2-6x_1x_3+4x_2^2$.

e) Deoarece matricea A este nesingulară rezultă că forma biliniară $\mathcal{A}$ este nedegenerată. Q admite vectori izotropi nenuli dacă şi numai dacă

$$Q(x)=0,x\neq 0\Leftrightarrow 2x_1^2-6x_1x_3+4x_2^2=0,\ (x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0).$$

Presupunând $x_1\neq 0$, obţinem $x_3=\frac{2x_1^2+4x_2^2}{6x_1}=\frac{x_1}{3}+\frac{2x_2^2}{3x_1}$. De exemplu, pentru $x_1=1,x_2=1$ rezultă $x_3=1$; deci pentru vectorul nenul $x=(1,1,1)\ \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, avem $Q(x)=0$.

7. a) Se procedează la fel ca la exerciţiul anterior.

b) Calculăm $[\mathcal{A}]_{B'}$:

$$\begin{cases}
a_{11}=\mathcal{A}(q_1,q_1)=\left(\int_0^1(1+t)dt\right)^2=\left[\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1\right]^2=\frac{9}{4}\\
a_{12}=\mathcal{A}(q_1,q_2)=\left(\int_0^1(1+t)dt\right)\left(\int_0^1 s^2ds\right)=\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1\cdot\left(\frac{s^3}{3}\right)\Big|=\frac{1}{2}\\
a_{13}=\mathcal{A}(q_1,q_3)=\int_0^1(1+t)dt\cdot\int_0^1 1ds=\dfrac{3}{2}\\
a_{21}=a_{12}=\frac{1}{2},\ \ a_{22}=\mathcal{A}(q_1,q_2)=\left(\int_0^1 t^2dt\right)^2=\frac{1}{9}\\
a_{23}=\mathcal{A}(q_2,q_3)=\int_0^1 t^2dt\cdot\int_0^1 1ds=\dfrac{1}{3}\\
a_{31}=a_{13}=\frac{3}{2},\ a_{32}=a_{23}=\frac{1}{3},\ a_{33}=\mathcal{A}(q_3,q_3)=\left(\int_0^1 1ds\right)^2=1,
\end{cases}$$

deci $A=[\mathcal{A}]_{B'}=\begin{pmatrix}9/4&1/2&3/2\\1/2&1/9&1/3\\3/2&1/3&1\end{pmatrix}$.

c) Nucleul formei biliniare $\mathcal{A}$ este:

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}=\{p\in V=\mathbb{R}_2\,[x]\ \mid \mathcal{A}(p,q)=0,\forall\, q\in\mathbb{R}_2\,[x]\,\}\,.$$

Avem

$$\mathcal{A}(p,q)=0,\forall\, q\in\mathbb{R}_2\,[x]\Leftrightarrow\int_0^1 p(t)dt\cdot\int_0^1 q(s)ds=0\ ,\forall q\in\mathbb{R}_2\,[x]\ \Leftrightarrow\ \int_0^1 p(t)dt=0. \tag{13.3}$$

Considerăm polinomul $p\in\mathbb{R}_2\,[x]$ de forma $p(x)=ax^2+bx+c$. Atunci relaţia (13.3) se rescrie

$$\int_0^1(at^2+bt+c)dt=0\Leftrightarrow\left(a\frac{t^3}{3}+b\frac{t^2}{2}+ct\right)\Big|_0^1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}.$$

Rezultă

$$p(x)=ax^2+bx-\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)=a\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+b\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

deci $\text{Ker}\,\mathcal{A} = L\left(\left\{v_1 = x^2 - \frac{1}{3}, v_2 = x - \frac{1}{2}\right\}\right)$şi deoarece vectorii v_1 şi v_2 sunt liniar independenţi avem $B = \{v_1, v_2\}$ o bază în $\text{Ker}\,\mathcal{A} = 0$. Deci $\dim \text{Ker}\,\mathcal{A} = 2$.

Rangul formei biliniare $\mathcal{A}$ este egal cu rangul matricii A, care se observă că este egal cu 1.

Se verifică astfel teorema dimensiunii, $\underbrace{\dim \text{Ker}\,\mathcal{A}}_{2} + \underbrace{\text{rang}\,\mathcal{A}}_{1} = \underbrace{\dim \mathbb{R}_2[x]}_{3}$.

d) $Q(p) = \mathcal{A}(p,p) = (\int_0^1 p(t)dt)^2$.

e) Deoarece matricea A este singulară, rezultă că forma biliniară $\mathcal{A}$ este degenerată. Q admite vectori izotropi nenuli doar dacă $\displaystyle\int_0^1 p(t)dt = 0, p \neq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (at^2 + bt + c)dt = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$.

8. a) Prin dedublare, deci prin substituţiile

$$\begin{cases} x_i x_j & \rightarrow \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i) \\ x_i^2 & \rightarrow \frac{1}{2}(x_i y_i + y_i x_i) = x_i y_i \end{cases}$$

efectuate în expresia analitică a formei pătratice Q, obţinem expresia analitică a formai polare ataşate:

$$\mathcal{A}(x,y) = x_1 y_1 - \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2 \cdot \frac{1}{2}(x_2 y_3 + x_3 y_2) = x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

b) Fie $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1,e_1) = 1, & \mathcal{A}(e_1,e_2) = -\frac{1}{2}, & \mathcal{A}(e_1,e_3) = 0 \\ \mathcal{A}(e_2,e_1) = -\frac{1}{2}, & \mathcal{A}(e_2,e_2) = 0, & \mathcal{A}(e_2,e_3) = 1 \\ \mathcal{A}(e_3,e_1) = 0, & \mathcal{A}(e_3,e_2) = 1, & \mathcal{A}(e_3,e_3) = 0, \end{cases}$$

deci $A = [\mathcal{A}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. a) Avem $U^\perp = \left\{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{A}(v_1, y) = 0, \mathcal{A}(v_2, y) = 0\right\}$. Formăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \mathcal{A}(v_1, y) = 0 \\ \mathcal{A}(v_2, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 - 3y_3 + 4y_2 = 0 \\ -3y_1 + 4y_2 = 0, \end{cases}$$

ce are soluţiile $y = (y_1, y_2, y_3) = \left(t,\ \frac{3}{4}t,\ \frac{5}{3}t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. În concluzie, $U^\perp = \left\{t\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = L(v_3)$, unde $v_3 = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Deci o bază în $U^\perp$ este $\{v_3 = (1; 3/4; 5/3)\}$.

b) Din teorema Grassmann avem $\dim(U \cap U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U + U^\perp) = 2 + 1 - 3 = 0$, de unde rezultă

$$U \cap U^\perp = \{0\}\,. \tag{13.4}$$

Deoarece v_1 , v_2 şi v_3 sunt trei vectori liniar independenţi în spaţiul $\mathbb{R}^3$ de dimensiune 3, rezultă că v_1 , v_2 şi v_3 formează o bază în $\mathbb{R}^3$, deci

$$\mathbb{R}^3 = U + U^\perp \tag{13.5}$$

Din relaţiile (13.4) şi (13.5) rezultă $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^3$.

c) Deoarece $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^3$, restricţia $A|_U$ este nedegenerată.

10. Folosind relaţia $Q = X^t\, A\, X$, obţinem expresia analitică a formei pătratice Q:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= (x_2 - 2x_3, x_1 + 3x_3, -2x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + x_1 x_2 + 3x_2 x_3 - 2x_1 x_3 + 3x_2 x_3 = \\ &= 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 6x_2 x_3. \end{aligned}$$

Deoarece forma pătratică Q nu conţine nici un pătrat, se aplică schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Obţinem

$$Q(y) = 2(y_1+y_2)(y_1-y_2) - 4(y_1+y_2)y_3 + 6(y_1-y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1y_3 - 10y_2y_3.$$

Grupând termenii pentru a forma pătrate obţinem:

$$\begin{aligned} Q(y) &= 2y_1^2 + 2y_1y_3 - 2y_2^2 - 10y_2y_3 = \tfrac{1}{2}(2y_1+y_3)^2 - 2y_2^2 - 10y_2y_3 - \tfrac{1}{2}y_3^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}(2y_1+y_3)^2 + \tfrac{1}{-2}(-2y_2-5y_3)^2 + \tfrac{25y_3^2}{2} - \tfrac{y_3^2}{2} = \\ &= \tfrac{1}{2}(2y_1+y_3)^2 - \tfrac{1}{2}(-2y_2-5y_3)^2 + 12y_3^2, \end{aligned}$$

de unde, examinând restrângerile de pătrate, rezultă schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + y_3 \\ z_2 = -2y_2 - 5y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Se observă că în aceste coordonate forma pătratică are expresie canonică. Pentru a obţine baza căreia îi corespund aceste coordonate, remarcăm că transformarea de coordonate inversă este:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_3 \\ y_2 = -\frac{1}{2}z_2 - \frac{5}{2}z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

În final, relaţia dintre coordonatele iniţiale (x_1, x_2, x_3) şi cele finale (z_1, z_2, z_3) este:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -3 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la baza diagonalizatoare este:

$$[B'] = M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -3 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea a formei pătratice relativ la această bază este matricea diagonală

$$[Q]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+,-,+)$ sau încă $(n_+, n_-, n_0) = (2,1,0)$.

11. Fie $A = [\mathcal{A}]$ matricea formei polare

$$\mathcal{A}(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$$

(obţinută prin dedublare) asociată formei pătratice Q relativ la baza naturală. Avem $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicând metoda Jacobi, prin calcul direct obţinem minorii

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

şi vectorii bazei corespunzătoare:

$$v_1 = \frac{1}{\Delta_1} e_1 \equiv^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-2e_1 - e_2) \equiv \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la noua bază B' şi matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază sunt respectiv

$$C = [B']_B = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, [Q]_{B'} =^t CAC = \begin{pmatrix} \Delta_0/\Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_1/\Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix},$$

iar expresia analitică a formei în noile coordonate $[x]_{B'} =^t (x'_1, x'_2)$ este $Q(x) = x'^2_1 - \frac{1}{3} x'^2_2$.

12. Spectrul matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ asociate formei pătratice Q este $\sigma(A) = \{-1, 3\}$. Pentru $\lambda_1 = -1$ aflăm un vector propriu generator asociat rezolvând sistemul caracteristic

$$(A - (-1)I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soluţiile acestui sistem sunt de forma $v = (t, t) = t(1, 1), t \in \mathbb{R}$, deci un vector propriu asociat este $v_1 = (1, 1)$. Analog, pentru $\lambda_2 = 3$ avem vectorul propriu asociat $v_2 = (1, -1)$. Normând baza ortogonală $B = \{v_1, v_2\}$ obţinem o bază ortonormată

$$B' = \left\{ w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

formată din vectori proprii ai matricei A, a cărei matricea asociată este

$$C = [B']_B = [w_1, w_2] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea formei pătratice Q relativ la B' este

$$[Q]_{B'} =^t CAC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

iar expresia canonică a lui Q va fi $Q(x) = -x'^2_1 + 3x'^2_2$, unde am notat $[x]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$.

Signatura formei pătratice Q este $(-, +)$, $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$.

13. **a)** **Din oficiu: 1pt.** Metoda Gauss. Grupând termenii pentru a forma pătrate conform metodei Gauss, $ax^2 + bx = \frac{1}{a}(ax + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4a}$, obţinem:

$$\begin{aligned} Q(v) &= (x^2 - 8xy - 16xz) + 7y^2 - 8yz + z^2 = \\ &= x^2 + 2x \cdot (-4y - 8z) + 7y^2 - 8yz + z^2 = \\ &= (x - 4y - 8z)^2 - (4y + 8z)^2 + 7y^2 - 8yz + z^2 = \\ &= (x - 4y - 8z)^2 - 9y^2 - 72yz - 63z^2 = \\ &= (x - 4y - 8z)^2 - \tfrac{1}{9}(-9y - 36z)^2 + 144z^2 - 63z^2 = \\ &= (x - 4y - 8z)^2 - \tfrac{1}{9}(-9y - 36z)^2 + 81z^2 = x'^2 - \tfrac{1}{9}y'^2 + 81z'^2, \end{aligned}$$

de unde examinând restrângerile de pătrate obţinem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x' = x - 4y - 8z \\ y' = -9y - 36z \qquad \textbf{(1 pt.)} \\ z' = z \end{cases}.$$

Se observă că relativ la aceste coordonate forma pătratică are expresia canonică. Pentru a obţine *baza* căreia îi corespund aceste coordonate, remarcăm că transformarea de coordonate inversă este

$$\begin{cases} x = x' - \frac{4}{9}y' - 8z' \\ y = -\frac{1}{9}y' - 4z' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4/9 & -8 \\ 0 & -1/9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt.)},$$

deci matricea de trecere la baza diagonalizatoare este $C = [B'] = \begin{pmatrix} 1 & -4/9 & -8 \\ 0 & -1/9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt.)** . Matricea diagonală a formei pătratice relativ la această bază este

$$[Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0,5 pt.)}.$$

Metoda valorilor proprii. Prin dedublare obţinem forma polară $\mathcal{A}$ asociată formei pătratice Q,

$$\mathcal{A}(v_1, v_2) = x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 8x_1z_2 - 8x_2z_1 + 7y_1y_2 - 4y_1z_2 - 4y_2z_1 + z_1z_2,$$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Matricea acestei forme relativ la baza naturală este $A = [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt.)** , cu spectrul $\sigma(A) = \{9, 9, -9\}$ **(0,5 pt.)** . Se determină o bază formată din vectorii proprii ortonormaţi ai matricii (fapt posibil deoarece A este matrice simetrică). Pentru $\lambda = 9$, obţinem sistemul caracteristic

$$(A - 9I)v = 0, v \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 4b - 8c = 0 \\ -4a - 2b - 4c = 0 \\ -8a - 4b - 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -2a - 2c,$$

cu soluţiile $v = (t, -2t - 2s, s) = t(1, -2, 0) + s(0, -2, 1), t, s \in \mathbb{R}$, deci doi vectori proprii liniar independenţi sunt $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (0, -2, 1)$. Ortogonalizăm $\{v_1, v_2\}$ cu procedeul Gram-Schmidt şi obţinem

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = (1, -2, 0) \\ u_2 = v_2 - pr_{u_1}v_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 = \\ \qquad = (0, -2, 1) - \frac{4}{5}(1, -2, 0) = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1) || (-4, -2, 5) \end{cases}, \quad \textbf{(0,5 pt.)}.$$

Aflăm al treilea vector propriu. Sistemul caracteristic asociat valorii proprii $\lambda = -9$ este

$$(A + 9I)v = 0 \Rightarrow \begin{cases} 10a - 4b - 8c = 0 \\ -4a + 16b - 4c = 0 \\ -8a - 4b + 10c = 0 \end{cases},$$

are soluţiile $v = (2t, t, 2t) = t(2, 1, 2), t \in \mathbb{R}$, deci obţinem $u_3 = v_3 = (2, 1, 2)$ **(0,5 pt.)** .
Prin normarea bazei ortogonale formate din vectorii proprii u_1, u_2 şi u_3, rezultă baza ortonormată căutată cu matricea de trecere asociată $[B'] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt.)** . Matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază este $[Q]_{B'} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt.)** .

Metoda Jacobi. Prin calcul direct, obţinem minorii:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 16 = -9, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -729 \quad \textbf{(0,5 pt.)}$$

şi vectorii bazei corespunzătoare:

$$v_1 = \frac{1}{\Delta_1}e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}(-4e_1 - e_2) \equiv \begin{pmatrix} 4/9 \\ 1/9 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\Delta_3}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{729}(72e_1 + 36e_2 - 9e_3) \equiv \begin{pmatrix} -8/81 \\ -4/81 \\ 1/81 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(0,5 pt.)}$$

deci matricea de trecere la noua bază B' şi matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază sunt respectiv $[B'] = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & -8/81 \\ 0 & 1/9 & -4/81 \\ 0 & 0 & 1/81 \end{pmatrix}$ **(1 pt.)** şi

$$[Q]_{B'} = {}^t CAC = \begin{pmatrix} \Delta_0/\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_1/\Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_2/\Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/81 \end{pmatrix}, \text{ \textbf{(0,5 pt.)}}$$

iar expresia analitică a formei pătratice Q relativ la noile coordonate (x', y', z') este

$$Q(v') = x'^2 - 1/9y'^2 + 1/81z'^2, v = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 \in \mathbb{R}^3 \text{ \textbf{(0,5 pt.)} \textbf{Total: 10pt.}}.$$

Se observă că oricare ar fi metoda de obţinere a expresiei canonice a formei pătratice Q, signatura acesteia este $(+, +, -)$, $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

b) Metoda Gauss. Grupând termenii pentru a forma pătrate prin metoda Gauss, deci folosind restrângeri de pătrate de tipul $ax^2 + bx = \frac{1}{a}(ax + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4a}$, obţinem

$$Q(x) = -5x_2^2 + 4x_1x_2 = -\frac{1}{5}(-5x_2 + 2x_1)^2 + \frac{4}{5}x_1^2 = -\frac{1}{5}y_1^2 + \frac{4}{5}y_2^2,$$

de unde rezultă schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 5x_2 \\ y_2 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a obţine baza căreia îi corespund aceste coordonate, remarcăm că transformarea de coordonate inversă este

$$\begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = -\frac{y_1}{5} + \frac{2}{5}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la baza diagonalizatoare, respectiv matricea diagonală a formei pătratice relativ la această bază sunt

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C\,{}^tAC = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Metoda valorilor proprii. Fie $A = [\mathcal{A}]$ matricea formei polare asociate formei pătratice Q

$$\mathcal{A}(x, y) = -5x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

obţinută prin dedublare. Matricea acesteia relativ la baza naturală este

$$A = [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(e_1, e_1) & \mathcal{A}(e_1, e_2) \\ \mathcal{A}(e_2, e_1) & \mathcal{A}(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

unde $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Spectrul acestei matrice este $\sigma(A) = \{-2, 2\}$. Se determină o bază formată din vectori proprii ortonomaţi ai matricii A (fapt posibil deoarece A este matrice simetrică); această bază se obţine, de exemplu, prin normarea unei baze ortogonale formate din vectori proprii, de matricea asociată $[\bar{B}] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; după normarea acestora, obţinem matricea de trecere la noua bază B' şi matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază,

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C\,{}^tAC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Metoda Jacobi. Prin calcul direct, obţinem minorii $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$. Unul dintre minori fiind nul, metoda nu este aplicabilă. Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+, -)$ sau încă, $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 0)$.

c) Metoda Gauss. Folosind relaţia $Q = {}^t XAX$ unde $A = [Q]_B, X = [x]_B$, obţinem expresia analitică a formei pătratice Q,

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Grupând termenii pentru a forma pătrate, obţinem:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \\ &= \tfrac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 - 4x_3)^2 - \tfrac{16}{3}x_2x_3 - \tfrac{4}{3}x_2^2 - \tfrac{16}{3}x_3^2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \\ &= \tfrac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 - 4x_3)^2 + \tfrac{14}{3}x_2^2 - \tfrac{7}{3}x_3^2 - \tfrac{28}{3}x_2x_3 = \\ &= \tfrac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 - 4x_3)^2 + \tfrac{3}{14}\left(\tfrac{14}{3}x_2 - \tfrac{14}{3}x_3\right)^2 - \tfrac{3}{14}\cdot\tfrac{14^2}{3^2}\cdot x_3^2 - \tfrac{7}{3}x_3^2 = \\ &= \tfrac{1}{3}(3x_1 - 2x_2 - 4x_3)^2 + \tfrac{3}{14}\left(\tfrac{14}{3}x_2 - \tfrac{14}{3}x_3\right)^2 - 7x_3^2 = \tfrac{1}{3}y_1^2 + \tfrac{3}{14}y_2^2 - 7y_3^2, \end{aligned}$$

de unde, examinând restrângerile de pătrate, rezultă schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ y_2 = \frac{14}{3}x_2 - \frac{14}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 14/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pentru a obţine baza căreia îi corespund aceste coordonate, remarcăm că transformarea de coordonate inversă este

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{7}y_2 + 2y_3 \\ x_2 = \frac{3}{14}y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/7 & 2 \\ 0 & 3/14 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la baza diagonalizatoare, respectiv matricea diagnală a formei pătratice relativ la această bază, sunt

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/7 & 2 \\ 0 & 3/14 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/14 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Metoda valorilor proprii. Procedând analog punctului a), obţinem spectrul matricii date $\sigma(A) = \{-2, 7, 7\}$ şi vectorii proprii corespunzători $v_1 = (2, 1, 2)$, $v_2 = (1, -2, 0)$, $v_3 = (0, -2, 1)$. Fie $u_1 = v_1$. Se observă că $v_1 \perp v_2, v_1 \perp v_3$. Ortogonalizând $\{v_2, v_3\}$ cu procedeul Gram-Schmidt obţinem

$$\begin{cases} u_2 = v_2 = (1, -2, 0) \\ u_3 = v_3 - pr_{u_2}v_3 = (-4/5, -2/5, 1) || (-4, -2, 5). \end{cases}$$

Prin normarea bazei ortogonale formate din vectorii proprii v_1, u_2, u_3 obţinem baza ortonormată căutată cu matricea asociată $C = [B'] = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază este $[Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Metoda Jacobi. Prin calcul direct, obţinem minorii:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 14, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -98$$

şi vectorii bazei corespunzătoare

$$v_1 = \frac{1}{\Delta_1}e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}(-2e_1 - 3e_2) \equiv \begin{pmatrix} -1/7 \\ -3/14 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\Delta_3}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{98}(28e_1 + 14e_2 + 14e_3) \equiv \begin{pmatrix} -2/7 \\ -1/7 \\ -1/7 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la noua bază B' şi matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază sunt respectiv:

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/7 & -2/7 \\ 0 & -3/14 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{pmatrix}, [Q]_{B'} = C\,{}^tAC = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/14 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{pmatrix},$$

iar expresia analitică a formei în noile coordonate (x', y', z') este:

$$Q(v') = \frac{1}{3}x'^2 + \frac{3}{14}y'^2 - \frac{1}{7}z'^2, v = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+, +, -)$, $(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 0)$.

d) Metoda Gauss. Folosind relaţia $Q = {}^t XAX$, unde $A = [Q]_B, X = [x]_B = {}^t\ (x_1, x_2, x_3)$, obţinem expresia analitică a formei pătratice

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$$

care după gruparea termenilor pentru a forma pătrate devine $Q(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$. Examinând restrângerile de pătrate, rezultă schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

iar transformarea de coordonate inversă este:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la baza diagonalizatoare, respectiv matricea diagonală a formei pătratice relativ la această bază sunt

$$C = [B'] = M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C\,{}^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda valorilor proprii. Polinomul caracteristic al matricii A este $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 1$. Rădăcinile polinomului sunt reale, deoarece A este matrice simetrică, însă fiind iraţionale, nu pot fi determinate direct. Prin urmare metoda valorilor proprii nu se poate aplica.

Metoda Jacobi. Obţinem minorii Jacobi $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1$ şi baza asociată

$$v_1 = \tfrac{1}{\Delta_1} e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \tfrac{1}{\Delta_2} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \tfrac{1}{\Delta_3} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2e_1 - e_2 + e_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la noua bază B' şi matricea diagonală sunt respectiv:

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [Q]_{B'} = C\,{}^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+, +, +)$, $(n_+, n_-, n_0) = (3, 0, 0)$.

e) Metoda Gauss. Grupând termenii pentru a forma pătrate obţinem:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \tfrac{1}{-1}(-x_1 + 3x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^3 = \\ &= -(x_1 + 3x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 = -y_1^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Din relaţiile schimbării de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + 3x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

obţinem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

deci matricea noii baze şi matricea diagonală a formei pătratice sunt respectiv:

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C^{\,t} AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Metoda valorilor proprii. Matricea relativ la baza naturală a formei polare $\mathcal{A}$ (obţinută prin dedublarea formei pătratice Q) este $A = [\mathcal{A}]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, are spectrul $\sigma(A) = \{-7, 2, 0\}$ şi vectorii proprii corespunzători $v_1 = (2, 1, -4)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (3, -2, 1)$. Prin normarea bazei ortogonale formate din vectorii proprii v_1, v_2, v_3 obţinem baza ortonormată căutată cu matricea asociată $C = [B'] = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{21} & 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{21} & 2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{14} \\ -4/\sqrt{21} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$.

Matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază este

$$[Q]_{B'} = C^{\,t} AC = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Metoda Jacobi. Prin calcul direct obţinem minorii:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = -1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Unul din minori fiind nul, metoda nu este aplicabilă.

Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+, -, 0)$ sau $(n_+, n_-, n_0) = (1, 1, 1)$.

f) Metoda Gauss. Folosind relaţia $Q(x) = {}^t X \cdot A \cdot X$, unde $A = [Q]_B, X = [x]_B$, obţinem expresia analitică a formei pătratice Q,

$$Q(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Deoarece forma pătratică Q nu conţine termeni de forma $a_{ii}x_i^2$, $i = \overline{1,4}$, efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3, \; x_4 = y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix};$$

Notăm cu M matricea din membrul drept. Relativ la noile coordonate, avem

$$Q(x) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 6y_1y_3 - 6y_1y_4 - 6y_2y_3 + 6y_2y_4 + 2y_3y_4.$$

Grupând termenii pentru a forma pătrate se obţine în final

$$\begin{aligned} Q(y) &= \tfrac{1}{2}(2y_1 - 3y_3 - 3y_4) - \tfrac{2}{9}\left(-\tfrac{9}{2}y_3 - 3y_2 - \tfrac{7}{2}y_4\right)^2 + \tfrac{1}{2}(2y_2 - \tfrac{2}{3}y_4)^2 - 2y_4^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}z_1^2 - \tfrac{2}{9}z_2^2 + \tfrac{1}{2}z_3^2 - 2z_4^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă transformarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 - 3y_3 - 3y_4 \\ z_2 = -3y_2 - \frac{9}{2}y_3 - \frac{7}{2}y_4 \\ z_3 = 2y_2 - \frac{2}{3}y_4 \\ z_4 = y_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -9/2 & -7/2 \\ 0 & 2 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

a cărei inversă este

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{2}z_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{3}z_4 \\ y_3 = \frac{2}{9}z_2 - \frac{1}{3}z_3 - z_4 \\ y_4 = z_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/9 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Notăm cu N matricea din membrul drept. Matricea de trecere la baza diagonalizatoare se obţine folosind relaţiile $X = MY = MNZ \equiv CZ$; obţinem matricea de trecere C şi respectiv matricea diagonală a formei pătratice relativ la această bază:

$$C = [B'] = MN = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 2/9 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Metoda valorilor proprii. Spectrul matricii A este $\sigma(A) = \{-4, -2, 2, 4\}$, iar vectorii proprii corespunzători sunt

$$v_1 = (1, -1, 1, -1), v_2 = (1, 1, 1, 1), v_3 = (1, -1, -1, 1), v_4 = (-1, -1, 1, 1).$$

Prin normarea bazei ortogonale formate din vectorii proprii v_1, v_2, v_3 şi v_4 obţinem baza ortonormată căutată cu matricea asociată

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază este

$$[Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Metoda Jacobi. Deoarece minorul $\Delta_1 = 0$ este nul, metoda nu este aplicabilă.

Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+, +, -, -)$ sau $(n_+, n_-, n_0) = (2, 2, 0)$.

g) Metoda Gauss. Procedând analog punctului c), obţinem expresia analitică a formei pătratice Q,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2.$$

Grupând termenii pentru a forma pătrate obţinem:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \tfrac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \tfrac{26}{5}x_2^2 + \tfrac{16}{5}x_3^2 - \tfrac{8}{5}x_2x_3 = \\ &= \tfrac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \tfrac{5}{26}\left(\tfrac{26}{5}x_2 - \tfrac{4}{5}x_3\right)^2 - \tfrac{40}{13}x_3^2 = \\ &= \tfrac{1}{5}y_1^2 + \tfrac{5}{26}y_2^2 - \tfrac{40}{13}y_3^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă transformarea inversă de coordonate:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{13}y_2 + \frac{6}{13}y_3 \\ x_2 = \frac{5}{26}y_2 + \frac{2}{13}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/13 & 6/13 \\ 0 & 5/26 & 2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la baza diagonalizatoare, respectiv matricea diagonală a formei pătratice relativ la această bază sunt:

$$C = [B'] = M = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/13 & 6/13 \\ 0 & 5/26 & 2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 5/26 & 0 \\ 0 & 0 & -40/13 \end{pmatrix}.$$

Metoda valorilor proprii. Spectrul matricii A este $\sigma(A) = \{2, 5, 8\}$, iar vectorii proprii corespunzători sunt

$$v_1 = (2, 1, 2), v_2 = (1, 2, -2), v_3 = (-2, 2, 1).$$

Prin normarea bazei ortogonale formate din vectorii proprii v_1, v_2 şi v_3 obţinem baza ortonormată căutate cu matricea asociată $[B'] = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază este $[Q]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Metoda Jacobi. Prin calcul direct, obţinem minorii:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80$$

şi vectorii bazei corespunzătoare:

$$v_1 = \frac{1}{\Delta_1}e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{26}(-2e_1 - 5e_2) \equiv \begin{pmatrix} -1/13 \\ -5/26 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\Delta_3}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{80}(12e_1 + 4e_2 + 26e_3) \equiv \begin{pmatrix} 3/20 \\ 1/20 \\ 13/40 \end{pmatrix},$$

deci matricea de trecere la noua bază B' şi matricea diagonală ataşată formei pătratice relativ la această bază sunt respectiv:

$$C = [B'] = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/13 & 3/20 \\ 0 & -5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{pmatrix}, \quad [Q]_{B'} = C^{\,t}AC = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 5/26 & 0 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{pmatrix}.$$

Se observă că signatura formei pătratice Q este $(+, +, +)$ sau $(n_+, n_-, n_0) = (3, 0, 0)$.

13.6 Exerciţii/probleme propuse spre rezolvare

1. Fie P_3 spaţiul vectorial al funcţiilor polinomiale reale care au cel mult gradul 3 şi fie

$$\mathcal{A}\colon P_3 \times P_3 \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 x(t)y(s)dtds.$$

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară simetrică.

b) Să se determine matricea formei biliniare $\mathcal{A}$ în baza canonică a spaţiului şi apoi în baza $\{t^2-1, t^2-t, t^2, t^2-t^3\}$.

2. Se dă funcţia $\mathcal{A}\colon P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3.$$

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară.

b) Să se determine matricea corespunzătoare formei biliniare $\mathcal{A}$ în raport cu baza $f_1 = (1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0)$, $f_3 = (0,1,0,1)$ şi $f_4 = (1,0,0,1)$.

3. Fie V un spaţiu euclidian complex şi $\mathcal{T} : V \to V$ un endomorfism. Definim forma pătratică $Q(x) = (\mathcal{T}(x), x)$, $\forall x \in V$.

a) Să se arate că dacă $\mathcal{T}$ este hermitian, atunci $Q(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$, iar dacă $\mathcal{T}$ este antihermitian, atunci $Q(x)$ este pur imaginar, $\forall x \in V$.

b) Să se verifice relaţiile:

$$\begin{aligned} &Q(tx) = t\bar{t}Q(x), \quad \forall t \in \mathbb{C}; \\ &Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + (\mathcal{T}(x), y) + (\mathcal{T}(y), x), \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

c) Să se verifice implicaţia

$$\forall x \in V, Q(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{T}(x) = 0.$$

d) Să se arate că dacă $Q(x)$ este real, $\forall x \in V$, atunci $\mathcal{T}$ este hermitian.

4. Fie forma pătratică

$$Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Să se determine valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $x = (1,2)$ şi $y = (\lambda, -1)$ să fie ortogonali în raport cu forma Q.

5. Se dă forma pătratică

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

a) Utilizând metoda Gauss, metoda Jacobi şi respectiv metoda valorilor proprii, să se aducă $Q(x)$ la expresii canonice.

b) Să se verifice teorema de inerţie.

6. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se scrie forma pătratică corespunzătoare şi să se găsească două expresii canonice.

b) Să se verifice teorema de inerţie.

7. Să se arate că forma pătratică

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|j-i|}\, x_ix_j, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

este pozitiv definită.

8. Să se reducă forma pătratică

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_ix_j, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

la expresia canonică.

9. Să se arate că dacă $[g_{ij}]$ şi $[h_{ij}]$ sunt matrice pozitiv definite, atunci matricele

$$[f_{ij}(t)],\ f_{ij}(t) = (1-t)g_{ij} + th_{ij}, \quad t \in [0,1],$$

sunt pozitiv definite.

MA.14.Aplicaţii cu soft dedicat

Cuvinte cheie: bibliotecile Maple "LinearAlgebra" şi "linalg"; comenzile Maple "LinearSolve" şi "Linsolve"; comenzile Maple "CharacteristicPolynomial", "Eigenvalues" şi "Eigenvectors"; comenzile Maple "charpoly", "eigenvalues" şi "eigenvectors"

14.1 Exemple ilustrative. Programe MAPLE®

```
1. Algebra liniara: ortonormare (procedeul Gram Schmidt si normare)
# Input: trei vectori din R^3;
# Output: vectori ortonormati;
> restart:  with(linalg): u1:=vector([3,-1,2]);
> u2:=vector([1,2,1]); u3:=vector([1,1,4]);   # u1, u2 si u3
> gs:=GramSchmidt({u1,u2,u3},normalized);   # procedura pentru calc.vect.ortog.
> M:=matrix([gs[1],gs[2],gs[3]]);   # M=matricea formata din vect.ortonormati

2. Algebra liniara: formele canonice digonala si Jordan
# Input: matricele A si B;
# Output: formele canonice corespunzatoare (diagonala, respectiv Jordan);
> restart:  with(linalg): A:=array([[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]]); # matricea A
> B:=array([[3,1,0,0], [1,2,0,0], [0,0,2,1], [0,0,0,2]]);       # matricea B
# forme canonice
> J1:=jordan(A, 'P1');  C1:=print(P1);  # forma diagonala a matricei A
> J2:=jordan(B, 'P2');  C2:=print(P2);  # forma Jordan a matricei B
# verificari: J1=P1^(-1)*A*P1, J2= P2^(-1)*A*P2
> J1:=simplify(multiply(inverse(P1), A ,P1));
> J2:=simplify(multiply(inverse(P2), B , P2));
# verificari: A=A^t, matrice simetrica diagonalizabila
> evalm(A-transpose(A));
```

14.2 Cod MAPLE® pe Internet (selecţie orientativă)

[**1**]***, http://www.maplesoft.com

[**2**]***, http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=LinearAlgebra

[**3**]***, http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/LinearAlgebraMigration

[**4**]***, http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=LinearAlgebra

[**5**]***, http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/LinearAlgebraComputation

[**6**]***, http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/LinearAlgebraVisualization2

[**7**]***, http://homepages.math.uic.edu/ hanson/MAPLE/MapleLinearAlgebra.html (Floyd Hanson, University of Illinois at Chicago, hanson@uic.edu)

[**8**]***, http://homepages.math.uic.edu/ hanson/MAPLE/, (Floyd Hanson, University of Illinois at Chicago, hanson@uic.edu)

[**9**]***, http://www.youtube.com/watch?v=5Gc8W0qaTpM (Youtube: Using Maple for Linear Algebra part 1: Matrix entry; Jan Verschelde, University of Illinois at Chicago, E-mail: jan@math.uic.edu or janv@uic.edu)

[**10**]***, http://www.math.hmc.edu/ ajb/PCMI/maple.html (Some MAPLE Resources, Andrew J. Bernoff, PCMI, Harvey Mudd College)

[**11**]***, facultypages.ecc.edu/alsani/students/maplebyexample.pdf (Maple 10 by example, M. Alsani, E-mail: alsani@ecc.edu)

MA.15.Autoevaluare

15.1 Modele de subiecte de examen

I.[1] **1**. Forme pătratice.

2. Să se verifice dacă punctele $A(1,2,3)$, $B(1,1,0)$, $C(2,2,2)$ şi $D(-1,5,-1)$ sunt coplanare. Să se calculeze $\mathrm{m}(\widehat{BAC}) - \mathrm{m}(\widehat{BAD})$. Descompunerea vectorului $\bar{v} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k}$ după $\bar{AB}$, $\bar{AC}$ şi $\bar{AD}$ este unică?

3. Să se cerceteze dacă mulţimile

$$A = \{p \in P_n \,|\, p(0) = p(1)\}; \qquad B = \{p \in P_n \,|\, p^2(0) = 1\};$$

$$C = \{p \in P_n \,|\, p(-1) + p(1) = 0\}$$

sunt subspaţii vectoriale. Să se determine intersecţia şi suma subspaţiilor vectoriale găsite. Ce dimensiuni au aceste subspaţii?

II. **1**. Metoda valorilor proprii de reducere la expresia canonică a formelor pătratice.

2. Se dau $D\colon\ \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ şi $P\colon\ x - 2y + z = 0$. Există un plan echidistant faţă de D şi P? Considerând D şi P două subspaţii vectoriale în $\mathbb{R}^3$, să se determine suma, intersecţia şi baze ortonormate în D, respectiv P.

3. Fie $V = C^\infty(-\infty, \infty)$ şi $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, care există pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Definim

$$\mathcal{T}\colon V \to V,\ g = \mathcal{T}(f) \quad \text{şi} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Analizaţi injectivitatea şi surjectivitatea endomorfismului $\mathcal{T}$. Determinaţi $Ker\mathcal{T}$, valorile proprii şi vectorii proprii.

III. **1**. Polinoame de matrice.

2. Fie $P\colon\ x + 2y - z = 0$ şi $Q\colon\ 2x - y + 2z = 0$. Să se găsească ecuaţiile planului echidistant faţă de P şi Q. Considerând P şi Q două subspaţii în $\mathbb{R}^3$, să se găsească $P \cap Q$, $P + Q$ şi baze ortonormate în P, Q şi $P \cap Q$.

3. Fie $\Sigma\colon\ z = \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4}$ şi $P\colon\ x - y - z = 0$. Să se determine planele paralele cu P care sunt tangente la Σ. Să se găsească $d(\Sigma, P)$.

IV. **1**. Forme biliniare.

2. Să se găsească generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $z = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4}$ care sunt paralele cu planul $x + y + z = 0$. Să se determine măsura unghiului determinat de aceste generatoare.

[1] Având în vedere faptul că în instituţiile de învăţământ tehnic pe parcursul unui semestru se predau atât noţiuni de algebră liniară, cât şi de geometrie analitică, subiectele propuse conţin probleme mixte aferente ambelor discipline.

3. Fie P_4 spaţiul vectorial al funcţiilor polinomiale de grad cel mult 3. Să se găsească matricea transformării liniare

$$\mathcal{T}\colon P_4 \to P_4,\ y = \mathcal{T}x,\ y(t) = \frac{d}{dt}\left((t^2-1)\frac{dx}{dt}\right)$$

în raport cu baza

$$B = \left\{1, t, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right\}.$$

V. **1**. Forma Jordan a unui endomorfism.

2. Fie $u(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$, $w(t) = \sin 2t$ şi $S = L\{u, v\}$ în $C^0[0, 2\pi]$. Să se găsească proiecţia ortogonală $x(t)$ a lui w pe S şi vectorul $x^\perp$. Vectorii u, v şi $x^\perp$ sunt liniar independenţi?

3. Fie $D\colon\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ şi $P\colon\ x - y + z + 1 = 0$. În P se consideră cercul C de rază 1 cu centrul în $A(1, 1, -1)$. Să se determine ecuaţiile simetricului cercului C în raport cu dreapta D.

VI. **1**. Forma diagonală a unui endomorfism.

2. Se consideră sfera $S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ şi planul $P\colon\ x + 2y + z = 1$. Să se calculeze raza cercului $P \cap S$. Să se determine ecuaţia simetricei lui S faţă de P.

3. Fie $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$. Să se găsească matricea lui $\mathcal{A}$ în raport cu baza $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$. Să se determine

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A(x, y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^3\}.$$

VII. **1**. Transformări liniare pe spaţii euclidiene.

2. Fie $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$. Să se determine signatura lui Q şi imaginea dreptei $D\colon\ \dfrac{x_1-1}{1} = \dfrac{x_2}{-1} = \dfrac{x_3}{2}$ prin Q.

3. Fie V spaţiul vectorial real al tuturor funcţiilor polinomiale de grad cel mult n. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului

$$\mathcal{T}\colon V \to V,\ \mathcal{T}(p) = q,\ q(x) = p(x+1).$$

VIII. **1**. Nucleu şi imagine pentru o transformare liniară.

2. Se dă $\Gamma\colon\ x^2 - 4xy + 4y^2 - x = 0$. Să se reducă la forma canonică. Să se traseze Γ.

3. Se dau dreapta $D\colon\ \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$ şi planul $P\colon\ x - y + 2 + z = 0$. Să se găsească sferele cu centrele pe D şi tangente la P. Să se găsească sferele cu centrele în P şi tangente la D.

IX. **1**. Matricea unei transformări liniare.

2. Se dă $\Gamma\colon\ 4xy + 3y^2 + 8x = 0$. Să se determine centrul, axele şi asimptotele. Să se deseneze curba Γ.

3. Fie $V = L_2[-\pi, \pi]$ şi $V_1 = L(A_1)$, $V_2 = L(A_2)$, unde

$$A_1 = \{1, \cos t, \cos 2t, \dots\} \quad \text{şi} \quad A_2 = \{1, \sin t, \sin 2t, \dots\}.$$

Să se arate că A_1 şi A_2 sunt liniar independente, iar $V_1 + V_2$ şi $V_1 \oplus V_2$ sunt izomorfe.

X. **1**. Spaţii vectoriale euclidiene.

2. Fie $g\colon P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \left(\displaystyle\int_0^1 x(t)dt\right)\left(\displaystyle\int_0^1 y(s)ds\right)$. Să se arate că g este o formă biliniară simetrică, pozitiv semidefinită. Să se determine matricea lui g în raport cu baza $\{1, t, t^2, t^3\}$.

3. Să se determine punctele de pe cuadrica $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - 1 = 0$ pentru care normalele intersectează axa Oy. Să se scrie ecuaţia planului tangent într-unul dintre aceste puncte.

XI. **1**. Ortogonalitate. Procedeul Gram-Schmidt.

2. Găsiţi punctele de pe cuadrica $\Sigma\colon\ x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$ pentru care normalele la Σ sunt paralele cu dreapta $D\colon\ \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ sau cu planul $P\colon\ x - y + z = 0$.

3. Fie $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1$. Să se găsească matricea asociată în raport cu baza $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. Să se determine transformările liniare $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cu proprietatea $\mathcal{A}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = \mathcal{A}(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$.

XII. **1**. Dependenţă şi independenţă liniară.

2. Se dă $\Gamma\colon\ 4xy + 3y^2 + x = 0$. Să se aducă ecuaţia la expresia canonică şi să se traseze Γ. Considerând $M_n(x_n, y_n) \in \Gamma$, există M_n cu x_n mărginit şi y_n nemărginit?

3. Se dă $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}(x, y, z) = (6x + 6y - 15z, x + 5y - 5z, x + 2y - 2z)$. Să se determine forma canonică. Să se calculeze $e^{\mathcal{T}}$.

XIII. **1**. Bază, dimensiune şi coordonate.

2. Să se găsească transformarea de coordonate care aduce pe

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} x_i x_j$$

la expresia canonică. Să se stabilească dacă mulţimea $Q^{-1}(1)$ este compactă sau nu.

3. Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune şi distanţa dintre dreptele

$$D_1\colon\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2} \quad \text{şi} \quad D_2\colon\ \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

XIV. **1**. Cuadrice: reducere la ecuaţia canonică.

2. Să se găsească volumul tetraedului construit pe reprezentanţii vectorilor:

$$\bar{a} = 2\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}; \qquad \bar{b} = \bar{u} - \bar{w}; \qquad \bar{c} = \bar{v} + \bar{w},$$

cu $||\bar{u}|| = 1$, $||\bar{v}|| = 2$, $||\bar{w}|| = 3$ şi $\mu(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\pi}{2}$, $\mu(\bar{u}, \bar{w}) = \frac{\pi}{3}$, $\mu(\bar{v}, \bar{w}) = \frac{\pi}{4}$.

3. Fie $\mathcal{T}\colon P_n \to P_n$, $\mathcal{T}p(x) = x^n \int_0^1 tp(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\mathcal{T}$ este liniară, să se cerceteze bijectivitatea, să se determine $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{T}$. Calculaţi valorile proprii şi vectorii proprii.

XV. **1**. Conice: diametru conjugat cu o direcţie, axe.

2. Să se arate că mulţimea tuturor funcţiilor $x_n(t) = e^{\mathrm{int}}$, $n \in \mathbb{N}$ este liniar independentă în $L_2[0, 2\pi]$. Să se ortonormeze cu procedeul Gram-Schmidt.

3. Se dă transformarea liniară $\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 - x_3)$. Să se determine baze ortonormate în $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{T}$. Care sunt valorile proprii ale lui $\mathcal{T}$?

XVI. **1**. Cuadrice: intersecţia cu o dreaptă, intersecţia cu un plan, plan tangent, normală.

2. Fie V spaţiul vectorial euclidian real al funcţiilor polinomiale pe $[0, 1]$. Cercetaţi simetria şi antisimetria transformărilor liniare:

$$\mathcal{T}f(x) = f(-x); \qquad \mathcal{T}f(x) = f(x) + f(-x); \qquad \mathcal{T}f(x) = f(x) - f(-x).$$

3. Fie $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine forma canonică şi să se calculeze $\sin T$.

XVII. **1**. Elipsoizi, hiperboloizi şi paraboloizi.

2. Fie V spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor polinomiale $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, înzestrat cu produsul scalar

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t).$$

Să se arate că funcţiile

$$y_0(t) = 1; \qquad y_1(t) = \sqrt{3}(2t-1); \qquad y_2(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$$

formează o mulţime ortonormată care generează acelaşi subspaţiu cu $\{x_0, x_1, x_2\}$.

3. Fie $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine forma canonică şi să se calculeze $\sin T$.

XVIII. **1**. Spaţii vectoriale. Subspaţii vectoriale.

2. Să se determine o bază ortonormată faţă de care $Q(x) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + x_3^2$ să aibă o expresie canonică. Ce sunt mulţimile de nivel constant ale lui Q?

3. Se dau $A(0, -1, 2)$ şi $D\colon\ x + y = 0,\ x - z - 1 = 0$. Să se determine simetricul punctului A faţă de dreapta D şi simetrica lui D faţă de A.

XIX. **1**. Spaţiul vectorilor liberi: coliniaritate, coplanaritate.

2. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $z = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4}$ care sunt tangente sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Fie transformarea liniară

$$\mathcal{T}\colon V \to V,\ y = \mathcal{T}(x),\ y(t) = \int_0^{2\pi} x(s)\cos(t-s)ds,$$

cu $V = L\{1, \cos s, \cos 2s, \sin s, \sin 2s\}$. Exprimaţi $\mathcal{T}$ printr-o matrice şi să se cerceteze dacă $\mathcal{T}$ este injectivă şi surjectivă. Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii.

XX. **1**. Spaţiul vectorilor liberi: proiecţie ortogonală, produs scalar.

2. Fie $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine baza faţă de care $\mathcal{A}$ are forma diagonală şi să se calculeze $\sin A$.

3. Se dau $\Gamma\colon\ xy + 3y^2 + 16x = 0$, $D\colon\ x - y + 1 = 0$ şi $A(-1, 1)$. Să se afle polara punctului A în raport cu conica Γ şi polul dreptei D în raport cu Γ.

XXI. **1**. Spaţiul vectorilor liberi: produs scalar, produs mixt.

2. Fie

$$V = L_2[-\pi, \pi],\ \mathcal{T}\colon V \to V,\ g = \mathcal{T}(f) \quad \text{şi} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 + \cos(x-t)\big) f(t)dt.$$

Să se găsească o bază pentru $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}$. Să se determine $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$, valorile proprii şi vectorii proprii.

3. Fie $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$. Să se determine expresia canonică. Mulţimea $Q^{-1}\{1\}$ este compactă sau nu?

XXII. **1**. Spaţiul vectorilor liberi: produs vectorial, dublu produs vectorial.

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine expresia canonică a formei pătratice ${}^tXAX$, precizând matricea de trecere.

3. Să se găsească ecuaţia sferei cu centrul $C(-2, 6, 2)$ tangentă elipsoidului

$$\Sigma\colon\ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

Care este ecuaţia simetricului lui Σ faţă de centrul sferei?

XXIII. **1**. Dreapta în spaţiu.

2. Se dă forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3$. Să se scrie matriceal şi să se determine rangul. Să se găsească expresia canonică şi matricea de trecere.

3. Fie $V = \big\{\{x_n\}$ şir real cu Σx_n^2 convergentă $\big\}$. Să se arate că $(x, y) = \Sigma x_n y_n$, cu $x = \{x_n\}$ şi $y = \{y_n\}$, este un produs scalar pe V. Să se calculeze (x, y), pentru $x_n = \dfrac{1}{n}$ şi $y_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

XXIV. **1**. Conice: centru, intersecţia cu o dreaptă, asimptote.

2. Să se determine numerele reale a_1, a_2 şi a_3 astfel încât $V = L\big\{e^{a_1x}, e^{a_2x}, e^{a_3x}\big\}$ să aibă dimensiunea 2. Să se fixeze o bază în V şi să se determine matricea lui $D\colon V \to V$, $D(f) = f'$.

3. Fie $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine forma canonică şi să se calculeze e^A.

XXV. **1**. Conice: reducere la ecuaţia canonică.

2. Definim $\mathcal{T}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, unde a, b, c şi d sunt numere complexe. Să se găsească condiţiile pe care le satisfac a, b, c şi d dacă $\mathcal{T}$ este autoadjunctă sau unitară.

3. Fie $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_4y_1 + x_4y_4$. Să se determine matricea lui $\mathcal{A}$ în raport cu baza $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, 0, 1)$, $f_4 = (1, 0, 0, 1)$.

XXVI. **1**. Conice: pol, polară.

2. Se dă $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}(x, y, z) = (3x + 2y, 2y + z, x - 2y + 3z)$. Să se calculeze matricea lui $\mathcal{T}^3$ şi $\mathcal{T}^{-1}$. Să se explice rezultatele prin teorema Cayley-Hamilton.

3. Fie V spaţiul vectorial real al funcţiilor definite pe $\mathbb{R}$. Cercetaţi dacă mulţimile $\{1, e^{ax}, xe^{ax}\}$ şi $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$ sunt liniar independente sau nu. Ce dimensiuni au subspaţiile vectoriale generate de aceste submulţimi?

XXVII. **1**. Izometrii.

2. Se dau $\Sigma\colon z^2 = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4}$ şi $P\colon\ x + y + z = 0$. Să se găsească proiecţia lui $P \cap \Sigma$ pe planul xOy. Există generatoare rectilinii ale lui Σ care sunt perpendiculare pe P? Să se arate că centrul lui Σ este un punct de simetrie pentru $P \cap \Sigma$.

3. Fie $V = L\{(1, 0, 1), (-1, 1, -1)\}$ şi $W = L\{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$. Să se găsească ecuaţiile carteziene implicite ale lui V şi W. Să se determine baze ortonormate în $V \cap W$ şi $V + W$.

XXVIII. **1**. Dependenţă şi independenţă liniară.

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine expresia canonică a formei pătratice ${}^tXAX$, precizând matricea de trecere. Ce sunt mulţimile de nivel constant ataşate acestei forme pătratice?

3. Fie $C(-2, 6, 2)$ şi $\Sigma\colon\ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1$. Care este ecuaţia simetricei cuadricei Σ faţă de C? Să se găsească ecuaţiile normalelor la Σ care trec prin C. Să se determine ecuaţiile sferelor cu centrul C şi tangente la Σ.

XXIX. **1**. Nucleu şi imagine pentru o transformare liniară.

2. Se dă conica $\Gamma\colon\ 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x = 0$. Să se reducă ecuaţia la forma canonică şi să se traseze Γ. Cercetaţi dacă există subspaţii vectoriale în $\mathbb{R}^2$ tangente la Γ.

3. Se dau $D\colon\ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ şi $P\colon\ x - 2y + z = 0$. Să se determine ecuaţiile simetricei dreptei D faţă de planul P. Să se fixeze o bază ortonormată în planul P. Există sfere care îndeplinesc simultan condiţiile: au raza 1, au centrul pe dreapta $P \cap xOz$ şi sunt tangente la dreapta D?

XXX. **1**. Matricea unei transformări liniare.

2. Se dă conica $\Gamma\colon\ 4xy + 3y^2 + 16x = 0$. Să se determine centrul şi asimptotele. Să se reducă ecuaţia la forma canonică.

3. Fie V spaţiul vectorial al funcţiilor polinomiale reale de forma

$$x(t) = at + bt^2 + ct^3$$

şi

$$g\colon V \times V \to \mathbb{R},\ g(x, y) = \left(\int_0^1 x(t)dt\right)\left(\int_0^1 y(s)ds\right).$$

Să se arate că g este o formă biliniară, simetrică, pozitiv semidefinită. Să se determine matricea lui g în raport cu baza canonică a lui V.

XXXI. **1**. Valori şi vectori proprii.

2. Fie $v = (1, 0, -1)$, $a = (-1, -1, 0)$, $b = (0, 1, 1)$ şi $S = L\{a, b\}$. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctul $A(1, 1, 1)$ şi de vectorii a şi b. Să se găsească proiecţia ortogonală a lui v pe S.

3. Să se determine ecuaţiile dreptei $D_1\colon\ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ în raport cu dreapta $D_2\colon\ x+y = 0,\ x-2z = 0$. Există sfere cu centrul în origine, tangente simultan la cele două drepte?

XXXII. **1**. Teorema Cayley-Hamilton.

2. Să se arate că $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ este liniar independentă. Să se ortonormeze în $C^0[0, 1]$ cu procedeul Gram-Schmidt.

3. Să se afle distanţa dintre $\Sigma\colon\ z = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4}$ şi $P\colon\ x - y - 2z = 4$.

XXXIII. **1**. Forme biliniare.

2. Să se găsească generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\Sigma\colon\ z = \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4}$$

care sunt perpendiculare pe planul $P\colon\ x + y = 0$. Ce măsură are unghiul determinat de aceste generatoare?

3. Fie

$$\mathcal{T}\colon R_2[X] \to R_2[X],\ \mathcal{T}(1) = X + X^2,\ \mathcal{T}(1 + X) = -1,\ \mathcal{T}(1 + X^2) = 1 + X - X^2.$$

Să se determine $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$, $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ şi forma canonică a lui $\mathcal{T}$.

XXXIV. **1**. Spectrul endomorfismelor pe spaţii euclidiene.

2. Să se verifice dacă punctele $A(3,2,1)$, $B(4,4,0)$, $C(5,5,5)$ şi $D(-1,5,-1)$ sunt coplanare. Să se calculeze $\sigma[ABCD]$. Vectorul $\bar{v} = 9\bar{\imath} + 5\bar{\jmath} + 9\bar{k}$ se poate descompune după $\bar{AB}$, $\bar{AC}$ şi $\bar{AD}$?

3. Fie P_n spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale reale care au cel mult gradul n. Să se cerceteze dacă mulţimile:

$$A = \{p \in P_n \,|\, p(0) + p(1) = 0\}; \qquad B = \{p \in P_n \,|\, p^2(0) + 1 = 0\};$$

$$C = \{p \in P_n \,|\, p(-1) \cdot p(1) = 0\}$$

sunt subspaţii vectoriale. Să se determine intersecţia şi suma subspaţiilor vectoriale găsite. Să se precizeze gradul minim al funcţiilor polinomiale din $A \cap B \cap C$.

XXXV. **1**. Dreapta în spaţiu.

2. Se dă forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$. Să se scrie expresia matriceală şi să se determine rangul. Să se găsească expresia canonică şi matricea de trecere. Ce sunt mulţimile de nivel constant al lui Q?

3. Fie $V = \{(x_n)$ şir real cu Σx_n^2 convergentă $\}$. Să se arate că $(x,y) = \Sigma x_n y_n$, cu $x = (x_n)$ şi $y = (y_n)$, este un produs scalar pe V. Să se scrie bila cu centrul $x_0 = \left(\frac{1}{n}\right)$, de rază 1 şi să se dea exemple de şiruri din V conţinute în această bilă.

XXXVI. **1**. Planul în spaţiu.

2. Fie transformarea liniară $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 51 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se determine forma canonică a lui $\mathcal{T}$ şi să se calculeze $\cos\mathcal{T}$.

3. Să se arate că $(f,g) = \displaystyle\int_1^e (\ln x) f(x) g(x)$ este un produs scalar pe $C^0[1,e]$. Să se calculeze $||f||$ pentru $f(x) = \sqrt{x}$. Să se scrie bila cu centrul în $f_0(x) = 1$, de rază 1 şi să se dea exemple de funcţii din această bilă.

XXXVII. **1**. Conice: centru, intersecţia cu o dreaptă, asimptote.

2. Fie spaţiul vectorial euclidian $V = C^0[0,1]$ şi submulţimea $W = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$. Să se arate că W este liniar independentă. Să se ortogonalizeze W cu procedeul Gram-Schmidt. Să se proiecteze $w(x) = e^{3x}$ pe subspaţiul generat de $u(x) = e^x$ şi $v(x) = e^{2x}$.

3. Fie transformarea liniară $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$, $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ şi forma canonică a lui $\mathcal{T}$.

XXXVIII. **1**. Cuadrice: intersecţia cu o dreaptă, intersecţia cu un plan, plan tangent, normală.

2. Fie endomorfismul

$$\mathcal{T}\colon V \to V,\; g = \mathcal{T}(f),\; g(x) = \int_0^{2\pi} [1 + \sin(x-t)] f(t)dt, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Cine este V? Să se determine $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}$, $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ şi o bază ortonormată în $\mathrm{Im}\mathcal{T}$.

3. Să se determine suma şi intersecţia subspaţiilor vectoriale

$$V = L\{(-1,1,0), (0,1,1)\} \quad \text{şi} \quad W = L\{(-1,2,1), (1,0,1)\}.$$

Să se determine ecuaţiile carteziene ale subspaţiilor V şi W în $\mathbb{R}^3$.

15.2 Întrebări

1. Ce diferenţiază nucleul unei transformări liniare de nucleul unei funcţii oarecare?

2. Ce motive impun introducerea noţiunilor de valoare proprie şi de vector propriu pentru un endomorfism?

3. La ce tipuri de funcţii se pot asocia matrice?

4. Puteţi justifica faptul că mulţimea planelor din $\mathbb{R}^3$ se poate identifica cu $\mathbb{R}^4$?

5. Puteţi justifica faptul că mulţimea planelor din $\mathbb{R}^3$ se poate identifica cu $\mathbb{R}^3$?

6. Care sunt cuadricele riglate? Există cuadrice triplu riglate?

Bibliografie

[1] Gh. Atanaşiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura All, Bucureşti, 1994.

[2] V. Balan, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Universitatea Politehnica Bucureşti, 1998.

[3] V. Brînzănescu, O. Stănăşilă, *Matematici speciale*, Editura All, Bucureşti, 1994.

[4] I. Creangă ş.a., *Algebră liniară*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

[5] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[6] O. Dogaru, M. Doroftei, *Algebră liniară*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1998.

[7] Gh. Dodescu, M. Toma, *Metode de calcul numeric*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[8] N. Efimov, *Formes quadratiques et matrices*, Editions Mir Moscou, 1976.

[9] N. Gastinel, *Linear numerical analysis*, Academic Press, 1970.

[10] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăţi diferenţiale finit şi infinit dimensionale*, Editura Academiei, 1976.

[11] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra,* II-*Linear algebra*, Springer-Verlag, 1975.

[12] W. Klingenberg, *Lineare algebra und geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[13] I.A. Kostrikin, I.Yu. Manin, *Linear algebra and geometry*, Gordon and Breach Science Publishers, 1989.

[14] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1984.

[15] V. Obădeanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[16] C. Radu, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura All, Bucureşti, 1996.

[17] C. Radu, C. Drăguşin, L. Drăguşin, *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[18] C. Radu, L. Drăguşin, C. Drăguşin, *Algebră liniară, Analiză matematică, Geometrie analitică şi diferenţială, Culegere de probleme*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2000.

[19] L. Smith, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1978.

[20] L. Stoica, *Elemente de varietăţi diferenţiabile*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, Romania 1998.

[21] C. Udrişte, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1976.

[22] C. Udrişte, *Linear algebra*, University Politehnica of Bucharest, 1991-1992.

[23] C. Udrişte, *Problems in algebra, geometry and differential equations* I, II, University Politehnica of Bucharest, 1992.

[24] C. Udrişte, *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[25] C. Udrişte, *Algebră liniară, Geometrie analitică*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, Ed. I - 1996, Ed. II - 2000.

[26] C. Udrişte, I. Boca, *Linear algebra*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, Romania, 1999.

[27] C. Udrişte, O Dogaru, *Algebră liniară, Geometrie analitică*, Universitatea Politehnica Bucureşti, 1991.

[28] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[29] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[30] ***, http://www.youtube.com/watch?v=yAb12PWrhV0&feature=relmfu,
(”WildLinAlg1: Introduction to Linear Algebra (N J Wildberger)” - The first of a series of courses given by N J Wildberger of the School of Mathematics and Statistics at UNSW)

[31] ***, http://www.youtube.com/watch?v=ZK3O402wf1c&feature=related,
http://www.youtube.com/watch?v=QVKj3LADCnA&feature=relmfu,
http://www.youtube.com/watch?v=FX4C-JpTFgY&feature=relmfu,
http://www.youtube.com/watch?v=5hO3MrzPa0A&feature=relmfu,
http://www.youtube.com/watch?v=JibVXBElKL0&feature=relmfu,
http://www.youtube.com/watch?v=8o5Cmfpeo6g&feature=relmfu,
http://www.youtube.com/watch?v=VqP2tREMvt0&feature=relmfu,
(Lec 1-7 MIT 18.06 Linear Algebra, Spring 2005 - Gilbert Strang)

Index de noţiuni